

# 場の量子論のモデルにおける縮退度の評価について

船川大樹\*

北海道大学博士課程 2 年

## 【概要】

物理系を線形作用素で表現し、その作用素を解析することで元の物理系の性質を調べることは場の量子論での研究方法の一つである。物理系の性質の一つとし、系の安定性がある。これは基底状態と呼ばれるベクトル (作用素のスペクトルの下限に対する固有ベクトル) の存在によって保障される。では基底状態の住んでいる空間 (固有空間) の次元はいくつなのかという疑問も当然湧いてくる。場の量子論ではこの次元の数を縮退度と呼び、本講演は縮退度を上から評価する。

## 1 モチベーション

本研究は九州大学の廣島氏が 2005 年に行なった研究 [H] の部分的な拡張である。場の量子論において基底状態の存在性を示すこと、及び縮退度を出すことは重要な研究の一つとなっている。基底状態の存在性の証明は [AH][Ht][DG][GLL] など様々な手法が得られてきた。縮退度についてもいくつか計算方法はあるが、一般論は数少ない。上記の [H] によってボーズ場の種類が少ない場合 (相互作用項が自由ハミルトニアンに対して相対有界な場合) は縮退度を評価する方法が得られた。しかし、ボーズ場が沢山ある場合については未だ分からない。ボース場の種類が多くても、扱う作用素がボソン粒子のみで構成されている場合は汎関数積分の手法から縮退度も評価できる可能性がある。(ボース場の種類が多い例として [W] のモデルがある。) しかし、フェルミオンも考慮した場合は (現段階では) 汎関数積分表示ができないため、縮退度についても分からない。よって、フェルミオンとボソンが共存し、なおかつボーズ場が大量にいる系 (例えば、Wess-Zumino モデル) では縮退度を計算する一般論は得られていない。今回は自由なハミルトニアン  $H_0$  と相互作用  $\{H_j\}_{j=1}^N$  達によって作られるハミルトニアン

$$H := H_0 + \sum_j^N g_j H_j$$

を考える。(後々定義を与えるが、 $H_0$  には場が考慮されている。)  $\{g_j\}_j^N$  は結合定数と呼ばれる実数パラメータである。

**Definition 1**  $\mathcal{K}$  をヒルベルト空間、 $T$  を  $\mathcal{K}$  上の線形作用素であるとする。 $T$  の定義域を  $D(T)$  と書く。さらに  $T$  は下に有界な自己共役作用素であるとする。このとき、

$$E_0(T) := \inf \sigma(T)$$

を  $T$  の最低エネルギーと呼び、 $E_0(T)$  が固有値の場合、 $E_0(T)$  における固有ベクトルを基底状態と呼ぶ。また、基底状態における固有空間の次元

$$m(T) := \dim \ker(T - E_0(T))$$

---

\* E-mail: funakawa@math.sci.hokudai.ac.jp

を  $T$  の縮退度と呼ぶ. 特に  $m(T) = 1$  のとき,  $T$  の縮退度は一意的であるという. 本講演ではある条件下に対して, 不等式  $m(H) \leq m(H_0)$  を得る.

## 2 各定義

### 2.1 フォック空間

ボソン (力を伝える粒子) とフェルミオン (素材となる粒子) が住む空間としてボソンフォック空間, フェルミオンフォック空間がある. まず,  $\mathcal{K}$  をヒルベルト空間とする. また,  $\otimes_s^n \mathcal{K}$  ( $\otimes_a^n \mathcal{K}$ ) を  $\mathcal{K}$  の  $n$  重 (反) 対称テンソル積とする. このとき, ボソン (フェルミオン) フォック空間を次で定義する.

$$\mathcal{F}_b(\mathcal{K}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{K}, \quad \mathcal{F}_f(\mathcal{K}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_a^n \mathcal{K}$$

$\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  は  $(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)})_{\otimes_s^n \mathcal{K}}$  を内積として, ヒルベルト空間となっている. ただし, 本紙では内積空間  $\mathcal{K}$  上の内積  $(f, g)_{\mathcal{K}}$  は  $f$  に対して反線形で  $g$  に対して線形としている. さて  $S_n : \otimes^n \mathcal{K} \rightarrow \otimes_s^n \mathcal{K}$  を対称化作用素とする. 任意の  $f \in \mathcal{K}$  に対して,  $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  上の生成作用素  $a^*(f)$  を次のように定義する.

