信号処理理論のための超関数の積および畳み込み

秋田 大 （北海道大学大学院生命科学院）
E-mail: akitad@mail.sci.hokudai.ac.jp

一般的な信号処理の教科書では，信号が離散時間か連続時間かという点，周期的であるかどうかという点によって信号を分けて扱っている．これらを統一した概念で扱う方法として，デルタ関数を含む超関数として扱うことが考えられる．しかし，信号処理においては積と畳み込みの重要な定理が多用されるにも関わらず，従来の超関数の積と畳み込みの定義は信号処理の理論の要請を満足するものではない．そこで本発表では信号処理の理論に合う超関数の積と畳み込みの定義を提案する．

The Multiplication and the Convolution of Distributions for the Theory of Signal Processing

Dai Akita (Graduate School of Life Science, Hokkaido University)

In the theory of signal processing, signals are usually classified by 2 points: whether their domain is discrete time or continuous time and whether they have a period or not. To regard signals as distributions without the classification, we can consider using distributions including delta function. However, the conventional definition of multiplication and convolution for distributions does not satisfy the requirement of the theory of signal processing, whereas there are important theorems associated with multiplication and convolution in signal processing. In this presentation, multiplication and convolution of distributions which are suited to the theory of signal processing proposed.

1　信号の分類

信号は，一般的な信号処理の教科書では実数または整数を定義域として持つ実数値関数として定義される．信号の定義域は**時間**あるいは**時刻**と呼ばれ，時間が実数の場合は**連続時間信号**，時間が整数である場合は**離散時間信号**とよぶ．信号 f が離散時間信号であることを強調する際には，時刻 $t \in \mathbb{Z}$ について $f(t)$ という記法以外に $f[t]$ という表現を用いる．

このように，信号はその定義域によって連続時間であるか離散時間であるかという分類がなされるが，さらに周期性による信号の分類が行われる．つまり信号 f について $f(t-T) = f(t)$ となる $T > 0$ が存在する時, その信号は**有限周期信号**と呼ばれる．有限周期信号でない信号は**無限周期信号**と呼ぶ.

フーリエ変換に代表される時間ドメインから周波数ドメインに変換する手法はこれらの分類ごとに存在する [1]．連続時間有限周期信号ではそれは**フーリエ級数展開**であり，連続時間無限周期信号では**フーリエ変換**，離散時間有限周期信号では**離散フーリエ変換**，離散時間無限周期信号では**離散時間フーリエ変換**である．

2 緩増加超関数による統一

連続時間信号と離散時間信号とではその定義域が異なる．しかし，離散時間信号 $f[t]$ を標本化周波数 T_s およびデルタ関数を用いて

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\delta(t - kT_s) \tag{1}$$

と書き表すと，連続時間ドメインにすることができる．ここで，**デルタ関数** δ は

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \tag{2}$$

$$\int_a^b \delta(x)dx = 1 \quad (a < 0 < b) \tag{3}$$

を満たすものとよく説明されるが，数学的には超関数としての扱いが必要である．つまり，関数の連続線型汎関数[*1]として扱う．デルタ関数の場合には，汎関数 $\delta : \varphi(x) \to \varphi(0)$ と考える．これは公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \tag{4}$$

に対応する．

ただし，汎関数の定義域として任意の関数を考えるわけではない．超関数のフーリエ変換ができるためには，**急減少関数**を定義域とする必要がある．急減少関数とは，無限回微分可能な関数 f のうち，任意の非負整数 α, β に対して

$$\sup \left| x^\beta f^{(\alpha)}(x) \right| < \infty \tag{5}$$

を満たすものである．急減少関数の連続線型汎関数を**緩増加超関数**という．急減少関数の集合は $\mathcal{S}$ で，緩増加超関数の集合は $\mathcal{S}'$ で表し，$\varphi \in \mathcal{S}$ が $F \in \mathcal{S}'$ で写される値を $\langle F, \varphi \rangle$ と書く．関数 f が，任意の急減少関数 φ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx < \infty \tag{6}$$

であるならば，

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{7}$$

[*1] 汎関数：関数から実数あるいは複素数への写像

により関数を緩増加超関数としてみなす．離散時間信号 $f[t]$ は，その増加の仕方が高々多項式オーダーであれば式 (1) によって緩増加超関数とみなすことができる [2].

