小山中島の L 関数の母関数表示

室蘭工業大学 工学研究科前期博士課程 数理システム工学専攻 服部 至宏

1 Artin-Mazur ゼータ

本文では, 小山中島の L 関数という組み合わせ論的ゼータ関数の行列式表示の形に着目してその母関数表示を導くことを目標とする．この母関数表示を導くということに関して, 組み合わせ論的ゼータの一つの Artin-Mazur ゼータの場合を例にとり説明する.

まず,X を n 点集合とする.n 次対称群 S_n は X に作用し, その元を σ とする. この時, 有限離散力学系 (X, σ) が得られる. これを $\mathbb{Z}$-力学系と呼ぶ.σ の固定点の集合を $\mathrm{Fix}(\sigma)$ とする. また,$\mathrm{Cyc}\sigma$ は σ を互いに素な巡回置換の積にした時に表れるその巡回置換の集合で $|c|$ は巡回域に含まれる元の個数である.Artin-Mazur ゼータは以下のような母関数表示で定義される.

定義 1.1 (Artin-Mazur ゼータ)

$$\begin{aligned} Z_\sigma(u) &:= \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{|Fix(\sigma^k)|}{k} u^k\right) \text{:母関数表示} \\ &= \prod_{c:\mathrm{Cyc}\sigma} \frac{1}{1-u^{|c|}} \text{:オイラー積表示} \end{aligned}$$

ここでまた,Artin-Mazur ゼータは行列式表示が以下のようになることが知られている.

定理 1.1 (Artin-Mazur ゼータの行列式表示)

$$Z_\sigma(u) = \frac{1}{\det(I - uM\sigma)}\ ,\ M_\sigma = (\delta_{\sigma(i)j})_{i,j=1,\ldots,n}$$

このように通常 Artin-Mazur のような力学系モデルは母関数表示で定義され, その結果として行列式表示が導出される．小山中島の L 関数においてもこのような力学系モデルによる解釈における母関数表示を求めたい. しかし小山中島の L 関数はオイラー積表示で定義され, 行列式表示の形から母関数表示を求めることになるため今後の議論のひな形として Artin-Mazur ゼータを使って具体的に行列式表示に着目し母関数表示を導く導出過程を見る.

例えば,$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5) \in S_5$ における行列式表示を見てみると,σ^1 の時固定点の個数は 0 個,σ^2 の時固定点の個数は 2 個,σ^3 の時固定点の個数は 3 個,σ^4 の時固定点の個数は 2 個,σ^5 の時固定点の個数は 0 個,σ^6 の時固

定点の個数は 5 個となりそれ以降の固定点の個数はこの繰り返しとなる. また,σ の行列表示は,

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. つまり $\det(I - uM\sigma) = (1-u^2)(1-u^3)$ となる. つまり,

$$\begin{aligned} \det(I - uM\sigma)^{-1} &= \frac{1}{1-u^2}\frac{1}{1-u^3} \\ &= \exp(-\log(1-u^2)(1-u^3)) \\ &= \exp(\sum_{k\geq 1}(\frac{2}{2k}u^{2k} + \frac{3}{3k}u^{3k})) \\ &= \exp(\sum_{k\geq 1}\frac{|Fix(\sigma^k)|}{k}u^k) \end{aligned}$$

となる. 以上の話を複素鏡映群に拡張子小山中島の L 関数で母関数表示を求めることが本文の目標である.

2 小山中島の L 関数

そこで小山中島の L 関数を定義します. まず, 複素鏡映群 $G(m,n) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ の元を τ とする. また 1 の m 乗根を ξ としまた, 複素鏡映群から n 次一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ への写像を M として,

$$M(\tau) = M_\tau = (\xi^{s_i}\delta_{\sigma(i),j})_{i,j=1,2,\ldots,n}, \tag{1}$$

とする. このとき行列 $M(\tau)$ は複素鏡映群の行列表示である. ここで l 項巡回置換 p

$$p : i \mapsto \sigma(i) \mapsto \sigma^2(i) \mapsto \ldots \mapsto \sigma^l(i) = i$$

