Pseudograph から構成されるスピントーリック多様体

畑中　美帆　(大阪市立大学　後期博士課程２年)

複素 n 次元のトーリック多様体とは，複素 n 次元の代数多様体で，複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ が効果的かつ代数的に作用し，この作用に関して稠密な開軌道を一つ持つもののことである．同型を除いたトーリック多様体の族は扇という組合せ論の対象の族と全単射対応がある．さらに，Delzant polytope から扇を作り，トーリック多様体を構成することができる．

定義 1　$P \subset \mathbb{R}^n$ が *Delzant polytope* であるとは，以下の条件を満たす n 次元の単純凸多面体である．
P の各頂点に対して，それを含む全ての facets の facet vectors が $\mathbb{Z}^n$ の基底になっている．
facet vector とは，facet に垂直な内向きの primitive vector のことである．primitive vector とは $\mathbb{Z}^n$ 上のベクトルで，1 と-1 以外で割り切れないベクトルのことである．

この講演では多様体 M 上にスピン構造が入る時，M をスピン多様体ということにする．従って，M がスピン多様体になるための必要十分条件は第一と第二シュティーフェル - ホイットニー類がともに 0 になることである．このことから以下の命題が成り立つ．

命題 1　以下は同値である．
(1)　Delzant polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ から構成できるトーリック多様体にスピン構造が入る．
(2)　$\epsilon(\lambda(\mathbf{F})) = \{1\}$ を満たす，$\mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{Z}_2$ への準同型写像 ϵ が存在する．ここで，$\mathbf{F}$ は Delzant polytope の facets の集合とし，λ は各 facet に facet vector を対応させる写像とする．

注意 1　この命題は，扇の underlying simplicial complex の実現がディスクであるようなトーリック多様体でも成立する．

一方で，多重辺やループを持ってもよいグラフを pseudograph という．有限な pseudograph から Delzant polytope または simple polyhedral cone (i,e, 頂点で n 個の facets が交わる polyhedral cone) を構成し ([1])，トーリック多様体を対応させることにより，スピントーリック多様体が構成できる pseudograph を特徴づけることができる．Pseudograph から Delzant polytope または simple polyhedral cone は以下のように構成する．

定義 2　G を有限 pseudograph とする．
(1)　G の proper 連結部分グラフが *tube* であるとは，頂点のどんなペアにも G に辺があれば，少なくとも 1 本の辺を含む．

(2)　tube G_t が G の頂点集合のある部分集合上の極大部分グラフ (i,e, G の induced subgraph) になっているとき，G_t は *full* であるという．

(3)　G のループでない 2 本の辺の端点のペアが同じである時，それら 2 本の辺は 1 つの *bundle* の中にあるという．

例 1　以下は tubes の例である．右下の例のみ full でない tube である．

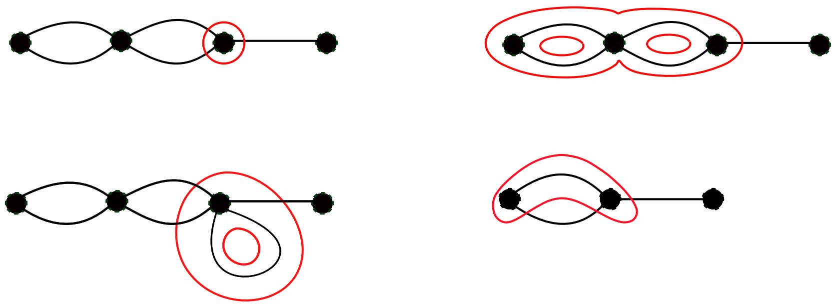

図 1　tubes

Pseudograph G の各 tube G_t に対して，集合 S を次で定める (例 2, 図 3).

(1)G_t の頂点が S の元.

(2)G_t の辺とループが S の元.

(3)G_t の辺を含まない G の bundles の中にある辺が S の元.

(4)G_t のどの頂点にもくっついていないループが S の元.

この S を G_t のラベルという．

G を pseudograph とし，$n+1$ 個の頂点と l 個のループを持つとする．$\{B_1, \ldots, B_k\}$ を G の bundles の集合，b_i を bundle B_i の辺の数，Δ^s を s-単体, ρ を半直線とする．

$$\Sigma_G := \Delta^n \times \prod_{i=1}^{k} \Delta^{b_i - 1} \times \rho^l$$

で定義し，以下のように face をラベル付けする．

(1)Δ^n の各 facet を G の各頂点と対応させる．Δ^n の各 face は，それを含むすべての facets に対応する G の頂点集合の部分集合と対応させる．

(2)Δ^{b_i-1} の各頂点を bundle B_i の各辺と対応させる．Δ^{b_i-1} の各 face は，その face を張る頂点に対応する G の辺の集合と対応させる．

(3) 各 ρ を G の各ループに対応させる．

この Σ_G をユークリッド空間に”うまく”配置する．

例 2　例えば，図 2 のような pseudograph G を考える．Σ_G のラベルで，a は省略してある．この Σ_G を $\mathbb{R}^3$ に各 facet vector が以下になるように埋め込む．

$$1bc \to e_1,\quad 2bc \to e_2,\quad 3bc \to -e_1 - e_2,\quad 123b \to e_3,\quad 123c \to -e_3$$

