

第6回数学総合若手研究集会
～学際的交流への誘い～

The 6th Mathematics Conference for Young Researchers
– MCYR6 –

世話人

黒田 紘敏	葛西 香太	辻栄 周平
永井 隆之	西 慧	山口 崇幸

札幌, 2010

Series #142. January, 2010

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #119 T. Yamamoto and T. Nakazi, 第 15 回関数空間セミナー報告集, 82 pages. 2007.
- #120 K. Hirata, 第 10 回 COE 研究員連続講演会 『正值調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正值解の存在』, 25 pages. 2007.
- #121 K. Izuchi, 第 12 回 COE 研究員連続講演会 『 I) Segal-Bargmann 空間の巡回ベクトルについて II) 2 重単位開円板上の逆シフト不変部分空間上のクロス交換子について』, 18 pages. 2007.
- #122 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 32nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 73 pages. 2007.
- #123 H. Kubo, T. Ozawa, H. Takamura and K. Tsutaya, Nonlinear Wave Equations, 53 pages. 2007.
- #124 N. Ishimura, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー 2007 「計算ホモロジーとその応用」, 110 pages. 2007.
- #125 S. Hattori, 第 15 回 COE 研究員連続講演会 『分岐理論と有限平坦 Galois 表現』, 28 pages. 2008.
- #126 T. Miyaguchi, M. Kon, R. Kamiyo, S. Kawano, Y. Sato and D. Hirose, 第 4 回数学総合若手研究集会—他分野との学際的交流を目指して, 298 pages. 2008.
- #127 K. Saji, 第 13 回 COE 研究員連続講演会 『波面とその特異点』, 15 pages. 2008.
- #128 T. Nakazi and S. Miyajima, 第 16 回関数空間セミナー報告集, 105 pages. 2008.
- #129 M. Kon, 学位論文 Doctoral thesis “Minimal submanifolds immersed in a complex projective space”, 77 pages. 2008.
- #130 S. Minabe, 第 14 回 COE 研究員連続講演会 『開ミラー対称性における最近の進展』, 8 pages. 2008
- #131 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium, Final “Nonlinear Partial Differential Equations”, 73 pages. 2008.
- #132 H. Kang, 第 16 回 COE 研究員連続講演会 『CHAOS IN TRAVELING WAVES IN LATTICE SYSTEMS OF UNBOUNDED MEDIA』, 13 pages. 2008.
- #133 G.-J. Chung, editor:Y. Kimura, Introduction to Various Models in Image Processing, 61 pages. 2008.
- #134 H. Takagi and R. Uno, 研究会報告書 『動的システムの情報論 (7)』, 110 pages. 2008.
- #135 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, 第 33 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 72 pages. 2008.
- #136 T. Sakajo, Y. Nishiura, H. Suito, K. Nishinari, M. Nagayama and T. Amemiya, JST さきがけ研究集会 『環境問題における数理の可能性』, 83 pages. 2008.
- #137 H. Hida, T. Ito, H. Katsurada, K. Kitagawa (transcribed by T. Suda), Y. Taguchi, A. Murase and A. Yamagami. K. Arai, T. Hiraoka, K. Itakura, T. Kasio, H. Kawamura, I. Kimura, S. Mochizuki, M. Murata and T. Okazaki, 整数論札幌夏の学校, 201 pages. 2008.
- #138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.
- #139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.
- #140 T. Suda, Y. Umetsu, K. Kasai, M. Kasedo, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.
- #141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.

第6回数学総合若手研究集会

～学際的交流への誘い～

The 6th Mathematics Conference for Young Researchers

-MCYR6-

世話人

黒田 紘敏 葛西 香太 辻栄 周平

永井 隆之 西 慧 山口 崇幸

札幌，2010

当研究集会の経費は

北海道大学大学院理学院数学部門

から賄われています

はじめに

第6回数学総合若手研究集会～学際的交流への誘い～は、大学院生およびポストドクターら若手研究者によって運営される研究集会です。

この研究集会は、

- 数学に関わる様々な分野における若手研究者の交流の場を提供し、自らの専門分野に限らない幅広い知見を得ること。
- 数学の各分野間の連携のみでなく、基盤研究と応用研究間のレベルにおいても交流をはかることで、お互いの研究活動へ刺激を与えること

を目的としております。

本テクニカルレポートは講演者の方々から事前に集めた原稿をそのまま印刷したものです。本研究集会の目的から、講演者の方々には他分野の方々にも分かりやすい様に入門的な事項を含めて書いて頂いております。参加者が講演をより深く理解し活発な交流を行うことにより、ご自身の研究を進展させる一助となれば幸いです。

講演には、口頭発表とポスター発表があります。口頭発表では、60分のシングルセッションでは入門的な内容を含めて講演して頂き、30分のパラレルセッションでは同分野の人を対象に専門的なことも含めて講演して頂きます。また、ポスター発表では講演前に1人1分程度の簡単な内容紹介の時間を設けてあり、その後全体で自由討論をして頂きます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の援助を受けて開催されます。開催にあたり

- 北大数学教室の先生方
- 北大数学支援室の事務の方々
- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 本研究集会の過去の世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場をかりて心より感謝申し上げます。

2010年2月

MCYR6 世話人

黒田紘敏，葛西香太，辻栄周平，永井隆之，西慧，山口崇幸

第6回 数学総合若手研究集会

The 6th Mathematics Conference for Young Researchers

日時：2010年2月15日(月)～18日(木)

場所：北海道大学 学術交流会館

- (A) 小講堂 (1F シングル・パラレル会場) (B) 会議室 1 (1F ポスター会場・休憩所)
(C) 会議室 2 (1F パラレル会場) (D) 会議室 3 (1F パラレル会場)
(E) 会議室 4 (1F パラレル会場) (F) 講堂 (2F シングル・パラレル会場)

URL : <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2010/index.html>

2月15日(月)

- 09:50–10:00 (A) 開会
- 10:00–11:00 (A) 永安聖 (Sei NAGAYASU) 北海道大学大学院理学研究院
介在物同定の逆問題に対する安定性評価の深さ依存性
- 11:20–12:20 (A) 木村嘉之 (Yoshiyuki KIMURA) 京都大学大学院理学研究科
籠と幾何学的表現論 (Quiver and Geometric Representation Theory)
- 12:20–14:20 昼休み
- 14:20–14:50 (A) 李炯宙 (HyungJu LEE) 電気通信大学大学院電気通信学研究科
非同次線形常微分方程式系の Lyapunov 数の評価とその決定条件について
- (D) 田坂浩二 (Kouji TASAKA) 九州大学大学院数理学府
等号付き多重ゼータ値の特殊値について
- (E) 東谷章弘 (Akihiro HIGASHITANI) 大阪大学大学院情報科学研究科
Smooth Fano polytopes arising from finite posets
- (F) 新國裕昭 (Hiroaki NIIKUNI) 首都大学東京大学院理工学研究科
Coexistence problem for the one-dimensional Schrödinger operators with
the periodic $\delta^{(1)}$ -interactions
- 15:10–15:40 (A) 増田茂 (Shigeru MASUDA) 首都大学東京大学院理学研究科
”The two-constants theory” and tensors of the microscopically-descriptive,
kinetic and equilibrium equations of fluid
- (D) 若林徳子 (Noriko WAKABAYASHI) 九州大学大学院数理学研究院
Another proof of the cyclic sum formula for multiple zeta-star values
- (E) 尾崎奨太 (Shota OZAKI) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
On the Circuit Double Cover Conjecture
- (F) 鈴木章斗 (Akito SUZUKI) 九州大学大学院数理学研究院
静的時空における量子スカラー場のモデルの基底状態について
- 16:00–16:30 (A) 柿澤亮平 (Ryohei KAKIZAWA) 東京大学大学院数理科学研究科
Determining nodes for semilinear parabolic equations

- (D) 岡本卓也 (Takuya OKAMOTO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
An explicit formulation for the parity result on Apostol-Vu double zeta values
- (E) 中島規博 (Norihito NAKASHIMA) 北海道大学大学院理学院
Generic arrangement 上の微分作用素環のネター性
- 16:50–17:20 (A) 野井貴弘 (Takahiro NOI) 中央大学大学院理工学研究科
Construction of an expansion by BMO families in Triebel-Lizorkin spaces by rearrangements of wavelet series
- (D) 杉山倫 (Rin SUGIYAMA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
有限体上の単純正規交叉多様体の相互写像の核について
- (E) 菅井智 (Tomo SUGAI) 北海道大学大学院理学院
Simple Cohomological Mackey Functor と Mackey Functor の分解に関して

2月16日(火)

- 09:30–10:00 (A) 加藤孝盛 (Takamori KATO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Local well-posedness for the Kawahara equation
- (C) 川原田茜 (Akane KAWAHARADA) 北海道大学大学院理学院
Estimating topological entropy of a two-dimensional cellular automaton
- (D) 今富耕太郎 (Kotaro IMATOMI) 九州大学大学院数理学府
多重 L 値の関係式と Fuchs 型方程式
- (E) 真瀬真樹子 (Makiko MASE) 首都大学東京大学院理工学研究科
重み付き K3 曲面の族について
- 10:20–10:50 (A) 中野直人 (Naoto NAKANO) 慶應義塾大学大学院理工学研究科
On relation of slip-rate to the solution of problems with the general slip boundary condition for motion of inhomogeneous viscous fluids
- (C) 多羅間大輔 (Daisuke TARAMA) 京都大学大学院情報学研究科
Some Elliptic Fibrations Arising from Free Rigid Body Dynamics
- (D) 田中立志 (Tatsushi TANAKA) 九州大学大学院数理学府
多重 L 値の間のいくつかの関係式について
- (E) 柳田伸太郎 (Shintarou YANAGIDA) 神戸大学大学院理学研究科
アーベル曲面上の層のモジュライとフーリエ変換
- 11:10–11:40 (A) 水野将司 (Masashi MIZUNO) 東北大学大学院理学研究科
ある退化放物型方程式の解の正則性評価について
- (C) 吉川満 (Mitsuru KIKKAWA) 明治大学大学院理工学研究科
An Introduction to Evolutionary Game Theory: To Understand the Complex Phenomena
- (D) 沖中智史 (Satoshi OKINAKA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
On a relation between canonical basis and Enyang's basis of B-M-W algebra

- (E) Omolola ODEBIYI 首都大学東京大学院理工学研究科
Spherical CR structures on Brieskorn manifolds
- 11:40–13:40 昼休み
- 13:40–14:10 (A) 重田尚孝 (Naotaka SHIGETA) 東京工業大学大学院情報理工学研究科
半導体中の電子流を記述する Quantum Hydrodynamic モデルの緩和極限
と古典極限
- (C) 斉木吉隆 (Yoshitaka SAIKI) 京都大学数理解析研究所
ローレンツ系の非双曲構造に関する不安定周期軌道解析に関する数値的研究
- (D) 内田幸寛 (Yukihiro UCHIDA) 京都大学大学院理学研究科
Somos sequences and determinant identities for theta functions
- (E) 鈴木咲衣 (Sakie SUZUKI) 京都大学数理解析研究所
境界底タングルの普遍 sl_2 不変量 (Universal sl_2 invariant) について
- 14:30–15:00 (A) 菊池弘明 (Hiroaki KIKUCHI) 北海道大学大学院理学研究院
球上における非線形シュレディンガー方程式の定在波の安定性について
- (C) 安田和弘 (Kazuhiro YASUDA) 法政大学理工学部
Strong consistency for Bayesian estimator with approximations
- (D) 塩見大輔 (Daisuke SHIOMI) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
The Deuring-Shafarevich formula for a p-rank of Jacobi variety
- (E) 粟田育子 (Ikuko AWATA) 明治大学大学院理工学研究科
On the global monodromy of a fibration of the Fermat surface of degree n
- 15:20–15:50 (A) ポスター 1 分スピーチ
- 15:50–17:20 (B) ポスターセッション
- 浅井康友 (Yasutomo ASAI) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
Universal coverings and Schur multipliers of loop groups
- 石丸武志 (Takeshi ISHIMARU) 北海道大学大学院工学研究科
回転対称性を考慮した核融合プラズマの 3 次元境界形状逆推定 (Rotational
symmetry in 3-D fusion plasma boundary shape identification)
- 石山健一 (Ken-ichi ISHIYAMA) 成蹊大学法学部
Complex dynamics and monetary policy in a two-country business cycle
model
- 猪口翔互 (Shogo INOBUCHI) 北海道大学大学院工学研究科
プラズマディスラプション時の渦電流に対する境界要素法解析
- 加世堂公希 (Masaki KASEDOU) 北海道大学大学院理学院
Spacelike submanifolds in de Sitter space from the viewpoint of singularity
theory

- 北川友美子 (Yumiko KITAGAWA) 大阪市立大学数学研究所
Examples of minimizers on sub-Riemannian structures
- 島崎孝宏 (Takahiro SHIMAZAKI) 北海道大学大学院工学研究科
Uncertainty-Driven Plasma Diffusion
- 鈴木香織 (Kaori SUZUKI) 横浜国立大学経営学部
Fano 3-folds with higher index and graded rings
- 高棹圭介 (Keisuke TAKASAO) 北海道大学大学院理学院
Landau-Lifshitz 方程式の Walker wall 解の安定性について
- 高橋賢一 (Ken-ichi TAKAHASHI) 北海道大学大学院理学院
 C^* -対応から得られる C^* -環
- 西山博太 (Hirota NISHIYAMA) 中央大学大学院理工学研究科
A conservative finite difference scheme for the Gardner equation
- 林暢克 (Nobukatsu HAYASHI) 大阪大学大学院理学研究科
A remark about generic Torelli for some geometric surfaces of geometric genus 2
- 前田忠昭 (Tadaaki MAEDA) 北海道大学大学院工学研究科
大型ヘリカル装置の3次元プラズマ境界形状逆推定の試み (Trial calculation to reconstruct 3-D plasma boundary shape in large helical device)
- 柘田亮 (Ryo MASUDA) 室蘭工業大学大学院数理システム工学専攻
Exact values of triple product L-functions for modular forms
- 松山哲士 (Tetsushi MATSUYAMA) 北海道大学大学院工学研究科
核融合プラズマの3次元境界形状逆推定への磁束ループ信号の取り込み (Use of magnetic flux loop signals to reconstruct 3-D fusion plasma boundary shape)

2月17日(水)

- 09:30–10:30 (F) 安藤浩志 (Hiroshi ANDO) 京都大学大学院理学研究科数理解析研究所
作用素環における Lie 群-Lie 環対応について
- 10:50–11:50 (F) 西澤由輔 (Yusuke NISHIZAWA) 首都大学東京大学院理工学研究科
Heterodimensional tangency and hyperbolic sets
- 11:50–13:50 昼休み
- 13:50–14:50 (F) 斎藤新悟 (Shingo SAITO) 九州大学大学院数理学研究院
支払備金に関する Mack の公式の一般化
- 15:10–16:10 (F) 大城佳奈子 (Kanakano OSHIRO) 広島大学大学院理学研究科
カンドルと結び目不変量
- 16:30–17:30 (F) 宮坂宥憲 (Yuken MIYASAKA) 東北大学大学院理学研究科
2進算術幾何平均と楕円曲線
- 18:00–20:00 (B) 懇親会

2月18日(木)

- 09:30–10:30 (A) 松江要 (Kaname MATSUE) 京都大学大学院理学研究科
Rigorous numerics for semilinear parabolic PDEs via the Conley-
Rybakowski index
- 10:50–11:50 (A) 大関一秀 (Kazuho OZEKI) 明治大学先端数理科学インスティテュート
巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の挙動と基礎環の構造について
- 11:50–12:00 (A) 閉会

世話人：黒田紘敏(代表) 葛西香太 辻栄周平
永井隆之 西慧 山口崇幸

介在物同定の逆問題に対する安定性評価の深さ依存性

北海道大学大学院理学研究院 永安聖¹

概要

介在物を含むある伝導体があるとする。そして、伝導体の境界での観測から介在物を決定する逆問題について考える。ここで、介在物が伝導体の境界から遠ければ遠いほど、つまり、介在物が奥の方であればあるほど、介在物の再構成が難しくなることが予想される。そこで、介在物が奥であればあるほど安定性が悪くなることを、あるモデルに対して示す。尚、この研究は Gunther Uhlmann 氏と Jenn-Nan Wang 氏との共同研究である。

1 序

介在物を含むある伝導体があったとする。その伝導体の境界を観測して介在物を同定する逆問題について考える。この講演の目標は、一言で言うと

介在物が奥の方であればあるほど、再構成しにくくなる (安定性が悪くなる) ことを数学的に示すことである。

尚、この伝導体に関する逆問題は、Calderón の逆問題と呼ばれている。そこで、まず第2章で Calderón の逆問題とはどういう問題かについて述べる。又、第3章では逆問題の数学的基本的問題について説明し、特に一意性及び安定性に関する幾つかの結果を紹介する。第4章で我々の主結果 N.-Uhlmann-Wang [13] を紹介する。

2 Calderón の逆問題

まず、Uhlmann [18] が最近、Calderón の逆問題に関する研究の概説をしていることを初めに述べておく。又、Alessandrini [2] は、Calderón の逆問題の、特に安定性に関する研究の概説、及び open problems の紹介をしている。

さて、これから紹介する問題は、Calderón [6] の先駆的論文に由来し、Calderón の逆問題 (Calderón's inverse problem) と呼ばれているが、屢々 'inverse conductivity problem', 'electrical impedance tomography (EIT)' とも呼ばれる。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域で、境界は必要なだけ滑らかであるとする。 γ を Ω 上で定義された有界で正の関数とする。 Ω は伝導体に対応し、 Ω 上の関数 γ は伝導率を表す。このとき、電位 u に対する方程式は

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega \quad \left(\text{即ち, } \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\gamma(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) = 0, x \in \Omega \right) \quad (1)$$

¹ 日本学術振興会特別研究員 PD

で与えられる. 尚, $\gamma \nabla u$ は電流を表す. ここで, 伝導体 Ω の境界に電位 f を与えると, 引き起こされる電位 u は, (1) に Dirichlet 境界条件を課した次の Dirichlet 問題の解で記述される.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = f \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

この Dirichlet 問題 (2) を解くということは, 考えている伝導体の伝導率が既知であるという状況の下, 伝導体の境界に電位を与えると, 伝導体の内部の電位がどうなるかということ調べることに相当する.

さて, 適切な仮定の下, この Dirichlet 問題 (2) が唯一つの解を持つことはよく知られている (例えば [7, §8.2], [11, §2.3] 参照). 因って, 与えられた Dirichlet データ f を対応する Neumann データに移す写像 Λ_γ :

$$\Lambda_\gamma : f \mapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{u(x) - u(x - h\nu(x))}{h} \right) \quad (3)$$

が定義できる. ここで ν は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトルを表し, u は Dirichlet 問題 (2) の解である. この Λ_γ は, **Dirichlet-to-Neumann map (DN 写像)** と呼ばれている. DN 写像 Λ_γ は, 境界で電位 f が与えられたときに境界での電流 $\gamma(\partial u / \partial \nu)|_{\partial\Omega}$ を対応させる写像だから, 境界観測に相当する. ここで, 伝導体の伝導率が分からないときに, 何度も境界に電位を与え, その際に生じる電流を観測し, その境界での観測データから伝導率を推定 (決定) せよという問題が, Calderón の逆問題に相当する. 即ち, Calderón の逆問題とは, 係数 γ が未知であるときに, この Λ_γ から γ を決定せよ, という問題である. ‘逆問題’ といっているのは, Dirichlet 問題 (2) を普通に解くのではなく, 係数 γ が未知であることに由来する. それに対し, ‘普通に’ Dirichlet 問題 (2) を解くこと, 即ち, 係数等が既知であるときに, 方程式の解を求めることを ‘順問題’ と呼ぶ. 尚, Calderón の逆問題は未知である係数 γ を決定する問題なので, 係数決定問題の一つである.

この Calderón の逆問題に対し, Calderón [6] は線型写像 Λ_γ の 2 次形式 Q_γ が解析的であること, その線型化写像が $\gamma = c$ (c は定数) で可逆であることを示し, そして, $\gamma = 1 + h$ (但し h の L^∞ ノルムは十分小さい) と書けているときに γ の近似を再構成する方法を与えているが, ここでは詳細は省略する.

3 逆問題の基本的問題

さて, 逆問題を考える際の, 数学上の基本的問題には, 例えば次のようなものがある ([14, §4] 参照).

- **一意性.** 二つの観測データが一致すれば, 推測したい未知情報も一致するのだろうか. 言い換えると, 未知情報が異なれば, 観測データも異なるのだろうか.

例えば、もし未知情報が異なっても同じ観測データが得られてしまうのであれば、観測データから未知情報を決定することはできなくなってしまう。

- **安定性.** 二つの観測データの差が小さいときに、推測したい未知データの差も小さいのかどうか. 実際に実験を行うことを考えると、観測データに誤差が入るのは避けられない. 安定性は、観測データに誤差が入ったときに、それが未知情報を推測する際に与えてしまう影響の程度の指標を与えている、といえる.
- **再構成.** 観測データが与えられたときに、その観測データを具体的にどのようなように加工すれば未知データを復元(再構成)できるか.

以下では、Calderón の逆問題の場合に、夫々の問題に対しどのような結果があるのか、又、数学的にはどのような主張になるのかを、特に一意性と安定性の場合について述べる.

3.1 一意性

ここではまず γ が滑らかなときの結果について紹介しよう.

定理 1 (Sylvester-Uhlmann [16]). 次元 $n \geq 3$ とする. $\gamma_j \in C^2(\bar{\Omega})$ は $\gamma_j(x) > 0$ ($x \in \bar{\Omega}$) を満たすとする ($j = 1, 2$). このとき、もし $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ ならば、 $\bar{\Omega}$ 上 $\gamma_1 = \gamma_2$ が成立する.

つまりこれは、伝導率 γ が $C^2(\bar{\Omega})$ に属し、そして $\gamma > 0$ が成立する、ということさえ予め分かっていたら、境界観測 Λ_γ から伝導率 γ が決定できる (即ち、伝導率 γ は一意に定まる) ということである.

尚、この方向の研究としては、まず、Kohn-Vogelius [9] は γ が解析的であるという仮定のもので (即ち、 γ が解析的であるということが予め分かっているという状況下での) 一意性を示している. その後、上記の通り、Sylvester-Uhlmann [16] が次元 3 以上で係数が C^2 級の場合の一意性を示した. 空間 2 次元の場合については、Nachman [12] が係数 γ に適当な滑らかさを仮定した上で一意性を示した. その後も係数の滑らかさの仮定を落とす方向で研究が進み、現在は、次元が 3 以上なら $\gamma \in W^{3/2, \infty}(\Omega)$ であれば一意性が成立し [15], 次元が 2 のときは $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ ならば一意性が成立すること [4] が分かっている.

一方、 γ が滑らかでないときの重要な例として、伝導体が**介在物 (inclusion)** を含む場合がある. 尚、(上で紹介した $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ の場合 [4] もそうだが) γ が滑らかでないときには、 $\nabla \cdot (\gamma \nabla \bullet)$ は通常のエラート型偏微分作用素ではないが、弱解を定義することで自然に Dirichlet 問題 (2) を考えることができる (例えば [11, §2.1] 参照). さて、定理としてはどのような主張になるのかに注目するために、Isakov [8] の結果の、非常に特別な場合を紹介しよう. 尚、2 次元に限れば、上で紹介した [4] の結果は、介在物のある伝導体の場合を含んでいる.

次元 n は 2 又は 3 とする. D は必要なだけ滑らかで, $\overline{D} \subset \Omega$ とする. ここでは, 元々伝導率が 1 であるような一様な伝導体 Ω の中に介在物 D がある場合を考える. 特に, 介在物 D 上では伝導率は一様とし, それを k とする² (k は正の定数, $k \neq 1$). すると, その伝導率 $\gamma(x)$ は

$$\gamma(x) = 1 + (k - 1)\chi_D(x) \quad (4)$$

と表されていると考えることができる³. ここで, χ_D は D の定義関数 (即ち, $\chi_D(x) = 1$ for $x \in D$; $\chi_D(x) = 0$ for $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$). 尚, このとき, 考える Dirichlet 問題 (2) は

$$\begin{cases} L_{D,k}u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{但し, } L_{D,k}u := \nabla \cdot ((1 + (k - 1)\chi_D)\nabla u) \quad (5)$$

となり, 又, $\gamma = 1$ on $\partial\Omega$ だから, (3) で定義した DN 写像は

$$\Lambda_\gamma : f \mapsto \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} \quad (6)$$

となる. このとき, 次が成立する.

定理 2 (Isakov [8]). D_j は Lipschitz 境界を持つ開集合で, $\overline{D_j} \subset \Omega$ とし, 集合 $\Omega \setminus \overline{D_j}$ は連結とする ($j = 1, 2$). k_j は正の定数で, $k_j \neq 1$ とする. γ_j を, (4) に $k = k_j$ 及び $D = D_j$ を代入することで定義する. このとき, もし (6) で定義した DN 写像が $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ を満たすならば, $D_1 = D_2$ 及び $k_1 = k_2$ が成立する.

この定理により, 介在物を含む伝導体の場合も, 境界観測から介在物の形・位置及びそこでの伝導率が決定できることが分かる.

3.2 安定性

一意性とは, ‘二つの観測データが一致すれば, 対応する未知情報も一致する’ という性質のことだった. そこで, 次に考えることは, ‘二つの観測データの差が小さければ, 対応する未知情報の差も小さいかどうか’, 即ち安定性である. 2 章でも触れた通り, Alessandrini [2] は, Calderón の逆問題の安定性に関する最近の研究の概説, 及び open problems の紹介をしていることを初めに述べておく.

さて, ここでもまず γ が滑らかな場合の結果を紹介しよう. 考える Dirichlet 問題は (2) であり, そして対応する DN 写像 Λ_γ は (3) で定義される.

²勿論, 問題を定式化する上では元々の伝導体が一様である必要は無く, 又, 介在物上での伝導率が一様である必要も無い. その場合, 伝導率 γ は $\gamma(x) = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)\chi_D(x)$ と表されるであろう. ここで, γ_0 は Ω 上滑らか, γ_1 は \overline{D} 上滑らか. 実際, Isakov [8] はこの場合を扱っている. ただ, ここでは定理の主張を簡単にするために夫々が一樣の場合を紹介する. 尚, γ_0 は background に相当し, 屢々既知であると仮定する. これは, 介在物を含む伝導体を考える場合, (介在物が無かった頃の) 元々の伝導体の状態は分かっているという仮定の下で介在物を同定・再構成しようという問題に対応する.

³これは $\gamma(x) = k$ for $x \in D$; $\gamma(x) = 1$ for $x \in \Omega \setminus D$ に他ならない.

定理 3 (Alessandrini [1]). $n \geq 3, s > n/2, E > 0$ とする. このとき,

$$\gamma_j(x) \geq \frac{1}{E}, \quad \|\gamma_j\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq E \quad (j = 1, 2) \quad (7)$$

ならば,

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \omega\left(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{\mathcal{L}}\right) \quad (8)$$

と評価できる. 但し, ω は $(0, \infty)$ 上の関数で,

$$\omega(t) \leq C|\log t|^{-\eta} \quad \left(0 < t < \frac{1}{e}\right) \quad (9)$$

なる評価を持つ. ここで, $\eta \in (0, 1)$ は n, s のみに依存し, $C > 0$ は E, s, n, Ω のみに依存する. 又, H^r は通常の Sobolev 空間を表し, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ は $H^{1/2}(\partial\Omega)$ から $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ への作用素の作用素ノルムを表す.

まず, 関数 ω は,

$$\omega(t) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \rightarrow +0$$

を満たすこと, そしてそのオーダーは $\omega(t) = O(|\log t|^{-\eta})$ であることに注意する. 因って, 評価 (8) は,

(#) ‘観測データの差 $\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{\mathcal{L}}$ が小さければ, 伝導率の差 $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)}$ も小さくなるが, そのオーダーは \log の冪である’,

と読める. 一方, 条件 (7) は a priori 条件である. 以上から, 伝導率が (7) を満たすことが予め分かっているとき, (#) の性質が成立することが分かる. ここで, \log の冪のオーダーは, 非常に ‘遅い’ オーダーである. しかしながら, 一方でこの評価は optimal である [10]. 尚, 2次元 ($n = 2$) の場合の結果も既に幾つか得られている (例えば [5]).

次に, 伝導体が介在物を含む場合, 特に伝導率 γ は (4) と書かれている場合について考えよう (従って, 考える Dirichlet 問題は (5), DN 写像は (6) である). まず, 一意性については定理 2 の通り, Isakov [8] によって示されている. さて, 正の定数 k ($k \neq 1$) は固定する. すると, γ は介在物 D のみに依る. そこで, γ に対応する DN 写像 Λ_γ を, Λ_D と書くことにしよう. Alessandrini-Di Cristo [3] は, ある minor な a priori 仮定の下,

$$\|\Lambda_{D_1} - \Lambda_{D_2}\|_{\mathcal{L}} \leq \varepsilon \quad \text{ならば} \quad d_{\mathcal{H}}(\partial D_1, \partial D_2) \leq \omega(\varepsilon)$$

が成立することを示した. ここで, $d_{\mathcal{H}}$ は Hausdorff distance, 又, ω は区間 $(0, \infty)$ 上の単調増加関数で,

$$\omega(t) \leq C|\log t|^{-\eta} \quad (t \in (0, 1)) \quad (10)$$

なる評価を持つ. 但し, C, η は a priori データのみに依る. この結果により, minor な a priori 仮定の下で,

(#) ‘観測データの差 $\|\Lambda_{D_1} - \Lambda_{D_2}\|_{\mathcal{L}}$ が小さければ, 二つの介在物の差 $d_{\mathcal{H}}(\partial D_1, \partial D_2)$ も小さくなるが, そのオーダーは \log の冪である’

ということが分かる.

さて, ここで我々が示したいことは,

介在物が奥の方であればあるほど, 安定性が悪くなる

ことであった. そのために, 安定性評価に表れる定数 (特に, (10) の C, η に対応) が, 伝導体の境界 $\partial\Omega$ と介在物 D との距離 $\text{dist}(\partial\Omega, D)$ にどのように依存するかを調べたい. そこで, ここでは次のようなあるモデルに対して, 安定性評価をより詳しく調べよう.

4 主結果の紹介

ここでは空間 2 次元の場合を考える. 今, $0 < r < R$ とし, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$, $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ とする. B_s を B の摂動とする (図参照), 即ち, $\psi : \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数とし, ∂B_s は

$$y = F_s(x) := x + s\psi(x)\nu(x) \quad (x \in \partial B)$$

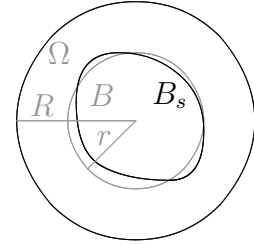
の像でかけているとする. 但し, ν は ∂B の単位外法線ベクトルである.

以下で更に記号を準備するが, その前に主結果を大雑把に説明する (主結果の正確な主張は後述). 主結果は, ‘ある a priori 仮定の下, 評価 (12) が成立する’, ということである. ここで, 評価 (12) を解釈しよう. まず R や r を固定したときには, (12) により

$$\|\psi\|_{L^2(\partial B)} \leq C_0 |\log \|d\Lambda_B(\psi)\|_{\mathcal{L}}|^{-m}$$

なる評価が得られる. 左辺の $\|\psi\|_{L^2(\partial B)}$ は, 大雑把に言って二つの介在物 B と B_1 の差を表す. 一方, 右辺にある $\|d\Lambda_B(\psi)\|_{\mathcal{L}}$ は, これも非常に大雑把に言って二つの観測データ Λ_B と Λ_{B_1} の差に対応する ($d\Lambda_B$ は線型化写像であり, 後で定義する). 因って, 上で紹介した Alessandrini-Di Cristo [3] の結果 (#) に対応する評価が得られていることが分かる. ここで更に, 評価に現れている定数 C_0 は, $C_0 = C(\log(R/r))^m$ と書けていることに注意する. 特に, $R/r \rightarrow +\infty$ とすると, $C_0 \rightarrow +\infty$ であり, そのオーダーは $O((\log(R/r))^m)$ である. $R/r \rightarrow +\infty$ は, 介在物が奥の方に行くことに対応するから, 以上により, ‘介在物が奥の方であればあるほど安定性は悪くなり, そのオーダーは $O((\log(R/r))^m)$ である’,ということが分かる.

さて, 主結果を正確に述べるために, 記号等を準備しよう. まず, 考える Dirichlet 問題は (5) であり, 対応する DN 写像は (6) であることを思い出しておく. 即ち, $f \in$



$H^{1/2}(\partial\Omega)$ に対し, 解 u_0, u_s 及び DN 写像 Λ_B, Λ_{B_s} を

$$\begin{cases} L_{B,k}u_0 = 0 \text{ in } \Omega, \\ u_0 = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \quad \Lambda_B f := \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}; \quad \begin{cases} L_{B_s,k}u_s = 0 \text{ in } \Omega, \\ u_s = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \quad \Lambda_{B_s} f := \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$$

と定義する. 更に, 介在物 B の周りでの DN 写像の ψ 方向の線型化写像 $d\Lambda_B(\psi)$ を

$$d\Lambda_B(\psi) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\Lambda_{B_s} - \Lambda_B)$$

で定義する (線型化写像については, 例えば [17, §9.10] 参照). 尚, 右辺に現れる B_s は ψ に依っていることを注意しておく. このとき, 次の結果が得られた.

主結果 (N.-Uhlmann-Wang [13]). $k > 0, k \neq 1$ とする. $m > 0, M > 0$ とする. $r \leq 1, R \geq 2$ とする. このとき,

$$\|\psi\|_{H^m(\partial B)} \leq M \quad \text{且つ} \quad \|d\Lambda_B(\psi)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{e} \quad (11)$$

を満たす任意の $\psi \in H^m(\partial B)$ に対して,

$$\|\psi\|_{L^2(\partial B)} \leq C \left(\log \frac{R}{r} \right)^m |\log \|d\Lambda_B(\psi)\|_{\mathcal{L}}|^{-m} \quad (12)$$

が成立する. 但し, $C > 0$ は k, m, M のみに依る. 又, この評価は **optimal** である.