の巡回の長さ $l = |p|$ とする. $\int_p \tau = \sum_{i\in p} s_i$ とおいて巡回群 $Cyc(\sigma)$ から 0 元を含まない複素数体 $\mathbb{C}^\times$ への写像 χ を次のように定義する.

$$\chi_\tau : Cyc(\sigma) \to \mathbb{C}^\times : p \mapsto \xi^{\int_p \tau},$$

定義 2.1 (L 関数) 今まで導入したことから,L 関数 $L_\sigma(s,\chi)$ を以下のように定義する.

$$L_\tau(u) = \prod_{p\in \mathrm{Cyc}(\sigma)} (1 - \chi_\tau(p)u^{|p|})^{-1}.$$

ここで小山中島の L 関数において次のことが分かっている。

定理 2.1 (Koyama-Nakajima,2012)

$$L_\tau(u) = \det(I - uM_\tau)^{-1} \tag{2}$$

行列式表示が $1/\det(I-A)$ の形になるとき, 次の形の母関数表示を持つことが知られている.

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{k}u^k\right),\ N_k=\mathrm{tr}A^k$$

本文の目標はこの N_k に Artin-Mazur ゼータと同じ様に力学系モデルによる解釈を加えることである. 最後に主結果として小山中島の L 関数にこのような解釈を与える力学系モデルができたので紹介する.

3 主結果

小山中島の L-関数においても A-M ゼータと同様に力学系モデルによる解釈を得るために, ここで, 新たな力学系を考える.X をアルファベットとする.τ は複素鏡映群の元とする. また,$\mathbb{R}$ は単位的可換環である. このとき, 有限離散力学系 (X,σ) が得られるが, ここで w という以下の関数を定義する.

$$w:X\to\mathbb{R}:i\mapsto\xi^{s_i},$$

この w を重みと呼び,Z 力学系に対して w を付け $(X,\sigma;w)$ という重み付き力学系を考える. ここで w_k を以下のように定義する.

$$w_k(i)=\begin{cases} w(\sigma^0(i))w(\sigma^1(i))...w(\sigma^{k-1}(i)) & (\sigma^k(i)=i\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他})\end{cases}.$$

たとえば i という X の元を考える.i に対して σ を作用させていき, 初めて $\sigma^k(i)=i$ となるまでを 1 周期として考える. この時 i に対して重み付き力学系を作用させていくと以下のようになる.

$$i\quad\xrightarrow{w(\sigma^0(i))}\sigma(i)^1\quad\xrightarrow{w(\sigma^1(i))}\sigma(i)^2\quad\longrightarrow\cdots\quad\xrightarrow{w(\sigma^{k-1}(i))}\sigma(i)^k$$

このことから,1 周期ごとにそれまでにかかったすべての重みつまり,$w_k(i)$ という重みの積が表れるということがわかる. ただ注意してほしいのは矢印一つ一つに重みがかかっているが,1 周期ごと以外では重みは表れない. また上図を 1 本のオービットまたは軌道と呼ぶ.X の元の個数とオービットの本数は一致する.

定義 3.1 **($\Phi_{uA}(\Lambda^{-1})$ の実現)**

$$\begin{aligned} L_\tau(u) &= \prod_{l\in Lyn(\sigma)}\frac{1}{1-circ_{uA}(l)}:\textit{Euler}\text{ 積表示} \\ &= \frac{1}{\det(1-uA)}:\text{行列式表示}\end{aligned}$$

これらのことから $L_\tau(u)$ においても以下のような母関数表示が期待できる.

$$L_\tau(u)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{k}u^k\right):\text{母関数表示}$$

この N_k を W-ZDS を用いて以下のように表せる.

定理 3.1 **(Ł$_\tau(u)$ の母関数表示)**

$$L_\tau(u)=\exp\left(\sum_{k=1}^{infty}\frac{N_k}{k}u^k\right),\ N_k=\sum_{i\in X}w_k(i)$$

つまり, この N_k というのは重み付き力学系の m 周期点の軌道の重みの総和となる.

参考文献

[1] リーマン予想のこれまでとこれから,
出版社: 日本評論社,
著者:黒川 信重, 小山 信也

[2] Zeta functions of generalized permutations with application to their factorizetion formulas
By Shin-ya KOYAMA and Sachiko NAKAJIMA