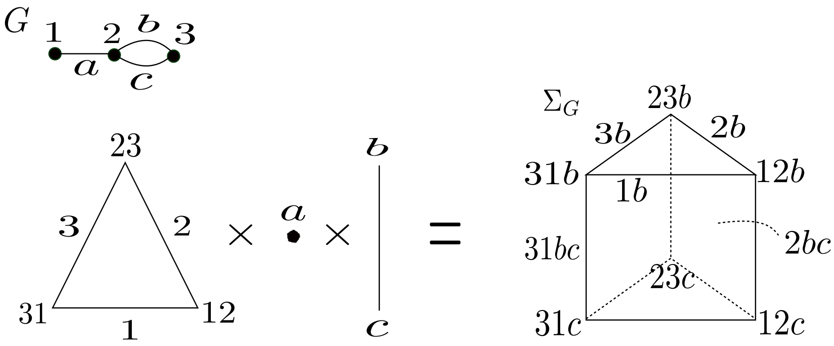

図 2　Σ_G and labels of faces

Σ_G を次の 2 段階に分けてカットし，pseudograph associahedron KG をつくる．
Full tubes のラベルと同じラベルを持つ Σ_G の faces を以下のようにカットする．カットする Σ_G の face F を $F_1 \cap \cdots \cap F_k$ で表す．ここで各 F_i は Σ_G の facet である．この F を新しい facet vector が $F_1, \ldots, F_k$ の facet vectors の和になるようにカットする．次に，full でない tubes でラベル付けされた faces を，小さい tube に対応する face から full tubes の時と同様にカットする．

命題 2　([1]) G を pseudograph, KG を G から構成できる pseudograph associahedron とする．G がループを持たないとき KG は Delzant polytope, ループを持つとき KG は simple polyhedral cone になる．KG の facets は G の tubes と全単射対応がある．

これにより有限な pseudograph G から KG が構成され，対応するトーリック多様体を $M(G)$ で表す．

例 3　例 2 の pseudograph G に対して，pseudograph associahedron KG をつくる．G のすべての tubes とそれらのラベルは図 3 のようになっている．1 行目は full tubes, 2 行目は full でない tubes である．Full tubes でラベル付けされた faces をカットすると，図 4 の左になる．さらに，

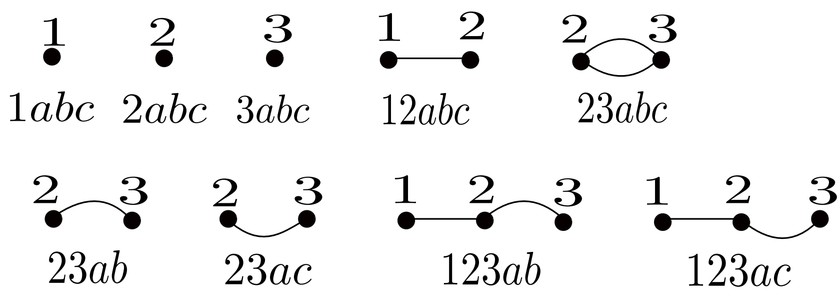

図 3　tubes and corresponding labels

full でない tubes でラベル付けされた faces をカットすると図 4 の右になり，これが pseudograph associahedron KG である．各 facet に対応する facet vector は以下のようになっている．a は省

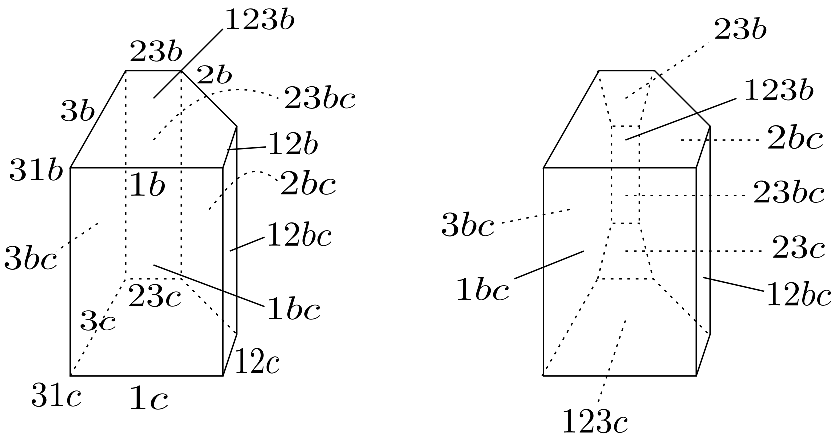

図 4　pseudograph associahedron

略してあることを思い出しておく．

$$
\begin{array}{lllll}
1bc \to e_1, & 2bc \to e_2, & 3bc \to -e_1 - e_2, & 12bc \to e_1 + e_2, & 23bc \to -e_1 \\
23b \to -e_1 + e_3, & 23c \to -e_1 - e_3, & 123b \to e_3, & 123c \to -e_3 &
\end{array}
$$

定理 1　G を有限な pseudograph とする．$M(G)$ にスピン構造が入る必要十分条件は，$M(G)$ が $\mathbb{C}P^{k-1}(k: 1 \text{ or even}), \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}$ のどれかに微分同相になることである．さらに対応するグラフはそれぞれ k 個の頂点の非交和，2 点からなる連結な単純グラフ，2 個の頂点と 2 本の多重辺を持つ連結な pseudograph, 1 点にループが 1 つついた pseudograph である．

参考文献

[1] M. Carr and S. L. Devadoss and S. Forcey, *Pseudograph associahedra*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 118 (2011), 2035-2055.