注意. 評価 (12) 及び **optimality** から,

$$c \left(\log \frac{R}{r} \right)^m \leq \sup_{\psi} \frac{\|\psi\|_{L^2(\partial B)}}{|\log \|d\Lambda_B(\psi)\|_{\mathcal{L}}|^{-m}} \leq C \left(\log \frac{R}{r} \right)^m$$

なる評価が得られる. ここで, \sup 中の ψ は条件 (11) を満たすものを走る.

参考文献

- [1] G. Alessandrini, *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Anal. **27** (1988) 153–172.
- [2] G. Alessandrini, *Open issues of stability for the inverse conductivity problem*, J. Inverse Ill-Posed Problems **15** (2007) 451–460.
- [3] G. Alessandrini and M. Di Cristo, *Stable determination of an inclusion by boundary measurements*, SIAM J. Math. Anal. **37** (2005) 200–217.

- [4] K. Astala and L. Päivärinta, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane*, Ann. Math. **163** (2006) 265–299.
- [5] T. Barceló, D. Faraco and A. Ruiz, *Stability of Calderón inverse conductivity problem in the plane*, J. Math. Pures Appl. **88** (2007) 522–556.
- [6] A. P. Calderón, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Societade Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro) (1980) 65–73.
- [7] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer (1983).
- [8] V. Isakov, *On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient*, Commun. Pure Appl. Math. **41** (1988) 865–877.
- [9] R. Kohn and M. Vogelius, *Determining conductivity by boundary measurements*, Commun. Pure Appl. Math. **37** (1984) 289–298.
- [10] N. Mandache, *Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation*, Inverse Problems **17** (2001) 1435–1444.
- [11] 村田實・倉田和浩, 偏微分方程式 1 (岩波講座 現代数学の基礎), 岩波書店, 1997.
- [12] A. Nachman, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. Math. **143** (1996) 71–96.
- [13] S. Nagayasu, G. Uhlmann and J.-N. Wang, *A depth-dependent stability estimate in electrical impedance tomography*, Inverse Problems **25** (2009) 075001.
- [14] 中村玄, 弾性体の逆問題, 数学 **53** (2001) 113–124.
- [15] L. Päivärinta, A. Panchenko and G. Uhlmann, *Complex geometrical optics for Lipschitz conductivities*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003) 57–72.
- [16] J. Sylvester and G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. Math. **125** (1987) 153–169.
- [17] M. E. Taylor, *Partial differential equations II, Qualitative studies of linear equations*, Applied Mathematical Sciences 116, Springer (1996).
- [18] G. Uhlmann, *Electrical impedance tomography and Calderón's problem*, Inverse Problems **25** (2009) 123011.

叢と幾何学的表現論

木村 嘉之*

2010年2月15日†

Introduction

クラスター代数 (cluster algebra) ^{*1}は, Fomin-Zelevinsky[5] によって 2002 年に導入された有理関数体 $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ の部分代数 A で, シード (seed) から変異 (mutation) と呼ばれる操作で生成されるクラスター変数 (cluster variable) とよばれる元や n 個のクラスター変数から成るクラスター (cluster) という集合といった付加構造をもつものである. また, 付加構造 (=: クラスター構造) の組合せ論に非常に興味深い表現論が情報として含まれていると期待されている. 予想的には, クラスター代数は,

- 半単純簡約群 G の座標環
- unipotent subgroup U の座標環
- flag variety G/B の斉次座標環

に存在する “双対標準基底 (dual canonical base)” のもつ “組み合わせ的な構造” を取り出していて, 代数群のもつ “全正值性 (total positivity)” を “純代数的” かつ “組み合わせ的に” 統制するであろうと期待され, 導入されたものである.

1 叢と標準基底

クラスター代数について述べる前に, その動機づけの一つである

- 叢と量子群の関係
- 量子群の標準基底

について概説する.

1.1 叢とその表現論

叢 (quiver) とは単に, 向き付きグラフのことを言う. すなわち, 頂点の集合とその間にある向き付けられた集合の組みのことを言う. 定義は非常に簡単なもので, 何の変哲も無いものだが, その “線形表現” を考えることで, 様々な線形代数の問題を叢の表現論に翻訳することが出来る. ^{*2}

Definition 1 (叢とその表現). (I, E) を有限グラフとし, $Q = (I, \Omega)$ を有限グラフ (I, E) に向きを入れた叢とする.

* 京都大学数理解析研究所, ykimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

† 北海道大学北海道大学学術交流会館小講堂

^{*1} このテクニカルレポートでは, 主にクラスター代数に関わる参考文献のみを挙げた. より詳しい参考文献について [7] を参考にしたい.

^{*2} ここでは表現論とは単に, 群や環などに付随するある種の “良い” アーベル圏 (ないしそれに付随する様々な圏) の構造の理解といったことで理解して欲しい. Lie 群や Lie 環の表現論と言っているわけではない.

(1) 籠 $\mathcal{Q} = (I, \Omega)$ の表現とは, I -graded ベクトル空間 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ と線型写像 $M_h: M_{\text{out}(h)} \rightarrow M_{\text{in}(h)}$ の組みを言う. ここで, 向き付けられた辺 $h \in \Omega$ に対して $\text{out}(h)$ で始点, $\text{in}(h)$ で終点を表わす.

(2) 籠の表現 $M = ((M_i)_{i \in I}, (M_h)_{h \in \Omega})$, $M' = ((M'_i)_{i \in I}, (M'_h)_{h \in \Omega})$ に対して, 籠の表現の射 $\varphi = (\varphi_i): M \rightarrow M'$ とは, I -graded 線形空間の射であって, 任意の $h \in \Omega$ に対して, $M'_h \varphi_{\text{out}(h)} = \varphi_{\text{in}(h)} M_h$ を満たすものを言う. すなわち以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} M_{\text{out}(h)} & \xrightarrow{M_h} & M_{\text{in}(h)} \\ \varphi_{\text{out}(h)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\text{in}(h)} \\ M'_{\text{out}(h)} & \xrightarrow{M'_h} & M'_{\text{in}(h)} \end{array}$$

籠とは単なる有限グラフであるが, 籠は**経路圏 (path category)**を (自由に) 生成する. すなわち頂点を対象とし, つなげることができる辺の列 (path=経路) を射とするような圏である. 籠の表現とは籠のグラフの (線形) 表現であり, 籠の表現は自然にアーベル圏をなす. 少し簡単な籠の表現のなす圏について考えてみる.

Example 2 (A_1 籠). 頂点が一つだけあり辺が無い籠を考えてみる. このとき, 籠の表現は自明なものであり, 全て 1次元ベクトル空間の直和として得られるので, 単純かつ直既約な対象とすべてその直和として得られる.

Example 3 (A_2 籠). 頂点が2つあり, 辺が一つだけある籠を考える. ここで, 二つの籠の表現が同型とは, 表現を定める行列 X, X' に対して, 可逆な行列 A, B が存在して, $AXB^{-1} = X'$ と表せることであり, これは行列の階数の問題に帰着される. よって, 直既約な表現 (の同型類) は3つあり, それぞれのベクトル空間の次元の組 (次元ベクトル) は, $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$ であり, 次元ベクトルが $(1, 1)$ のものは線型写像は0でないとする.

Example 4 ($A_1^{(1)}$ 籠 (Jordan 籠)). 頂点が一つあり, 辺が頂点から自分自身へのものが一つだけある籠を考える. ここで, 二つの籠の表現が同型であるとは表現を定める行列 X, X' に対して, 可逆な行列 A が存在して, $AXA^{-1} = X'$ と表されることであり, これは Jordan 標準形の問題そのものである. よって, 特に巾零表現だけに話を限れば, 各次元に対して, 直既約な表現 (=Jordan ブロック) が存在し, それらの直和で全ての表現が得られることが分かる. 特に無限個存在する. 固有値ごとに Jordan ブロックが存在する. また全ての表現を考えれば, 体にも依存する. つまり代数閉体では Jordan 標準形で尽されるが, Jordan 標準形では得られないもの (一次式に分解しない既約な多項式から定まる直既約表現) も存在する.

Example 5 (Kronecker 籠). 以下の籠を Kronecker 籠という.

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ + & \rightleftarrows & - \\ & b & \end{array}$$

Kronecker 籠の表現には regular 表現とよばれる興味深い表現が存在する. $\dim M_1 = \dim M_2 = n$ とし, 片方の辺の行列を恒等行列とする. そうするとき, もう片方の行列は Jordan 標準型の分類と同値となり, また辺の対称性から射影直線上の冪零 Jordan 標準型がならぶ形となる. すなわち, 射影直線上の捻れ (接続) 層の圏が得られる. この対応を精密に見てやることにより, 射影直線上の接続層のなすアーベル圏と Kronecker 籠の表現のなすアーベル圏は, アーベル圏としては圏同値ではないものの, それぞれの導来圏は圏同値となる (Beilinson).

またランク1のアーベル群で次数付けられた次数つきのある可換環上次数つき加群の圏として定義される重み付き射影直線上の接続層の導来圏と affine 籠とよばれる affine Dynkin diagram に適当に向きを入れた籠の表現の導来圏は圏同値となる (Geigle-Lenzing).

籠の表現のなすアーベル圏は一般に半単純 (もしくは完全可約) なアーベル圏ではなく, 遺伝的 (hereditary) なアーベル圏と呼ばれるアーベル圏になる. 半単純な圏^{*3}においては, その単純対象の分類により全ての対象の

^{*3} 標数0の代数閉体上の有限次元半単純 Lie 環の有限次元表現のなす圏や, 標数0の代数閉体上の有限群の表現のなす圏など.

分類が得られるので、単純対象の分類(とその構成)が基本的かつ重要な問題となるが、籠の表現論においては、直和に分解しない対象(直既約対象)の分類が基本的な問題となる。^{*4}

これらの問題だけではなく部分空間問題などの様々な線形代数の問題が、籠の表現の問題に書き変えることで統一的に理解することが出来るだけでなく、籠の表現論は、(体上の)有限次元代数の表現論にも基本的な役割を果たす。

Definition 6 (path algebra (経路代数)). $\mathcal{Q} = (I, \Omega)$ を籠とする. k を体とする. kI を $\{e_i\}_{i \in I}$ を基底とし, $e_i e_j = e_j e_i = \delta_{i,j} e_i$ の関係式で定義される k 代数とする. $k\Omega$ を $\{e_h\}_{h \in \Omega}$ を基底とする kI -bimodule とする. kI の作用は以下で定める.

$$e_i e_h e_j = \delta_{i, \text{in}(h)} \delta_{\text{out}(h), j} e_h \quad (i, j \in I, h \in \Omega),$$

bimodule $k\Omega$ の kI 上のテンソル代数を $k\mathcal{Q}$ で表し, 籠 \mathcal{Q} の k 上の **path algebra (経路代数)** という.

籠の表現と対応する path algebra の加群の圏の間には自然な圏同値が存在する. また, それだけではなく, 代数閉体上の有限次元代数の森田同値(加群のなす圏の間の圏同値)による分類においては, Gabriel 籠とよばれる射影直既約加群(もしくはその単純商)から定まる籠が, 最も基本的な不変量になり, “関係式付き籠”の表現のなす圏を考えることで, 任意の(代数閉)体上の有限次元代数の加群圏が実現されることが知られている(Gabriel).

Question 7. 籠の表現において“簡単で面白い対象”を知ることは, 重要である. すなわち, 直既約対象が有限個であるような籠は, どのようなものであろうか? 上で見た通り, 有限個であるものは非常に少ないのではないかと思われるので, その分類はどのようにされるだろうか?

1.2 Gabriel-Kac の定理

1.2.1 ルート系と Kac-Moody Lie 環

籠の表現の直既約表現は以下の様に統制される (Gabriel-Kac の定理). 主張を述べるために, Kac-Moody Lie 環とルート系の言葉を紹介する.

Definition 8. **ルートデータ**とは, 以下のデータの組のことを言う.

1. P : free \mathbb{Z} -module (weight lattice と呼ばれる),
2. $P^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$ と pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \otimes P^* \rightarrow \mathbb{Z}$,
3. 有限集合 I ,
4. $\{\alpha_i\}_{i \in I} \in P$ (単純ルート),
5. $\{h_i\}_{i \in I} \in P^*$ (単純コルート),
6. P 上の双線型形式 $(\cdot, \cdot) : P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$.

であって, 以下の条件を満たすものを言う.

- (a) $\langle h_i, \lambda \rangle = 2(\alpha_i, \lambda) / (\alpha_i, \alpha_i)$ for $i \in I$ and $\lambda \in P$,
- (b) $a_{ij} = \langle h_i, \alpha_j \rangle = 2(\alpha_i, \alpha_j) / (\alpha_i, \alpha_i)$ がカルタン行列を与える, すなわち以下の条件を満たすことをいう.
 $\langle h_i, \alpha_i \rangle = 2$, and $\langle h_i, \alpha_j \rangle \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ and $\langle h_i, \alpha_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle h_j, \alpha_i \rangle = 0$ for $i \neq j$,
- (c) $(\alpha_i, \alpha_i) \in 2\mathbb{Z}_{>0}$,
- (d) $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ は線形独立.

^{*4} 一般には到底 “不可能な” 問題.

このとき $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \Pi^\vee = \{h_i\}_{i \in I}$ とおく. いま, $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{f_i\}_{i \in I} \cup \{h \in P^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\}$ によって生成され,

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0 \\ [h, e_i] &= \alpha_i(h)e_i \\ [h, f_i] &= -\alpha_i(h)e_i \\ [e_i, f_j] &= \delta_{i,j}h_i \end{aligned}$$

で定義される Lie 環を $\tilde{\mathfrak{g}}_A$ で表わす. また, $\tilde{\mathfrak{g}}_A$ のイデアルであって, $\mathfrak{h} := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と交わらない極大なものが唯一つ存在し, それによる商を \mathfrak{g}_A で表わし, Kac-Moody Lie 環という. この Lie 環 \mathfrak{g}_A は, $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{f_i\}_{i \in I} \cup \{h \in P^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\}$ で生成され, 上の関係式たちと以下の関係式たち

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} e_i^{(k)} e_j e_i^{(1-a_{ij}-k)} &= 0 \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} f_i^{(k)} f_j f_i^{(1-a_{ij}-k)} &= 0 \end{aligned}$$

で定義される Lie 環と同一視される. 最後の二つの関係式は Serre 関係式とよばれている. ここで, $e_i^{(k)} = e_i^k/k!, f_i^{(k)} = f_i^k/k!$ を表す. Kac-Moody Lie 環は, 重要な例として, 有限次元複素単純 Lie 環やその loop 化の中心拡大である affine Lie 環を含んでいる. $\{e_i\}, \{f_i\}$ でそれぞれ生成される部分 Lie 環を $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-$ で表わすとき, 三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

を持つ. また, 可換な部分 Lie 環 \mathfrak{h} は \mathfrak{g} に自然に半単純に作用し, \mathfrak{h} に関する同時固有値空間分解 (ルート空間分解) により,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R \subset \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$$

と直和分解する. ここで, $R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*; \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ なる集合をルートデータから定まる **ルート系** といい, $\dim \mathfrak{g}_\alpha$ をルート α のルート重複度という. また, 三角分解を用いて **正ルート**, **負ルート** が, $R_\pm = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*; \mathfrak{n}_\alpha^\pm \neq 0\}$ によって定義される. 各 $i \in I$ に対して,

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, h_i \rangle \alpha_i$$

で定義される単純鏡映によって生成される $\text{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ の部分群を Weyl 群といい, R の部分集合であって, Π の W の作用により生成される部分集合を実ルート, 補集合を虚ルートという. 実ルート, 虚ルートは以下のようにも特徴付けられる.

- α : 実ルート $\iff (\alpha, \alpha) = 2 \iff \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$
- α : 虚ルート $\iff (\alpha, \alpha) \leq 0 \iff \dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$

1.3 籠の表現とルート系 : Gabriel-Kac の定理

籠の表現のなす圏とルート系の関係は, “Gabriel-Kac の定理” によって以下のように関係付けられる.

Theorem 9 (Gabriel, Bernstein-Gelfand-Ponomarev, Kac). \mathcal{R} を籠 \mathcal{Q} の直既約表現の同型類のなす集合とする.

$$\mathbf{dim}: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}[I]$$

を次元ベクトル $M \mapsto (\dim M_i)_{i \in I}$ から定まる写像とする. このとき, 以下の主張が成り立つ.

- (1) $\mathbf{dim}(\mathcal{R}) = R_+$
- (2) 任意の実ルート $\alpha \in R_+$ に対して, 唯一つの直既約表現の同型類 $M(\alpha)$ であって, $\mathbf{dim} M(\alpha) = \alpha$ を満たすものが存在する.

(3) 任意の虚ルート $\alpha \in R_+$ に対して, 直既約表現の同型類 M であって, $\dim M = \alpha$ を満たすものが, “無限個” 存在する.

また, Gabriel は, 籠の表現において, 直既約表現が有限個であること (有限表現型) と, 籠を定めるグラフが (ADE 型の単純 Lie 環の) Dynkin 図形であることが同値であることを示した.

1.4 量子展開環

量子展開環 $U_v(\mathfrak{g})$ とは, Kac-Moody Lie 環の普遍展開環の量子変形であり, 変形パラメータ v を含み, “ $v = 1$ ” に特殊化することで普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ を復元することができる変数 v の有理関数体 $\mathbb{Q}(v)$ 上の非可換環, より正確には, 非可換, 非余可換な Hopf 代数である.

Definition 10 (量子展開環 $U_v(\mathfrak{g})$). 以下のようにルートデータから, 生成元 $\{q^h\}_{h \in P^*} \cup \{E_i\}_{i \in I} \cup \{F_i\}_{i \in I}$ と以下の関係式で定義される代数である.

$$\begin{aligned} q^h q^{h'} &= q^{h'} q^h \\ q^h E_i q^{-h} &= q^{\alpha_i(h)} E_i \\ q^h F_i q^{-h} &= q^{-\alpha_i(h)} F_i \\ [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}} \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} E_i^{(k)} E_j E_i^{(1-a_{ij}-k)} &= 0 \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} F_i^{(k)} F_j F_i^{(1-a_{ij}-k)} &= 0 \end{aligned}$$

ここで, $E_i^{(k)} = E_i^k / [k]_{q_i}!$, $F_i^{(k)} = F_i^k / [k]_{q_i}!$ を表し, $q_i = q^{(h_i, h_i)/2}$ であり, $[k]_{q_i}!$ は q_i から定まる “ q 整数” で定義される “ q -階乗” である. 最後の二つの関係式は q -Serre 関係式と呼ばれる.

量子展開環は Kac-Moody Lie 環とは逆の経路で, つまり生成元と関係式で定義したが, 実は, Drinfeld による “Hopf pairing” を $\{F_i\}_{i \in I}$ で生成される下三角部分環 $U_v^-(\mathfrak{g})$ に導入してやることで, 元々の Kac-Moody Lie 環と同じように, ある種な “非退化” 性をみたすものとして定義することが出来, 量子展開環全体は, 下三角部分環とその内積から定まる Drinfeld double とよばれる Hopf 代数になっている. また, q -Serre 関係式は, その内積を非退化にするための必要十分な関係式となっている (Lusztig).

1.5 Hall 代数と標準基底

Ringel は, Gabriel-Kac の定理をより自然に理解することを目指として, 表現のモジュライ (スタック) 上の関数に Hall 積とよばれる積を導入した. ここでは簡単のために有限体上のアーベル圏に話を制限する.

Definition 11 (Hall 代数). \mathbb{F}_q を q 個の元からなる有限体とし, \mathcal{A} を \mathbb{F}_q -アーベル圏とする. ここで \mathbb{F}_q アーベル圏とは, 各 Ext^i が全て \mathbb{F}_q 上のベクトル空間になっていて, 合成等の操作が \mathbb{F}_q 上のベクトル空間の間の操作になっていることをいう. また, \mathcal{A} は以下の条件を満たしていると仮定する.

- 任意の X, Y に対して, $\dim_{\mathbb{F}_q} \text{Ext}^i(X, Y) < \infty$
- $\text{gl. dim } \mathcal{A} < \infty$

このとき \mathcal{A} の対象の同型類の集合を $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ とするとき, $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ を基底とする \mathbb{C} ベクトル空間とする. このとき, $[X], [Y] \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ に対して,

$$[X] * [Y] := \sqrt{q}^{\chi(X, Y)} \sum_{[Z] \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}} \phi_{X, Y}^Z [Z]$$

とする. ここで, $\phi_{X,Y}^Z$ は Z 中の subobject であって, W であって, $Z/W \simeq X, W \simeq Y$ を満たすもの全体の数を表す. これは **Hall 数**と呼ばれる. このとき, $\phi_{X,Y}^Z$ は自然に,

$$0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$$

という形の完全列全体の集合を X の自己同型と Y の自己同型からなる群による (自由な) 作用によって割って得られる商集合の点の個数と同一視される. また, $\chi(X, Y)$ は \mathcal{A} における Euler 形式で,

$$\chi(X, Y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \text{Ext}^i(X, Y)$$

で定義される (対称とは限らない) Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{A})$ 上の bilinear form である.

C.Ringel は有限体における籠の表現のなすアーベル圏の Hall 代数を調べることで, 以下の定理を示した.

Theorem 12 (Ringel, Lusztig, Green). *5 \mathcal{Q} を loop を持たない籠とし, \mathfrak{g} を対応する Kac-Moody Lie 環, $U_v^-(\mathfrak{g})|_{v^2=q}$ を対応する量子展開環 (の $q = v^2$ への特殊化),

S_i を各頂点に対応する \mathcal{Q} の既約表現とすると, \mathcal{A} を $\{S_i\}_{i \in I}$ によって生成されるアーベル圏とする. このとき, 次の代数の埋め込みが存在する;

$$U_v^-(\mathfrak{g})|_{v^2=q} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}} : F_i^{(n)} \mapsto [S_i^{\oplus n}].$$

Ringel による Hall 代数の構成は, 有限体上の圏でしか意味をなさないが, Lusztig は彼のライフワークとでも言うべき指標層の理論 (有限簡約群の指標の理論を “sheaf-function dictionary” によって統制する偏屈層の理論) の類似を辿ることで, 籠の表現のモジュライスタック上の偏屈層, すなわち籠の表現のなす空間の上の同変偏屈層のクラスを用いて再定式化し, Hall 積を用いて, “量子展開環に相当する分” の偏屈層の圏を導入することで, Ringel-Hall 代数の “幾何学的な持ち上げ” を構成し, 標準基底の理論を創始した. Lusztig による標準基底は Grojnowski-Lusztig により, 柏原による (lower) 大域結晶基底と一致することが示され, (柏原) 結晶構造と呼ばれる組み合わせ構造で統制される. 標準基底ないし大域結晶基底は, 近年では圏化 (categorification) をスローガンに,

- (degenerate) affine Hecke 環や対称群の (モジュラー) 表現論における (モジュラー) 分岐則や分解係数を統制する理論 (Lascoux-Leclerc-Thibon-有木理論)
- Khovanov らによる結び目の量子不変量の圏化の研究に端を発する Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 (籠 Hecke 代数) の研究 (Khovanov-Lauda, Brundan-Kleschev, Rouquier)

においても基本的な対象として現れる重要な基底である (Khovanov-Lauda, Lauda-Vazirani, Varagnolo-Vasserot).

2 クラスタ代数

クラスタ代数は以下のデータによって定義される.

Definition 13. (1) $n \geq 1$ に対して, **seed** とは, 以下のデータから成る:

- edge loop と oriented 2-cycle を含まない籠 \mathcal{Q} で, 頂点集合が $\{1, 2, \dots, n\}$ であるもの.
- $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ は, 有理関数体 $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ を生成するもの.

(2) $(\mathcal{Q}, \mathbf{u})$ を seed とし, $k \in I$ を一つとる. k 方向の **seed mutation** とは, 以下で定まる seed である.

*5 Ringel は有限型の場合に証明し, 一般の場合には, Ringel の有限型の場合の計算と Lusztig による量子展開環 $U_v^-(\mathfrak{g})$ の特徴付けと内積と余積を用いた Green による証明がある. しかしながら, 量子展開環における内積と余積はすでに Lusztig が幾何学的に構成していた.

(M1): k を通る辺の組 $i \rightarrow k \rightarrow j$ に対して, i から j へ辺を加える.

(M2): k とつながっている辺*6をすべてひっくり返す.

(M3): (M1), (M2) の操作のあとに得られている籠から edge loop と 2-cycle をすべて削除する.

この籠を $\mu_k(Q)$ で表す. また, $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ に対して,

$$u_k^* = \frac{\prod_{i \rightarrow k} u_i + \prod_{k \rightarrow j} u_k}{u_k}$$

とし, $\mu_k(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \setminus \{u_k\}) \sqcup \{u_k^*\}$ と定義する. (上の関係式を exchange relation という.)

(3) $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ を有理関数体とする. $(\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}, Q)$ を seed (**initial seed**) とする. initial seed から seed mutation の有限回の繰り返しによって得られる seed に含まれる有理関数体の元たちのなす集合を **クラスター (cluster)** といい, クラスターに含まれる元を **クラスター変数 (cluster variable)** という. また, initial seed にふくまれるクラスター変数を **初期変数 (initial variable)** という. すべてのクラスター変数たちによって生成される環を **クラスター代数 (cluster algebra) \mathcal{A}_Q** という. *7

クラスター代数は以下のような非自明な部分環に含まれることが示される.

Theorem 14 (Laurent phenomenon [5]).

$$\mathcal{A}_Q \subset \mathbb{Z}[x_1^\pm, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm]$$

Remark 15. クラスター代数は, 代数トーラスを exchange relation にそって, 張り合わせた可換環であるが, その自然な量子化として籠の表現の (数値的)Grothendieck 群の籠の Euler 形式から定まる中心拡大である Heisenberg 群の群環である量子トーラスを “quantum exchange relation” によって張り合わせた量子クラスター代数という概念も定義されている [1, 4].

2.1 有限型のクラスター代数

さて, クラスター代数を定義したところで, ひとまず “統制がそれほどは難しくもない例” を理解することは重要である. よって以下の定義は妥当だと思われる.

Definition 16. 籠 Q が **クラスター有限 (cluster-finite)** であるとは, 籠 Q の生成するクラスター代数のクラスター変数のなす集合が有限集合であることをいう.

Fomin-Zelevinsky [6] は, クラスター有限な籠のクラスを以下のように特徴付けた.

Theorem 17 (分類定理 [6]). (1) クラスター有限であることと, Q が Dynkin 籠であることは同値である.

(2) Q を Dynkin 籠とすると, クラスター代数 \mathcal{A}_Q の初期変数ではないクラスター変数は Q に付随するルート系の正ルートの集合と 1:1 に対応する.

2.2 Caldero-Chapoton の公式

さて, 上の定理によって, 初期変数ではないクラスター変数と正ルートの集合との間に対応が付いたわけであるが, 一方 Gabriel の定理により, 各正ルートに対しては, 直既約表現が対応する. では, その2つの対応を介してクラスター変数は直既約表現と対応するわけであるが, その対応はより以下のように直既約表現に対応する籠グラスマン多様体の Euler 数の母関数という形で “具体的に” 記述される.

*6 始点ないし終点が k であるような辺

*7 ここで定義したクラスター代数は “cluster algebra without coefficients” と呼ばれているものである.

Theorem 18 (Caldero-Chapoton [2]). \mathcal{Q} を Dynkin 籠とし, $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} w_i \alpha_i$ を対応するルート系の正ルート, $M_{\mathcal{Q}}(\alpha)$ を正ルート α に対応する直既約表現とし, $\text{Gr}_V(M_{\mathcal{Q}}(\alpha))$ で, $M_{\mathcal{Q}}(\alpha)$ の次元ベクトルが V の部分表現全体のなす射影的多様体とする. (これを籠グラスマン多様体という.) このとき, α に対応するクラスター変数 $\text{CC}_{\mathcal{Q}}[\alpha]$ ^{*8} は以下の式で与えられる.

$$\text{CC}_{\mathcal{Q}}[\alpha] = \frac{1}{x_1^{w_1} \cdots x_n^{w_n}} \sum_{0 \leq V \leq \alpha} \chi(\text{Gr}_V(M_{\mathcal{Q}}(\alpha))) \prod_{h \in \Omega} x_{\text{out}(h)}^{w_{\text{in}(h)} - v_{\text{in}(h)}} x_{\text{in}(h)}^{v_{\text{out}(h)}}$$

上の公式を Caldero-Chapoton の公式という.

“rigid な” 直既約表現^{*9}は, 籠の表現多様体の中で, open-dense な軌道をなし, 籠が oriented cycle を含まないとき, 標準基底の元をなすことが知られている. また, “rigid な” 直既約表現の籠グラスマン多様体は, グラスマン多様体上のあるベクトル束の total space から籠の表現のなす多様体への自然な射影射に関する “一般の点” におけるファイバーであり, 滑らかな射影代数多様体である. 上の式は自然な “rigid な” 直既約表現の定める双対標準基底とグラスマン多様体上のあるベクトル束の全空間から籠の表現のなす多様体への自然な射影射から得られる半単純複体との pairing の母関数と理解することも出来, ある種の正値性を持っていることが一般に期待される. 最後に Caldero-Reineke [3] による “予想”^{*10} を述べておきたい.

Conjecture 19. \mathcal{Q} を oriented cycle を含まない籠とする. このときクラスター代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ のクラスター変数はすべて, $\mathbb{Z}_{\geq 0}[u_1^{\pm}, u_2^{\pm}, \dots, u_n^{\pm}]$ に含まれる.

参考文献

- [1] A. Berenstein and A. Zelevinsky, **Quantum cluster algebras**, *Advances in Mathematics* **195** (2005), no. 2, 405–455.
- [2] P. Caldero and F. Chapoton, **Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations**, *Commentarii mathematici helvetici* **81** (2006), no. 3, 595.
- [3] P. Caldero and M. Reineke, **On the quiver Grassmannian in the acyclic case**, *Journal of Pure and Applied Algebra* **212** (2008), no. 11, 2369–2380.
- [4] VV Fock and AB Goncharov, **The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties**, *Inventiones Mathematicae* **175** (2009), no. 2, 223–286.
- [5] S. Fomin and A. Zelevinsky, **Cluster algebras I: foundations**, *Journal of the American Mathematical Society* **15** (2002), no. 2, 497–529.
- [6] ———, **Cluster algebras II: Finite type classification**, *Inventiones Mathematicae* **154** (2003), no. 1, 63–121.
- [7] B. Keller, **Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories**, eprint arXiv: 0807.1960 (2008).

^{*8} CC は Caldero-Chapoton の略でもあり, “クラスター指標 (cluster character)” の略でもある.

^{*9} \mathcal{Q} が Dynkin であるときは, すべての直既約表現は rigid である.