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}), \quad n \geq 1$$

また,  $(a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$  とする.  $\Omega_b := \{1, 0, \dots\} \in \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  をボソンフォック真空と呼び,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$  上のボソン有限粒子部分空間を

$$\mathcal{F}_b^{fin}(\mathcal{M}) := \mathcal{L}\{a^*(f_1) \cdots a^*(f_n)\Omega_b, \Omega_b \mid f_j \in \mathcal{M}, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

と定義する. 本紙ではこの空間を有限粒子部分空間と呼ぶことにする.  $a^*(f)$  の定義域は次で与えられる.

$$D(a^*(f)) := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_b(\mathcal{K}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \| (a^*(f)\Psi)^{(n)} \|_{\otimes_s^n \mathcal{K}}^2 < \infty \right\}$$

更に消滅作用素  $a(f)$  は生成作用素  $a^*(f)$  の共役作用素として定義する.  $a^*(f)$  と  $a(g)$  の定義域は有限粒子部分空間を含んでおり, また不変にしている. 更に, 有限粒子部分空間上で正準交換関係を満たしている.

$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)_{\mathcal{K}}, \quad [a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0$$

ここで  $[A, B] = AB - BA$  である.  $T$  を  $\mathcal{K}$  上の作用素とする. その  $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  上の第 2 量子化作用素  $d\Gamma_b(T)$  を

$$d\Gamma_b(T) := \overline{\left( \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n (I \otimes \cdots \otimes I \otimes T \otimes I \otimes \cdots \otimes I) \mid \otimes^n D(T) \right) \right)_{\mathcal{F}_b(\mathcal{K})}}$$

と定義する. ただし, 式中の  $T$  は  $j$  番目にあり, 最後の  $\mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  は簡約の意味である.

以上の議論において, 対称化作用素  $S_n$  の定義にある対称テンソル積  $\otimes_s$  を反対称テンソル積  $\otimes_a$  に変えた場合, フェルミオンフォック空間上にも生成 (消滅) 作用素  $b^*(f)$ ,  $b(f)$  や第 2 量子化作用素  $d\Gamma_f(T)$  を考えることができる. (正確な定義ここでは省略する.) 重要なことはフェルミオンフォック空間上の生成・消滅作用素  $b^*(f)$ ,  $b(f)$ ,  $f \in \mathcal{K}$  は有限粒子空間上で以下の反交換関係を満たすことである:

$$\{b(f), b^*(g)\} = (f, g)_{\mathcal{K}}, \quad \{b(f), b(g)\} = \{b^*(f), b^*(g)\} = 0. \quad \text{ただし, } \{A, B\} := AB + BA.$$

### 2.2 ハミルトニアン の 定義

$\mathcal{H} := \oplus^{\nu} L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{K} := \oplus^{\mu} L^2(\mathbb{R}^d)$  とし,  $E, \omega$  を  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上の非負単射な実関数とする. さらにこの  $\omega$  は  $\{k \in \mathbb{R}^d \mid \omega(k) = 0\}$  のルベグ測度は 0 となり,  $\omega \in C^3(\mathbb{R}^d \setminus K)$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial k_n}(k) \neq 0$ , ( $n \in \{1, \dots, d\}$ ,  $k = (k_n)_{n=1}^d \in \mathbb{R}^d \setminus K$ ) となる  $K \subset \mathbb{R}^d$  が存在するよ

うにとる.  $E$  も同様にとる. この関数による掛け算作用素を再び  $E, \omega$  と書く. 自由ハミルトニアン  $H_0$  は次で定義された  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_f(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  上の線形作用素である:

$$H_0 := d\Gamma_f(\oplus^v E) \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\oplus^u \omega) \quad \text{on } \mathcal{F} := \mathcal{F}_f(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$$