緩増加超関数 F のフーリエ変換 $\mathcal{F}[F]$ は

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \tag{8}$$

と定義される．ただしここで右辺の $\mathcal{F}[\varphi]$ は急減少関数 φ のフーリエ変換である．4 つに分類されている信号を緩増加超関数として表し，式 (8) に従ってフーリエ変換を計算すると，その分類に応じてフーリエ級数展開，関数のフーリエ変換，離散フーリエ変換，離散時間フーリエ変換が現れる [3]．つまり 4 つの信号の分類とそれに付随する 4 つのフーリエ変換は，1 つの緩増加超関数という概念で統一することができるのである．

このようにフーリエ変換は緩増加超関数の概念で統一できたが，積と畳み込みについては未だ問題がある．信号処理において重要な公式として，積と畳み込みに関する次の関係式がある：

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \tag{9}$$

この公式で使われている畳み込みは，フーリエ変換同様 4 つの信号の分類に応じて別々のものが使われる [1]．しかし，そもそも緩増加超関数同士の畳み込みはかなり限定された超関数同士でしか定義されていないことが多く，4 種類の畳み込みを包含する定義は提唱されていない.

また，離散時間信号として

$$f[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{10}$$

を考えると積の問題が現れる．式 (1) に従って $f[n]$ を緩増加超関数とみなすと，$f[n]$ は δ 関数となる．離散時間信号としては

$$f[n] \cdot f[n] = f[n] \tag{11}$$

となるべきであるが，これを超関数に翻訳すると $\delta \cdot \delta = \delta$ となる．超関数同士の積は畳み込み同様に限定された超関数同士でしか定義されておらず，

$\delta \cdot \delta$ が定義されている文献はほとんどない．文献 [4] では超準解析の観点から δ^2 が定義されているが，$\delta^2 \neq \delta$ であり，この要請を満たさない．

3　δ 級数超関数と積

離散時間信号における積の要請 (11) は，つまるところ式 (1) において δ の係数の積を計算することである．そこで，関数も式 (1) の形式にすることを考える．緩増加超関数とみなせる関数 $f(t)$ に対して，

$$f_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^N} f\left(\frac{k}{2^N}\right) \delta\left(t - \frac{k}{2^N}\right) \tag{12}$$

という添え字つき超関数を考える．この時，

$$\begin{aligned} \langle f_N, \varphi \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^N} f\left(\frac{k}{2^N}\right) \varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \\ &\to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \langle f, \varphi \rangle \quad (N \to \infty) \end{aligned} \tag{13}$$

となる．つまり，$f_N \to f$ $(N \to \infty)$ であり，関数は δ の級数の極限として書けることになる．これで連続時間信号も離散時間信号も δ の級数という同じ形になったので，δ の係数の積より新たな δ の級数を作り，それを超関数としての積と定義すればよい．

より具体的に定義を述べる．緩増加超関数 F が δ **級数超関数**であるとは，次を満たす $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ および $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が存在することを言う：

(I) $h(k; N)$ は強単調増加な関数であり，N に依存するのであれば $h(k; N) = k/2^N$．

(II) $f(t)$ は局所可積分であり，また集合 $\{h(k; N) | k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}\}$ の閉包を $B(h)$ とするとき，任意の t について

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma > 0 \ \forall x \in B(h) \\ &0 \le x - t < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned} \tag{14}$$

が成り立つ．

(III) $\sup_k h(k + 1; N) - h(k; N)$ は任意の N で有限で，

$$C(N) = \frac{\sup_k h(k+1; N+1) - h(k; N+1)}{\sup_k h(k+1; N) - h(k; N)} \tag{15}$$

とすると，

$$F_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N f(h(k; N)) \delta(t - h(k; N)) \tag{16}$$

は $N \to \infty$ の極限で F に収束する．

F が δ 級数超関数であるとき，上の条件を満たす f, h の組により $F = (f, h)_\delta$ と書く．

例えば，離散時間信号 $f[n]$ であれば

$$f(t) = \begin{cases} f[t] & t/T_s \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{17}$$

と $h(k; N) = kT_s$ により，式 (1) の形になる．連続時間信号 $f(t)$ については，$B(h) = \mathbb{R}$ として条件 (II) を満たすならば $f = (f, k/2^N)_\delta$ である．