^{*10} 彼らの論文によれば以下の予想は定理となっているが, 今のところ修正出来ないギャップが存在し, 予想になっている [7]

非同次線形常微分方程式系のLyapunov数の評価と その決定条件について

李 炯宙 (電気通信大学・情報工学専攻・修士1年次)

2010年2月15日

1 導入

この講演では次のような非同次線形微分方程式系

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) \quad (t \in [t_0, \infty))$$

を考える．ここで $n \times n$ 行列値関数 $A(t) = (a_{ij}(t))$ とベクトル値関数 $f(t) = {}^t(f_1(t), \dots, f_n(t))$ は $t \geq t_0$ で連続とする．このような非同次系に関する議論は $f(t) \equiv 0$ である同次系

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x$$

に基づいている．例えば，(2)の基本行列を $X(t)$ としたとき，(1)の一般解 $y(t)$ は，任意の $c \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(3) \quad y(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds$$

と表される．この公式に着目すると，非同次系の解の性質を調べるとき，それに相応する同次系の結果をどれだけ拡張できるのかが鍵になる．特に我々は方程式(1)の解の時間無限大における漸近挙動を調べたいが，(1)の解が(2)の解と同じ挙動をとるための条件が何かを求めるという観点で研究を進める．また，解の挙動を調べるものとして次節で説明する Lyapunov 数を用いる．

2 Lyapunov数と同次系における既知の結果

ベクトル値関数 $x(t) = {}^t(x_1(t), \dots, x_n(t))$ の Lyapunov 数 $\lambda(x)$ は次のように定義される．

$$(4) \quad \lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|x(t)\|}{t}$$

例 1

$$\lambda(e^{\alpha t} t^\beta) = \alpha, \quad \lambda(e^{t^2}) = \infty, \quad \lambda(t^\beta) = 0$$

つまり或る関数 $x(t)$ の Lyapunov 数が α であることは，十分大きい時間において $x(t)$ が $e^{\alpha t}$ と比較できるぐらいの割合で増加することを意味する．Lyapunov 数が(1)や(2)の解の挙動を測る量として有効であることについて説明する．(2)で $A(t) \equiv A$ の場合，その一般解 $x(t)$ は

$$(5) \quad \|x(t)\| = O(e^{\alpha t} t^\beta) \quad (t \rightarrow \infty)$$

を満たすことが知られている．但し， α は A の固有値の実部の最大値， β は固有値の重複度より定まる正数である．変数係数の場合でも係数行列が有界であれば(5)のような形の挙動をとるこ

とが予想される．そこで定数係数の固有値のように，(5)における α を測る量が想定されるが，それが Lyapunov 数である．実際に $A(t) \equiv A$ の場合，その解の Lyapunov 数は固有値の実部の最大値と一致する．

さて Lyapunov 数の重要な性質について述べると， $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ に対して

$$(6) \quad \lambda(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(x_i)$$

が成り立つ．また Lyapunov 数の異なる関数は互いに 1 次独立であることが知られている．ところが (2) の 1 次独立な解は n 個しかないので，(2) の解の Lyapunov 数は高々 n 個しかない．この高々 n 個の Lyapunov 数の評価に関して幾つかの研究が進んでいるが [1,2,3]，特にこの Lyapunov 数を等号で決定する研究 [4,5] に注目したい．その出発点として $A(t)$ が対角行列の場合を考えると，方程式 (2) は $x'_j = a_{jj}(t)x_j$ ($j = 1, \dots, n$) となるので $x_j(t) = x_j(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a_{jj}(\tau) d\tau\right)$ より $\lambda(x_j) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} a_{jj}(\tau) d\tau$ と解の Lyapunov 数が簡単に求まる．そこでもし対角行列でなくても，非対角成分が 0 に収束する形であれば同じく Lyapunov 数を定めることができるかが考えられる．それを解明したのが次の Perron の定理である．

定理 1 (Perron [4]) 方程式 (2) が次の条件を満たすとする．

$$(7) \quad \operatorname{Re} a_{ii}(t) - \operatorname{Re} a_{i+1, i+1}(t) \geq c > 0 \quad (t \geq T > t_0, i = 1, \dots, n-1)$$

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_{ik}(t) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n, i \neq k)$$

このとき (2) の解の Lyapunov 数 λ_i ($i = 1, \dots, n$) は次の等式を満たす．

$$(9) \quad \lambda_i = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} a_{ii}(\tau) d\tau$$

この定理の条件 (7) を弱めたものとして次の定理が知られている．

定理 2 ([5]) ある正数 $N, r (N \geq r \geq n), \varepsilon$ と $\int_{t_0}^{\infty} \eta(t) dt < \infty$ を満たす実数値関数 $\eta(t) > 0$ について方程式 (2) の $A(t)$ が次の不等式を満たすとする．

$$(10) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\eta(t) + \operatorname{Re} a_{ii}(t) - A_i(t) - \left(N + n - 2 + \frac{n}{r} + \varepsilon \right) \left(1 + \frac{1}{r} \right)^{i-1} A^*(t) \right] dt \geq \log \frac{r}{N}$$

$$(t_0 \leq t_1 < t_2 < \infty, i = 1, 2, \dots, n-1)$$

ただし $A^*(t) = \max\{|a_{ij}(t)| \mid i \neq j\}$, $A_k(t) = \max\{\operatorname{Re} a_{jj}(t) \mid k+1 \leq j \leq n\}$ である．このとき (2) の解の Lyapunov 数 λ_i ($i = 1, \dots, n$) は次の不等式を満たす．

$$\left| \lambda_i - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} a_{ii}(\tau) d\tau \right| \leq \frac{n-1}{r+1-n} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t A^*(\tau) d\tau$$

定理 2 の条件を分かりやすく与えたのが，次の系である．

系 1 ([5]) 方程式 (2) が次の条件を満たすとする．

$$(11) \quad \operatorname{Re} a_{ii}(t) - \operatorname{Re} a_{i+1, i+1}(t) > 0 \quad (t \geq T > t_0, i = 1, \dots, n-1)$$

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_{ik}(t) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n, i \neq k)$$

このとき (2) の解の Lyapunov 数 λ_i ($i = 1, \dots, n$) は (9) を満たす．

この系の条件 (11) は (7) を含めていることより，定理 2 は定理 1 を弱めたものと言える．

以下，定理 1 と定理 2 の証明の概略について述べる．まず $\lambda(x^1) = \lambda_1$ となるような (2) の解 x^1 を構成し， x^1 を用いて後述する Perron の変換により $\lambda(x^i) = \lambda_i$ となる解 x^i ($i = 2, \dots, n$) を

構成する．このとき解の Lyapunov 数を定める方法はベクトル解の一つの成分の表現公式に基づいている．(2) の解 $x = (x_1, \dots, x_k)$ に対して， $\lambda(x)$ を定めることは (6) より $\max_{1 \leq k \leq n} \lambda(x_k)$ を定めることになる． $x_k(t) \neq 0$ ($t \geq 0$) の場合， $x_k(t)$ は

$$(13) \quad x_k(t) = x_k(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(a_{kk}(\tau) + \sum_{j \neq k}^n a_{kj}(\tau) \frac{x_j(\tau)}{x_k(\tau)} \right) d\tau \right\}$$

と表現される．ここで Lyapunov 数を (9) のように定めるためには，項 $a_{kj}(\tau) \frac{x_j(\tau)}{x_k(\tau)}$ ($j \neq k$) の影響が $x_k(t)$ の挙動に現れないようにする必要がある．それが定理 1 の条件 (7) と定理 2 の条件 (11) の役割である．詳しくはそれぞれ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{x_j}{x_k} \right| = 0, \quad \left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \frac{1}{r-1+n} \quad (j \neq k, r \geq n)$$

を示すための条件である．

3 非同次系における主結果

この説では定理 2 の議論を非同次系に拡張して得られた結果について述べる．方針としては方程式 (1) の係数行列 $A(t)$ に関して (10) を仮定したとき，その解の Lyapunov 数が同次系と同じように (9) と決まるための条件を調べる．その結果を示す前に次のことに注意しておく．非同次系は同次系とは異なり，一般に解の Lyapunov 数が高々 n 個であるとは限らない．なぜなら非同次系の場合は 1 次独立な n 組の解が見つかって，一般解をそれらの 1 次結合で表わすことができないためである．この点は同次系と非同次系の本質的な相違点であり，この説で構成する非同次系の n 組の特殊解を用いて一般解の挙動を特定することは難しい．

定理 3 $N \geq r \geq n + \frac{1}{2}$, $\alpha > 1$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の不等式を満たすとする．

$$(14) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{Re} a_{ii}(t) - A_i(t) - \left(N + n - 2 + \frac{n}{r} + \varepsilon \right) \left(1 + \frac{1}{r} \right)^{i-1} A^*(t) - \frac{2}{t^\alpha} \right] dt \geq \log \frac{r}{N}$$

($t_0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n-1$)．また $f^*(t) = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)|$ とおき

$$(15) \quad f^*(t) = O(t^{-\alpha}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

かつ

$$(16) \quad \int_{t_0}^t \left[\operatorname{Re} a_{ii}(\tau) - \left(n - 2 + \frac{1}{r} \right) A^*(\tau) - \frac{1 + \varepsilon}{\tau^\alpha} \right] d\tau \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

が成り立つと仮定する．このとき，(1) の解 y^i ($i = 1, \dots, n$) が存在し，

$$\left| \lambda(y^i) - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} a_{ii}(\tau) d\tau \right| \leq \frac{n-1}{r+1/2-n} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t A^*(\tau) d\tau$$

を満たす．ただし， $\alpha_n = 1/r - n + 1/2$ である．

この定理の条件を系 1 のように分かりやすい形で与えよう．

系 2 $\alpha > 1$ とする．微分方程式 (1) に対して条件 (7),(8) かつ (15) を仮定する．さらに，

$$(17) \quad \operatorname{Re} a_{ii}(t) \geq (n-1)A^*(t) + \frac{2}{t^\alpha} \quad (t \geq t_0, i = 1, \dots, n)$$

が成立するならば，(1) の解 y^1, \dots, y^n が存在し，その Lyapunov 数がそれぞれ (9) と一致する

ここで条件 (17) は (16) に相応するものである .

例 2 $a > b > 0, \alpha > 1$ とする

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{t^\alpha} \\ \frac{1}{t^\alpha} & b \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^\alpha} \\ \frac{1}{t^\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} a_{11}(\tau) d\tau = a, \quad \lambda_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} a_{22}(\tau) d\tau = b$$

以下定理 3 の証明の概略を述べる . まず定理 2 のように $\lambda(y^1) = \lambda_1$ となるような (1) の解 y^1 を構成する . 次はこの y^1 を用いて他の解を構成したいところであるが , (3) から分かるように非同次系の解は同次系の解を用いて構成することが有効であると思われる . そこで定理 2 で構成した (2) の解 x^1 を用いて (1) の解 $y^k = (y_{1k}, \dots, y_{nk})$ ($k = 2, \dots, n$) を次のように定める .

$$y_{1k} = x_1 \int u_k dt$$

$$y_{ik} = x_i \int u_k dt + z_{ik} \quad (i, k = 2, \dots, n)$$

この変換は同次系 (2) に対して Perron[4] が最初に考案したものである . また解 y^1 の成分 y_{11} は

$$(18) \quad y_{11}(t) = y_{11}(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(a_{11}(\tau) + \sum_{j=2}^n a_{1j}(\tau) \frac{y_{j1}(\tau)}{y_{11}(\tau)} + \frac{f_1(\tau)}{y_{11}(\tau)} \right) d\tau \right\}$$

と表わされる . この式において , 同次系にはなかった項 f_1/y_{11} をうまく評価することが定理 3 における最大の難点である . その一つの方法として非同次項の形を $f(t, y)$ としておき , $\|f(t, y)\|/\|y\|$ に直接条件を与えて評価することが用いられる [1] . しかし , ここでは f_1/y_{11} をそのままの形で評価したい . 実際には $y_{11}(t)$ の下からの評価がポイントであるが , $|y_{11}(t_0)| > M$ と与えたとき , (16) を仮定すれば $|y_{11}(t)| > M$ ($t \geq t_0$) が成り立つことを示す . その証明は背理法によるが , そこで矛盾を出すようにして求められた条件が (17) である . 従って , $|y_{11}(t)| > M$ と (15) より $|f_1/y_{11}| = O(t^{-\alpha})$ ($t \rightarrow \infty$) が得られる . 以上の評価に基づけば最終的に $\lambda(y_{11}) = \lambda_1$ が示せる .

注意 同次系の解と同じ挙動をするように非同次系の解を構成するときに , 定理 3 の構成法では非同次項 f を小さくする条件 (15) だけでなく , 係数行列 $A(t)$ に関してもさらに条件 (16) が必要 . 条件 (16) または (17) は $A^*(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) のとき $\operatorname{Re} a_{kk}(t) > 0$ ($t > T$) と見なすことができるが , これは (9) より $\lambda(y_{kk}) \geq 0$ を意味する . 即ち定理 3 は , Lyapunov 数が非負である解の中で , それが $A(t)$ の対角成分より決まる n 個の解を定めたことになる . そこで , 条件 (16) を弱め , $\operatorname{Re} a_{kk}(t) \leq 0$ の場合でも Lyapunov 数を (9) と決定できるための条件を求めることが今後の課題として考えられる .

参考文献

- [1] N. A. Izobov and R. A. Prokhorova, Differ. Uravn., 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1687–1693.
- [2] N. A. Izobov and R. A. Prokhorova, Differ. Uravn., 2006, vol. 42, no. 12, pp. 1612–1625.
- [3] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Math. Ser. No. 22, Princeton Univ. Press, 1960.
- [4] O. Perron, Math. Z. **31** (1930), 748–766.
- [5] S. H. Wang and J. H. Mai, Acta Math. Sinica (Chinese Ser.) **40** (1997), no. 6, 901–912.

等号付き多重ゼータ値の特殊値について

九大数理 田坂 浩二

概要

古典的なリーマンゼータ関数とは s を複素変数として $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$ と定義されるものである。この関数の正の偶数点での値（リーマンゼータ値）に対する最初の結果は、オイラーの 1735 年に書いた論文 [4] に初めて現れた。そこでは、 $\zeta(s)$ の $s = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ におけるの厳密な値が求められている。今日では一般の正の偶数点におけるベルヌーイ数を用いた公式： $\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$ はよく知られている。本講演では、リーマンゼータ値のある種の一般化である多重ゼータ値というもの（有理数） $\times (\pi^2)$ の冪と書ける特殊値について最近得られた結果と今後の課題を紹介する。この結果は九州大学の田中立志、若林徳子、今富耕太郎との共同研究で得られたものである。

1 Introduction

リーマンゼータ関数の正の偶数点での値（リーマンゼータ値）のある種の一般化である多重ゼータ値および等号付き多重ゼータ値とはそれぞれ、 n 個の整数変数 $k_1 \geq 2, k_2, \dots, k_n \geq 1$ に対し

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}},$$
$$\zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で定義されるものである。しばしば $k_1 + \dots + k_n$ を重さといい、 n を深さという。

多重ゼータ値または等号付き多重ゼータ値が（有理数） $\times (\pi^2)$ の冪でかけるものについて、ここ数十年のうちに知られている結果をいくつか列挙する。

$$(1) \quad \zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_m) = \frac{\pi^{2m}}{(2m+1)!} \quad (m \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

この公式は $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ の無限積表示を用いるものや、多重ゼータ値の‘調和積’ルールから示されるなど、何通りかの証明が与えられている¹。より一般に、 $k > 0$ に対し、 $\zeta(\underbrace{2k, \dots, 2k}_m) \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{2km}$ も知られている。

$$(2) \quad \zeta(\underbrace{3, 1, \dots, 3, 1}_{2n}) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}.$$

この公式は 1994 年に Zagier [10] で予想され、1998 年に Borwein, Bradley, Broadhurst, Lisoněk が [2] で多重ゼータ値の反復積分表示に関するある種の性質を使って証明を与えた。Zagier も自ら、Gauss の超幾何関数との関連からこのことを証明している（参照：[7]）。

$$(3) \quad \sum_{\substack{m_0 + m_1 + \dots + m_{2n} = 1 \\ m_0, m_1, \dots, m_{2n} \geq 0}} \zeta(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1\{2\}^{m_2}, \dots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}}) = \frac{\pi^{4n+2}}{(4n+3)!}.$$

ここで $\{2\}^n = \underbrace{(2, \dots, 2)}_n$ である。この和は、 $\underbrace{(3, 1, \dots, 3, 1)}_{2n}$ の間に 2 を 1 箇所入れたインデックス全体に対する多重ゼータ値を足しあげたものである。

¹最初に証明が与えられたのはおそらく 1992 年の文献 [5] においてである。そこに C. Moen の予想という記述もあるが、多くの専門家はオイラーも気づいていたと考えている。

$$(4) \quad \sum_{\substack{m_0+m_1+\dots+m_{2n}=m \\ m_0, m_1, \dots, m_{2n} \geq 0}} \zeta(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1, \{2\}^{m_2}, \dots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}}) = \frac{\binom{m+2n}{m} \pi^{2m+4n}}{(2n+1)(2m+4n+1)!}.$$

これは, (3) において 2 の個数を一般の m 個に拡張したものであり, 2002 年に Bowman-Bradley [3] において示されている.

この話題で今も未解決な問題が [2] に記してある. これは (4) において, (有理数) \times (π^2 の冪) となる最も原始的な和であろうものである.

予想 1 (Borwein-Bradley-Broadhurst-Lisoněk[2]). $S = (m_0, m_1, \dots, m_{2n})$ を各成分が非負整数のベクトルとし, $m = m_0 + \dots + m_{2n}$ とおく. $n + m > 0$ に対し,

$$\mathfrak{z}(S) := \zeta(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1, \{2\}^{m_2}, \dots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}})$$

とする. \mathfrak{C}_{2n} は $2n$ 次の巡回置換全体 ($\mathfrak{C}_0 := \{id\}$) とし, $\sigma \in \mathfrak{C}_{2n}$ の S への作用を $\sigma S = (m_{\sigma(0)}, \dots, m_{\sigma(2n)})$ と定義する. このとき, 次が成立する:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{C}_{2n}} \mathfrak{z}(\sigma S) \stackrel{?}{=} \frac{\pi^{2m+4n}}{(2m+4n+1)!}.$$

多重ゼータ値におけるこれらの結果の等号付き多重ゼータ値における類似はそれほど知られていないが, 最近になって Zlobin[11](2005 年) や宗田 [8](2008 年) によって

$$\begin{aligned} \zeta^*(\{2k\}^m) &\in \mathbb{Q} \cdot \pi^{2km}, \quad \zeta^*(\{3, 1\}^n) \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{4n}, \\ \sum_{\substack{m_0+m_1+\dots+m_{2n}=1 \\ m_0, m_1, \dots, m_{2n} \geq 0}} \zeta^*(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1, \dots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}}) &\in \mathbb{Q} \cdot \pi^{4n+2} \end{aligned}$$

が示されている. ここに, $\{3, 1\}^n := \underbrace{(3, 1, \dots, 3, 1)}_{2n}$ である.

2 主結果と予想

我々は今回, 以下のことを示すことができた.

定理 1 ([6]). $n \geq 0$ に対し, 次が成立する:

$$\sum_{\substack{m_0+m_1+\dots+m_{2n}=2 \\ m_0, m_1, \dots, m_{2n} \geq 0}} \zeta^*(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1, \dots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}}) \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{4n+4}$$

次節で, この定理の証明の方針を述べる. さらに予想 1 の等号付き多重ゼータ値に関する類似物を予想できたので紹介する ([6] も参照). それを述べるためにいくつか記号を準備する.

予想 1 で述べた \mathfrak{z} と同様に $\bar{\mathfrak{z}}$ を

$$\bar{\mathfrak{z}}(m_0, m_1, \dots, m_{2n}) := \zeta^*(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1, \{2\}^{m_2}, \dots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}})$$

で定義する. ベクトル $S = (m_0, \dots, m_n)$ に対し, 2 つのシフト操作を $S_+ = (m_0, \dots, m_n, 0)$, $S^+ = (m_0, \dots, m_n + 1)$ と定義する. また \mathfrak{S}_{n+1} を $(n+1)$ 次対称群とし, $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ の S への作用を $\sigma S = (m_{\sigma(0)}, \dots, m_{\sigma(n)})$ で定める.

予想 2. A) n を正の整数とする. $S = (m_0, \dots, m_{2n-1})$ を各成分が非負整数のベクトルとし, $m = m_0 + \dots + m_{2n-1}$ とおく. このとき, 次が成立する:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \bar{\mathfrak{z}}((\sigma S)_+) \stackrel{?}{\in} \mathbb{Q} \cdot \pi^{2m+4n}.$$

B) $S = (m_0, m_1, \dots, m_{2n})$ を各成分が非負整数のベクトルとし, $m = m_0 + \dots + m_{2n}$ とおく. $n + m > 0$ に対し次が成立する:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}} \overline{3}((\sigma S)^+) \stackrel{?}{\in} \mathbb{Q} \cdot \pi^{2m+4n+2}.$$

また, より具体的な以下の予想もある.

予想 3. C) 非負整数 n, m に対し, 以下が成立する:

$$\zeta^*({2}^n, 3, {2}^m, 1) + \zeta^*({2}^m, 3, {2}^n, 1) \stackrel{?}{=} \zeta^*({2}^{n+1})\zeta^*({2}^{m+1}).$$

D) 非負整数 n に対し, 以下が成立する:

$$(2n+1)\zeta^*({3, 1}^n, 2) \stackrel{?}{=} \sum_{i+j=n} \zeta^*({3, 1}^i)\zeta^*({2}^{2j+1}).$$

E) 正整数 n に対し, 以下が成立する:

$$\sum_{\substack{m_0+m_1+\dots+m_{2n-1}=1 \\ m_0, m_1, \dots, m_{2n-1} \geq 0}} \zeta^*({2}^{m_0}, 3, {2}^{m_1}, 1, \dots, 3, {2}^{m_{2n-1}}, 1) \stackrel{?}{=} \sum_{i+j=n-1} \zeta^*({3, 1}^i, 2)\zeta^*({2}^{2j+2}).$$

3 定理 1 の証明の概要

\mathfrak{H} を \mathbb{Q} 上の 2 変数非可換多項式環 $\mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ とし, その部分環 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ を $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ で定める. $k \geq 1$ に対し, $z_k = x^{k-1}y$ とおく. \mathbb{Q} -線形写像 $Z, \overline{Z}: \mathfrak{H}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Z(z_{k_1}z_{k_2} \cdots z_{k_n}) = \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad Z(1) = 1, \quad \overline{Z}(z_{k_1}z_{k_2} \cdots z_{k_n}) = \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad \overline{Z}(1) = 1$$

と定義する. 等号付き多重ゼータ値は, 定義級数の和の等号と不等号を分けて考えることにより, 多重ゼータ値の線形和としてかけることがわかる. 例えば,

$$\zeta^*(k_1, k_2) = \sum_{n \geq m \geq 1} \frac{1}{n^{k_1}m^{k_2}} = \sum_{n > m > 0} \frac{1}{n^{k_1}m^{k_2}} + \sum_{n=m \geq 1} \frac{1}{n^{k_1}m^{k_2}} = \zeta(k_1, k_2) + \zeta(k_1 + k_2). \quad (*)$$

これを \mathfrak{H} 上の線形写像に対応させる. $\gamma \in \text{Aut}(\mathfrak{H})$ を \mathfrak{H} の生成元 x, y に対し $\gamma(x) = x, \gamma(y) = x + y$ で定まるものとする. \mathbb{Q} -線形写像 $d: \mathfrak{H}^1 \rightarrow \mathfrak{H}^1$ を $w \in \mathfrak{H}$ に対し, $d(wy) = \gamma(w)y$ と定義する. このとき, 等号付き多重ゼータ値が多重ゼータ値の線形和として書けるというのは, $\overline{Z} = Z \circ d$ が成立することを意味する. 例えば, 先ほどの式 (*) はこれを用いて, 以下のように書ける:

$$\zeta^*(k_1, k_2) = \overline{Z}(z_{k_1}z_{k_2}) = Z \circ d(z_{k_1}z_{k_2}) = Z(z_{k_1}z_{k_2} + z_{k_1+k_2}) = \zeta(k_1, k_2) + \zeta(k_1 + k_2).$$

\mathbb{Q} -双線形写像 $*$: $\mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \rightarrow \mathfrak{H}^1$ を任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ と正整数 k_1, k_2 に対し次のように定義する:

$$1 * w = w * 1 = w,$$

$$z_{k_1}w * z_{k_2}w' = z_{k_1}(w * z_{k_2}w') + z_{k_2}(z_{k_1}w * w') + z_{k_1+k_2}(w * w').$$

特に, Z は積 $*$ に関して準同型となる. この積はちょうど多重ゼータ値を掛けたときに生ずる級数の取り方に対応している.

例 1. 正整数 k, l に対し, 次が成り立つ:

$$\zeta(k)\zeta(l) = Z(z_k)Z(z_l) = Z(z_k * z_l) = Z(z_kz_l + z_lz_k + z_{k+l}) = \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k + l).$$

また, \mathbb{Q} -双線形写像 $\tilde{\mathfrak{m}} : \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \rightarrow \mathfrak{H}^1$ を帰納的に

$$1 \tilde{\mathfrak{m}} w = w \tilde{\mathfrak{m}} 1 = w \quad (w \in \mathfrak{H}^1),$$

$$z_{k_1} w_1 \tilde{\mathfrak{m}} z_{k_2} w_2 = z_{k_1} (w_1 \tilde{\mathfrak{m}} z_{k_2} w_2) + z_{k_2} (z_{k_1} w_1 \tilde{\mathfrak{m}} w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1, k_1, k_2 \geq 1)$$

で定める. ([9] を参照)

定理 2. a, b, c を正整数とする. $n \geq 0$ に対し, 次が成り立つ:

$$(\alpha_n) \quad d(z_c^2 \tilde{\mathfrak{m}} (z_a z_b)^n) = 2 \sum_{i+j=n} d(z_c \tilde{\mathfrak{m}} (z_a z_b)^i) * z_{(a+b)j+c} + \sum_{i+j=n} (z_c^2 \tilde{\mathfrak{m}} (z_a z_b)^i) * d(z_{a+b}^j)$$

$$- 2 \sum_{i+j+k=n} d((z_a z_b)^i) * (z_{(a+b)j+c} * z_{(a+b)k+c} - z_{(a+b)(j+k)+2c})$$

$$- \sum_{i+j=n} d((z_a z_b)^i) * z_{(a+b)k+2c},$$

$$(\beta_n) \quad d(z_c^2 \tilde{\mathfrak{m}} z_b (z_a z_b)^n) = 2 \sum_{i+j=n} d(z_c \tilde{\mathfrak{m}} z_b (z_a z_b)^i) * z_{(a+b)j+c} + \sum_{i+j=n} (z_c^2 \tilde{\mathfrak{m}} z_b (z_a z_b)^i) * d(z_{a+b}^j)$$

$$- 2 \sum_{i+j+k=n} d(z_b (z_a z_b)^i) * (z_{(a+b)j+c} * z_{(a+b)k+c} - z_{(a+b)(j+k)+2c})$$

$$- \sum_{i+j=n} d(z_b (z_a z_b)^i) * z_{(a+b)k+2c}.$$

証明は, n に関する帰納法を用いて, 両辺をうまく変形していくことで与えられる. この定理の (α_n) において $a = 3, b = 1, c = 2$ とおき, Z を施すことにより, これまでに述べた結果を用いることで, 定理 1 が示される. 定理 2 の一般化を考えたときに, 一番困難なところは定理の右辺を予想することにある. この定理の z_c の冪が一般の $n > 0$ であるとき, 右辺にどのような式が現れるか今のところ見当がつかない.

参考文献

- [1] T. Arakawa, M. Kaneko, *On multiple zeta values and multiple L-values*, lecture note (in Japanese), <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/>.
- [2] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisoněk, *Combinatorial Aspects of Multiple Zeta Values*, Electron. J. Combin. 5 (1998), Research paper 38, 12 pp.(electronic)
- [3] D. Bowman, D. M. Bradley, *The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values*, J. Combin. Theory Ser. A 97 (2002), 43–61.
- [4] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 123–134.
- [5] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. 152 (1992), 275–290.
- [6] K. Imatomi, T. Tanaka, K. Tasaka, N. Wakabayashi, *On some combinations of multiple zeta-star values*, preprint.
- [7] M. Kontsevich, D. Zagier, “Periods” in *Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond*, Springer, Berlin, 2001, 771–808.
- [8] S. Muneta, *On some explicit evaluations of multiple zeta-star values*, J. Number Theory 128 (2008), no. 9, 2538–2548.
- [9] S. Muneta, *A note on evaluations of multiple zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc, 137 (2009), no. 3, 931–935.
- [10] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [11] S. A. Zlobin, *Generating functions for the values of a multiple zeta function*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 2 (2005), 55–59; English transl., Moscow Univ. Math. Bull. 60:2 (2005), 44–48.

SMOOTH FANO POLYTOPES ARISING FROM FINITE POSETS

AKIHIRO HIGASHITANI

[This study is a joint work with Prof. Takayuki Hibi.]

ABSTRACT. Gorenstein Fano polytopes arising from finite posets will be introduced. Then we study the problem of which posets yield smooth Fano polytopes.

INTRODUCTION

An integral (or lattice) polytope is a convex polytope all of whose vertices have integer coordinates. Let $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ be an integral convex polytope of dimension d .

- We say that \mathcal{P} is a *Fano polytope* if the origin of \mathbb{R}^d is a unique integer point belonging to the interior of \mathcal{P} .
- A Fano polytope \mathcal{P} is called *terminal* if each integer point belonging to the boundary of \mathcal{P} is a vertex of \mathcal{P} .
- A Fano polytope \mathcal{P} is called *canonical* if \mathcal{P} is not terminal, i.e., there is an integer point belonging to the boundary of \mathcal{P} which is not a vertex of \mathcal{P} .
- A Fano polytope is called *Gorenstein* if its dual polytope is integral. (Recall that the dual polytope \mathcal{P}^\vee of a Fano polytope \mathcal{P} is the convex polytope which consists of those $x \in \mathbb{R}^d$ such that $\langle x, y \rangle \leq 1$ for all $y \in \mathcal{P}$, where $\langle x, y \rangle$ is the usual inner product of \mathbb{R}^d .)
- A *\mathbb{Q} -factorial Fano polytope* is a simplicial Fano polytope, i.e., a Fano polytope each of whose faces is a simplex.
- A *smooth Fano polytope* is a Fano polytope such that the vertices of each facet form a \mathbb{Z} -basis of \mathbb{Z}^d .

Thus in particular a smooth Fano polytope is \mathbb{Q} -factorial Fano, Gorenstein and terminal.

Øbro [6] succeeded in finding an algorithm which yields the classification list of the smooth Fano polytopes for given d . It is proved in Casagrande [1] that the number of vertices of a Gorenstein \mathbb{Q} -factorial Fano polytope is at most $3d$ if d is even, and at most $3d - 1$ if d is odd. B. Nill and M. Øbro [5] classified the Gorenstein \mathbb{Q} -factorial Fano polytopes of dimension d with $3d - 1$ vertices. Gorenstein Fano polytopes are classified when $d \leq 4$ by Kreuzer and Skarke [3], [4]. The study on the classification of terminal or canonical Fano polytopes was done by Kasprzyk [2].

In this talk, given a finite poset P we introduce a terminal Gorenstein Fano polytope \mathcal{X}_P . Then we study the problem of which posets yield \mathbb{Q} -factorial Fano polytopes. Finally, it turns out that the Fano polytope \mathcal{X}_P is smooth if and only if \mathcal{X}_P is \mathbb{Q} -factorial.

1. FANO POLYTOPES ARISING FROM FINITE POSETS

Let $P = \{y_1, \dots, y_d\}$ be a finite poset and $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$, where $\hat{0}$ (resp. $\hat{1}$) is a unique minimal (resp. maximal) element of \hat{P} with $\hat{0} \notin P$ (resp. $\hat{1} \notin P$). Let $y_0 = \hat{0}$ and $y_{d+1} = \hat{1}$. We say that $e = \{y_i, y_j\}$, where $0 \leq i, j \leq d+1$ with $i \neq j$, is an *edge* of \hat{P} if e is an edge of the Hasse diagram of \hat{P} . (The Hasse diagram of a finite poset can be regarded as a finite undirected graph.) In other words, $e = \{y_i, y_j\}$ is an edge of \hat{P} if y_i and y_j are comparable in \hat{P} , say, $y_i < y_j$, and there is no $z \in P$ with $y_i < z < y_j$.

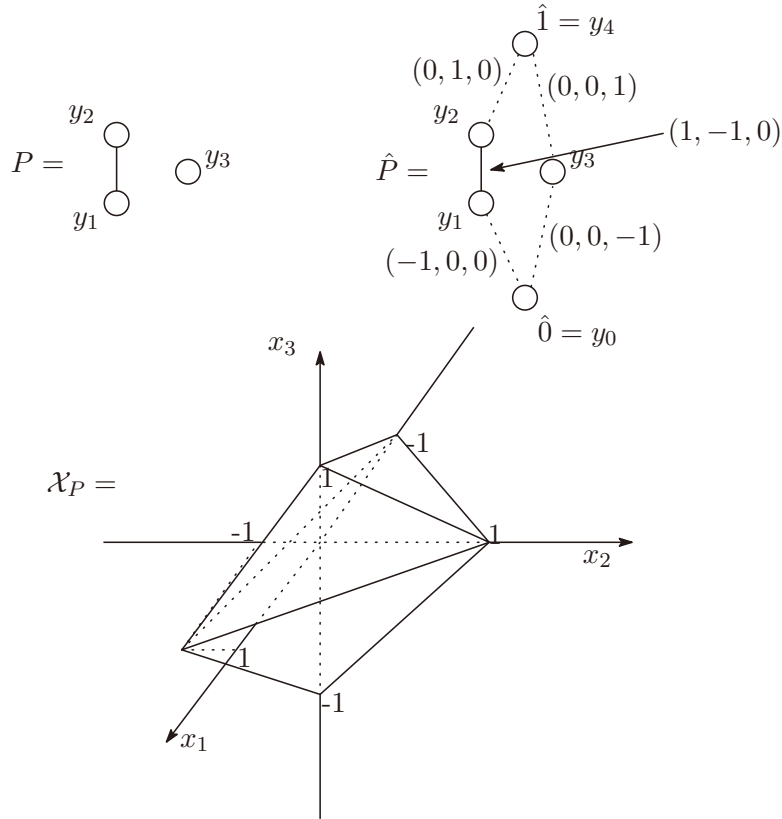
Definition 1.1. Let $\hat{P} = \{y_0, y_1, \dots, y_d, y_{d+1}\}$ be a finite poset with $y_0 = \hat{0}$ and $y_{d+1} = \hat{1}$. Let $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, d$, denote the i th canonical unit coordinate vector of \mathbb{R}^d . Given an edge $e = \{y_i, y_j\}$ of \hat{P} with $y_i < y_j$, we define $\rho(e) \in \mathbb{R}^d$ by setting

$$\rho(e) = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \quad \text{for } 0 \leq i, j \leq d+1,$$

where $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{d+1} = 0$. Moreover, we write $\mathcal{X}_P \subset \mathbb{R}^d$ for the convex hull of the finite set

$$\{\rho(e) : e \text{ is an edge of } \hat{P}\}.$$

Example 1.2. Let $P = \{y_1, y_2, y_3\}$ be the finite poset with the partial order $y_1 < y_2$. Then \hat{P} together with $\rho(e)$'s and \mathcal{X}_P are drawn below:



Lemma 1.3. *The convex polytope \mathcal{X}_P is a terminal Gorenstein Fano polytope.*

2. WHEN IS \mathcal{X}_P \mathbb{Q} -FACTORIAL?

Let $P = \{y_1, \dots, y_d\}$ be a finite poset and $\hat{P} = P \cup \{y_0, y_{d+1}\}$, where $y_0 = \hat{0}$ and $y_{d+1} = \hat{1}$. A sequence $\Gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m})$ is called a *path* in \hat{P} if Γ is a path in the Hasse diagram of \hat{P} . In other words, $\Gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m})$ is a path in \hat{P} if $y_{i_j} \neq y_{i_k}$ for all $1 \leq j < k \leq m$ and if $\{y_{i_j}, y_{i_{j+1}}\}$ is an edge of \hat{P} for all $1 \leq j \leq m-1$. In particular, if $\{y_{i_1}, y_{i_m}\}$ is also an edge of \hat{P} , Γ is called a *cycle*. The *length* of a path $\Gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m})$ is $\ell(\Gamma) = m-1$, while the length of a cycle is m .

A path $\Gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{m+1}})$ is called *ranked* if

$$\#\{j : y_{i_j} < y_{i_{j+1}}, 1 \leq j \leq m\} = \#\{k : y_{i_k} > y_{i_{k+1}}, 1 \leq k \leq m\}.$$

Given a ranked path $\Gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m})$, there exists a unique function

$$\mu_\Gamma : \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$$

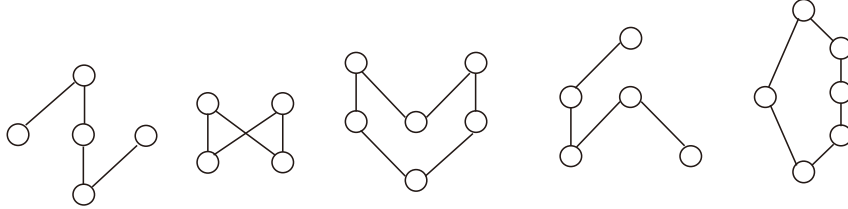
such that

- $\mu_\Gamma(y_{i_{j+1}}) = \mu_\Gamma(y_{i_j}) + 1$ (resp. $\mu_\Gamma(y_{i_j}) = \mu_\Gamma(y_{i_{j+1}}) + 1$) if $y_{i_j} < y_{i_{j+1}}$ (resp. $y_{i_j} > y_{i_{j+1}}$);
- $\min\{\mu_\Gamma(y_{i_1}), \mu_\Gamma(y_{i_2}), \dots, \mu_\Gamma(y_{i_m})\} = 0$.