この時,  $H_0$  は非負な自己共役作用素である. また,  $\{H_j\}_{j=1}^N$  を  $\mathcal{F}_f(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{K})$  上の対称作用素とする. さて, フルハミルトニアン  $H$  は自由ハミルトニアンに相互作用項  $H_j$  を加えて次のように定義する:

$$H := H_0 + \sum_{j=1}^N g_j H_j.$$

ここで  $g_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) は結合定数と呼ばれる実数である.  $H$  は当然, 結合定数をパラメータとする作用素と見ることができ. よって, 強調したいときに限り  $H$  のことを  $H(\mathbf{g})$  と書く. (意味は同じである.) 今回は縮退度を解析するため,  $H$  はすでに基底状態を持つとする:

(A.1): ある数  $g_G \in \mathbb{R}$  が存在し, 各  $j = 1, \dots, N$  に対して  $|g_j| \leq g_G$  が成り立つとき,  $H$  は下に有界な自己共役作用素であり, さらに基底状態  $\varphi_g$  を持つ.

一般的にヒルベルト空間  $\mathcal{L}$  上の作用素  $A, B$  について,  $\mathcal{D} \subset D(A) \cap D(B) \cap D(A^*) \cap D(B^*)$  を満たす  $\mathcal{L}$  に稠密な部分空間  $\mathcal{D}$  に対して, 弱交換子は次で定義される:

$$[A, B]_W^{\mathcal{D}}(\Psi, \Phi) := (A^* \Psi, B \Phi) - (B^* \Psi, \Phi), \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{D}$$

(A.2): 任意の  $f \in \mathcal{H}$ ,  $g \in \mathcal{K}$  と各  $j \in \{1, \dots, N\}$  に対して, 次を満たす作用素  $T_{j,f}(k) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  と  $T_{j,b}(k) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  が存在する:

$$[b(f) \otimes I, H_j]_W^{D(H)}(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(k) (\Psi, T_{j,f}(k) \Phi) dk, \quad [I \otimes a(g), H_j]_W^{D(H)}(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(k) (\Psi, T_{j,b}(k) \Phi) dk$$

さらに, 任意に  $\Psi \in D(H)$  と  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d \setminus \tilde{K})$  をとる. ここで,  $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^d$  は可測集合で,  $K \subset \tilde{K}$  と  $|\tilde{K}| = 0$  を満たすものである. このとき,  $T_{j,b}(k)$  は次を満たす:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(k) (\Psi, e^{-is(H-E_0(H)+\omega(k))} T_{j,b}(k) \varphi_g) \right| \in L^1([0, \infty), ds).$$

$T_{j,f}$  も同様な性質を満たすとする. ( $T_{j,f}$  の場合は上の  $\omega(k)$  を  $E(k)$  に変える.)

### 3 主結果

$\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_N)$  と略す. 次の仮定は結合定数を小さくすると, 最低エネルギーは自由ハミルトニアンの最低エネルギー ( $E_0(H_0) = 0$  に注意) に収束するという仮定である:

(A.3):  $\lim_{\mathbf{g} \rightarrow 0} E_0(H(\mathbf{g})) = 0$ .

また, 以下の2つの条件は [H] の「相互作用項が自由ハミルトニアンに対して相対有界」という条件を書き換えたものである.

(A.4):  $\{1, \dots, N\}$  の部分集合  $M$  で以下を満たすものが取れる: 各  $j \in \{1, \dots, N\}$  と  $\# = \mathbf{f}$  or  $\mathbf{b}$  に対して,  $f_{1,j}, f_{2,j} \in D(\omega^{-1})$  を満たす  $L^2(\mathbb{R}^d)$  関数  $f_{1,j}, f_{2,j}$  が存在し, 次の相対有界性を満たす:

$$\begin{aligned} \|T_{j,\#}(k) \Psi\| &\leq f_{1,j}(k) \|H_0 \Psi\| + f_{2,j} \| \Psi \| \quad j \in \{1, \dots, N\} \setminus M \quad a.e. k \in \mathbb{R}^d, \\ \|T_{j,\#}(k) \Psi\| &\leq \varepsilon f_{1,j}(k) \|H_j \Psi\| + f_{2,j} \| \Psi \| \quad j \in M \quad a.e. k \in \mathbb{R}^d \quad (\forall \varepsilon > 0). \end{aligned}$$