2 つの δ 級数超関数 $F = (f, h_f)_\delta, G = (g, h_g)_\delta$ の積は，次のように定義すればよい．まず，h_{fg} を $B(h_f) \cap B(h_g) = \mathbb{R}$ ならば $h_{fg} = k/2^N$ とし，そうでないならば N に関わらず

$$\{h(k; N) | k \in \mathbb{Z}\} = B(h_f) \cap B(h_g) \tag{18}$$

となるようにする．そして F, G の積を $FG = (fg, h_{fg})_\delta$ と定義するのである．f, g はそれぞれ $B(h_f), B(h_g)$ 上では一意に定まるので，fg も $B(h_{fg})$ 上で一意に定まる．

4　exp 級数超関数と畳み込み

積が定義されたので，公式 (9) が成り立つためには，畳み込みが

$$F * G = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G]] \tag{19}$$

となっていなくてはいけない．この式には，$\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G]$ という積が入っているので，ひとまず $\mathcal{F}[F] = (\hat{F}, h_F)_\delta$，$\mathcal{F}[G] = (\hat{G}, h_G)_\delta$ とする．す

ると，

$$F * G = \mathcal{F}^{-1}[(\hat{F}\hat{G}, h_{FG})_\delta]$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N \hat{F}\hat{G}(h_{FG})\frac{1}{2\pi}e^{ih_{FG}t} \quad (20)$$

となる（一部文字を省略した）．一方，$\mathcal{F}[F] = (\hat{F}, h_F)_\delta$ となるためには，F は

$$F = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N \hat{F}(h_F(k;N))\frac{1}{2\pi}e^{ih_F(k;N)t} \quad (21)$$

となっていればよい．G も同様である．ここで，これら F, G のように，δ 級数超関数を定義する際に用いた条件 (I),(II),(III) を満たす s, h によって

$$S = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N s(h(k;N))\frac{1}{2\pi}e^{ih(k;N)t} \quad (22)$$

と書き表される緩増加超関数 S のことを exp **級数超関数**と呼び，$S = (s, h)_e$ と書くことにする．すると，

$$F * G = (\hat{F}, h_F)_e * (\hat{F}, h_G)_e = (\hat{F}\hat{G}, h_{FG})_e \quad (23)$$

となる．積が δ の係数の掛け算であったのに対して，畳み込みは複素指数関数の係数の掛け算となっている．この畳み込みの定義は F, G が周期的であるかどうかに関わらず，また通常は定義されない概周期関数の畳み込みもこの定義では扱うことが可能になる．

5　連続線型時不変システムのインパルス応答

この畳み込みの定義により，信号処理におけるもう一つ重要な定理が導かれる．それが連続線型時不変システムのインパルス応答に関するものである．A を緩増加超関数の連続線型時不変システムであるとし，A のインパルス応答，つまり入力が δ である時の出力 $A\delta$ を考える．

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \langle\frac{1}{2\pi}, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{i\omega t}dtd\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^N}\frac{1}{2\pi}e^{\frac{ikt}{2^N}}\varphi(t)dt$$
$$= \langle(1, 1/2^N)_e, \varphi\rangle \quad (24)$$

となるので，$\delta = (1, 1/2^N)_e$ である．よって，

$$A\delta = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^N}\frac{1}{2\pi}Ae^{\frac{ikt}{2^N}} \quad (25)$$

となる．複素指数関数は線型時不変システムの固有関数なので，$Ae^{ikt} = a(k)e^{ikt}$ と置くと，

$$A\delta = (a, 1/2^N)_e \quad (26)$$

となる．

次に，入力が exp 級数超関数 $F = (f, h)_e$ である場合を考えると，

$$AF = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N f(h(k;N))Ae^{ih(k;N)t}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(N)^N f(h(k;N))a(h(k;N))e^{ih(k;N)t}$$
$$= (fa, h)_e = (f, h)_e * (a, 1/2^N)_e = F * A\delta \quad (27)$$

となる．以上より，exp 級数超関数の入力に対しては，入力とインパルス応答の畳み込みで出力が得られることが示された．

参考文献

[1] 飯国洋二, “基礎から学ぶ信号処理”, 培風館 (2004).

[2] M.J. ライトヒル, “フーリエ解析と超関数”, ダイヤモンド社 (1975).

[3] D. W. Kammler, “A First Course in Fourier Analysis”, Cambridge University Press, 2nd ed. (2008).

[4] T. Nitta and T. Okada, “Infinitesimal fourier transformation for the space of functionals”, Proceedings of the Conference on Differential & Difference Equations and Applications, pp. 871–883 (2006).