In particular, Γ is ranked if and only if $\mu_\Gamma(y_{i_1}) = \mu_\Gamma(y_{i_m})$.

Similarity, a ranked cycle is defined. Given a ranked cycle C , there exists a unique function μ_C which is defined the same way as above.

Example 2.1. Among the two paths and three cycles drawn below, each of one path and two cycles on the left-hand side is ranked; none of one path and one cycle on the right-hand side is ranked.



Let P be a finite poset. A subset Q of P is called a *chain* of P if Q is a totally ordered subset of P . The *length* of a chain Q is $\ell(Q) = \#\{Q\} - 1$. A chain Q of P is *saturated* if $x, y \in Q$ with $x < y$, then there is no $z \in P$ with $x < z < y$. A *maximal* chain of \hat{P} is a saturated chain Q of \hat{P} with $\{\hat{0}, \hat{1}\} \subset Q$. Let $y, z \in P$ with $y < z$. The *distance* of y and z in \hat{P} is the smallest integer s for which there is a saturated chain $Q = \{z_0, z_1, \dots, z_s\}$ with

$$y = z_0 < z_1 < \dots < z_s = z.$$

Let $\text{dist}_{\hat{P}}(y, z)$ denote the distance of y and z in \hat{P} .

We now come to the main theorem.

Theorem 2.2. Let $P = \{y_1, \dots, y_d\}$ be a finite poset and $\hat{P} = P \cup \{y_0, y_{d+1}\}$, where $y_0 = \hat{0}$ and $y_{d+1} = \hat{1}$. Then the following conditions are equivalent:

- (i) \mathcal{X}_P is \mathbb{Q} -factorial;

(ii) \mathcal{X}_P is smooth;

(iii) \hat{P} possesses no ranked path $\Gamma = (y_{i_1}, \dots, y_{i_m})$ with $y_{i_1} = y_0$ and $y_{i_m} = y_{d+1}$ such that

$$(1) \quad \mu_\Gamma(y_{i_a}) - \mu_\Gamma(y_{i_b}) \leq \text{dist}_{\hat{P}}(y_{i_b}, y_{i_a})$$

for all $1 \leq a, b \leq m$ with $y_{i_b} < y_{i_a}$, and no ranked cycle $C = (y_{i_1}, \dots, y_{i_m})$ with $\{y_0, y_{d+1}\} \not\subset \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}\}$ such that

$$(2) \quad \mu_C(y_{i_a}) - \mu_C(y_{i_b}) \leq \text{dist}_{\hat{P}}(y_{i_b}, y_{i_a})$$

for all $1 \leq a, b \leq m$ with $y_{i_b} < y_{i_a}$, and

$$(3) \quad \mu_C(y_{i_a}) - \mu_C(y_{i_b}) \leq \text{dist}_{\hat{P}}(y_0, y_{i_a}) + \text{dist}_{\hat{P}}(y_{i_b}, y_{d+1})$$

for all $1 \leq a, b \leq m$.

Recall that a finite poset P is *pure* if all maximal chains of \hat{P} have the same length.

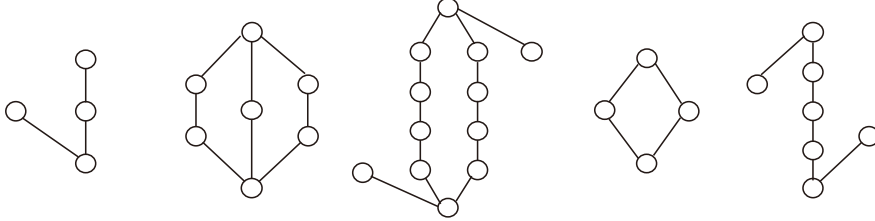
Corollary 2.3. *Suppose that a finite poset P is pure. Then the following conditions are equivalent:*

(i) \mathcal{X}_P is \mathbb{Q} -factorial;

(ii) \mathcal{X}_P is smooth;

(iii) P is a disjoint union of chains.

Example 2.4. Among the five posets drawn below, each of the three posets on the left-hand side yields a \mathbb{Q} -factorial Fano polytope; none of the two posets on the right-hand side yields a \mathbb{Q} -factorial Fano polytope.



REFERENCES

- [1] C. Casagrande, The number of vertices of a Fano polytope, *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), 121–130.
- [2] A. M. Kasprzyk, Canonical toric Fano threefolds, arXiv:0806.2604v2 [math.AG].
- [3] M. Kreuzer and H. Skarke, Classification of polyhedra in three dimensions, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 853–871.
- [4] M. Kreuzer and H. Skarke, Complete classification of reflexive polyhedra in four dimensions, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000), 1209–1230.
- [5] B. Nill and M. Øbro, \mathbb{Q} -factorial Gorenstein toric Fano varieties with large Picard number, arXiv:0805.4533v1 [math.AG].
- [6] M. Øbro, An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes, arXiv:0704.0049v1 [math.CO].
- [7] A. Schrijver, “Theory of Linear and Integer Programming,” John Wiley & Sons, 1986.

AKIHIRO HIGASHITANI, DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN

E-mail address: sm5037ha@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

Coexistence problem for the one-dimensional Schrödinger operators with the periodic $\delta^{(1)}$ -interactions

首都大学東京 大学院 理工学研究科 / 日本学術振興会 特別研究員 PD 新國裕昭

本講演では, 周期的な $\delta^{(1)}$ 型点相互作用に従う 1 次元 Schrödinger 作用素のスペクトルについて考える. 一般化された 1 階の微分作用素を D_x , 通常の 1 階の微分作用素を d/dx と表す. $\delta(\cdot)$ を原点にサポートを持つ Dirac のデルタ関数とし, その一般化された微分を $D_x\delta = \delta^{(1)}$ と書く. また, $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbf{R})$ とおく. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$ および $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 2\pi$ に対して, $L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 H を次で定義する.

$$H = -D_x^2 + \sum_{l \in \mathbf{Z}} (\beta_1 \delta^{(1)}(x - \kappa_1 - 2\pi l) + \beta_2 \delta^{(1)}(x - \kappa_2 - 2\pi l) + \beta_3 \delta^{(1)}(x - 2\pi l)),$$

$$\text{Dom}(H) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbf{R}) \mid \begin{array}{l} \text{ある } f \in L^2(\mathbf{R}) \text{ が存在して, 任意の } \varphi \in \mathcal{D} \text{ に対して} \\ (H\psi, \varphi)_{L^2(\mathbf{R})} = (f, \varphi)_{L^2(\mathbf{R})} \text{ が成り立つ.} \end{array} \right\}.$$

作用素 H のポテンシャルは, 空間変数 x に関して周期 2π の周期関数である. 周期的な点相互作用に従う 1 次元 Schrödinger 作用素は, 固体物理学における 1 次元結晶内の電子のハミルトニアンを表すひとつのモデルである. 作用素 H は P. Kurasov 氏の不連続なテスト関数に対する超関数の理論 [4] を用いると, 格子上の境界条件を用いた表示が可能となる.

$\Gamma_1 = \{\kappa_1\} + 2\pi\mathbf{Z}$, $\Gamma_2 = \{\kappa_2\} + 2\pi\mathbf{Z}$, $\Gamma_3 = 2\pi\mathbf{Z}$ とおき, 1 次元格子 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ を考える. $j = 1, 2, 3$ に対し,

$$A_j = \begin{pmatrix} \frac{2+\beta_j}{2-\beta_j} & 0 \\ 0 & \frac{2-\beta_j}{2+\beta_j} \end{pmatrix}$$

とおく. また, $j = 1, 2, 3$ に対して, $\alpha_j = (2 + \beta_j)/(2 - \beta_j)$ とおく. $L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 T を次で定義する.

$$(Ty)(x) = -\frac{d^2}{dx^2}y(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \Gamma,$$

$$\text{Dom}(T) = \left\{ y \in H^2(\mathbf{R} \setminus \Gamma) \mid \begin{pmatrix} y(x+0) \\ \frac{dy}{dx}(x+0) \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} y(x-0) \\ \frac{dy}{dx}(x-0) \end{pmatrix}, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, 3 \right\}.$$

ここで, 開集合 $I \subset \mathbf{R}$ 上の Sobolev 空間 $H^2(I)$ を次で定義する:

$$H^2(I) = \left\{ y \in L^2(I) \mid \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \in L^2(I) \right\}.$$

この時, 次の定理が成り立つ.

Theorem 1. $H = T$ である.

T は一般化されたクローニツヒ・ペニーハミルトニアンの特別な場合である ([1, 2, 3, 5] 参照). 従って, 作用素 H は自己共役作用素である. また, H のポテンシャルの周期性と

Floquet–Bloch の定理から, H のスペクトルはバンド構造を持つ [5]. すなわち, $\sigma(H)$ は内点を共有しない可算無限個の有界閉区間 (バンド) の和集合として表現される. 自然数 j に対して, $\sigma(H)$ の下から数えて j 番目のバンドを $B_j = [\lambda_{2j-2}, \lambda_{2j-1}]$ と書く. この時, 任意の自然数 j に対して, 不等式 $\lambda_{2j-2} < \lambda_{2j-1} \leq \lambda_{2j}$ が成り立ち, 作用素 H のスペクトルは

$$\sigma(H) = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

と表される. 隣接する2つのバンド B_j と B_{j+1} は开区間または空集合によって隔てられている. その隙間を G_j と表す. G_j は作用素 H のスペクトラルギャップと呼ばれる. 本研究では, 退化したスペクトラルギャップが存在するか否かを調べる. すなわち, 集合

$$\Lambda := \{j \in \mathbf{N} \mid G_j = \emptyset\}$$

を解析する. 集合 Λ を解析するという問題は, coexistence problem と呼ばれる. この問題は, 対応する Schrödinger 方程式の解空間の基底が周期解のみからなるか否かを決定付ける問題で, 微分方程式の解の性質 (ポテンシャルの周期性が解の周期性に反映されるか否か) を知るための重要な問題である. 具体的には, ある自然数 j が存在して, $G_j = \emptyset$ を満たしている事は, $\lambda = \lambda_{2j-1} (= \lambda_{2j})$ に対して, 2つの線形独立な周期解が存在するという事柄と同値である.

主結果を述べる為にいくつか準備を行う. まず, $\tau_1 = \kappa_1$, $\tau_2 = \kappa_2 - \kappa_1$, $\tau_3 = 2\pi - \kappa_2$ と置くと, 次の2つの条件は同値である.

(A) $\kappa_1/\kappa_2 \in \mathbf{Q}$ and $\kappa_2/\pi \in \mathbf{Q}$.

(B) ある $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{N}^3$ が存在して $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = p_1 : p_2 : p_3$, $\gcd(p_1, p_2, p_3) = 1$ が成り立つ.

また, $\gcd(p_1, p_2, p_3) = 1$ を満たす $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{N}^3$ に対し, $p = p_1 + p_2 + p_3$ と置く. さらに,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cap B_{j+1}$$

と置く. 集合 \mathcal{B} は, 退化したスペクトラルギャップの退化点全体の集合を表している.

上記の準備の下で, 以下の結論が成り立つ.

Theorem 2. (基本周期内に $\delta^{(1)}$ 型点相互作用が 1 つある場合) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 \neq 0$ の時, $\Lambda = \emptyset$ である.

Theorem 3. (基本周期内に $\delta^{(1)}$ 型点相互作用が 2 つある場合) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ を仮定すると, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1$ または $\alpha_2 \neq \pm\alpha_3$ ならば, $\Lambda = \emptyset$ である.

(ii) $\alpha_2\alpha_3 = \pm 1$ を仮定する. この時, $\Lambda = \emptyset$ である事の必要十分条件は $\kappa_2/\pi \notin \mathbf{Q}$ である. $\kappa_2/2\pi = m/n$, $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, $\gcd(n, m) = 1$ の時, $\Lambda = n\mathbf{N}$ が成り立つ.

(iii) $\alpha_2 = \pm\alpha_3$ かつ $\kappa_2 \neq \pi$ を仮定する. この時, $\Lambda = \emptyset$ であることの必要十分条件は

$$\kappa_2/\pi \notin \{m/n \mid (n, m) \in \mathbf{N}^2, \gcd(n, m) = 1, m \in 2\mathbf{N} - 1\}$$

である事である. $\kappa_2/\pi = m/n$, $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, $\gcd(n, m) = 1$, $m \in 2\mathbf{N} - 1$ ならば,

$$\Lambda = \{m(2j - 1) \mid j \in \mathbf{N}\}$$

が成り立つ.

Theorem 4. (基本周期内に $\delta^{(1)}$ 型点相互作用が 3 つある場合) $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \neq 0$ の時, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 - 1)(\alpha_2^2\alpha_3^2 - \alpha_1^2)(\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_3^2)(\alpha_1^2\alpha_3^2 - \alpha_2^2) = 0$ を仮定する. この時, 次の (a), (b) が成り立つ.

(a) $(\kappa_2/\kappa_1, \kappa_1/\pi) \notin \mathbf{Q}^2$ ならば, $\Lambda = \emptyset$ が成り立つ.

(b) ある $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{N}^3$ が存在して $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = p_1 : p_2 : p_3$, $\gcd(p_1, p_2, p_3) = 1$ が成り立つ時, 次が成り立つ.

$$\Lambda = \begin{cases} p\mathbf{N} & \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = 1 \text{ の時,} \\ \frac{p}{2}\mathbf{N} & p_1 \in 2\mathbf{N} - 1, p_2 \in 2\mathbf{N} - 1, p_3 \in 2\mathbf{N}, \alpha_2^2\alpha_3^2 - \alpha_1^2 = 0 \text{ の時,} \\ \frac{p}{2}\mathbf{N} & p_1 \in 2\mathbf{N} - 1, p_2 \in 2\mathbf{N}, p_3 \in 2\mathbf{N} - 1, \alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0 \text{ の時,} \\ \frac{p}{2}\mathbf{N} & p_1 \in 2\mathbf{N}, p_2 \in 2\mathbf{N} - 1, p_3 \in 2\mathbf{N} - 1, \alpha_1^2\alpha_3^2 - \alpha_2^2 = 0 \text{ の時,} \\ \emptyset & \text{それ以外.} \end{cases}$$

(ii) $(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 - 1)(\alpha_2^2\alpha_3^2 - \alpha_1^2)(\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_3^2)(\alpha_1^2\alpha_3^2 - \alpha_2^2) \neq 0$ ならば, 次が成り立つ.

$$\mathcal{B} = \left\{ \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \left| \begin{array}{l} \cot \tau_1 \sqrt{\lambda} \cot \tau_2 \sqrt{\lambda} = \frac{\alpha_2^2\alpha_3^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 - 1}, \\ \cot \tau_1 \sqrt{\lambda} \cot \tau_3 \sqrt{\lambda} = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 - 1}, \\ \cot \tau_2 \sqrt{\lambda} \cot \tau_3 \sqrt{\lambda} = \frac{\alpha_1^2\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 - 1} \end{array} \right. \right\}.$$

参考文献

- [1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable models in quantum mechanics*, 2nd ed., With an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea publishing, Rhode Island, 2005.
- [2] S. Albeverio and P. Kurasov. *Singular Perturbations of Differential Operators*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 271, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [3] R. J. Hughes. *Generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, J. Math. Anal. Appl. **222** (1998), no.1, 151-166.
- [4] P. B. Kurasov, Distribution theory for discontinuous test functions and differential operators with generalized coefficients, J. Math. Anal. Appl. **201**, (1996), 297-323.
- [5] H. Niikuni. *The rotation number for the generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, Ann. Henri Poincaré **8** (2007), 1279-1301.
- [6] H. Niikuni. *Coexistence problem for the one-dimensional Schrödinger operators with the double or triple periodic $\delta^{(1)}$ -interactions*, to appear, J. Math. Anal. Appl.

"THE TWO-CONSTANTS THEORY" AND TENSORS OF THE MICROSCOPICALLY-DESCRIPTIVE, KINETIC AND EQUILIBRIUM EQUATIONS OF FLUID

増田 茂 (首都大学東京 大学院理学研究科 博士後期課程 数学専攻)

ABSTRACT. The two-constants theory introduced first by Laplace in 1805 is currently accepted theory describing isotropic, linear elasticity. The original, macroscopically-descriptive Navier-Stokes equations [*MDNS* equations] were derived in the course of the theoretical development of the two-constants and response tensor. Boltzmann also constructed the *MDNS* equations by interaction of molecules, which is called transport equation. From the viewpoint of *MDNS* equations, we trace the evolution of the equations and the notion of tensor following in historical order the various contributions of Navier, Cauchy, Poisson, Saint-Venant and Stokes¹, and note the concordance between each and analysis the relation of these microscopically descriptive equations from the view-point of the history of classical theory of mathematical science. In this paper, we put emphasis on Boltzmann for sake of space.

1. Introduction

We have studied the original *MDNS* equations as the progenitors², Navier, Cauchy, Poisson, Saint-Venant and Stokes, and endeavor to ascertain their aims and conceptual thoughts in formulations these new equation. "The two-constants theory" was introduced first introduced in 1805 by Laplace³ in regard to capillary action with constants denoted by H and K . Thereafter, various pairs of constants have been proposed by their originators in formulating *MDNS* equations or equations describing equilibrium or capillary situations. It is commonly accepted that this theory describes isotropic, linear elasticity.

2. A universal method for the two-constants theory

Now, we would like to propose the uniformal methods to describe the kinetic equations for isotropic, linear elasticity such as :

- The partial differential equations of the elastic solid or elastic fluid are expressed by using one or the pair of C_1 and C_2 such that :

in the elastic solid : $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) = \mathbf{f}$,

In the elastic fluid : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) + \dots = \mathbf{f}$,

where T_1, T_2, \dots are tensors or terms consisting our equations, where we suppose the tensor as the first kind. For example, the *MDNS* equations corresponding to incompressible fluid is composed of the kinetic equation along with the continuity equation and are conventionally written, in modern vector notation, as follows :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

- C_1 and C_2 are the two coefficients of the two-constants theory, for example, ε and E by Navier, or R and G by Cauchy, k and K by Poisson, ε and $\frac{\varepsilon}{3}$ by Saint-Venant, or μ and $\frac{\mu}{3}$ by Stokes. Moreover C_1 and C_2 can be expressed in the following form (cf. Table 1):

$$\begin{cases} C_1 \equiv \mathcal{L} r_1 g_1 S_1, \\ C_2 \equiv \mathcal{L} r_2 g_2 S_2, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = \iint g_3 \rightarrow C_3, \\ S_2 = \iint g_4 \rightarrow C_4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = C_3 \mathcal{L} r_1 g_1 = \frac{2\pi}{15} \mathcal{L} r_1 g_1, \\ C_2 = C_4 \mathcal{L} r_2 g_2 = \frac{2\pi}{3} \mathcal{L} r_2 g_2. \end{cases}$$

- The two coefficients are expressible in terms of the operator \mathcal{L} (\sum_0^∞ or \int_0^∞) by personal principles
- g_1 and g_2 are the certain functions of interaction between the molecules depending on r and are described with attraction &/or repulsion.

- S_1 and S_2 are the two constant expressions which describe the momentum on the surface of active unit-sphere at the center of a molecule by the double integral (or single sum in case of Poisson's fluid).

- g_3 and g_4 are certain compound trigonometric functions of polar system, for example, with respect

Date: 2009/12/24.

²The order followed is by date of proposal or publication.

³Of capillary action, Laplace[4, V.4, Supplement p.2] acknowledges Clailaut and Clailaut cites Maupertuis.

TABLE 1. The two constants in the kinetic equations

no	name	problem	C_1	C_2	C_3	C_4	\mathcal{L}	r_1	r_2	g_1	g_2	remark
1	Navier [5]	elastic solid	ε		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho \rho^4$	ρ^4		$f\rho$		ρ : radius
2	Navier [6]	fluid	ε	E	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\int_0^\infty d\rho \rho^4$ $\int_0^\infty d\rho$	ρ^4 ρ^2		$f(\rho)$	$F(\rho)$	ρ : radius
3	Cauchy [3]	system of particles in elastic and fluid	R		$\frac{2\pi}{15} \Delta$	$\frac{2\pi}{3} \Delta$	$\int_0^\infty dr r^3$ $\int_0^\infty dr$	r^3 r^3		$f(r)$	$\pm f(r)$	$f(r) \equiv \pm[r f'(r) - f(r)]$ $f(r) \neq f(r)$, $\Delta = \frac{M}{V}$: mass of molecules per volume.
4	Poisson [7]	elastic solid	k	K	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\sum \frac{1}{\alpha^5}$ $\sum \frac{1}{\alpha^5}$	r^5 r^3		$\frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}$	$f r$	
5	Poisson [8]	elastic solid and fluid	k	K	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$ $\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$	r^3 r		$\frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}$	$f r$	$C_3 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{15} = \frac{1}{30}$ $C_4 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6}$
6	Saint-Venant [9]	fluid	ε	$\frac{\varepsilon}{3}$								
7	Stokes [10]	fluid	μ	$\frac{\mu}{3}$								
8	Stokes [10]	elastic solid	A	B								$A = 5B$

to φ and ψ , to calculate the momentum in the unit sphere.

• C_3 and C_4 are indirectly determined as the common coefficients from the invariant tensor, and thses values turn universally into $\frac{2\pi}{15}$ and $\frac{2\pi}{3}$ respectively as you see in Table 1. (cf. remark in Poisson[8].)

3. Boltzmann equations

In general we can state the Boltzmann equations as follows:⁴

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = Q(f, g), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n (n \geq 3), \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad \mathbf{v} = (\xi, \eta, \zeta), \quad (2)$$

$$Q(f, g)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) \{g(v'_*)f(v') - g(v_*)f(v)\} d\sigma dv_*, \quad g(v'_*) = g(t, x, v'_*), \text{ etc.} \quad (3)$$

where, $Q(f, g)$ of the right-hand-side of (2) is the Boltzmann bilinear collision operator, $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f$ is the transport operator, $B(z, \sigma)$ of the right-hand-side in (3) is the non-negative function of collision cross-section. Else definitions are to be made good in my talks, for sake of space.

According to Boltzmann[1, pp.110-115]⁵, his equations (so-called transport equations) are the followings:⁶

$$(114)_B \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{A_1} + \underbrace{\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}}_{A_2} + \underbrace{X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z}}_{A_3} = \iint_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{(f' F'_1 - f F_1)}_{A_4} + \underbrace{(f' f'_1 - f f_1)}_{A_5} \right] g b \, d\omega_1 \, db \, d\varepsilon$$

$$(115)_B \quad \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial t}}_{A_1} + \underbrace{\xi_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}}_{A_2} + \underbrace{X_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + Z_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}}_{A_3} \\ = \iint_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{(f' F'_1 - f F_1)}_{A_4} + \underbrace{(F' F'_1 - F F_1)}_{A_5} \right] g b \, d\omega_1 \, db \, d\varepsilon$$

⁴We refer the *Lecture Note* by S.Ukai: *Boltzmann equations: New evolution of theory, Lecture Note of the Winter School in Kyushu of Non-linear Partial Differential Equations*, Kyushu University, 6-7, November, 2009.

⁵Boltzmann(1844-1906) had put the date in the foreword to part I as September in 1895, part II as August in 1898.

⁶We mean the equation number in the left-hand side with $(\cdot)_B$ the citations from the Boltzmann[1] or [2]. Only the symbol \int denotes $\int_{-\infty}^\infty$.

where,

$$\begin{cases} f = f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t), & f_1 = f(x, y, z, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, t), & f'_1 = f(x, y, z, \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, t), \\ F = F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t), & F_1 = F(x, y, z, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, t), & F'_1 = F(x, y, z, \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, t) \end{cases}$$

3.1. Boltzmann's general form of the incompressible, hydrodynamic equations. We fix our attention on the parallelepiped representing all space points whose coordinates lie between the limits

$$(97)_B \quad x \text{ and } dx, \quad y \text{ and } dy, \quad z \text{ and } dz, \quad do = dx dy dz, \quad (98)_B \quad \xi \text{ and } d\xi, \quad \eta \text{ and } d\eta, \quad \zeta \text{ and } d\zeta, \quad d\omega = d\xi d\eta d\zeta$$

Let φ be an arbitrary function and for the second kind of gas any other arbitrary function Φ of $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t$. As the general expressions for fluid mechanics, he states that when we substitute for $\frac{\partial f}{\partial t}$ its value from Equation (114)_B, it turns into (120)_B, (126)_B, (140)_B, a sum of five terms, each of which has its own physical meaning, as follows:

$$\begin{cases} (116)_B \quad \sum_{d\omega, do} \varphi = \varphi f do d\omega, & (120)_B \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{d\omega, do} \varphi = \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial f}{\partial t} \right) do d\omega = \left[\sum_{n=1}^5 A_n(\varphi) \right] do d\omega, \\ (118)_B \quad \sum_{\omega, do} \varphi = do \int \varphi f d\omega, & (126)_B \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\omega, do} \varphi = do \int \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial f}{\partial t} \right) d\omega = \left[\sum_{n=1}^5 B_n(\varphi) \right] do, \\ (119)_B \quad \sum_{\omega, o} \varphi = \iint \varphi f do d\omega, & (140)_B \quad \frac{d}{dt} \sum_{\omega, o} \varphi = \iint \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial f}{\partial t} \right) do d\omega = \sum_{n=1}^5 C_n(\varphi) \end{cases}$$

$$(121, \dots, 125)_B \quad \begin{cases} A_1(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} f, & A_2(\varphi) = -\varphi \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \right), & A_3(\varphi) = -\varphi \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right), \\ A_4(\varphi) = \varphi \iint_0^\infty \int_0^{2\pi} (f' F'_1 - f F_1) g b \, d\omega_1 \, db \, d\epsilon, & A_5(\varphi) = \varphi \iint_0^\infty \int_0^{2\pi} (f' f'_1 - f f_1) g b \, d\omega_1 \, db \, d\epsilon, \end{cases}$$

where $\{A_n(\varphi)\}_{n=1}^5$ are the effects of such as $A_1(\varphi)$: the explicit dependence of φ on t ; $A_2(\varphi)$: the motion of the molecules; $A_3(\varphi)$: the external forces; $A_4(\varphi)$: collisions of m - molecules with m_1 - molecules; $A_5(\varphi)$: collisions of m - molecules with each other;

$$(127, \dots, 137)_B \quad \begin{cases} B_1(\varphi) = \int A_1(\varphi) d\omega = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} f d\omega, & B_2(\varphi) = \int A_2(\varphi) d\omega = -\int \varphi \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\omega, \\ B_3(\varphi) = \int A_3(\varphi) d\omega = -\int \varphi \left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\omega, & (134) \quad B_4(\varphi) = \dots, \quad (137) \quad B_5(\varphi) = \dots, \end{cases}$$

3.2. Boltzmann's special form of the incompressible, hydrodynamic equations.

$$(171)_B \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$(173)_B \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial(\rho \xi_0^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \xi_0 \eta_0)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \xi_0 \zeta_0)}{\partial z},$$

... (with Y and Z components.)

Boltzmann says "these equations as well as Equation (171)_B, are *only special cases of the general equation* (126)_B and were derived from it by Maxwell and (following him) by Kirchhoff." Boltzmann concludes that if one collects all these terms, then Equation (126) reduces in this special case to:

$$(177)_B \quad \frac{\partial(\rho \bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{\xi} \bar{\varphi})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{\eta} \bar{\varphi})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \bar{\zeta} \bar{\varphi})}{\partial z} - \rho \left[X \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} + Y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} + Z \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta} \right] = m \left[B_4(\varphi) + B_5(\varphi) \right]$$

Boltzmann states about (177)_B :

From this equation Maxwell calculated the viscosity, diffusion, and heat conduction, and Kirchhoff therefore calls it the basic equation of the theory. If one sets $\varphi = 1$, he obtains at once the continuity equation (171); for it follows from Equations (134) and (137) that $B_4(1) = B_5(1) = 0$. Subtraction of the continuity equation, multiplied by φ , from (177) gives (using the substitution [158]): [2, p.152].

where, (158) : $\xi = \xi_0 + u, \quad \eta = \eta_0 + v, \quad \zeta = \zeta_0 + w.$

$$(178)_B \quad \rho \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\rho \bar{\xi}_0 \bar{\varphi})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{\eta}_0 \bar{\varphi})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \bar{\zeta}_0 \bar{\varphi})}{\partial z} - \rho \left[X \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} + Y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} + Z \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta} \right] = m \left[B_4(\varphi) + B_5(\varphi) \right]$$

If one denotes the six quantities (179)_B : $\overline{\rho\xi_0^2}, \overline{\rho\eta_0^2}, \overline{\rho\zeta_0^2}, \overline{\rho\eta_0\zeta_0}, \overline{\rho\xi_0\zeta_0}, \overline{\rho\xi_0\eta_0}$ by $X_x, Y_y, Z_z, Y_z = Z_y, Z_x = X_z, X_y = Y_x$, namely, when we use the symmetric tensor, then we get as follows:

$$\begin{bmatrix} \overline{\rho\xi_0^2} & \overline{\rho\xi_0\eta_0} & \overline{\rho\xi_0\zeta_0} \\ \overline{\rho\xi_0\eta_0} & \overline{\rho\eta_0^2} & \overline{\rho\eta_0\zeta_0} \\ \overline{\rho\xi_0\zeta_0} & \overline{\rho\zeta_0\eta_0} & \overline{\rho\zeta_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & P_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & P_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$(180)_B \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \rho X, \quad \dots \text{ (with } Y \text{ and } Z \text{ components.)}$$

These are not *NS* equations for lack of the pressure term. Moreover (181)_B : $p = \overline{\rho\xi_0^2} = \overline{\rho\eta_0^2} = \overline{\rho\zeta_0^2}, \quad \overline{\xi_0\eta_0} = \overline{\xi_0\zeta_0} = \overline{\eta_0\zeta_0} = 0$. He deduces a special case of the hydrodynamic equations as follows:

$$(183)_B \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho X = 0, \quad \dots \text{ (with } Y \text{ and } Z \text{ components.)}$$

Boltzmann's (183)_B are the so-called Euler equations in incompressible condition of (171)_B.

$$(185)_B \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\xi_0^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\xi_0\eta_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\xi_0\zeta_0)}{\partial z} - \rho X = 0, \quad \dots \text{ (with } Y \text{ and } Z \text{ components.)}$$

We set the values of (4) as follows, which is the same tensor as Stokes :

$$(220)_B \quad \begin{bmatrix} \overline{\rho\xi_0^2} & \overline{\rho\xi_0\eta_0} & \overline{\rho\xi_0\zeta_0} \\ \overline{\rho\xi_0\eta_0} & \overline{\rho\eta_0^2} & \overline{\rho\eta_0\zeta_0} \\ \overline{\rho\xi_0\zeta_0} & \overline{\rho\zeta_0\eta_0} & \overline{\rho\zeta_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - 2\mathcal{R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\mathcal{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & p - 2\mathcal{R} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & p - 2\mathcal{R} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \end{bmatrix}$$

From (220)_B, we calculate the components of (185)_B as follows:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\rho\xi_0^2)}{\partial x} & \frac{\partial(\rho\xi_0\eta_0)}{\partial y} & \frac{\partial(\rho\xi_0\zeta_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho\xi_0\eta_0)}{\partial x} & \frac{\partial(\rho\eta_0^2)}{\partial y} & \frac{\partial(\rho\eta_0\zeta_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho\xi_0\zeta_0)}{\partial x} & \frac{\partial(\rho\zeta_0\eta_0)}{\partial y} & \frac{\partial(\rho\zeta_0^2)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - \mathcal{R} \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\mathcal{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & p - \mathcal{R} \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & -\mathcal{R} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & p - \mathcal{R} \left\{ 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Then, substitution of these values into the equations of motion (185)_B yields:

$$(221)_B \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mathcal{R} \left[\Delta u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \rho X = 0, \quad \dots \text{ (with } Y \text{ and } Z \text{ components.)}$$

We can interpret that as the special cases, Boltzmann have deduced the *NS* equations after substituting the tensor (220)_B to (173)_B, for lack of pressure terms.

REFERENCES

- [1] Ludwig Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, von Dr. Ludwig Boltzmann Professor der Theoretischen Physik an der Universität Wien. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1923.
- [2] Ludwig Boltzmann, *Lectures on gas theory*, translated by Stephen G.Brush, Dover, 1964.
- [3] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercices de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.
- [4] P.S.Laplace, *Traité de mécanique céleste*, Ruprat, Paris, 1798-1805. (We can cite in the original by Culture et Civilisation, 1967.)
- [5] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des Science de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu : 14/mai/1821.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.
- [6] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Science de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu : 18/mar/1822.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [7] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [8] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
- [9] A.J.C.B.de Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides. (Extrait.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 1240-1243. (Lu : 14/apr/1834.)
- [10] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, *Mathematical and physical papers* **1**, 1966, 75-129, Cambridge.

Another proof of the cyclic sum formula for multiple zeta-star values

若林 徳子 (九州大学大学院数理学研究院)

多重ゼータ値とは, Riemann zeta 関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, ($\text{Re}(s) > 1$) の正の整数点での値 (Riemann zeta 値) をある種多重化した実数値で, 次のように定義される.

定義. 正整数 k_1, k_2, \dots, k_l (ただし $k_1 \geq 2$) に対し,

$$\zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_l) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_l \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_l^{k_l}},$$

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_l) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_l > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_l^{k_l}}$$

と定義する.

通常, 前者を等号付き多重ゼータ値 (multiple zeta-star values, 略して MZSVs), 後者を (等号なし) 多重ゼータ値 (multiple zeta values, 略して MZVs) と呼ぶ. MZSVs も MZVs も $l = 1$ の場合は Riemann zeta 値になる.

多重ゼータ値の研究は, 現在では数論の研究者のみならず代数幾何やトポロジー, 微分方程式, あるいは量子物理などの専門家により広く行われている. 多重ゼータ値の研究が浸透してきた背景にあるのが, 以下の Zagier の次元予想である.

次元予想[†] (Zagier[12]). $\dim_{\mathbb{Q}} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_l=k \\ l \geq 1, k_1 \geq 2, k_2, \dots, k_l \geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_l) \stackrel{?}{=} d_k,$

ただし, 数列 $\{d_k\}$ は, $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ ($k \geq 3$) で与えられる.