(A.5): 各  $j \in M \cup \{0\}$  に対して  $\mathbf{g} \rightarrow 0$  の極限で収束する数  $c_j(\mathbf{g}), d_j(\mathbf{g})$  が存在し, 次の相対有界性を満たす:

$$\|g_j H_j \Psi\| \leq c_j(\mathbf{g}) \|H \Psi\| + d_j(\mathbf{g}) \| \Psi \| \quad (\text{ただし, } g_0 = 1.)$$

(A.4) は場の量子論でよく見るモデル（相互作用項が生成作用素や消滅作用素で書かれているモデル）については、満たされるであろう条件である。(A.5) は相互作用は全体のハミルトニアンについて相対有界であり、係数が収束することで相互作用項の大きさが  $g \rightarrow 0$  の極限で発散していないことを意味している。

**Theorem 1** (A.1)-(A.5) を仮定する。このとき、定数  $g_D$  が存在し、 $|g| \leq g_D$  ならば次の不等式が成立する：

$$m(H(g)) \leq m(H_0)$$

(A.1) より、 $m(H(g)) \geq 1$ 。また、自由ハミルトニアンは第 2 量子化作用素だけから作られていたため、 $m(H_0) = 1$ 。よって、上の不等式により、 $m(H(g)) = 1$  が得られる：

**Corollary 1** (A.1)-(A.5) を仮定する。このとき、定数  $g_D$  が存在し、 $|g| \leq g_D$  ならば次の不等式が成立する：

$$m(H(g)) = 1$$

## 4 応用例

応用例の一つとして、次のハミルトニアンの縮退度が 1 であることが分かる。

$$\begin{aligned} H_{WZ} = & d\Gamma_f(E_m) \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\omega_m) + g \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{SP}(x) (\bar{\psi}(x)\psi(x) \otimes A_1(x) + i\bar{\psi}(x)\Upsilon^5\psi(x) \otimes A_2(x)) dx \\ & + mg \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{SP}(x) I \otimes A_1(x) (A_1(x)^2 + A_2(x)^2) dx + \frac{1}{2} g^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{SP}(x) I \otimes (A_1(x)^2 + A_2(x)^2)^2 dx. \end{aligned}$$

このハミルトニアンは **Wess-Zumino** モデルと呼ばれる超対称性を満たす基本的なモデルを作用素化したものである。(残念なことに空間切断  $\chi_{SP}$  を入れているため、上記の作用素は超対称性を満たさない。しかし、フェルミオンを考慮し、さらに相互作用項が自由ハミルトニアンに対して相対有界でないため、このハミルトニアン自体の解析は有用である。) 本紙ではこのハミルトニアンの詳細な定義は省略する。

**Theorem 2**  $H_{WZ}$  が基底状態をもつ条件の下で、十分小さな結合定数  $g \in \mathbb{R}$  に対して、 $H_{WZ}$  の縮退度は一意的である。すなわち、定数  $g_D$  が存在し、 $|g| \leq g_D$  を満たす全ての  $g$  について、

$$m(H_{WZ}) = 1$$

が成立する。

## 参考文献

- [AH] Arai, A.; Hirokawa, M. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. J. Funct. Anal. 151 (1997), no. 2, 455-503.
- [DG] Dereziński, J.; Gerard, C. Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. Rev. Math. Phys. 11 (1999), no. 4, 383-450.
- [GLL] Griesemer, M; Lieb, Elliott H.; Loss, M. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. Invent. Math. 145 (2001), no. 3, 557-595.
- [H] Hiroshima, F. Multiplicity of ground states in quantum field models, applications of asymptotic fields. J. Funct. Anal. 224 (2005), 431-470.
- [HT] Hidaka, T. Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation. J. Math. Phys. 52 (2011), no. 2, 022102, 21 pp.
- [W] Wada, K. Spectral analysis of a massless charged scalar field with spacial cut-off. arXiv:1405.3773 [math-ph] (2014).