この次元予想は多くのことを示唆している. そのうちのひとつは, k が大きくなるにつれ一次独立な無理数の個数が指数関数的 (およそ 0.41×1.32^k) に増えていくということである. そのため, 多重ゼータ値の無理性などの特殊値としての研究も重要である. 一方で, この次元予想によれば, 多重ゼータ値間には多くの線形関係式が成り立つことになる. それらを具体的に記述する研究も盛んに行われている. 本テクニカルレポートの田坂浩二の稿 ([10]) では MZSVs の特殊値に関する研究成果を述べたが, 本稿では MZSVs の関係式に関する研究結果を述べる. この結果は九州大学の田中立志との共同研究で得られたものである.

MZSVs の関係式のひとつとして, 以下に述べる巡回和公式という関係式が大野-若林 [8] により知られている.

巡回和公式 (大野-若林 [8]). 正整数 $k_1, k_2, \dots, k_l \geq 1$ (ただしある $k_q \geq 2$) に対して

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{k_j-1} \zeta^*(k_j - i + 1, k_{j+1}, \dots, k_l, k_1, k_2, \dots, k_{j-1}, i) = k \zeta^*(k + 1)$$

[†]通常, 次元予想は MZVs で生成されるベクトル空間で考えるが, MZSVs と MZVs は互いに他の有理数係数の線形結合で書けるので, 互いが張るベクトル空間は一致するため, 本表記で差し支えない.

が成り立つ. ここで, $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$ である.

このMZSVsの巡回和公式は, k_1, k_2, \dots, k_l を巡回させたMZSVsの和がリーマンゼータ値の整数倍で書けるというものである. この巡回和公式は, MZSVsの関係式族の中でも有名な和公式 (Granville[2], Zagier[11]) と呼ばれる関係式族をさらに細分化している. 大野-若林 [8] による巡回和公式の証明は, MZSVsの級数表示と部分分数分解を用いて直接計算するというものであった. 巡回和公式は単独で証明されていたため, 他の知られている多重ゼータ値の関係式族 (アソシエーター関係式 [1] や一般複シャッフル関係式 [6] など) との包含関係が不明瞭であった. 我々は, この巡回和公式を後述の川島の関係式 [7] に帰着させることにより代数的な証明を与えることができた. この研究成果により, 巡回和公式はもはや独立した関係式族ではなくなった.

川島の関係式および主結果を述べるために, MZSVsの代数的定式化を導入する (cf. Hoffman[3]). $\mathfrak{h} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ を有理数体上の2変数非可換多項式環とする. $\mathfrak{h}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{h}y$ を \mathfrak{h} の部分環で (有理数と) y で終わる word で表わされる多項式全体を表し, $\mathfrak{h}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{h}y$ を \mathfrak{h}^1 の部分環で (有理数と) x で始まり y で終わる word で表わされる多項式全体を表す. \mathfrak{h}^0 から実数体 \mathbb{R} への \mathbb{Q} -線形写像 \bar{Z} を

$$\bar{Z}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_l-1}y) = \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_l) \quad (k_1 \geq 2), \quad \bar{Z}(1) = 1$$

で定義する. 次に, \mathfrak{h}^1 上のひとつの積を導入する. $\bar{*}$ を $\mathfrak{h}^1 \times \mathfrak{h}^1$ から \mathfrak{h}^1 への \mathbb{Q} -双線形写像で, 以下のような性質を持つものと定義する.

(i) 単位元が1である. つまり, 任意の \mathfrak{h}^1 の元 w に対して $1 \bar{*} w = w \bar{*} 1 = w$.

(ii) 任意の $p, q \geq 1$ と \mathfrak{h}^1 の任意の words w, w' に対して,

$$x^{p-1}yw \bar{*} x^{q-1}yw' = x^{p-1}y(w \bar{*} x^{q-1}yw') + x^{q-1}y(x^{p-1}yw \bar{*} w') - x^{p+q-1}y(w \bar{*} w').$$

これは, 一般に調和積と呼ばれる \mathfrak{h}^1 上の可換な積構造である.

x を左からかけるような線形写像を L_x とする: $L_x(w) = xw$ ($w \in \mathfrak{h}$). 写像 α を \mathfrak{h} 上の自己同型写像とし, $\alpha(x) = y$, $\alpha(y) = x$ で定まるものとする. 写像 $\tilde{\alpha}$ を \mathfrak{h}^1 から \mathfrak{h}^1 への \mathbb{Q} -線形写像で $\tilde{\alpha}(wy) = \alpha(w)y$ ($w \in \mathfrak{h}$) とする. このとき, 次が成り立つ.

川島関係式 (川島 [7]). $L_x\tilde{\alpha}(\mathfrak{h}y \bar{*} \mathfrak{h}y) \subset \ker \bar{Z}$.

上記の左辺が $\ker \bar{Z}$ に含まれるということは, MZSVsの関係式族であるということを表している. MZSVsの巡回和公式をこの川島の関係式に帰着させることで証明する.

主結果を述べるために, 新たな記号を準備する. $n \geq 1$ に対し, \mathfrak{h} の $\mathfrak{h}^{\otimes(n+1)}$ への作用 \diamond を次で定義する. \mathfrak{h} の元 a, b, w_i ($1 \leq i \leq n+1$) に対して,

$$\begin{aligned} a \diamond (w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}) &= w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1}, \\ (w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}) \diamond b &= w_1b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1} \end{aligned}$$

と定義する. M_n を $\mathfrak{h}^{\otimes(n+1)}$ から \mathfrak{h} への写像で,

$$M_n(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}) = w_1w_2\cdots w_nw_{n+1}$$

で定義する. \bar{c}_n を \mathfrak{h} から $\mathfrak{h}^{\otimes(n+1)}$ への \mathbb{Q} -線形写像で,

$$\bar{c}_n(x) = x \otimes y^{\otimes n}, \quad \bar{c}_n(y) = -(x \otimes y^{\otimes n})$$

であり, \mathfrak{h} の任意の元 w, w' に対して, ライブニッツ則

$$\bar{c}_n(ww') = \bar{c}_n(w) \diamond \gamma(w') + \gamma(w) \diamond \bar{c}_n(w')$$

を満たすものと定義する. ただし, γ は \mathfrak{h} 上の自己同型写像で, $\gamma(x) = x$, $\gamma(y) = y - x$ で定まるものとする. 写像 $\bar{\rho}_n$ を $\bar{\rho}_n = M_n \bar{c}_n$ で定義する. $\check{\mathfrak{h}}^1$ を y の冪以外の \mathfrak{h}^1 の words で生成される \mathfrak{h}^1 の部分空間とする. このとき, 以下の結果を得る.

主定理 (田中-若林 [9]). 任意の $n \geq 1$ に対して, $\bar{\rho}_n(\check{\mathfrak{h}}^1) \subset L_x \bar{\alpha}(\mathfrak{h}y \bar{*} \mathfrak{h}y) (\subset \ker \bar{Z})$ が成り立つ.

右辺は先述の川島関係式である. そのことから $\bar{\rho}_n(\check{\mathfrak{h}}^1)$ は MZSVs 間の関係式族を与えていることがわかる.

主結果において, $\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k (\in \mathfrak{h})$ を写像 $\bar{\rho}_1$ で移すと,

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_1(\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k) \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{k_j-1} x^{k_j-i}yx^{k_{j+1}-1}y \cdots x^{k_l-1}yx^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_j-1-1}yx^{i-1}y - kx^ky \end{aligned} \quad (1)$$

と計算される. ただし, γ^{-1} は前述の写像 γ の逆写像である. つまり, γ^{-1} は自己同型写像で, $\gamma^{-1}(x) = x$, $\gamma^{-1}(y) = x+y$ で定まるものである. ここで, 一般に, $\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k$ は $\check{\mathfrak{h}}^1$ の元ではない. しかし, $n = 1$ のとき, 巡回同値な 2 つの words w, w' に対して, $\bar{\rho}_1(w) = \bar{\rho}_1(w')$ なる性質がある. この性質より, 自然数 k_1, k_2, \dots, k_l (ただし, ある番号 q に対し $k_q \geq 2$) に対し, 式 (1) を写像 \bar{Z} で移すと, 既述の大野-若林 [8] の MZSVs の巡回和公式を得ることになる. 同様に, $\bar{\rho}_n$ に対応する写像が定義でき, Hoffman-大野 [4] による MZVs の巡回和公式を (MZVs 版の) 川島関係式に帰着させ代数的に証明することも可能である.

MZVs と MZSVs の巡回和公式が同値であることは, 井原-梶川-大野-奥田 [5] で直接計算により証明されている. MZVs 及び MZSVs の巡回和公式が川島の関係式の一部であるという我々の結果を用いると, それら 2 つの巡回和公式が同値であることの代数的な別証明を与えることもできる.

写像 $\bar{\rho}_1$ が巡回和公式を与えることを述べた. 次に, 一般の $\bar{\rho}_n$ の場合にどうなるかを考える. $n, d \geq 1$ に対し, $\check{\mathfrak{h}}_{(d)}^1$ を $\check{\mathfrak{h}}^1$ の d 次斉次部分とする. ベクトル空間 $\overline{\text{CSF}}_n^d$ を $\overline{\text{CSF}}_n^d := \langle \bar{\rho}_n(w) | w \in \check{\mathfrak{h}}_{(d)}^1 \rangle_{\mathbb{Q}}$ と定義し, ベクトル空間 $\overline{\text{CSF}}_n$ を $\overline{\text{CSF}}_n^d$ の $d \geq 1$ で直和をとった空間 $\overline{\text{CSF}}_n := \bigoplus_{d \geq 1} \overline{\text{CSF}}_n^d$ と定義する. このとき, 以下のフィルトレーション構造を持つことがわかる.

命題. (1) 任意の $n, d \geq 1$ に対し, $\overline{\text{CSF}}_{n+1}^d \subset \overline{\text{CSF}}_n^{d+1}$.

(2) 任意の $n \geq 1$ に対し, $\overline{\text{CSF}}_{n+1} \subset \overline{\text{CSF}}_n$.

これによると, n が大きくなるにつれ, 集合としては小さくなっている. すなわち, $n \geq 2$ の場合は $n = 1$ の場合 (巡回和公式) に帰着される.

上で与えた \mathbb{Q} -ベクトル空間 $\overline{\text{CSF}}_n^d$ の次元を計算機で計算した結果, 以下の表を得た.

$d+n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$n=1$	1	2	4	6	12	18	34	58	106	186	350	630	1180	...
$n=2$		1	3	5	11	17	33	57	105	185	349	629	1179	...
$n=3$			1	3	7	13	26	48	91	167	319	589	1116	...
$n=4$				1	3	7	15	29	58	111	218	417	811	...
$n=5$					1	3	7	15	31	61	122	239	473	...
$n=6$						1	3	7	15	31	63	125	250	...
$n=7$							1	3	7	15	31	63	127	...
$n=8$								1	3	7	15	31	63	...
$n=9$									1	3	7	15	31	...
$n=10$										1	3	7	15	...
$n=11$											1	3	7	...
$n=12$												1	3	...
$n=13$													1	...
\vdots														\ddots

$n=1$ のときは巡回和公式が与える次元であり、その数は

$$-2 + \frac{1}{d+1} \sum_{m|d+1} \phi\left(\frac{d+1}{m}\right) 2^m \quad (\text{ただし, } \phi(n) := |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|)$$

となることが知られている。また、 n が大きくなるにつれ現れる数は小さくなる。これは先ほどのフィルトレーション構造 $\overline{\text{CSF}}_1 \supset \overline{\text{CSF}}_2 \supset \dots$ が示していることである。 $n \geq d-1$ のとき、 2^{d-1} という数が現れている理由も分かっている。それ以外の表中の数がどのような規則で現れているかは現時点では明確にはわからないが、組み合わせ論的におもしろい数になっているかも知れない。

参考文献

- [1] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J., **2** (1991), 829–860.
- [2] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, 95–101.
- [3] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra, **194** (1997), 477–495.
- [4] M. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra, **262** (2003), 332–347.
- [5] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *MZV vs. MZSV*, preprint.
- [6] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math., **142** (2006), 307–338.
- [7] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory, **129** (2009), 755–788.
- [8] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arith., **123** (2006), 289–295.
- [9] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra, **323** (2010), 766–778.
- [10] K. Tasaka, 多重ゼータ値の特殊値について, 第6回数学総合若手研究集会テクニカルレポート.
- [11] D. Zagier, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, Bonn, 1995.
- [12] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel, 1994.

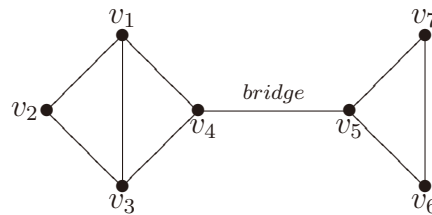
On the Circuit Double Cover Conjecture

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻
博士前期課程一年 尾崎奨太

1 CDC 予想

本稿では, CDC 予想と呼ばれる予想について紹介する. この予想は Szekeres [8] と Seymour [7] によって独立に定式化された予想であり, グラフ理論における重要な未解決問題として広く知られている. この問題はグラフの曲面への埋め込みに関する予想や, Nowhere-zero flow の存在問題, グラフの彩色などと密接な関連がある.

ここで, まず用語の定義をする. グラフ $G = (V, E)$ は, 有限個の頂点の集合 V と頂点を繋ぐ辺の集合 E の組であり, 多重辺やループを含まないものとする. 例えば下図のグラフは $\{v_1, \dots, v_7\}$ を頂点集合とし, $\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7\}$ を辺集合とするグラフである.



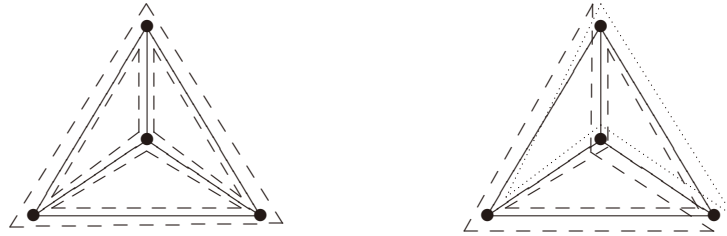
$n \geq 3$ とする. n 個の相異なる V の頂点列 $v_1 \dots v_n$ で, $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ が全て G の辺であるものを G の閉路 (circuit) という. 閉路はそれ自身グラフであると思うことができる. G のどの閉路にも含まれないような辺を G の橋 (bridge) という.

定義 (Circuit Double Cover)

\mathcal{C} は G の閉路からなる multiset (即ち元の重複を許す集合) であるとする. \mathcal{C} が G の Circuit Double Cover であるとは

$$G \text{ の任意の辺 } e \text{ に対して } \#\{C \in \mathcal{C} \mid e \text{ は } C \text{ の辺}\} = 2$$

が成り立つことをいう。以後 Circuit Double Cover を CDC と呼ぶ。例えば 4 頂点完全グラフ K^4 の CDC は次の 2 種類に限る。



Circuit Double Cover Conjecture [7, 8]

橋を持たない任意のグラフは CDC を持つ。

この予想は Cycle Double Cover Conjecture とも呼ばれている。CDC と同様に、以後この予想を CDC 予想と呼ぶ。CDC 予想の部分解として、例えば次が知られている。グラフが 4-辺連結 [5]，hypohamiltonian かつ 3-正則 [3]，ペテルセングラフをマイナーに持たない [1] 場合には CDC 予想は正しい。

3 節で述べるように、橋を持たない 3-正則かつ 3-辺彩色可能なグラフは CDC を持つことがわかる。以下では辺彩色性と CDC 予想との関わりについて考察する。

2 3-正則グラフと辺彩色

定義 (正則グラフ)

グラフ G が r -正則であるとは、 G の各頂点 v について v に接続する辺の数が r であることをいう。

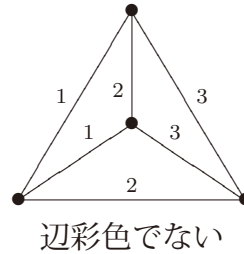
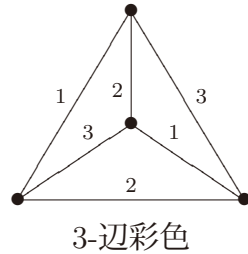
Jaeger[6] により、CDC 予想を考える際には 3-正則グラフに限ってもよいことが知られている。そこで以下、3-正則グラフのみを考える。

定義 (辺彩色)

$G = (V, E)$ をグラフ、 $k \in \mathbb{N}$ とする。写像 $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ が G の k -辺彩色であるとは

$$e, f \in E (e \neq f) \text{ が端点を共有する} \Rightarrow c(e) \neq c(f)$$

を満たすことをいう。このとき $c(e)$ を辺 e の色という。



Vizing の定理 [2, pp.119–120] によって任意の 3-正則グラフは 4-辺彩色を持つ。

次章では 4-辺彩色を持つ 3-正則グラフについて CDC 予想を考察する。

3 4-辺彩色と CDC 予想

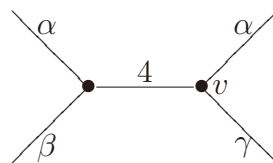
以下 $G = (V, E)$ を橋を持たない 3-正則グラフとし、 G の辺彩色 $c: E \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を、 $\#c^{-1}(4)$ が最小になるようにとる。 $\#c^{-1}(4) \leq 2$ のとき、次の結果が得られた。

(i) $\#c^{-1}(4) = 0$ の場合

このとき c は 3-辺彩色である。 $\alpha \neq \beta \in \{1, 2, 3\}$ に対して α か β の色を持つ辺全体からなる部分グラフを (α, β) -部分グラフという。 仮定から G の (α, β) -部分グラフの各頂点に接続する辺の本数はすべて 2 であることがわかるので、それは幾つかの閉路からなっている。 (α, β) を $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$ それぞれの場合で考えることで、 G は CDC を持つことがわかる。

(ii) $\#c^{-1}(4) = 1$ の場合

このようなグラフ G があるとすれば、色 4 が対応する辺と端点を共有している 4 本の辺には、色 α が 2 つ、 β, γ が 1 つずつ ($\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$) 現れていることが $\#c^{-1}(4)$ の最小性からわかる (下図)。 このとき図の頂点 v から、色が α の辺と β の辺を交互に辿っていくことで、重複のない G の頂点の無限列を得ることができるが、これは V が有限集合であることに矛盾する。 ゆえに $\#c^{-1}(4) = 1$ であるようなグラフは存在しない。



(iii) $\sharp c^{-1}(4) = 2$ の場合

この場合には G の全ての頂点を含む 2-正則な部分グラフで、長さが奇数の閉路を二つしか含まないものが存在するので、Huck の定理 [4, Theorem A] により G は CDC を持つ。

参考文献

- [1] B. Alspach, L. Goddyn and C-Q. Zhang, *Graphs with the circuit cover property*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), pp. 131–154.
- [2] R. Diestel, *Graph Theory, 3rd ed*, GTM173, Springer-Verlag (2006).
- [3] H. Fleischner and R. Häggkvist, *Circuit double covers in special types of cubic graphs*, Discrete Math. Vol. **309** (2009), pp. 5724–5728.
- [4] A. Huck, *On cycle-double covers of graphs of small oddness*, Discrete Math. **229** (2001), no. 1-3, 125–165.
- [5] F. Jaeger, *Flows and Generalized Coloring Theorems in Graphs*, J. Combinatorial Theory Ser. B **26** (1979), pp. 205–216.
- [6] F. Jaeger, *A survey of the cycle double cover conjecture*, Annals of Discrete Math. **27** (1985), pp. 1–12.
- [7] P. D. Seymour, *Sums of circuits*, Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977), Academic Press, New York, (1979), pp. 341–355.
- [8] G. Szekeres, *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austral. Math. Soc. **8** (1973), pp. 367–387.

静的時空における量子スカラー場のモデルの基底状態について

九州大学数理学研究院

鈴木章斗

概要

本稿では、静的な4次元時空における van Hove モデルを定義し、その基底状態の存在と非存在について論じる。

1 静的時空の van Hove 模型

van Hove 模型は、古典的で静的な外場 $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ と相互作用する量子スカラー場のモデルのひとつで、そのハミルトニアンは、

$$H = d\Gamma(\omega) + \phi(\omega^{-1/2}\rho)$$

で与えられる $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3; dx)$ 上のボソン・フォック空間

$$\Gamma(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_s^n \mathfrak{h}$$

上の作用素である¹。第二量子化作用素

$$d\Gamma(\omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \omega^{(n)}$$

は、スカラー場のハミルトニアンを表し、 $\omega^{(n)}$ は、

$$\omega^{(n)} = \sum_{j=1}^n \left(\bigotimes_{i=1}^{j-1} I \right) \otimes \omega \otimes \left(\bigotimes_{i=j}^{n-j} I \right)$$

によって定義される $\bigotimes_s^n \mathfrak{h}$ 上の作用素である。ここで、 ω は、ひとつのボース粒子のハミルトニアンで、あるクラスの静的4次元時空²では、次式で与えられる正の自己共役作用素である³：

$$\omega^2 = - \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + v(x)$$

¹ \bigotimes_s^n ($n \geq 1$) は、 n 次の対称テンソル積を表し、 $\bigotimes_s^0 := \mathbb{C}$ と規約する。

²静的な時空の定義は、例えば、[Fu] を参照。

³このような ω を与える静的時空については、[GHPS, GHPS2] を参照。

本稿では、 $a_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ は、次の (A.1)-(A.3) を満たすと仮定する：

$$(A.1) \quad a_{ij}, v \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

(A.2) ある正数 $C_1, C_2 \geq 0$ が存在して、任意の $x \in \mathbb{R}^3$ と、 $\xi \in \mathbb{R}^3$ に対し、

$$C_1 |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 |\xi|^2$$

が成り立つ。

(A.3) ある正数 $m_\infty \geq 0$ が存在して、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x)^{1/2} = m_\infty$$

が成り立つ。

例 1.1 (Minkowski 時空). *Minkowski* 時空では、 $a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}$ であり、 $v(x) \equiv m^2$ ($m \geq 0$) である。したがって、 $m_\infty = m$ となり、 $\omega = \omega_m$ である：

$$\omega_m = \sqrt{m^2 - \Delta}$$

$m > 0$ のとき、*massive* といい、 $m = 0$ のとき、*massless* という。 ω_m のスペクトルは、

$$\sigma(\omega_m) = [m, \infty)$$

となる。この場合、 $d\Gamma(\omega_m)$ のスペクトルは、図のように、0 を固有値に持ち、真性スペクトルは、 $[m, \infty)$ となる。

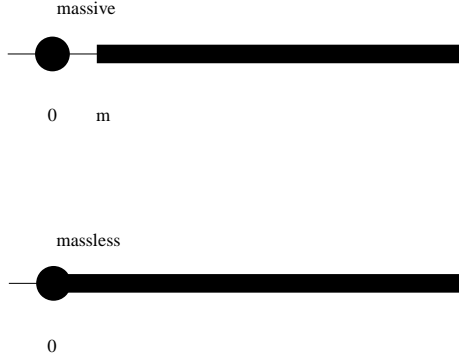


図 1: $\sigma(d\Gamma(\omega_m))$

特に、massless の場合には、 $d\Gamma(\omega_m)$ の固有値 0 は、真性スペクトルの下限に埋蔵されている。このような固有値を埋蔵固有値と呼ぶ。一般に、埋蔵固有値は、摂動の下で安定ではない。本稿では、この埋蔵固有値が、以下に定義する場合 $\phi(\omega^{-1/2}\rho)$ の摂動の下で、どのように振舞うかに興味がある。

以下では、便宜的に、 m_∞ を質量と呼び、 $m_\infty > 0$ ならば、massive、 $m_\infty = 0$ ならば、massless と呼ぶことにする。

注意 1.1. (A.1) - (A.3) に対する付加的な仮定の下で、

$$\sigma(\omega) = [m_\infty, 0) \quad (1)$$

となることが証明される。実際、例えば、 $\omega = -\Delta + v(x)$ かつ $v(x) \geq m_\infty$ ならば、(1) を満たしている。このような場合、massless ($m_\infty = 0$) ならば、 $d\Gamma(\omega)$ のスペクトルは、 $d\Gamma(\omega_0)$ と同様に、スペクトルの下限 0 を埋蔵固有値に持つ。また、massive ならば、 ω^{-s} ($s > 0$) は、有界作用素であるが、massless の場合は、 ω^{-s} ($s > 0$) は、非有界作用素になってしまうことにも注意されたい。

各 $f \in \mathfrak{h}$ に対して、Segal の場の作用素 $\phi(f)$ は、

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f))$$

で定義される対称作用素である。ここで、 $a(f)$ とその共役作用素 $a^*(f)$ は、消滅・生成作用素と呼ばれ、次の CCR を満たす：任意の $f, g \in \mathfrak{h}$ に対して

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle_{\mathfrak{h}}, \quad [a^\sharp(f), a^\sharp(g)] = 0$$

(a^\sharp は、 a または a^* を意味する) が成り立つ。以下、外場 ρ は、次の性質を満たすとする：

$$(A.4) \quad 0 \leq \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)^4$$

$$(A.5) \quad \omega^{-1/2}\rho \in \mathfrak{h} \text{ かつ } \omega^{-1}\rho \in \mathfrak{h}$$

次の補題は、基本的である [Ar, De]：

補題 1.1. 仮定 (A.1) - (A.5) の下で、 H は下に有界な自己巨役作用素である⁵。

上の補題により、次の定義が可能である：

定義 1.1. ハミルトニアン H のスペクトルの下限

$$E_0 := \inf \sigma(H) > -\infty$$

が、 H の固有値であるとき、 H は基底状態を持つといい、固有値でなければ、 H は基底状態を持たないという。

van Hove 模型は、スペクトルについて、厳密に解ける模型のひとつであり、次の補題はよく知られている⁶。

補題 1.2. (A.1) - (A.5) を仮定する。このとき、 H が基底状態を持つための必要十分条件は、

$$\omega^{-3/2}\rho \in \mathfrak{h}$$

を満たす事である。

⁴ $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ は、 \mathbb{R}^3 上、コンパクトな台を持つ無限階微分可能な関数全体の集合をあらわす。

⁵一般に、自己共役作用素 A のスペクトル $\sigma(A)$ は $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ を満たすが、 $\inf \sigma(A) > -\infty$ を満たすとき、 A は下に有界であるという。

⁶証明は、[Ar, De] を参照されたい。

上の補題によって、次の (IRD) は、基底状態が存在しないための必要十分条件である⁷：

$$\omega^{-3/2}\rho \notin \mathfrak{h} \quad (\text{IRD})$$

次の例は、Minkowski 時空におけるよく知られた事実である：

例 1.2 (Minkowski 時空). 例 1.1 の $\omega = \omega_m$ を考え、(A.4) を仮定しよう。このとき、注意 1.1 によって、massive であれば、自動的に、(A.5) を満たし、 H は基底状態を持つ。一方、massless ならば、 H が基底状態を持つための必要十分条件は、 $\rho = 0$ である。実際、 $\rho \neq 0$ ならば、上の仮定 (A.4) により、 ρ のフーリエ変換 $\hat{\rho}$ は、連続かつ $\hat{\rho}(0) > 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \|\omega_0^{-l/2}\rho\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{|k|^l} \\ &= \begin{cases} < \infty, & l = 1, 2, \\ \infty, & l = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となり、(A.5) を満たすが、(IRD) が成立する。

上の例は、Minkowski 空間では、massless ならば、外場 ρ が存在すると、基底状態が存在しないということを意味している。この現象は、赤外発散と呼ばれるもののひとつの表れである⁸。

一方、注意 1.1 により、(A.1) - (A.3) を満たす一般の ω に対しても、massive ($m_\infty > 0$) の場合は、上の例と同様にして、基底状態は存在する。

以下では、(A.1) - (A.3) を満たす massless ($m_\infty = 0$) の ω に対して、 H が基底状態を持つかどうかについて論じる。

2 基底状態の非存在

まず、例 1.2 の Minkowski 時空と同様に、 H が基底状態を持たない場合から論じよう。次の条件を仮定する：

(QD) $m_\infty = 0$ かつ、ある正数 $C \geq 0$ が存在して、

$$0 \leq v(x) \leq C\langle x \rangle^{-\beta}, \quad (\beta > 2)$$

が成り立つ⁹、¹⁰。

次の補題が重要である。

補題 2.1. (A.1) - (A.4) と (QD) を仮定する。このとき、次が成り立つ：

$$(i) \ \omega^{-l/2}\rho \in \mathfrak{h} \quad (l = 1, 2)$$

$$(ii) \ \omega^{-3/2}\rho \notin \mathfrak{h}$$

証明) まず、Laplace 変換によって、次の公式を得る： $l = 1, 2, 3$ に対して、 $\nu_l := (l-4)/4$ とすると、ある正数 $\gamma_l > 0$ が存在して、

$$\omega^{-l/2} = \gamma_l \int_0^\infty dt e^{-t\omega^2} t_l^{\nu_l} \quad (2)$$

が成り立つ。仮定 (QD) の下で、作用素 $e^{-t\omega^2}$ の積分核 $e^{-t\omega^2}(x, y)$ に対して、Gauss 型評価がいられている¹¹：ある正数 $c_i, C_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) が存在して、

$$c_1 e^{-c_2 t \omega_0^2}(x, y) \leq e^{-t\omega^2}(x, y) \leq c_3 e^{-c_4 t \omega_0^2}(x, y) \quad (3)$$

が成り立つ。ここで、 $\omega_0^2 = -\Delta$ であり、 $e^{-t\omega_0^2}(x, y)$ は、熱半群 $e^{-t\omega_0^2}$ の積分核である。(2) と (3) を用いると、適当な定数 $C_l, C'_l \geq 0$ ($l = 1, 2, 3$) を取って、

$$C_l \|\omega_0^{-l/2}\rho\|_{\mathfrak{h}}^2 \leq \|\omega^{-l/2}\rho\|_{\mathfrak{h}}^2 \leq C'_l \|\omega_0^{-l/2}\rho\|_{\mathfrak{h}}^2$$

となる。したがって、例 1.2 により、結論を得る。□

上の補題によって、(QD) の場合には、(A.5) を満たすが、(IRD) が成り立つ。したがって、次の定理を得る：

⁷IRD は、infrared divergence を意味する。

⁸このような状況は、CCR の非道値表現をとることによって、解消される ([Ar] 参照)。

⁹ $\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$

¹⁰QD は、quickly decay を意味する。

¹¹例えば、[Zh] を参照。

定理 2.2. (A.1) - (A.4) と (QD) を仮定する。このとき、 H は基底状態を持たない。

3 基底状態の存在

次に、例 1.2 の Minkowski 時空とは異なり、基底状態が存在する場合について論じよう。次の条件を仮定する：

(SD) $m_\infty = 0$ かつ、ある正数 $C \geq 0$ が存在して、

$$v(x) \geq C \langle x \rangle^{-\beta}, \quad (\beta \leq 2)$$

が成り立つ¹²。

(SD) の下では、(2) の下からの評価は成り立たず、上からの評価はもっとよくできる¹³。そのため、次の補題を得る¹⁴：

補題 3.1. (A.1) - (A.4) と (SD) を仮定する。さらに、

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |(\nabla a_{ij})(x)| < \infty \quad (4)$$

を満たすとする。このとき、

$$\omega^{-l/2} \rho \in \mathfrak{h}, \quad l = 1, 2, 3$$

が成り立つ。

この補題と補題 1.2 から次の定理を得る：

定理 3.2. (A.1) - (A.4)、(SD) を仮定し、(4) を満たすとする。このとき、 H は基底状態を持つ。

この定理は、一般の静的時空と Minkowski 時空の間の差異を明らかにしている。例 1.2 で見たように、Minkowski 時空では、仮定 (A.4) の下で、 $\rho \neq 0$ ならば、massive のときしか、基底状態は現れない。しかし、仮定 (A.1) - (A.3)、(4) と (SD) を満たすような静的時空では、仮定 (A.4) の下で、 $\rho \neq 0$ かつ massless であっても、基底状態が存在する。

¹²SD は、slowly decay を意味する。

¹³例えば、[Zh] を参照。ここでは、[MS] の一般論を用いて、[Zh] の結果を拡張して使う。

¹⁴証明は、[GHPS2] を参照されたい。

参考文献

- [Ar] 新井朝雄: フォック空間と量子場 [下], 日本評論社 (2000)
- [De] Dereziński, J. : Van Hove Hamiltonians - Exactly solvable models of infrared and ultraviolet problem, *Ann. Henri Poincaré* **4** (2003) 713-738.
- [Fu] Fulling, S. A. : *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*, London Mathematical Society Student Text **17**, Cambridge University Press (1996).
- [GHPS] Gerard, C., Hiroshima, F. Panati, A. and Suzuki, A. : Infrared divergence of a scalar quantum field model on a pseudo Riemannian manifold, *Interdiscip. Inform. Sci.* **15** (2009) 399 - 421.
- [GHPS2] Gerard, C., Hiroshima, F. Panati, A. and Suzuki, A. : 準備中.
- [MS] Milman, P. D. and Semenov, Y. A. : Global heat kernel bounds via desingularizing weights, *J. Funct. Anal.* **212** (2004) 373-398.
- [Zh] Zhang, Q.S.: Large time behavior of Schroedinger heat kernels and applications, *Comm. Math. Phys.* **210** (2000) 371-398.

Determining nodes for semilinear parabolic equations

Ryôhei Kakizawa*

1 Introduction

Let Ω be a bounded domain in \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$) with C^2 -boundary $\partial\Omega$, H be a closed subspace of $L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) \cap H$. We consider the following strong formulation of the initial-boundary value problem for the semilinear parabolic equation:

$$\begin{aligned} d_t u + Au + Bu &= f && \text{in } L^2((0, \infty); H), \\ u(0) &= u_0 && \text{in } V, \end{aligned} \tag{1.1}$$

where u is a time-global strong solution of (1.1), A is a linear elliptic operator of second order from $D(A)$ into H , B is a nonlinear operator from $D(B)$ into H , f is a nonhomogeneous term, u_0 is an initial data of u . Moreover, $D(A)$ and $D(B)$ are domains of A and B respectively. A typical example of the first equation of (1.1) is the following semilinear heat equation:

$$\partial_t u - k\Delta u - |u|^{p-1}u = 0,$$

where $k > 0$, $p > 1$.

The conclusion for asymptotic properties of time-global strong solutions of (1.1) can be given by the theory of nodal values and determining nodes introduced by Foias and Temam [2]. The approach of nodal values and determining nodes is quite natural from the computational point of view. In general, determining nodes can be obtained from finite many measurements, time-global strong solutions of the initial-boundary value problem for semilinear parabolic equations can be uniquely determined by them. Some problems related to determining nodes for semilinear parabolic equations have been discussed. It is proved by Foias and Kukavica [1], Kukavica [3] and Oliver and Titi [6] that there exist determining nodes for the Kuramoto-Shivashinsky equation, the complex Ginzburg-Landau equation and the semilinear Schrödinger equation respectively. In recent years, Lu and Shao [4] studied determining nodes for partly dissipative reaction diffusion systems including the FitzHugh-Nagumo equations. However, determining nodes for semilinear parabolic equations in which the semilinear heat equation, the Navier-Stokes equations and so on consist have been not considered. It is necessary to discuss nodal values and determining nodes for general semilinear parabolic equations.

In order to meet the above requirement, we study the determination of the asymptotic behavior of time-global strong solutions of (1.1) by determining nodes. The main purpose of this report is to extend B to the more general nonlinear operator than [2], [4] as for some results which are obtained in [1], [2], [3], [4], [6].

*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan (*E-mail address*: kakizawa@ms.u-tokyo.ac.jp)

2 Preliminaries and main result

2.1 Preliminaries

All functions appearing in this report are either H or H^n -valued. For the sake of simplicity, we will not distinguish them from their values in notation.

It is well known in the theory of Hilbert spaces that $L^2(\Omega)$ is decomposed into $L^2(\Omega) = H \oplus H^\perp$, where H^\perp is the orthogonal complement of H . Let P be the orthogonal projection of $L^2(\Omega)$ onto H , $V = H_0^1(\Omega) \cap H$.

A is a linear elliptic operator from $D(A) := H^2(\Omega) \cap V$ into H defined as

$$Au = -P \left\{ \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} (a_{ij} \partial_{x_i} u) \right\},$$

B is a nonlinear operator from $D(B) := H^2(\Omega) \cap V$ into H . A and B are assumed to the following properties:

$$(A.1) \quad a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

$$(A.2) \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ on } \overline{\Omega} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

(A.3) There exists a positive constant $a > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a |\xi|^2$$

for any $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(A.4) Let $(u, v)_{D(A)} = (Au, Av)_{L^2(\Omega)}$, $\|u\|_{D(A)} = ((u, u)_{D(A)})^{1/2}$. Then $\|\cdot\|_{D(A)}$ is equivalent to $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ as a norm in $D(A)$: there exist two positive constants $a_1 > 0$ and $a_2 > 0$ such that

$$a_1 \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \|u\|_{D(A)} \leq a_2 \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

for any $u \in D(A)$.

(B.1) $B0 = 0$.

(B.2) There exist two constants $C_B > 0$ and $p > 1$ such that

$$\|Bu - Bv\|_{L^2(\Omega)} \leq C_B (\|u\|_{H^2(\Omega)}^{p-1} + \|v\|_{H^2(\Omega)}^{p-1}) \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$$

for any $u, v \in D(B)$.

Let $f \in L^2((0, \infty); H)$, $u_0 \in V$. u is called a time-global strong solution of (1.1) if $u \in L^2((0, \infty); D(A)) \cap C_b([0, \infty); V)$, $d_t u \in L^2((0, \infty); H)$, u satisfies (1.1). Let $\mathcal{S}(f, u_0)$ be the set of all functions which are time-global strong solutions of (1.1) with f and u_0 .

2.2 Main result

For any $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 1$, $x \in \Omega$ and $u \in D(A)$, E_N , $d_N(x)$, d_N and $\eta_N(u)$ are defied as

$$E_N = \{x_1, \dots, x_N; x_j \in \Omega \ (j = 1, \dots, N)\},$$

$$d_N(x) = \min_{j=1, \dots, N} |x - x_j|,$$

$$d_N = \max_{x \in \Omega} d_N(x),$$

$$\eta_N(u) = \max_{j=1, \dots, N} |u(x_j)|.$$

We can consider E_N and d_N as the set of determining nodes and the density of E_N in Ω respectively. It is essential for our main result to be assumed that

$$(H.1) \ \mathcal{S}(f, u_0) \neq \emptyset \text{ for any } f \in L^\infty((0, \infty); H), u_0 \in V.$$

$$(H.2) \ \text{There exists a positive constant } M(f, u_0, t_0) \text{ for any } f \in L^\infty((0, \infty); H), u_0 \in V, \\ t_0 > 0 \text{ such that } \|u\|_{C_b([t_0, \infty); D(A)} \leq M(f, u_0, t_0) \text{ for any } u \in \mathcal{S}(f, u_0).$$

Our main result is given by the following theorem [5, Theorem 2.3]:

Theorem. *Let $n = 2, 3$, $f, g \in L^\infty((0, \infty); H)$, $u_0, v_0 \in V$, $u \in \mathcal{S}(f, u_0)$, $v \in \mathcal{S}(g, v_0)$, and assume (H.1), (H.2). Then there exists a positive constant δ depending only on Ω , A , B , f , g , $M(f, u_0, t_0)$ and $M(g, v_0, t_0)$ such that if $0 < d_N \leq \delta$, $u(x_j, t) - v(x_j, t) \rightarrow 0$ ($j = 1, \dots, N$), $f(t) - g(t) \rightarrow 0$ in H as $t \rightarrow \infty$, then $u(t) - v(t) \rightarrow 0$ in $V \cap C^{0, \mu}(\overline{\Omega})$ as $t \rightarrow \infty$ for any $0 < \mu < 1/2$.*

3 Applications

3.1 The semilinear heat equation

The initial-boundary value problem for the semilinear heat equation is described as follows:

$$\begin{aligned} \partial_t u - k\Delta u - |u|^{p-1}u &= f && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $k > 0$, $p > 1$, f is an external force, u_0 is an initial data of u .

Let $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $P = I_2$, $Au = -k\Delta u$, $Bu = -|u|^{p-1}u$, $1 < p \leq n/(n-2)$, where I_2 is the identity operator in $L^2(\Omega)$. Then there exists a positive constant $C_B > 0$ depending only on Ω and p such that

$$\|Bu - Bv\|_{L^2(\Omega)} \leq C_B(\|u\|_{H^1(\Omega)}^{p-1} + \|v\|_{H^1(\Omega)}^{p-1})\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \tag{3.2}$$

for any $u, v \in H^1(\Omega)$.

It is stated in [5, Theorems 4.1 and 4.2] that (H.1), (H.2) hold for the strong formulation of (3.1) under appropriate assumptions for p , f and u_0 .

3.2 The Navier-Stokes equations

The initial-boundary value problem for the Navier-Stokes equations is described as follows:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\
\partial_t u - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla) u &= -\nabla p + f && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\
u|_{t=0} &= u_0 && \text{in } \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

where $\mu > 0$, f is an external force field, u_0 is an initial data of u .

Let us introduce the solenoidal function spaces to utilize the strong formulation of (3.3). $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^n ; \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$. $L_\sigma^2(\Omega)$ is the completion of $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ in $(L^2(\Omega))^n$. $L_\sigma^2(\Omega)$ is characterized as follows:

$$L_\sigma^2(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^n ; \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega, u \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

where ν is the outward normal vector on $\partial\Omega$. It follows from the Helmholtz decomposition that $(L^2(\Omega))^n$ is decomposed into $(L^2(\Omega))^n = L_\sigma^2(\Omega) \oplus G^2$, where $G^2 := \{\nabla p ; p \in H^1(\Omega)\}$. Let P_2 be the orthogonal projection of $(L^2(\Omega))^n$ onto $L_\sigma^2(\Omega)$. See, for example, [7, Chapter 1] about basic properties of the Helmholtz decomposition.

Let $H^n = L_\sigma^2(\Omega)$, $V^n = (H_0^1(\Omega))^n \cap L_\sigma^2(\Omega)$, $P = P_2$, $Au = -P_2(\mu \Delta u)$, $Bu = P_2(u \cdot \nabla)u$, $n = 2, 3$. Then there exists a positive constant $C_B > 0$ depending only on Ω such that we have the following inequality:

$$\|Bu - Bv\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq C_B(\|u\|_{(H^2(\Omega))^n} + \|v\|_{(H^2(\Omega))^n})\|u - v\|_{(H^1(\Omega))^n} \tag{3.4}$$

for any $u, v \in (H^2(\Omega))^n$.

It is well known in [2] that (H.1), (H.2) hold for the strong formulation of (3.3) in the case where $n = 2$, (H.1) implies (H.2) in the case where $n = 3$.

References

- [1] C. Foias and I. Kukavica, Determining nodes for the Kuramoto-Sivashinsky equation, *J. Dynam. Differential Equations* 7 (2) (1995), 365–373.
- [2] C. Foias and R. Temam, Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values, *Math. Comp.* 43 (1984), 117–133.
- [3] I. Kukavica, On the number of determining nodes for the Ginzberg-Landau equation, *Nonlinearity* 5 (1992), 997–1006.
- [4] Y. Lu and Z. Shao, Determining nodes for partly dissipative reaction diffusion systems, *Nonlinear Anal.* 54 (2003), 873–884.
- [5] R. Kakizawa, Determining nodes for semilinear parabolic equations, submitted.
- [6] M. Oliver and E. S. Titi, Analyticity of the attractor and the number of determining nodes for weakly damped driven nonlinear Schrödinger equation, *Indiana Univ. Math. J.* 47 (1998), 49–73.
- [7] R. Temam, *Navier-Stokes equations (Third edition)*, North-Holland, 1984.

An explicit formulation for the parity result on Apostol-Vu double zeta values

名大多元数理 岡本卓也

1 Introduction

松本耕二氏 [3] は Apostol と Vu [1] が導入した

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2 \geq m_1} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} (m_1 + m_2)^{-1}$$

という関数に着目し, これを一般化した

$$\begin{aligned} & \zeta_{AV,r}(s_1, \dots, s_r; s_{r+1}) \\ &= \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_r < \infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \dots m_r^{-s_r} (m_1 + m_2 + \dots + m_r)^{-s_{r+1}} \end{aligned}$$

という関数を定義し, 全 \mathbb{C}^{r+1} 空間への解析接続を与えた. これを r 重 Apostol-Vu 型多重ゼータ関数と呼ぶ. また, 一方で Zagier [7] は semi-simple なリー代数 \mathfrak{g} に対して,

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(s) = \sum \frac{1}{\dim(\rho)^s}$$

により Witten ゼータ関数を定義した. ここで $s \in \mathbb{C}$, ρ は \mathfrak{g} のすべての有限次元既約表現をわたるとする. この Witten ゼータ関数の特殊値は物理に関わる量と関係を持っている. 特別な場合の例として, $\mathfrak{g} = SO(5)$ とすると Witten ゼータ関数は

$$\zeta_{SO(5)}(s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{6^s}{m^s n^s (m+n)^s (m+2n)^s} \quad (1.1)$$

となる. 松本氏 [3] は (1.1) を一般化した関数を $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\zeta_{SO(5)}(s_1, s_2, s_3, s_4) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}} \quad (1.2)$$

を定義した. ここで, 2重 Apostol-Vu 型多重ゼータ関数は (1.2) の特別な場合であることに注意する. つまり,

$$\zeta_{AV,2}(s_1, s_2; s_3) = \zeta_{SO(5)}(0, s_1, s_2, s_3) \quad (1.3)$$

となる. また, $\zeta_{SO(5)}$ に関して次の結果 (*parity result*) が知られている.

Theorem 1.1. (*Tsumura [6]*) 負でない整数 p, q, r, s に対して, $p, q, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\} := \mathbb{N}_0, p \geq 1, p+q+r > 1, p+q+s > 1, q+r+s > 1, p+q+r+s > 2$ で $p+q+r+s$ が奇数 という条

件を満たす時 $\zeta_{SO(5)}(p, q, r, s)$ は正の整数点のリーマンゼータ値の積の有理線形結合で表せる .

この結果は $\zeta_{SO(5)}(p, q, r, s)$ の *parity result* と呼ばれている . 筆者はこの結果を $p \geq 0$ に一般化することで (1.3) より 2 重 Apostol-Vu 型多重ゼータ関数の *parity result* を得た . また , 小野寺氏 [5] の方法を応用することでこの *parity result* に関する明示公式を与えた . 本稿ではこの結果とこれに用いた方法の簡単な概説を与える .

2 2 重 Apostol-Vu ゼータ値の *parity result*

Theorem 2.1. 負でない整数 p, q, r, s に対して , $p, q, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\} := \mathbb{N}_0, p \geq 0, p + q + r > 1, p + q + s > 1, q + r + s > 1, p + q + r + s > 2$ で $p + q + r + s$ が奇数という条件を満たす時 $\zeta_{SO(5)}(p, q, r, s)$ は正の整数点のリーマンゼータ値の積の有理線形結合で表せる .

この証明は $p \geq 1$ のときは , Tsumura [6] の結果そのものである . また , $p = 0$ のときは簡単な分数の分解により得られる関数関係式によりわかる . 実際に $p = 0$ で $r, s \geq 1$ のときは

$$\zeta_{SO(5)}(0, q, r, s) = 2\zeta_{SO(5)}(1, q, r - 1, s) - \zeta_{SO(5)}(1, q, r, s - 1),$$

により $p = 1$ のときに帰着できる . また , 他の場合もこのような関数関係式により $p = 1$ のときに帰着して証明できる .

また , ここで 2 つの関数を与える . $s, t, u \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 1, \Re(t) \geq 1, \Re(u) \geq 1$ に対して 2 重 Mordell-Tornheim ゼータ関数 $\zeta_{MT}(s, t, u)$ と $T(s, t, u)$ を

$$\zeta_{MT}(s, t, u) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{1}{m^s n^t (m+n)^u}, \quad (2.1)$$

$$T(s, t, u) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{1}{m^s n^t (m+2n)^u}. \quad (2.2)$$

と定義する . このとき , $p, q, r \in \mathbb{N}$ で $p + q + r \in 2\mathbb{N} + 1$ に対して , Onodera [5] は

$$\zeta_{MT}(p, q, r) = (-1)^p J_{2,1}(p, r, q) + (-1)^q J_{2,1}(q, r, p). \quad (2.3)$$

という 2 重 Mordell-Tornheim ゼータ関数に関する明示公式を与えた . ただし , $p, q, r \in \mathbb{N}$ に対して ,

$$J_{2,1}(p, q, r) = \sum_k \left\{ \binom{p+q-1-2k}{p-1} + \binom{p+q-1-2k}{q-1} \right\} \zeta(2k) \zeta(p+q+r-2k),$$

とし , k は $[0, \max\{p, q\}/2]$ の全ての整数をわたる .

ここで Theorem 2.1 と Tsumura [6] により $\zeta_{AV,2}(p, q; r)$ の (2.1) と (2.2) を用いた明示公式を得ることができる . ただし , (2.2) は一番目の整数が奇数のときにさえ帰着すればよい . これにより $\zeta_{AV,2}(p, q; r)$ の *parity result* に関する明示公式を得るためには (2.3) に注意すると , (2.2) の明示公式を与えさえすればよいことが分かる . それは次のように与えることができる .

Theorem 2.2. a, b, c を正の整数とし , $a, a + b + c \in 2\mathbb{N} + 1$ とする . また , 正の整数 p に対し ,

$a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$ とし, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$, $|\mathbf{a}| = a_1 + \dots + a_p$ とおく. このとき, $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}; l)$ を

$$\mathcal{B}_p(\mathbf{a}; l) = \frac{-2}{|\mathbf{a}| - 2l} \sum_{\substack{l_1, \dots, l_p \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_p = 2l+1}} \prod_{j=1}^p \binom{a_j}{l_j} B_{l_j},$$

と定義する. このとき,

$$\begin{aligned} & T(a, b, c) \\ &= \sum_l \mathcal{B}_2(a, c; l) (-1)^l \frac{(2\pi)^{2l} (a+c-2l)!}{2^{a+c+1-2l} a! b!} \zeta(a+b+c-2l) \\ &+ \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ b > m+n \\ c+m+n: \text{odd}}} \frac{b!}{m! n! (b-m-n+1)!} \sum_{l'} \mathcal{B}_3(c, m, n; l') \\ &\times (-1)^{(b+m+n-2l'+1)/2} (2\pi)^{b+2l'-m-n-1} \frac{(c+m+n-2l')!}{b! c!} \\ &\times \left\{ \sum_{l''=1}^{[(c+m+n-2l')/2]} \left\{ \phi(2l'') \phi(a+c+m+n-2l'-2l''+1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta(2l'') \zeta(a+c+m+n-2l'-2l''+1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \phi(a+c+m+n-2l'+1) - \zeta(a+c+m+n-2l'+1) \right\} \\ &+ \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ b \geq m+n \\ c+m+n: \text{even}}} \frac{b!}{m! n! (b-m-n+1)!} \sum_{l'} \mathcal{B}_3(c, m, n; l') \frac{(c+m+n-2l')!}{2b! c!} \\ &\times (-1)^{(b+m+n-2l')/2+1} (2\pi)^{b+2l'-m-n} \zeta(a+c+m+n-2l') \end{aligned}$$

を得る. ただし, B_r を r 次のベルヌーイ数とし, l と l' はそれぞれ $[0, (a+c)/2]$ と $[0, (c+m+n)/2]$ に含まれるすべての整数をわたるとする.

この証明は小野寺氏 [5] の Milnor's 多重サイン関数の性質を用いる方法を応用して証明することができる. ここでは証明の詳細を紹介することはできないが次の 3 章で Milnor's 多重サイン関数の定義やその性質を少し紹介し, この証明のキーとなる式を紹介する.

また, $T(a, b, c)$ の明示公式は中村氏 [4] も $T(a, b, c)$ をさらに 2 つの関数に分けてそれぞれを考察することで与えていることに注意する. しかし, ここでは違う方法を用いることで直接計算し, 彼の明示公式とは異なる明示公式を得た.

3 Milnor's 多重サイン関数と Theorem 2.2 の証明の簡単な概略

この章では Milnor's 多重サイン関数やその性質と Theorem 2.2 の証明の簡単な概略を述べる. この証明は [2] を参照してもらいたい. r を正の整数とすると, Milnor's 多重サイン関数を $x \in (0, 1)$ に対して次のように定義する.

$$S_r(x) = \Gamma_r(x)^{-1} \Gamma_r(1-x)^{(-1)^r}.$$

ただし,

$$\Gamma_r(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s, x) \Big|_{s=1-r}\right)$$

とする. この Milnor's 多重サイン関数に関して次のことが知られている.

$$\log S_r(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi mx)}{m^r} & r \geq 1 \text{ の奇数のとき,} \\ (-1)^{\frac{r}{2}} \frac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{m^r} & r \geq 2 \text{ の偶数のとき.} \end{cases} \quad (3.1)$$

最後に Theorem 2.2 の証明のキーとなる式 (3.2) とその証明の簡単な概略を紹介する. $s \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}, |x| = 1$ に対して

$$Li_s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^s}$$

と定義する. このとき, Milnor's 多重サイン関数の性質 (3.1) とベルヌーイ多項式の性質を用いると正の整数 a に対して

$$Li_a(e^{2\pi ix}) = a \log S_a(x) + \pi i B_a(x) \quad (3.2)$$

が成り立つ. ただし, $B_a(x)$ を a 次のベルヌーイ多項式とする. $Li_a(e^{2\pi ix})Li_b(e^{4\pi ix})Li_c(e^{-2\pi ix})$ を $x = 0$ から 1 まで積分すると $T(a, b, c)$ を得る. そして, (3.2) を用いることで $T(a, b, c)$ を Milnor's 多重サイン関数とベルヌーイ多項式の積分で表し, それに Milnor's 多重サイン関数とベルヌーイ多項式の性質を用いることでリーマンゼータの積で表すことにより Theorem 2.2 を得る.

参考文献

- [1] T. M. Apostol and T. H. Vu, *Dirichlet series related to the Riemann zeta function*, J. Number Theory **19** (1984), 85-102.
- [2] N. Kurokawa, H. Ochiai and M. Wakayama, *Milnor's multiple gamma functions*, J. Ramanujan Math. Soc. **21** (2006), 153-167.
- [3] K. Matsumoto, *On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions*, In: Proc. Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (eds. D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz), Bonner Math. Schriften, **360**, Bonn, 2003, n.25, 17pp.
- [4] T. Nakamura, *Double Lerch value relations and functional relations for Witten zeta functions*, Tokyo J. Math. **31** (2008), 551-573.
- [5] K. Onodera, *Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values*, Preprint, submitted.
- [6] H. Tsumura, *On Witten's type of zeta values attached to $SO(5)$* , Arch. Math. (Basel) **82** (2004), 147-152.
- [7] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, In: First European Congr. Math. Vol. II (eds. A. Joseph et al.), Progr. Math. **120**, Birkhäuser, 1994, pp. 497-512.

Generic arrangement 上の微分作用素環のネター性

中島規博 (北大・理)

2010.2

1 introduction

Holm は [2] で Central arrangement の座標環に関する微分作用素環の研究を行った。特に、超平面配置が Generic なときの微分作用素環の代数としての生成元を与えた。しかし、微分作用素環の性質について深く研究はされていない。また、Central 2-arrangement の座標環に関する微分作用素環の各階数による斉次成分の左 S -加群としての基底が [5] により与えられた。この基底に関する微分作用素環の表示を使って、Central 2-arrangement の座標環に関する微分作用素環がネター環であることが証明できた。今回、二変数の Central arrangement の座標環に関する微分作用素環のネター性について講演する。また、微分作用素環については [1], [3] などに、超平面配置 (Arrangements of Hyperplanes) については [4] に重要な研究結果が記述されている。

2 微分作用素環と Weyl 代数

$S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数多項式環とする。また $\text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ を S の自己準同型環とする。任意の $i = 1, \dots, n$ に対して $x_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$, $\partial_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ を

$$x_i(f) = x_i f, \quad \partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (f \in S)$$

で定義される作用素とする。 $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ で生成される \mathbb{C} -代数 $A_n = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ を n 次の Weyl 代数という。 A_n の生成元 $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ には

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij} \cdot 1, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad [\partial_i, \partial_j] = 0 \quad (2.1)$$

という関係式が成り立つ。ここで $[\theta, \eta] = \theta\eta - \eta\theta$ であり、 δ_{ij} は Kronecher delta である。

命題 2.1. 集合 $B = \{x^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ は A_n の \mathbb{C} 上の基底を成す。

命題 2.1 より任意の $\theta \in A_n$ は一意に

$$\theta = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

と表される。この表示を θ の標準形 (nomal form) といい、 $x^\alpha \partial^\beta$ を A_n の単項式という。この表示により、ただちに

$$A_n = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^n} S \partial^\beta \quad (2.2)$$

であることがわかる。微分作用素 $\theta = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \in A_n$ に対して θ の単項式の係数が 0 でない β の中で最大の $|\beta|$ を θ の階数 (order) といい、 $\text{ord}(\theta)$ と書く。ただし、特別に $\text{ord}(0) = -\infty$ とする。

次に、微分作用素環を以下のように帰納的に定義する。

定義 2.2. 可換 \mathbb{C} -代数 R に対して、 R の微分作用素環 $D(R)$ を以下で帰納的に定義する：

$$\begin{aligned} D^0(R) &= \{\theta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(R) \mid a \in R, [\theta, a] = 0\}, \\ m \geq 1, \quad D^m(R) &= \{\theta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(R) \mid a \in R, [\theta, a] \in D^{m-1}(R)\}, \\ D(R) &= \bigcup_{m \geq 0} D^m(R). \end{aligned}$$

ここで、 $D(R)$ は左、右 S -加群である。

微分作用素環 $D(R)$ は環構造を持つことがわかっている。また古典的な結果により、多項式環 S に関する微分作用素環 $D(S)$ は Weyl 代数であることもよく知られている。すなわち、

命題 2.3. $D(S) = A_n$ である。

ここで $D^{(m)}(S) = \bigoplus_{|\beta|=m} S \partial^\beta$ とおくと、(2.2) より Weyl 代数を

$$D(S) = \bigoplus_{m \geq 0} D^{(m)}(S)$$

と階数の斉次成分による直和分解することができる。

I を S のイデアルとする。 I を保存する微分作用素全体を考えると環構造を成す。

定義 2.4. S のイデアル I に対して,

$$\Delta(I) = \{\theta \in D(S) \mid \theta(I) \subseteq I\}$$

と定義する. $\Delta(I)$ は $D(S)$ の部分環である.

$\Delta(I)$ を使って S/I の微分作用素環を Weyl 代数の部分商として表示できる.

命題 2.5. I を S のイデアルとする. このとき, S/I の微分作用素環は剰余環 $\Delta(I)/ID(S)$ と \mathbb{C} -代数として同型である.

3 Central arrangement 上の微分作用素環

Holm は [2] で Central arrangement の座標環に関する微分作用素環の研究を行った. 下の命題は [2, Proposition 4.3.] による.

命題 3.1. $p_1, \dots, p_r \in S$ をそれぞれ互いに素な斉次一次多項式とする. また $Q = p_1 \cdots p_r$ とおいて, $I = QS$ とすると

$$\Delta(I) = \bigoplus_{m \geq 0} \Delta^{(m)}(I)$$

である. ただし, $m \geq 0$ に対して $\Delta^{(m)}(I) = \{\theta \in D^{(m)}(S) \mid \theta(I) \subseteq I\}$ とする.

また, 与えられたいくつかの $\Delta(I)$ の階数において斉次な作用素が $\Delta(I)$ の斉次成分の左 S -加群としての基底であるかどうかを判定できる [5, Theorem 4.10.]. 特に $n = 2$ のとき, $\Delta(I)$ の各階数の斉次成分の左 S -加群としての基底が一つ与えられる [5, Proposition 4.14.]. この基底による $\Delta(I)$ の左 S -加群としての表示が可能である. この表示と命題 2.5 により, 微分作用素環 $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$ の元の具体的な計算が可能になる. ここで, 任意の $i = 1, \dots, r$ に対して

$$L_i = \Delta(I) \cap (p_1 \cdots p_i)D(S)$$

と定義する. このとき L_i は $\Delta(I)$ の両側イデアルであることがわかり, また $\Delta(I)$ の両側イデアルの列

$$ID(S) = L_r \subseteq L_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq L_1 \subseteq L_0 = \Delta(I)$$

の各剰余 L_{i-1}/L_i のネター性を調べることで以下のことを証明した.

定理 3.2. $r \geq 1$ を整数とする. $i = 1, \dots, r$ に対して $p_i \in \mathbb{C}[x, y]$ を斉次一次多項式として, p_1, \dots, p_r はそれぞれ互いに素であるとする. また $I = \langle p_1 \cdots p_r \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ とする. このとき, 環 $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$ は右ネターかつ左ネターである.

一方で $r \geq 2$ のとき, この環 $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$ をオーダー・フィルターによって次数化した環はネター環ではない.

例 3.3. $S = \mathbb{C}[x, y]$ として $I = xyS$ を xy で生成される S のイデアルとする. このとき, 任意の $m \geq 1$ に対して

$$x_1 \partial_1^m \in \Delta(I), \quad \partial_1^m \notin \Delta(I)$$

である. したがって, 微分作用素環 $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$ をオーダー・フィルターによって次数化した環 $\text{Gr}(D(\mathbb{C}[x, y]/I))$ 上 $\{x_1 \partial_1^m \mid m \geq 1\}$ で生成されるイデアルは有限生成ではない.

参考文献

- [1] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic D-modules*. London Mathematical Society Student Texts 33, 1995.
- [2] Pär Holm, *Differential Operators on Hyperplane Arrangements*. Comm. Algebra 32 (2004), no.6, 2177-2201.
- [3] J. C. McConnell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*. Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [4] Peter Orlik and Hiroaki Terao, *Arrangements of Hyperplanes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, 1992.
- [5] Jan Snellman, *A Conjecture on Poincaré-Betti Series of Modules of Differential Operators on a Generic Hyperplane Arrangement*. Experiment. Math. 14 (2005), no.4, 445-456.

Construction of an expansion by BMO families in Triebel-Lizorkin spaces by rearrangements of wavelet series

Takahiro Noi*

Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering
Chuo University

Abstract

Ph. Tchamitchian[8] has constructed an atomic decomposition by L^p -atoms ($1 < p < \infty$) in real Hardy space $H^1(\mathbb{R}^n)$ by rearrangements of wavelet expansion. Here the L^p -atoms depend on each element in $H^1(\mathbb{R}^n)$. In this paper, we show a result that there exists an expansion by a BMO family in Triebel-Lizorkin spaces $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ by applying the above methods. Here the BMO family also depends on each element of the spaces.

1 Introduction

The real Hardy space $H^1(\mathbb{R}^n)$ is defined as follows.

Definition 1.1 *The space*

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), j = 1, \dots, n\}$$

with norm $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|R_j f\|_{L^1}$ is called the real Hardy space. Here R_j denotes j -th Riesz transform, i.e. i is the imaginary unit and $R_j = -i\partial/\partial x_j(-\Delta)^{-1/2}$.

The L^p -atoms are defined as follows.

Definition 1.2 *Let $1 < p \leq \infty$. A measurable function $a(x)$ on \mathbb{R}^n is called the L^p -atoms if it satisfies the following three conditions.*

- (1) *There exist a cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ such that $\text{supp}(a) \subset Q$,*
- (2)
$$\int_{\mathbb{R}^n} a dx = 0,$$
- (3)
$$\|a\|_{L^p} \leq |Q|^{\frac{1}{p}-1}, \text{ if } 1 < p < \infty, \text{ and, } \|a\|_{\infty} \leq |Q| \text{ if } p = \infty.$$

Here, $|Q|$ denotes the Lebesgue measure of the cube Q in (1).

Ph. Tchamitchian[8], has constructed an atomic decomposition with L^p ($1 < p < \infty$)-atoms $\{a_{k,j}\}$ satisfying the following inequality by permutation of wavelet basis.

Theorem 1.3 (due to Ph.Tchamitchian[8]) *For each $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, there exist L^p ($1 < p < \infty$) -atoms $\{a_{k,j}\}$ and numbers $\{\lambda_{k,j}\} \in \ell^1(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ such that, f can be represented as*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} \lambda_{k,j} a_{k,j}$$

and

$$\frac{1}{C} \sum_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} |\lambda_{k,j}| \leq \|f\|_{H^1} \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} |\lambda_{k,j}|. \quad (1.1)$$

Here C is some positive constant number.

*s17004@gug.math.chuo-u.ac.jp

The above L^p -atoms $\{a_{k,j}\}$ belong to $BMO(\mathbb{R}^n)$, but not necessarily to L^∞ . Following the arguments in Ph. Tchamitchian[8], we obtain the next theorem.

Theorem 1.4 *Let $0 < p \leq q < \infty$ and $s > n/2$. For each $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, there exist a family $\{a_{k,j}\}$ with $a_{k,j} \in BMO(\mathbb{R}^n)$ and numbers $\{c_{k,j}\} \in \ell^p(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ satisfying the following (1.2) and (1.3): f can be represented as*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} c_{k,j} a_{k,j} \quad (1.2)$$

and

$$\frac{1}{C} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} |c_{k,j}|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_{F_{p,q}^s} \leq C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} |c_{k,j}|^p \right)^{1/p}, \quad (1.3)$$

where C is a positive constant depending only on p, q and n .

2 Preliminaries

In this section, we introduce of Triebel-Lizorkin spaces $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ($0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$), $BMO(\mathbb{R}^n)$ and some well known results of relation between wavelet and the above two spaces.

2.1 Definition of spaces

Definition 2.1 ([7]) *The space $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ consists of all elements $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ such that*

$$\|f\|_{F_{p,q}^s, \phi} \equiv \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{qsj} |(\phi_j \hat{f})^\vee(\cdot)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Here \hat{f} denotes the Fourier transform of f defined by

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

and f^\vee denotes the inverse Fourier transform.

Let $\{\phi_j\}$ be a dyadic resolution of unity in \mathbb{R}^n as follows:

$\phi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfies $\phi_0(x) = 1$ ($|x| \leq 1$), $\phi_0(y) = 0$ ($|y| \geq 3/2$) and

$$\phi_k(x) := \phi_0(2^{-k}x) - \phi_0(2^{-k+1}x), \quad x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Semi-norm $\|\cdot\|_{F_{p,q}^s, \phi}$ is equivalent to $\|\cdot\|_{F_{p,q}^s, \gamma}$ with any other dyadic resolution γ of unity in \mathbb{R}^n as defined above, and so, we use $\|\cdot\|_{F_{p,q}^s}$ in stead of $\|\cdot\|_{F_{p,q}^s, \phi}$ from now on.

Next, we define $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Definition 2.2 *The space $BMO(\mathbb{R}^n)$ consists of all function f on \mathbb{R}^n such that $\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty$.*

Here $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$ and \sup_Q is taken over all cube $Q \subset \mathbb{R}^n$.

2.2 Definition of wavelets

In this paper, we use the following Daubechies wavelet [7];

$$\psi_F \in C^u(\mathbb{R}), \quad \psi_M \in C^u(\mathbb{R}), \quad u \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

where ψ_F, ψ_M have compact supports and ψ_M satisfied

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_M(x) x^v dx = 0 \quad \text{for any } v \in \mathbb{N}_0 \text{ such that } v < u. \quad (2.2)$$

Here subscripts F and M are latter of father wavelet and mother wavelet, respectively.

Let

$$G = (G_1, \dots, G_n) \in G^0 = \{F, M\}^n, \quad (2.3)$$

which means that G_r is either F or M . And let,

$$G = (G_1, \dots, G_n) \in G^j = \{F, M\}^{n*}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

where $*$ indicates that at least one of the components G must be an M . Let

$$\Psi_{G,m}^j(x) = 2^{jn/2} \prod_{r=1}^n \psi_{G_r}(2^j x_r - m_r), \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad G \in G^j, \quad m \in \mathbb{Z}^n, \quad (2.5)$$

We always assume that ψ_F and ψ_M in (2.1) have L^2 -norm 1. Then

$$\{\Psi_{G,m}^j : j \in \mathbb{N}_0, G \in G^j, m \in \mathbb{Z}^n\} \quad (2.6)$$

is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (for each $u \in \mathbb{N}$) and

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{G \in G^j} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_m^{j,G} 2^{-jn/2} \Psi_{G,m}^j = \sum_{j,G,m} \lambda_m^{j,G} 2^{-jn/2} \Psi_{G,m}^j \quad (2.7)$$

with

$$\lambda_m^{j,G} = 2^{jn/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Psi_{G,m}^j(x) dx = 2^{jn/2} \left(f, \Psi_{G,m}^j \right) \quad (2.8)$$

in the corresponding expansion, where $2^{-jn/2} \Psi_{G,m}^j$ in (2.7) are uniformly bounded functions (with respect to j and m).

2.3 Triebel-Lizorkin spaces, BMO and Wavelet

In this subsection, we describe the wavelet expansion of Triebel-Lizorkin spaces [7] and condition that wavelet series is in BMO. To discuss the wavelet expansion of Triebel-Lizorkin spaces, we define the sequence spaces $f_{p,q}^s$.

Definition 2.3 ([7]) *Let $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ and $0 < q \leq \infty$. $f_{p,q}^s$ is sequence space of*

$$\lambda = \{\lambda_m^{j,G} \in \mathbb{C} : j \in \mathbb{N}_0, G \in G^j, m \in \mathbb{Z}^n\} \quad (2.9)$$

satisfied

$$\|\lambda\|_{f_{p,q}^s} \equiv \left\| \left(\sum_{j,G,m} 2^{jsq} |\lambda_m^{j,G} \chi_{Q_{j,m}}(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty, \quad (2.10)$$

where $\chi_{Q_{j,m}}$ is a characteristic function of $Q_{j,m} = \prod_{r=1}^n [2^{-j}(m_r - 1), 2^{-j}(m_r + 1))$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

For wavelet expansion of $F_{p,q}^s$ due to [7] is hold.

Theorem 2.4 ([7]) *Let $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ and*

$$u > \max(s, \sigma_{pq} - s). \quad (2.11)$$

Here

$$\sigma_{pq} = n \left(\frac{1}{\min(p,q)} - 1 \right)_+, \quad b_+ = \max(b, 0) \text{ if } b \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Let $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Then $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ if and only if, it can be represented as

$$f = \sum_{j,G,m} \lambda_m^{j,G} 2^{-jn/2} \Psi_{G,m}^j, \quad \lambda \in f_{p,q}^s, \quad (2.13)$$

unconditional convergence being $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ and locally in any space $F_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $\sigma < s$. That is, convergence in $F_{p,q}^\sigma(K)$ for any ball $K \subset \mathbb{R}$. The representation (2.14) is unique with

$$\lambda_m^{j,G} = 2^{jn/2} \left(f, \Psi_{G,m}^j \right). \quad (2.14)$$

Furthermore

$$I : f \mapsto \left\{ 2^{jn/2} \left(f, \Psi_{G,m}^j \right) \right\} \quad (2.15)$$

is an isomorphic map of $F_{p,q}^s$ onto $f_{p,q}^s$.

If, in addition, $q < \infty$, then $\{\Psi_{G,m}^j\}$ is an unconditional basis in $F_{p,q}^s$.

For representation (2.14)

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} \sim \|\lambda\|_{f_{p,q}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j,G,m} 2^{jsq} |\lambda_m^{j,G} \chi_{Q_{j,m}}(\cdot)|^q \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \quad (2.16)$$

is hold. Here $A \sim B$ means there exist a positive number C which is independent of A and B such that $A \leq CB$ and $(1/C)A \leq B$. In the relation between wavelet expansion and $BMO(\mathbb{R}^n)$, following theorem is hold.

Theorem 2.5 (see [4, p. 154, Theorem4]) *If the wavelet coefficients $\alpha_{j,G,m}$ in wavelet series*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n, G \in G^j} \alpha_{j,G,m} \Psi_{G,m}^j$$

satisfied the following condition, then the series $\sum_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n, G \in G^j} \alpha_{j,G,m} \Psi_{G,m}^j$ converges, with respect to $\sigma(BMO, H^1)$ -topology, to a function of $BMO(\mathbb{R}^n)$:

For any dyadic cube $I_{k,d}$ ($k \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^n$), there exists constant $C > 0$ which is independent of $I_{k,d}$ such that

$$\sum_{I_{j,m} \subset I_{k,d}} \sum_{G \in G^j} |\alpha_{j,G,m}|^2 \leq C |I_{k,d}|, \quad (2.17)$$

where $I_{k,d} = \prod_{r=1}^n [2^{-k}d_r, 2^{-k}(d_r + 1))$ and the summation $\sum_{I_{j,m} \subset I_{k,d}}$ in (2.17) is taken over all dyadic subcubes $I_{j,m}$ of $I_{k,d}$.

In this talk we give proof of Theorem1.4.

References

- [1] John J. Benedetto and Michael W. Frazier, Wavelets: Mathematics and Applications, (CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, 1994).
- [2] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelet, (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992).
- [3] Eugenio Hernandez and Guido L. Weiss, A First Course on Wavelets, (Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1996).
- [4] Yves Meyer, Wavelets and operators, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 37, 1992).
- [5] E. M. Stein, Harmonic analysis, (Princeton University Press,1993).
- [6] Hans Triebel, Theory of Function Spaces , (Birkhäuser, 2006).
- [7] Hans Triebel, Function Spaces and Wavelets on Domains, (European Mathematical Society, 2008).
- [8] Ph. Tchamitchian, ‘Wavelets, Functions, and Operators’, *Wavelets: theory and applications* (1996) 83–181.
- [9] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, (London Mathematical Society Student Texts 37, 1997).

有限体上の単純正規交叉多様体の 相互写像の核について

杉山 倫 (名大多元数理)

本稿では有限体上のある特別な形をした単純正規交叉多様体に対する不分岐類体論の相互写像の核について得られた結果を紹介する。

有限体上の多様体に対する不分岐類体論

整数論における大きな興味の対象として、代数体 K の分離閉包 K^{sep} のガロア群 $G_K := \text{Gal}(K^{sep}/K)$ (K の絶対ガロア群) がある。 G_K は非常に大きく、複雑な群である。ところが、 K の最大アーベル拡大 K^{ab} のガロア群 $\text{Gal}(K^{ab}/K)$ は “ K 自身の言葉 ” で記述 (わかりやすい群で近似) できるのである。これが古典的な類体論の内容である。

有限体上の固有な多様体 X に対する不分岐類体論は、古典的な類体論の幾何学的な一般化であり、Lang [3] により初めて定式化された。この理論では、古典的な類体論におけるガロア群の代わりに X のエタール基本群 $\pi_1(X)$ を考える。 $\pi_1(X)$ は X の有限エタール被覆を統制する群であり、ガロア群と同様に非常に興味深い対象であるが、複雑な群である (e.g. $X = \text{Spec}(K)$ のとき、 $\pi_1(X) \simeq G_K$)。ところが、 $\pi_1(X)$ の最大アーベル商群 $\pi_1^{ab}(X)$ については “ X 自身の言葉 ” で記述 (代数的サイクルの群で近似) することができるのである。これが X に対する不分岐類体論である。ここで、記述できるとは、次の相互写像と呼ばれる標準的な準同型写像 ρ_X が存在することであり、 ρ_X の様子がどの程度近似しているかを表している：

$$\rho_X : CH_0(X) \longrightarrow \pi_1^{ab}(X).$$

左辺は X の 0-サイクルのチャウ群であり、正確には次のように定義される：

$$CH_0(X) := \text{Coker} \left(\partial_1 : \bigoplus_{x \in X^{d-1}} \kappa(x)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^d} \mathbb{Z} \right) \quad (d = \dim X).$$

ここで、 ∂_1 は離散付値によって定義される写像であり、自然数 r に対して X^r は余次元 r の点の集合を表す。 $\kappa(x)^\times$ は x における剰余類体 $\kappa(x)$ の乗法群である。今の場合、 X^d は X の閉点全体の集合と一致している。

相互写像は閉点 x の類を x での Frobenius 置換に写す写像であり、 X が正規なら ρ_X は稠密な像をもち [3]、 X がスムーズなら ρ_X は単射である [2]。よってスムーズのときには、エタール被覆の群と代数的サイクルの群という一見関わりのないように思われる群がほぼ一致するのである。その一方で、 ρ_X が単射でないような射影的な正規曲面 X の存在も知られている [4]。

著者は有限体上の単純正規交叉多様体 (cf. Definition 1) に対して、その相互写像が多様体の係数拡大に対してどのように振舞うかを調べることにより、相互写像が持つ潜在的な性質 (ここでは有限次係数拡大で変化しない性質をいう) を明らかにすることを目指し

研究した^{*1} . その中で得られた結果を以下で述べる .

単純正規交叉多様体の相互写像

Definition 1 (単純正規交叉多様体). X を体 k 上有限型で同次元なスキームとする . このとき , X が k 上の単純正規交叉多様体であるとは, 次を満たすときをいう :

- (i) X は k 上分離的であり, いたるところエタール局所的に次のアフィンスキームと同型である ; $\text{Spec}(k[T_0, \dots, T_d]/(T_0 T_1 \cdots T_r))$ ($0 \leq r \leq d = \dim X$).
- (ii) X のすべての既約成分が k 上スムーズである .

Definition 2 (双対グラフ (cf. [1], [4])). X を体 k 上 d 次元の単純正規交叉多様体とする . X の双対グラフと呼ばれる有限単体的複体 Γ_X を次のように定義する : $\{X_i\}_{i \in I}$ を X の既約成分全体の集合とし, I 上の順序を一つ固定する . 正の整数 r に対して, $X^{(r)} := \coprod_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset I} X_{i_1} \times_X X_{i_2} \times_X \cdots \times_X X_{i_r}$ とする . このとき, Γ_X の r -単体 \mathcal{G}_r を $X^{(r)}$ の既約成分全体の集合と定め, r -単体の向き付けを I の順序によって r について帰納的に定める .

単純正規交叉曲面の相互写像に関して, 次の事実が知られている :

Fact 3 (Jannsen-Saito [1]). 有限体上固有な単純正規交叉曲面 X に対して, 次の完全列がある :

$$H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\epsilon_{X,n}} CH_0(X)/n \xrightarrow{\rho_{X/n}} \pi_1^{ab}(X)/n \longrightarrow H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow 0. \quad (1)$$

ここで, 自然数 n と Abel 群 A に対して, A/n は n 倍写像の余核を表す .

Remark 4. 曲線に対して同様の完全列の存在は, Kato-Saito [2] によって示されている . 曲線の場合, 最初の群が消えているため, $\rho_{X/n}$ は単射である . また, 一般次元の単純正規交叉多様体に対しても同様の完全列が存在する .

Example 5. k を有限体とする . X を単純正規交叉曲面 $T_0 T_1 T_2 T_3 = 0 \subset \mathbb{P}_k^3 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3])$ とする . このとき, X の双対グラフのホモロジー群は次のように計算できる : $H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}) = 0$, $H_0(\Gamma_X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

また, この X に対する列 (1) は次のようになる :

$$\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\epsilon} CH_0(X)/n \xrightarrow{\rho_{X/n}} \pi_1^{ab}(X)/n \longrightarrow 0.$$

チャウ群の計算により, $\rho_{X/n}$ は単射であることがわかり, ϵ は零写像である . この X は $H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n)$ が消えていないが, $\rho_{X/n}$ は係数拡大しても常に単射となる例である .

係数拡大に対する相互写像の振舞い

有限体上の単純正規交叉多様体 X の相互写像 ρ_X (および $\rho_{X/n}$) が係数拡大に対して

^{*1} 元々, 局所体上の多様体 V に対する不分岐類体論の相互写像について研究していたが, 単純正規交叉多様体が V の strict semistable reduction として現れ, V の相互写像と関係 [1] することから研究した .

どう振舞うかは，完全列 (1) より双対グラフのホモロジー群の振舞いを見ればよいことがわかる．特に全射性に関しては，完全に係数拡大によるホモロジー群の振舞いを見るだけでよい．しかし，単射性に関してはホモロジー群を見るだけでは不十分である (cf. Example 5)．そして，次の事実が知られている：

Fact 6 (Sato [5]). 有限体 k 上の単純正規交叉曲面 S で，写像 ρ_S/n は単射ではないが，十分大きな任意の有限次拡大 E/k に対して，係数拡大した曲面 $S \otimes E$ の写像 $\rho_{S \otimes E}/n$ が単射になるものが構成できる．

著者は上の事実を受けて， ρ_X の非単射性の潜在性を探るため，次の問題を考えた：

問題 有限体 k 上の単純正規交叉曲面で，任意の有限次拡大 F/k に対して，写像 $\rho_{Y \otimes F}/n$ が単射にならないようなものは存在するか？

以下で，特別な形をした単純正規交叉多様体の核についての結果および，問題の答えとなる単純正規交叉曲面の例^{*2} (Example 8) を紹介する．この研究で鍵となるのは，一般に非常に抽象的であり，そのままでは具体的に計算することが困難である写像 $\epsilon_{X,n}$ および，その像である相互写像の核をどのように計算するかである．著者は，Matsumi-Sato-Asakura[4] の類似を考え，相互写像の核のある部分群を比較的計算しやすい写像を用いて記述した．以下について詳しくは [6] 参照．

Y_0 を有限体 k 上射影的かつスムーズで幾何的に既約な多様体とし， D を Y_0 上の単純正規交叉因子とする． $O := (0 : 1)$ ， $\infty := (1 : 0) \in \mathbb{P}_k^1$ とおき，次の単純正規交叉多様体を考える： $Y := (Y_0 \times_k O) \cup (Y_0 \times_k \infty) \cup (D \times_k \mathbb{P}_k^1) \subset Y_0 \times_k \mathbb{P}_k^1$ ．

この Y に対して，像が $\text{Ker}(\rho_Y)$ (これは有限群) と一致するような写像

$$\delta_Y : H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}) \longrightarrow CH_0(Y)$$

を構成することができる．そして， $\text{Ker}(\rho_Y)$ の部分群 $G(Y) := \text{Im}(\delta_Y \circ \sigma)$ を考える．ここで， $\sigma : H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z})$ は双対グラフのノルム写像である．ただし， $\overline{D} := D \otimes_k k^{sep}$ である．

次に， \overline{D}_j は \overline{D} の既約成分をとし， $\overline{Y}_0 := Y_0 \otimes_k k^{sep}$ とする．このとき， $G_k := \text{Gal}(k^{sep}/k)$ -加群 $\Theta := \text{Coker}(\bigoplus_j \pi_1^{ab}(\overline{D}_j) \longrightarrow \pi_1^{ab}(\overline{Y}_0))$ および G_k -同変な写像

$$\alpha : H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Theta$$

が $G(Y)$ に対して重要な役割を果たす．

Theorem 7 (S, [6]). ある仮定の下で， $G(Y) \simeq \text{Im}(\alpha)$ ．

この定理で注目する点は，相互写像の核の部分群 $G(Y)$ が係数拡大によらない写像 α の像で表せるということである．特に定理の仮定の下で， $\text{Im}(\alpha)$ が消えていなければ，相互写像 ρ_Y は Y を任意に有限次係数拡大しても単射でないことがわかる．

^{*2} 局所体上への応用があるべきと考えられるが，現時点では得られていない．

Example 8 (係数拡大しても相互写像が単射にならない例). $n > 1$ を $(n, 6 \cdot \text{ch}(k)) = 1$ となる自然数とし, k は 1 の原始 n 乗根 ζ を含む有限体とする. V を Fermat 曲面 $T_0^n + T_1^n + T_2^n + T_3^n = 0 \subset \mathbb{P}_k^3$ とし, V 上の自由な作用 $\tau: (T_0 : T_1 : T_2 : T_3) \mapsto (T_0 : \zeta T_1 : \zeta^2 T_2 : \zeta^3 T_3)$ を考える. このとき, $Y_0 := V / \langle \tau \rangle$ は射影的かつスムーズな曲面であり, $\pi_1^{ab}(\overline{Y_0}) \simeq \langle \tau \rangle \simeq \mathbb{Z}/n$ が成り立つ.

次に V 上の $2n$ 本の直線を考える: $j = 1, \dots, n-1$

$$L_1: T_0 + T_1 = T_2 + T_3 = 0, \quad L_1^{\tau^j}: T_0 + \zeta^j T_1 = T_2 + \zeta^j T_3 = 0,$$

$$L_2: T_0 + T_1 = T_2 + \zeta T_3 = 0, \quad L_2^{\tau^j}: T_0 + \zeta^j T_1 = T_2 + \zeta^{j+1} T_3 = 0.$$

このとき, $L := L_1 \cup L_2 \cup L_1^{\tau^1} \cup \dots \cup L_1^{\tau^{n-1}} \cup L_2^{\tau^{n-1}}$ は V 上の連結単純正規交叉因子であり, τ の作用で安定である.

$\varphi: V \rightarrow Y_0$ を自然な射とし, $C_i = \varphi_*(L_i)$ ($i = 1, 2$) とすると, C_i は Y_0 上の非特異有理曲線であり, $D := C_1 \cup C_2$ は Y_0 上の単純正規交叉因子となる.

このとき, φ は完全分解被覆 $L \rightarrow D$ を引き起こすことから, $\alpha: H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1^{ab}(\overline{Y})$ は全射となる. 今, D の既約成分が非特異有理曲線であることに注意すると, $\Theta = \pi_1^{ab}(\overline{Y})$ である. したがって, $\text{Im}(\alpha) \simeq \mathbb{Z}/n$.

以上の計算と Theorem 7 より, 単純正規交叉曲面 $Y := (Y_0 \times_k O) \cup (Y_0 \times_k \infty) \cup (D \times_k \mathbb{P}^1)$ は任意の有限次拡大 F/k に対し, 相互写像 $\rho_{Y \otimes_k F}$ が単射にならない曲面であることがわかる. さらに, $\rho_{Y \otimes_k F}/n: CH_0(Y \otimes_k F)/n \rightarrow \pi_1^{ab}(Y \otimes_k F)/n$ の核も \mathbb{Z}/n と同型になることがわかり, 単射にならない.

Remark 9. より高次元の単純正規交叉多様体で相互写像が係数拡大しても単射にならないようなものは, 幾何的に既約かつスムーズな射影多様体 X と上の例の単純正規交叉曲面 Y とのファイバー積 $X \times Y$ を取ることによって得られる.

参考文献

- [1] U. Jannsen, S. Saito, Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields, Documenta Math, (Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday) (2003) 479-538.
- [2] K. Kato, S. Saito, Unramified class field theory for arithmetic surfaces, Ann. of Math. **118** (1983) 241-274.
- [3] S. Lang, Unramified class field theory over function fields in several varieties, Ann. of Math. **64** (1956) 285-325.
- [4] K. Matsumi, K. Sato, M. Asakura, On the Kernel of the Reciprocity Map of Normal Surfaces over Finite Fields, *K-Theory* **18** (1999) 203-234.
- [5] K. Sato, Non-divisible cycles on surfaces over local fields, *J. Number Theory* **114** (2005) 272-297.
- [6] R. Sugiyama, On the kernel of the reciprocity map of simple normal crossing varieties over finite fields, preprint.

Simple Cohomological Mackey Functor と Mackey Functor の分解に関して

菅井 智*

概要

Cohomological Mackey functor は Mackey functor にある条件を付け加えたものであるが, この報告では cohomological Mackey functor が Mackey functor の Grothendieck group における分解を与えることを示した. また, cohomological Mackey functor の Grothendieck group における \mathbb{Z} -基である simple cohomological Mackey functor の分類を与えた.

1 Mackey Functors

Mackey functor は有限群に関連する多くの代数的構造に共通する性質を取り出し, 公理化したものである. Mackey functor の基本的な性質は Webb [5] あるいは, Thevenaz [2], [3] に詳しい. Thevenaz [3] では Mackey functor の同値な 3 つの定義を与えているが, ここではそのうちもっとも直感的な定義を採用する. 以下, R を可換環, $R\text{-mod}$ を R 上有限生成な (左) R -module からなる圏, G を有限群とし, また, $H \leq G$ に対して $N_G(H)/H := \bar{N}_H$, $S(G) := G$ の部分群全体 と定める.

Definition 1.1 R 上の Mackey functor M とは写像

$$M : S(G) \rightarrow R\text{-mod}$$

で以下の条件を満たす R -準同型

$$t_K^H : M(K) \rightarrow M(H), r_K^H : M(H) \rightarrow M(K), c_g^H = c_g : M(H) \rightarrow M({}^g H)$$

を伴うものである (ただし, $K \leq H, g \in G$).

[条件]

- (1) 任意の $H \leq G, h \in H$ に対して t_H^H, r_H^H, c_h^H は $M(H)$ 上の恒等写像
- (2) 任意の $J \leq K \leq H \leq G$ に対して, $r_J^K r_K^H = r_J^H, t_K^H t_J^K = t_J^H$
- (3) 任意の $g, h \in G$ に対して, $c_g c_h = c_{gh}$
- (4) 任意の $K \leq H \leq G$ に対して $r_{gH}^g c_g = c_g r_H^H, t_{gH}^g c_g = c_g t_H^H$
- (5) 任意の $J, K \leq H \leq G$ に対して $r_J^K t_K^H = \sum_{x \in [J \setminus H/K]} t_{J \cap xK}^J c_x r_{J \cap K}^K$

Mackey functor の特別なクラスとして

$$\text{任意の } K \leq H \leq G \text{ に対して, } r_K^H t_K^H = [H : K] t_K^K \tag{1}$$

* 北海道大学大学院理学院数学専攻

を満たすものを *cohomological Mackey functor* (以下 *cohom M.F*) と呼ぶ. Cohom M.F に関しては, Yoshida [6] の permutation module の圏による特徴づけが重要である.

Mackey functor は Mackey algebra と呼ばれる (R -多元) 環 $\mu_R(G)$ 上の加群とみなすことができ, Mackey algebra の概念を導入することによって代数的な取り扱いが可能となる. Mackey algebra の定義のために次の quiver を与える. 群 G に対して頂点に $S(G)$ の元を持ち, 辺として各 $K \leq H \leq G$ に対して

$$H \bullet \xrightarrow{t_H^K} \bullet K, \quad K \bullet \xrightarrow{r_H^K} \bullet H$$

と任意の $x \in G, H \leq G$ に対して

$$H \bullet \xrightarrow{c_x^H} \bullet^x H$$

を持つ. この quiver に対する R 上の path algebra を Λ とする.

Definition 1.2 G の R 上の Mackey algebra $\mu_R(G)$ とは Λ/J のことである. ここで J とは, Definition 1.1 の条件に

(6) 任意の $H \leq G, h \in H$ に対して t_H^H, r_H^H, c_h^H は頂点 H 上の長さ 0 の辺である
を付け加えた条件による関係式によって生成される Λ の両側イデアルである.

任意の Mackey functor は R 上有限生成な $\mu_R(G)$ -module とみなすことができる. 実際, $\mu_R(G)$ -module M に対して Mackey functor M は $M(H) := t_H^H M$ とすれば対応する Mackey functor を得ることが出来る. 対象として Mackey functor ($\mu_R(G)$ -module) をもち, 射として $\mu_R(G)$ -準同型を持つ圏を $Mack_R(G)$ と表す. これは, Mackey functor からなる圏である. また cohom M.F についても同様に Definition 1.2 の J に条件 (1) による関係式を付け加えたもの J' を考え $\mu_R^{co}(G) := \Lambda/J'$ と定め, R 上有限生成な $\mu_R^{co}(G)$ -module の圏を $coMack_R(G)$ とすれば, これは cohom M.F からなる圏である.

次に写像, $\uparrow_H^G, \inf_{N_H}^{N_G(H)}$ を導入する. まず $K \leq G$ と G -set G/K に対して $G/K \downarrow_H^G$ によって G/K を自然に H -set とみなしたものとし, 一般の G -set に対しても同様に定める. また $M \in Mack_R(G)$ は $M(G/H) = M(H)$, $M(G/H \sqcup G/K) = M(G/H) \oplus M(G/K)$ とすることによって G -set から R -mod への写像とみなすことができる.

Definition 1.3 (1) $H \leq G$ と $M \in Mack_R(H)$ が与えられたとき, 各 $K \leq G$ に対して

$$M \uparrow_H^G(K) := M(G/K \downarrow_H^G) (= \bigoplus_{x \in [K \setminus G/H]} M(H \cap K^x))$$

と定め, t_K^L, r_K^L, c_x^K などは M に付随するものから自然に定めることによって $M \uparrow_H^G \in Mack_R(G)$ を定義する

$$\uparrow_H^G: Mack_R(H) \rightarrow Mack_R(G).$$

(2) $H \triangleleft G$ と $M \in Mack_R(G/H)$ が与えられたとき, 各 $K \leq G$ に対して

$$\inf_{G/H}^G M(K) := \begin{cases} M(K/H) & H \leq K \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

と定め t_K^L, r_K^L, c_x^K などは M に付随するものから自然に定めることによって $\inf_{G/H}^G M \in Mack_R(G)$ を定義する

$$\inf_{G/H}^G: Mack_R(G/H) \rightarrow Mack_R(G).$$

これらの構成は随伴性を中心に研究がなされてきた [1, 3, 4].

2 Some Facts Related with Mackey Functors

$M, N \in \text{Mack}_R(G)$ に対して N が M の $(\mu_R(G)$ -submodule であるとき N は M の *subfunctor* と呼ぶ. subfunctor を持たない Mackey functor を *simple Mackey functor* (以下 simple M.F) と呼ぶがその分類はすでになされている [4]. G の部分群 H と既約 $R\bar{N}_H$ -module V の組を (H, V) とすると cohom M.F はこの組と 1 対 1 に対応することが知られている

$$\{(H, V) \mid H \leq G, V : \text{irr } R\bar{N}_H\text{-module}\} \xrightarrow{1:1} \{\text{simple Mackey functor}\}.$$

また, 同様に cohom M.F に対しても $(\mu_R^{co}(G)$ -submodule を持たない $\mu_R^{co}(G)$ -module を *simple cohomological Mackey functor* (以下, simple cohom M.F) と呼ぶ.

Mackey algebra $\mu_R(G)$ に関しては Burnside ring との関係が重要である. G -set の同値類を元としてもち, 各 $K, H \leq G$ に対し $G/H, G/K$ の同値類 $[G/H], [G/K]$ に対して

$$[G/H] + [G/K] := [G/H \sqcup G/K]$$

$$[G/H][G/K] := [G/H \times G/K]$$

と和, 積を定めたものを $B^+(G)$ とする. このとき $B_R(G) := R \otimes_{\mathbb{Z}} B^+(G)$ は $(R$ -多元) 環をなしこれを $(R$ 上の G に関する) *Burnside ring* と呼ぶ. Mackey algebra $\mu_R(G)$ には

$$[G/H] \in B_R(G) \mapsto \sum_{K \leq G} \sum_{x \in [K \setminus G/H]} t_{K \cup^x H}^K r_{K \cup^x H}^K \in \mu_R(G) \quad (2)$$

によって $B_R(G)$ と同型な central subring が存在しており [3, 5], このことから Burnside ring のべき等元を用いて $\mu_R(G)$ を分解することが可能である. Burnside ring のべき等元に関しては次の事実が知られている.

Proposition 2.1 [Dress] p を $|G|$ を割る素数とし, R を p 以外の $|G|$ の素数因子が可逆であるような \mathbb{Q} の部分環とする. このとき Burnside ring $B_R(G)$ の原始べき等元は G の p -perfect subgroup の共役類と 1 対 1 に対応し,

$$1 = \sum_{\substack{J \leq G \text{ up to conjugacy} \\ J, p\text{-perfect}}} f_J$$

という原始べき等元分解をもつ. ここで f_J は p -perfect subgroup J を含む共役類に対応する原始べき等元である.

この事実は可換環 R が \mathbb{Q} の部分環ではなくても p 以外の $|G|$ の素数因子を可逆元として持つときには同様に成立する. $\mu_R(G)$ においても f_J の (2) の埋め込みによる像をまた $f_J \in \mu_R(G)$ と表す. さらに $M \in \text{Mack}_R(G)$ で $f_J M = M$ が成立するような Mackey functor からなる $\text{Mack}_R(G)$ の充満部分圏を $\text{Mack}_R(G, J)$ と表す.

3 Results

以下では R において素数 p を除く $|G|$ の全ての素数因子は可逆であるとする.

cohom M.F の条件 (1) は $[H : K]$ が R において可逆であるときには t_K^H が全射であることを意味し cohom M.F においては p -subgroup における構造が重要であることがわかる. 実際, 組 (H, V) に対応する cohom M.F

を $S_{H, V}$ で表すこととすれば, $S_{H, V}$ が cohomological である必要十分条件は H が p -subgroup であることである [3]. cohom M.F が cohomological であれば明らかに simple cohom M.F であるが, 次の定理はそれで全て列挙されていることを示している.

Theorem 3.1 $M \in \text{coMack}_R(G)$ が simple cohom M.F であるための必要十分条件は, ある p -subgroup H と既約 $R\overline{N}_H$ -module V に対して $M = S_{H, V}$ が成り立つことである.

これにより simple cohom M.F の分類はなされたことになる.

上のように Mackey functor の構造を p -group における構造までに狭める条件 (1) は大変強く Mackey functor としては特別なもののように思えるが, 次の定理から (cohomological とは限らない) Mackey functor が cohom M.F によって構成される Mackey functor によって分解されることがわかる.

Theorem 3.2 $J \leq G$ を p -perfect subgroup として $G_0(\text{Mack}_R(G, J))$ を $\text{Mack}_R(G)$ の Grothendieck group とする. このとき

- (i) $G_0(\text{Mack}_R(G, J)) = G_0((\inf_N^N \text{Mack}_R(\overline{N}_G(J), 1)) \uparrow_N^G)$.
- (ii) 任意の $M \in \text{Mack}_R(\overline{N}_G(J), 1)$ は cohomological.

これを証明するには $\inf_{N_J}^{N_G(J)} : \text{Mack}_R(\overline{N}_J, 1) \rightarrow \text{Mack}_R(N_G(J), J)$ と $\uparrow_{N_G(J)}^G : \text{Mack}_R(N_G(J), J) \rightarrow \text{Mack}_R(G, J)$ がそれぞれ圏同値を与え, $\text{Mack}_R(\overline{N}_J, 1)$ の simple Mackey functor が cohomological なものに限ることを示せばよい.

上の定理から, cohom M.F を調べることにより Mackey functor に関する多くの情報が得られる可能性があることがわかる. 極端な場合では, R が $|G|$ の全ての素数因子を可逆元として持つときには cohom M.F は圏 RG (1つの対象 $*$ に RG と同型な $\text{End}(*)$ をもつ圏) と森田同値となるように cohom M.F では問題が簡単になることがある. このように cohom M.F に関する研究が有用であることが期待できる.

参考文献

- [1] Olcay Coşkun. Mackey functors, induction from restriction functors and coinduction from transfer functors. *J. Algebra*, Vol. 315, No. 1, pp. 224–248, 2007.
- [2] Jacques Thévenaz. Some remarks on G -functors and the Brauer morphism. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 384, pp. 24–56, 1988.
- [3] Jacques Thévenaz and Peter Webb. The structure of Mackey functors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 347, No. 6, pp. 1865–1961, 1995.
- [4] Jacques Thévenaz and Peter J. Webb. Simple Mackey functors. In *Proceedings of the Second International Group Theory Conference (Bressanone, 1989)*, No. 23, pp. 299–319, 1990.
- [5] Peter Webb. A guide to Mackey functors. In *Handbook of algebra*, Vol. 2, pp. 805–836. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [6] Tomoyuki Yoshida. On G -functors. II. Hecke operators and G -functors. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 35, No. 1, pp. 179–190, 1983.

Local well-posedness for the Kawahara equation

加藤 孝盛

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

以下, 次の Kawahara 方程式の初期値問題の考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha \partial_x^5 u + \beta \partial_x^3 u + \partial_x(u)^2 = 0 \text{ in } [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ かつ $\alpha \neq 0$. 変数変換より, $\alpha = -1$ かつ $\beta = -1, 0$ or -1 とできる. また未知関数 u と初期値 u_0 は実数値あるいは複素数値関数とする. Kawahara 方程式は, 浅い層を伝わる水面波を記述するモデルである. 本原稿では, より低い正則性の初期値に対して (1) の時間局所的適切性 (LWP) を導くことが目的である. ここで時間局所的適切性とは, 解の存在, 一意性, 初期値に対する連続依存性が時間局所的に成立していることをいう. また, これらの条件の少なくとも一つでも成立しないとき, 非適切であるという. 本原稿では, 主な手法として Bourgain が [2] で導入した Fourier 制限ノルム法 (逐次近似法) を用いる.

この問題に対する研究結果は多いが特に優れたものは, Chen-Li-Miao-Wu [3] が Tao の $[k, \mathbb{Z}]$ -multiplier norm method を用いることにより, $s > -7/4$ で (1) の LWP を示した結果である. しかし, この結果は最良ではないと思われる. 実際に実験してみる. まず逐次近似の 2 次の項 A_2 を次で定める.

$$A_2(u_0)(t) := - \int_0^t V(t-s) \partial_x(V(s)u_0)^2 ds.$$

ここで $\hat{V}(t) = \exp(i(\xi^5 + \beta\xi^3)t)$. 2 次の項 A_2 を計算することにより, $s \geq -2$ において

$$\|A_2(u_0)(t)\|_{H^s} \leq C \|u_0\|_{H^s}^2 \quad (2)$$

が成立し, $s < -2$ の場合には (2) が成立しないような初期値が存在することがわかる. これより, $s \geq -2$ で (1) の LWP を導くことが最良の結果であると予想できる. この予想の下, 我々は次のように [3] の結果を改善し, 最良の結果を導出することに成功した.

Theorem 1 $s \geq -2$ とする. このとき, H^s で (1) の LWP が成立する.

$B_r(H^s) := \{u \in H^s ; \|u\|_{H^s} \leq r\}$ と定める. 次の結果により, $s < -2$ における (1) の非適切性が得られた.

Theorem 2 $s < -2$ かつ $r > 1$ とする. ある $t_0 > 0$ が存在して, 任意の $t \in (0, t_0]$ に対して定まる flow map $B_r(H^s) \ni u_0 \mapsto u(t) \in H^s$ が原点で不連続である.

Notation. 本原稿において, \hat{u}, \tilde{u} は Fourier 変換で

$$\hat{u}(\xi) := \int e^{i\xi x} u(x) dx, \quad \tilde{u}(\tau, \xi) := \int e^{-i\xi x - i\tau t} u(t, x) dt dx$$

を満たし, また χ_Ω は, 領域 Ω 上の特性関数と定める.

以下, $s \geq -2$ でのLWPについて考察する. まず, 任意の $0 < \lambda < 1/2$ に対して, $u_\lambda(t, x) := \lambda^4 u(\lambda^5 t, \lambda x)$, $u_0^\lambda(x) := \lambda^4 u_0(\lambda x)$ と定める. このとき, u が (1) を満たせば u_λ は次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} \partial_t u_\lambda - \partial_x^5 u_\lambda + \beta \lambda^2 \partial_x^3 u_\lambda + \partial_x(u_\lambda)^2 = 0 \text{ in } [0, \lambda^{-5}T] \times \mathbb{R}, \\ u_\lambda(0, x) = u_0^\lambda \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (3)$$

任意の $s \geq -2$ に対して $\|u_0^\lambda\|_{H^s} \leq C\lambda^{\frac{3}{2}}\|u_0\|_{H^s}$ が成立するため, λ を十分小さくとることに より, 初期値が十分小さくできる. 以下, (1) をスケール変換した (3) のLWPについて考察する.

任意の $s \geq -2$ かつ $0 < \lambda < 1/2$ に対して, 次の $\partial_x(u)^2$ に対する双線型評価を満たす関数空間 X^s を構成することができれば, Fourier 制限ノルム法の基本的な理論から (3) のLWPを証明できる.

$$\|\mathcal{F}_{\tau, \xi}^{-1} \langle \tau - p(\xi) \rangle^{-1} \widetilde{\partial_x(uv)}\|_{X^s} \leq C\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s}, \quad (4)$$

$$\|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - p(\xi) \rangle^{-1} \widetilde{\partial_x(uv)}\|_{L_\xi^2 L_\tau^1} \leq C\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s}. \quad (5)$$

ここで $p(\xi) := \xi^5 + \beta \lambda^2 \xi^3$ とした. (3) に対応する Bourgain 空間 $X^{s,b}$ は次で与えられることを確認しておく.

$$X^{s,b} := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2); \|u\|_{X^{s,b}} := \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - p(\xi) \rangle^b \widetilde{u}\|_{L_{\tau, \xi}^2} < \infty\}.$$

[3] では, $b = 1/2 + \varepsilon$, ($0 < \varepsilon \ll 1$) とし, Bourgain 空間 $X^{s,b}$ を用いることで, $s > -7/4$ において次の双線型評価を導いた.

$$\|\mathcal{F}_{\tau, \xi}^{-1} \langle \tau - p(\xi) \rangle^{-1} \widetilde{\partial_x(uv)}\|_{X^{s,b}} \leq C\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}. \quad (6)$$

しかし, この反例を考察すると $s < -37/20$ であるとき, どんな $b \in \mathbb{R}$ に対しても (6) は成立しない. つまり, $X^{s,b}$ を利用する限り, $s < -37/20$ において Fourier 制限ノルム法を適用することはできない. それは $X^{s,b}$ が非線型性を単なる線型の解の摂動としか捉えていない空間だからである. この問題を回避するため, Bejenaru-Tao [1] が導入した $X^{s,b}$ ノルムの重みを非線型項の影響をより精密に反映したものに部分的に付けかえるという手法を応用する必要がある. 双線型評価 (4)–(5) を満たす適当な関数空間を構成するため, 以下 (6) の反例を考察する. まず, \mathbb{R}^2 を次の2つの領域に分割する.

$$P_1 := \left\{ (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2; |\tau - p(\xi)| \leq \frac{31}{32}|\xi|^5 + \frac{7}{8}\beta\lambda^2|\xi|^3 \text{ and } |\xi| \geq 1 \right\},$$

$$P_2 := \mathbb{R}^2 \setminus P_1.$$

以下, 簡単のため $\beta = 0$ とする. また $N \gg 1$ と定める.

Type A (*high-high-low interaction*)

解の高周波部分の相互作用から低周波部分が生成される場合を考える. まず, 次のように \tilde{u} , \tilde{v} を置く.

$$\tilde{u}(\tau, \xi) = \chi_{A_1}(\tau, \xi), \quad \tilde{v}(\tau, \xi) = \chi_{A_2}(\tau, \xi)$$

ここで, A_1, A_2 は次のように定めた.

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; \xi \in [N - N^{-3/2}, N + N^{-3/2}], \\ &\quad 5N^4\xi - 4N^5 - 1/2 \leq \tau \leq 5N^4\xi - 4N^5 + 1/2\}, \\ A_2 &:= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; (-\tau, -\xi) \in A_1\}. \end{aligned}$$

このとき, 次が従う.

$$\tilde{u} * \tilde{v}(\tau, \xi) \geq cN^{-3/2} \chi_{R_1}(\tau, \xi).$$

ここで

$$R_1 := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; \xi \in [N^{-3/2}/2, 3N^{-3/2}/4], \quad 5N^4\xi - 1/2 \leq \tau \leq 5N^4\xi + 1/2\}.$$

とした. これらを (6) に代入すると

$$\frac{N^{-3/2}}{\langle N^{5/2} \rangle^{1-b}} N^{-3/2} N^{-3/4} \leq C(N^s N^{-3/4})^2$$

が得られる. それゆえ任意の $s \geq -2$ に対して (6) が成立するためには $b \leq 3/10$ である必要がある. $R_1 \subset P_2$ であるため, P_2 では $b \leq 3/10$ ととる.

Type B (*high-high-high* interaction)

次に解の高周波部分の相互作用から高周波部分が生成される場合を考える.

$$\tilde{u}(\tau, \xi) = \chi_{A_1}(\tau, \xi), \quad \tilde{v}(\tau, \xi) = \chi_{A_2}(\tau, \xi)$$

と定めると, 次が成立する.

$$\tilde{u} * \tilde{v}(\tau, \xi) \geq cN^{-3/2} \chi_{R_2}(\tau, \xi).$$

ここで

$$\begin{aligned} R_2 &:= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; \xi \in [2N, 2N + N^{-3/2}/2], \\ &\quad 5N^4\xi - 8N^5 - 1/2 \leq \tau \leq 5N^4\xi - 8N^5 + 1/2\}. \end{aligned}$$

とした. これらを (6) に代入すると, 次が得られる.

$$\frac{N^{s+1}}{\langle N^5 \rangle^{1-b}} N^{-3/2} N^{-3/4} \leq C(N^s N^{-3/4})^2.$$

よって, $s \geq -2$ に対して (6) が成立するためには $b \leq 11/20$ である必要がある. また双対性から (6) は次のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-s}}{\langle \tau_1 - p(\xi_1) \rangle^b} \times \right. \\ &\quad \left. \int \frac{|\xi| \langle \xi \rangle^s \langle \xi - \xi_1 \rangle^{-s}}{\langle \tau - p(\xi) \rangle^{1-b} \langle (\tau - \tau_1) - p(\xi - \xi_1) \rangle^b} \tilde{w}(\tau, \xi) \tilde{w}_2(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1) d\xi d\tau \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^2} \\ &\lesssim \|\tilde{w}\|_{L_{\xi, \tau}^2} \|\tilde{w}_2\|_{L_{\xi, \tau}^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

ここで

$$\tilde{w}(\tau, \xi) := \chi_{A_1}(\tau, \xi), \quad \tilde{w}_2(\tau, \xi) := \chi_{A_2}(\tau, \xi)$$

と置くと

$$\int \tilde{w}(\tau, \xi) \tilde{w}_2(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1) d\tau d\xi \geq cN^{-3/2} \chi_{R_2}(\tau_1, \xi_1)$$

が成立する. これらを (7) に代入すると, 次が得られる.

$$\frac{N^{-s+1}}{\langle N^5 \rangle^b} N^{-3/2} N^{-3/4} \leq C(N^{-3/4})^2.$$

そのため, $s \geq -2$ に対して (7) が成立するためには $b \geq 9/20$ を満たす必要がある. このように, この領域では $9/20 \leq b \leq 11/20$ ととる必要がある. $R_2 \subset P_1$ であることから, P_1 において b を $1/2$ の近くにとる.

以上の考察から, 重み関数 w_s を次で定める.

$$w_s(\tau, \xi) := \begin{cases} \langle \xi \rangle^s \langle \tau - p(\xi) \rangle^{1/2+2\varepsilon} & \text{in } P_1, \\ \langle \xi \rangle^{s+1+15\varepsilon} \langle \tau - p(\xi) \rangle^{3/10-\varepsilon} & \text{in } P_2. \end{cases}$$

ここで, $\beta = -1, 0$ or 1 であることに注意する. 簡単な計算をすることで w_s は次を満たすことがわかる.

$$w_s(\tau, \xi) \sim \min \{ \langle \xi \rangle^s \langle \tau - p(\xi) \rangle^{1/2+2\varepsilon}, \langle \xi \rangle^{s+1+15\varepsilon} \langle \tau - p(\xi) \rangle^{3/10-\varepsilon} \}.$$

ここで

$$X_w^s := \{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : \|u\|_{X_w^s} := \|w_s(\tau, \xi) \tilde{u}\|_{L_{\xi, \tau}^2} < \infty \}$$

と定めれば, $X^s = X_w^s$ とすることにより, 双線型評価 (4)–(5) が得られる. 証明では Kenig-Ponce-Vega [4] の手法を適用した. この結果から (3) の LWP を導出でき, $u(t, x) := \lambda^{-4} u_\lambda(\lambda^{-5}t, \lambda^{-1}x)$ と変換することで (1) の LWP が得られる.

また Theorem 2 は, 逐次近似の 2 次の項 A_2 の非有界性から Bejenaru-Tao が [1] で非線型項が u^2 である非線型 Schrödinger 方程式の $s < -1$ での非適切性を得るために導入した手法を応用することで得られる. その証明の詳細は省略する.

REFERENCES

- [1] J. Bejenaru and T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006) 228–259.
- [2] J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattice subset applications to nonlinear evolution equations, I, II*, Geometric and functional Anal. **3** (1993) 107–156, 209–262.
- [3] W. Chen, J. Li, C. Miao and J. Wu, *Low regularity solution of two fifth-order KdV type equations*, J. D'Anal.Math., **107** (2009) 221–238.
- [4] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc, **9** (1996) no. 2, 573–603.

E-mail address, T. Kato: d08003r@math.nagoya-u.ac.jp

Estimating topological entropy of a two-dimensional cellular automaton

Akane Kawaharada (Hokkaido University)

2010.2

1 Introduction

A cellular automaton is a discrete time dynamical system whose configurations are determined by a local rule acting on each single cell in synchronous. It was introduced by von Neumann [8] and Ulam [7]. Cellular automata can generate rich and complex behaviors, so often used as a model for complex systems in biology, physics, computer science and so on. On the other hand, mathematical theory of cellular automata was developed after Hedlund [2] studied as factors of shift dynamical systems.

In this paper we shall study topological entropy of a two-dimensional almost equicontinuous cellular automaton. Here entropy measures the complexity of dynamical systems. In Section 2 we give some topological and measure-theoretical definitions. In section 3 we estimate entropy according to the relation of a two-dimensional almost equicontinuous cellular automaton and a one-dimensional elementary cellular automaton.

2 Preliminaries

A cellular automaton is a discrete time dynamical system (X, F) where $X = \{0, \dots, n-1\}^{\mathbb{Z}^d}$ ($n \geq 1$) and $F : X \rightarrow X$ is a shift-commuting and continuous map. A finite set $\{0, \dots, n-1\}$ is a *state set* and $X = \{0, \dots, n-1\}^{\mathbb{Z}^d}$ is a *configuration space* and each element $x \in X$ is called a *configuration*.

Definition 2.1. Let $v_1, \dots, v_t \in \mathbb{Z}^d$ be finite pairwise distinct vectors. A d -dimensional *cellular automaton* ($d \geq 1$) $F : X \rightarrow X$ with *local rule* $f : \{0, \dots, n-$

$\dots, n-1\}^t \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ is defined by

$$(Fx)_{(i_1, \dots, i_d)} = f(x_{(i_1, \dots, i_d) + v_1}, \dots, x_{(i_1, \dots, i_d) + v_t}).$$

We define a metric function d on X for $x, y \in X$,

$$d(x, y) = 2^{-\alpha}, \text{ where } \alpha = \min\{\max\{|i_1|, \dots, |i_d|\} \mid x_{(i_1, \dots, i_d)} \neq y_{(i_1, \dots, i_d)}\}.$$

Then (X, d) is a compact metric space which is perfect and totally disconnected. A point $x \in X$ is a *periodic point* with period $n > 0$, if $F^n x = x$ where F^n is the n times *iteration* of F . If $Fx = x$, x is called a *fixed point*. So a periodic point with period n is regarded as a fixed point of F^n . A point $x \in X$ is *preperiodic* with preperiod $m > 0$, if $F^m x$ is periodic. If preperiod $m \geq 0$, the point is called a *eventually periodic point*. We define some topological properties of cellular automata.

Definition 2.2. (1) A point $x \in X$ is an *equicontinuous point*, if for all $\epsilon > 0$, there exists δ such that

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(F^n x, F^n y) < \epsilon \quad \text{for all } n > 0.$$

A dynamical system (X, F) is called *equicontinuous*, if every point of (X, F) is equicontinuous.

(2) A dynamical system (X, F) is called *almost equicontinuous*, if the dynamical system is not equicontinuous but there exists an equicontinuous point.

(3) A dynamical system (X, F) is called *sensitive*, if there exists $\epsilon > 0$ such that for all $x \in X$

and $\delta > 0$, there exists y with $d(x, y) < \delta$ and $d(F^n x, F^n y) \geq \epsilon$ for some $n \geq 0$. So there are not any equicontinuous points in a sensitive dynamical system.

- (4) A dynamical system (X, F) is called *positively expansive*, if there exists $\epsilon > 0$ such that for all $x \neq y \in X$, $d(F^n x, F^n y) \geq \epsilon$ for some $n \geq 0$.

Definition 2.3. Let (Y, \mathcal{F}, ν) be a probability space. Let $(X, \mathcal{B}, \mu) = \prod_{-\infty}^{\infty} (Y, \mathcal{F}, \nu)$ and let $\sigma : X \rightarrow X$ be the shift $\sigma(x_i) = x_{i+1}$. Then σ is an measure preserving transformation and is called the *Bernoulli shift* with *state space* (Y, \mathcal{F}, ν) .

In particular, for $Y = \{0, \dots, n-1\}$ the two sided $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ -shift where $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ is a probability vector is called *n-Bernoulli shift*.

Definition 2.4. A *measure preserving dynamical system* (X, \mathcal{B}, μ, F) is defined by a pair of a probability space (X, \mathcal{B}, μ) and a \mathcal{B} -measurable action T on (X, \mathcal{B}, μ) which leaves the measure μ invariant, i.e., $F\mu = \mu$.

Let $\alpha = \{A_i \mid i \in I\}$ be a finite or countable collection of nonempty \mathcal{B} -measurable subsets of X . A *partition* of X α is defined by (1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$ and (2) $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. The *common refinement* of partitions of X α, β is the partition $\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta, \mu(A \cap B) > 0\}$. An element of a partition is often represented by a *cylinder set*. It is defined by

$$[a_0, \dots, a_l]_t^{t+l} = \{x \in X \mid a_0 = x_t, \dots, a_l = x_{t+l}\}$$

where $t \in \mathbb{N}$ or \mathbb{Z} , $l \in \mathbb{N}$. Each cylinder set is closed and open, and every closed and open set is a finite union of cylinders.

Definition 2.5. (1) The *metrical entropy of the system* (X, \mathcal{B}, μ, F) relative to the partition α is defined by

$$h(\alpha, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} F^{-k} \alpha \right),$$

$$\text{where } H(\alpha) = - \sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A).$$

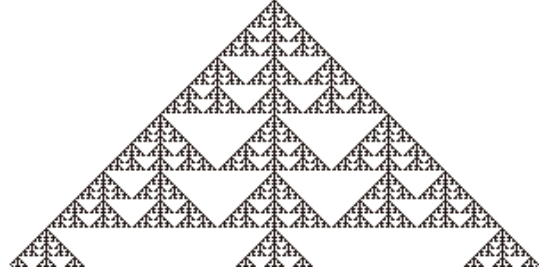


Figure 1: The space-time diagram of $\varphi \circ F$ with the initial configuration consisting of a single 1 at the center of the top row (a black cell) and its surrounding 0s (white cells).

- (2) The *entropy of the system* (X, \mathcal{B}, μ, F) is defined by $h_F(\mu) = \sup_{\alpha \in \mathcal{P}_0} h(\alpha, F)$, where \mathcal{P}_0 denotes the set of all finite partitions of (X, \mathcal{B}) .

Proposition 2.1 (Kolmogorov-Sinai theorem [9]). *If α is a μ -generator partition for (X, \mathcal{B}, μ, F) , (i.e., $\alpha^\infty = \mathcal{B} \text{ mod } \mu$) and if $H(\alpha) < \infty$, $h_F(\mu) = h(\alpha, F)$.*

Definition 2.6. The *topological entropy* of F on a topological dynamical system (X, F) is defined by $h_{top}(F) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(F)} h_F(\mu)$ where $\mathcal{M}(F)$ is the set of all F -invariant Borel probability measures on X .

The equation is linked by the *Variational Principle*.

3 Results

The main purpose of this section is to prove that a two-dimensional almost equicontinuous cellular automaton F on a subset of $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ is topologically conjugate to a one-dimensional cellular automaton G on $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ and to estimate topological entropy of F according to entropy of G .

Figure 1 is the space-time diagram of $\varphi \circ F$, where φ is a map from $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ to $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. If a cell has 1 it is represented by a black dot, and if 0 by a white dot. The top row is an initial configuration and here we give the only center cell of the top row 1, and the others 0s. Time goes toward the bottom so after each step put the result just under the previous row. Then

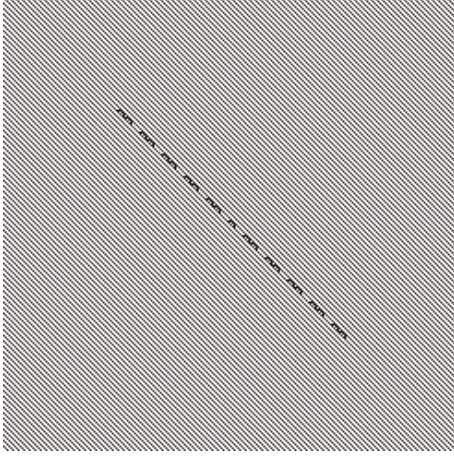


Figure 2: A configuration $F^{125}x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, where $x \in X$.

the pattern of $\varphi \circ F$ and that of G are the same, i.e., the two cellular automata are the same. The detail can be found in Theorem 3.1.

A two-dimensional cellular automaton is a kind of a discrete time dynamical system on a three-dimensional space $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$. For F on a particular configuration $x \in X$ (that is defined below), if we cut $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$ along a certain direction, the vertical section is similar to that of G . Indeed the section is generated by two times iteration of G (see Proposition 3.1). For a two-dimensional cellular automaton map $F: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, defined by

$$(Fx)_{(i,j)} = x_{(i,j)} + x_{(i-1,j)}x_{(i+1,j)} + x_{(i,j-1)}x_{(i,j+1)} \pmod{2}.$$

This local rule means that the next state for a cell is determined by the states of the von Neumann neighborhood which is surrounding four cells and itself. Define a one-dimensional cellular automaton map with local transition rule 150, $G: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$,

$$(Gy)_l = y_l + y_{l-1} + y_{l+1} \pmod{2}.$$

Let X be a subset of $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$,

$$X = \left\{ x \left| \begin{array}{l} x_{(i,j)} = 1 \quad \text{if } i+j = 0, 3 \\ x_{(i,j)} = 0 \quad \text{if } i+j = -1, -2, 4, 5 \end{array} \right. \right\}.$$

For $Y = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ we can define a homeomorphism $\varphi: X \rightarrow Y$ as a conjugacy between (F, X) and (G, Y) , for each $l \in \mathbb{Z}$

$$y_l = (\varphi x)_l = \begin{cases} x_{(l,1-l)} & \text{if } l = 2N - 1 \quad (N \in \mathbb{Z}) \\ x_{(l,2-l)} & \text{if } l = 2N \quad (N \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Theorem 3.1. *The systems (X, F) and (Y, G) are topologically conjugate.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

Proof. The map φ commutes with F and G , because for $x \in X$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ F(x))_l &= (\varphi(Fx))_l \\ &= \begin{cases} (Fx)_{(l,1-l)} & \text{if } l = 2N - 1 \\ (Fx)_{(l,2-l)} & \text{if } l = 2N \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{(l,1-l)} + x_{(l,2-l)} + x_{(l+1,1-l)} \\ x_{(l,2-l)} + x_{(l-1,2-l)} + x_{(l,1-l)} \end{cases} \\ &= y_l + y_{l-1} + y_{l+1} \\ &= (Gy)_l \\ &= (G(\varphi x))_l \\ &= (G \circ \varphi(x))_l. \end{aligned}$$

In addition we can prove that φ is a continuous and bijective map. \square

Next new subsets $X_1, X_2 \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ are defined by

$$X_1 = \left\{ x \left| \begin{array}{l} x_{(i,j)} = 1 \quad \text{if } i+j = 0, 3 \\ x_{(i,j)} = 0 \quad \text{if } i+j = 2, 4, 5, -1, -2 \end{array} \right. \right\},$$

$$X_2 = \left\{ x \left| \begin{array}{l} x_{(i,j)} = 1 \quad \text{if } i+j = 0, 3 \\ x_{(i,j)} = 0 \quad \text{if } i+j = 1, 4, 5, -1, -2 \end{array} \right. \right\}.$$

Here we define a new map $\varphi_k: X_k \rightarrow Y$ for $k = 1, 2$,

$$y_l = (\varphi_k x)_l = x_{(l,k-l)} \quad \text{for each } l \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 3.1. *The systems (X_k, F^2) and (Y, G) are topologically conjugate for $k = 1, 2$.*

Next we discuss topological entropy of cellular automata which is a tool to estimate the complexity of dynamical systems. When dimension 1, the entropy is always finite. Expansiveness is a property only for one-dimensional cellular automata by Shereshevsky [6], and its entropy is nonzero finite by D'amico et al.[1]. In any dimension greater than 1, topological entropy of a linear cellular automaton is 0 (equicontinuous) or infinity (sensitive) according to Morris and Ward [5] and D'amico et al.[1]. Almost multidimensional cellular automata have 0 or infinity entropy. For example, by Lakshtanov and Langvagen [3] if there exists a space ship (a finite pattern, which reappears after a certain number of time steps in a different position), then the entropy is infinite. But in 2008 the existence of a multidimensional cellular automaton with finite entropy was proved by Meyerovitch [4].

Proposition 3.2. $h_{top}(F) = \infty$.

Proof. We calculate topological entropy of the rule 150 map G explicitly. Let $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \mu, G)$ be a measure preserving dynamical system where μ is uniform Bernoulli measure. We take a finite partition $\alpha = \{[00]_0^1, [01]_0^1, [10]_0^1, [11]_0^1\}$ and investigate up to $(n - 1)$ step refinements by G ,

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} G^{-k} \alpha = \{[a_{-(n-1)} \cdots a_n]_{-(n-1)}^n \mid a_i \in \{0, 1\} \text{ for each } i \in \mathbb{Z}\}.$$

As $n \rightarrow \infty$, $\bigvee_{k=0}^{\infty} G^{-k} \alpha = \mathcal{B}$. Hence the partition α is a μ -generator and $H(\alpha) < \infty$, so we calculate $h_G(\mu)$ by Kolmogorov-Sinai Theorem,

$$\begin{aligned} h_G(\mu) &= h(\alpha, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} G^{-k} \alpha \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ -2^{2n} \mu([a_{-(n-1)} \cdots a_n]_{-(n-1)}^n) \\ &\quad \times \log \mu([a_{-(n-1)} \cdots a_n]_{-(n-1)}^n) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(-2^{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \log \frac{1}{2^{2n}} \right) = 2 \log 2. \end{aligned}$$

The maps G and 4-Bernoulli shift are topologically conjugate, and so topological entropy of them are the

same. Hence we obtain $h_{top}(G) = 2 \log 2 > 0$ and G is subdynamics of F according to Theorem 3.1 and Proposition 3.1, which means that topological entropy of F is infinite. \square

References

- [1] Michele D'amico, Giovanni Manzini, and Luciano Margara. On computing the entropy of cellular automata. *Theoret. Comput. Sci.*, 290(3):1629–1646, 2003.
- [2] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Math. Systems Theory*, 3:320–375, 1969.
- [3] E. L. Lakshtanov and E. S. Langvagen. A criterion for the infinity of the topological entropy of multidimensional cellular automata. *Problemy Peredachi Informatsii*, 40(2):70–72, 2004.
- [4] Tom Meyerovitch. Finite entropy for multidimensional cellular automata. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(4):1243–1260, 2008.
- [5] G. Morris and T. Ward. Entropy bounds for endomorphisms commuting with K actions. *Israel J. Math.*, 106:1–11, 1998.
- [6] Mark A. Shereshevsky. Expansiveness, entropy and polynomial growth for groups acting on subshifts by automorphisms. *Indag. Math. (N.S.)*, 4(2):203–210, 1993.
- [7] S. Ulam. Random processes and transformations. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 2, Cambridge, Mass., 1950*, pages 264–275, Providence, R. I., 1952. Amer. Math. Soc.
- [8] John von Neumann. The general and logical theory of automata. In *Cerebral Mechanisms in Behavior. The Hixon Symposium*, pages 1–31; discussion, pp. 32–41. John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y., 1951.
- [9] Peter Walters. *Ergodic theory—introductory lectures*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 458. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

多重 L 値の関係式と Fuchs 型方程式

九州大学大学院数理学府 今富耕太郎

1 序論

m を正の整数とする．(荒川-金子型の) 多重 L 値とは, $k_i \geq 1$, $a_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq n$), ただし $(k_1, a_1) \neq (1, 0)$ に対して

$$L(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n) = \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{\varphi_{a_1}(m_1) \cdots \varphi_{a_n}(m_n)}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \quad (1)$$

で定義される値のことである．ただし, $\varphi_a(x) = \zeta^{ax}$, ($\zeta = \exp(2\pi i/m)$) である．この多重 L 値は (Euler-Zagier 型の) 多重ゼータ値

$$\zeta(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \quad (k_1 \geq 2)$$

の拡張に相当し, 多重ゼータ値同様, 一般複シャッフル関係式や導分関係式が成り立つことが知られている ([AK]). さて多重ゼータ値の研究の手法の一つとして, 多重ゼータ値を係数にもつ母関数を考察するというものがある．例えば素性のよい多重ゼータ値の母関数として以下のものが知られている．

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_{n \text{ 個}}) x^{2n} = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(\underbrace{3, 1, \dots, 3, 1}_{2n \text{ 個}}) x^{4n} = \frac{\cosh \pi x - \cos \pi x}{\pi^2 x^2}.$$

また [OZ] では多重ゼータ値の母関数が Gauss の超幾何関数を用いて表せるという結果も知られている．しかし, 多重 L 値に関する母関数は殆ど考察されていない．本稿では (1) を特殊化した多重 L 値

$$\bar{\zeta}(k_1, \dots, k_n) = \bar{\zeta}(\mathbf{k}) = \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{\zeta^{m_1 + \dots + m_n}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

についての母関数が一般超幾何関数 ${}_pF_q$ の 1 での特殊値で記述できることを述べる．ここで一般超幾何関数 ${}_pF_q$ とは

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \\ \beta_1 & \cdots & \beta_q \end{matrix} ; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n t^n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n n!},$$

ただし, $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ である.

またこの多重 L 値のある無限和が Riemann ゼータ値

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

の線形結合を用いて表せることを示す.

2 主結果

多重 L 値の母関数を構成する上で必要な記号および言葉を定義する.

定義 2.1. 任意の index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ($k_i \in \mathbb{Z}, k_i > 0$) に対して, \mathbf{k} の重さ $wt(\mathbf{k})$ および \mathbf{k} の深さ $dep(\mathbf{k})$ をそれぞれ $k = k_1 + \cdots + k_n$ および n (成分の個数) で定義する. また, 集合 $I(k, n)$ を $I(k, n) = \{\mathbf{k} : index | wt(\mathbf{k}) = k, dep(\mathbf{k}) = n\}$, そして集合 $I_0(k, n)$ を $I_0(k, n) = \{\mathbf{k} : index | wt(\mathbf{k}) = k, dep(\mathbf{k}) = n, k_1 \geq 2\}$, と定める.

定義 2.2. 正整数 k および n に対し, 多重 L 値の有限和 $G_0(k, n)$ を

$$G_0(k, n) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n)} \bar{\zeta}(\mathbf{k})$$

で定義する.

$G_0(k, n)$ を係数にもつ母関数

$$\Phi_0(x, y) = \sum_{\substack{k \geq 2, n \geq 1 \\ k \geq n+1}} G_0(k, n) x^{k-n} y^n$$

に対して次の結果が得られた. 一般の m に対して得られているが, 簡単のためにここでは $m = 2$ の場合のみ記す.

定理 2.3 ([I]). $m = 2$ のとき

$$\Phi_0(x, y) = \frac{xy}{x-1} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{1-x-y}{2} & \frac{2-x+y}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2-x}{2} & \frac{3-x}{2} & \frac{3}{2} \end{matrix} ; 1 \right) - \frac{xy(x+y-1)}{2(x-1)(x-2)} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{2-x+y}{2} & \frac{3-x-y}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3-x}{2} & \frac{4-x}{2} & 2 \end{matrix} ; 1 \right).$$

系 2.4. $m = 2$ のとき

$$\Phi_0(x, 1) = \sum_{\substack{k \geq 2, n \geq 1 \\ k \geq n+1}} G_0(k, n) x^{k-n} = \sum_{l \geq 1} C(l) x^l.$$

ここで, $C(l)$ は

$$C(l) = \begin{cases} -\frac{\zeta(l-1)}{2^{l-1}} - \frac{\zeta(l-3)}{2^{l-3}} - \dots - \frac{\zeta(2)}{2^2} - 1 & (l: \text{奇数}), \\ -\frac{\zeta(l-1)}{2^{l-1}} - \frac{\zeta(l-3)}{2^{l-3}} - \dots - \frac{\zeta(3)}{2^3} - \log 2 & (l: \text{偶数}) \end{cases}$$

である.

例 2.5. 系 2.4 において $l = 1$ の場合の係数を比較すると次が得られる.

$$\bar{\zeta}(2) + \bar{\zeta}(2, 1) + \bar{\zeta}(2, 1, 1) + \dots = -1.$$

3 定理の証明の概要

簡単のため $m = 2$ としておく. $t = 1$ における極限值が $\bar{\zeta}(k)$ であるような関数 $L_k(t)$ を考える. すなわち

$$L_k(t) = \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{\zeta^{m_1 + \dots + m_n}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}} t^{m_1}$$

と定義する. そして有限和 $G_0(k, n; t)$ を

$$G_0(k, n; t) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n)} L_{\mathbf{k}}(t)$$

と定義する. また $G_0(k, n; t)$ を係数にもつ母関数を

$$\Phi_0(x, y; t) = \sum_{\substack{k \geq 2, n \geq 1 \\ k \geq n+1}} G_0(k, n; t) x^{k-n} y^n$$

で定める.

補題 3.1. $\Phi_0(x, y; t)$ は次の微分方程式を満たす .

$$t^2(t-1)(t+1) \frac{d^3\Phi_0}{dt^3} + t(t-1)(t+2(1-x)(1+t)) \frac{d^2\Phi_0}{dt^2} \\ + ((x^2 - 2x + 1 - y^2)t^2 + (x-1)t + x(1-x)) \frac{d\Phi_0}{dt} = xy((x+y)t - x).$$

この微分方程式のべき級数解は一意的に定まり ,

$$\Phi_0(x, y; t) = \frac{xy}{x-1} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{1-x-y}{2} & \frac{2-x+y}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2-x}{2} & \frac{3-x}{2} & \frac{3}{2} \end{matrix} ; t^2 \right) \\ - \frac{xy(x+y-1)}{2(x-1)(x-2)} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{2-x+y}{2} & \frac{3-x-y}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3-x}{2} & \frac{4-x}{2} & 2 \end{matrix} ; t^2 \right)$$

と表せる . この表示式において極限 $t \rightarrow 1$ をとると定理を得る . □

参考文献

- [AK] Tsuneo Arakawa and Masanobu Kaneko, On multiple L -values, J. Math. Soc. Japan, Volume 56, Number 4 (2004), 967-991.
- [I] 今富耕太郎, 多重 L 値と Fuchs 型方程式, 修士論文, (熊本大学) 2009
- [OZ] Yasuo Ohno and Don Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height., Indag. Mathem., N.S., 12 (4), 483-487, 2001.

重み付き $K3$ 曲面の族について

2010 年 2 月 16 日 (火)

真瀬真樹子 (首都大学東京 大学院 理工学研究科 数理情報科学専攻)

小林正典先生 (首都大学東京) との共同研究

概要

重み付き射影空間の反標準因子の特異点解消として得られる $K3$ 曲面の族を考える。この族は 95 個あることが知られているが、実はその中に、Picard 格子が等長同型であるような族がいくつかある。本講演ではそのような族のすべてに対して、単項式による重み付き射影空間の双有理変換が構成できることを報告する。

1 Introduction

自明な標準束を持ち、 $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ である非特異コンパクト連結 2 次元複素多様体 X を $K3$ 曲面という。 X は単連結な複素シンプレクティック多様体であって、 $H^{2,0}(X) = H^0(X, \Omega_X^2)$ の周期写像の像によって同型が定まる。また、Picard 群 $\text{Pic } X$ は $H^2(X, \mathbb{Z})$ に自然に埋め込まれて格子の構造を持つため、しばしば Picard 格子と称される。

重み付き射影空間の超曲面の族のうち、族の general member の極小曲面が $K3$ 曲面であるものを重み付き $K3$ 曲面の族という。重み付き $K3$ 曲面の族は 95 個に分類されている [3][5][6]。これらの 95 個の族に対しては、各族の generic member の Picard 格子が計算されている [2]。すると、Picard 格子が等長同型であるような族が幾つかあることがわかった。 $K3$ 曲面に対して、部分格子である Picard 格子の等長同型が整数係数 2 次コホモロジー群の有効な Hodge 等長同型に延長できるかどうか、したがって $K3$ 曲面が同型であるかはわからない。今回、generic member の Picard 格子が等長同型である全ての族に対して、重み付き射影空間の単項式双有理変換により“十分一般な”部分族を同一視することができた。

射影空間 P^2 と $P^1 \times P^1$ はブローアップとブローダウンによって双有理同値である。 $P^2, P^1 \times P^1$ それぞれの反標準完備線型系は次元が異なるので同型にはならないが、部分線型系は同型になる (下図参照)。この曲線におけるアイディアを曲面の場合に考える。

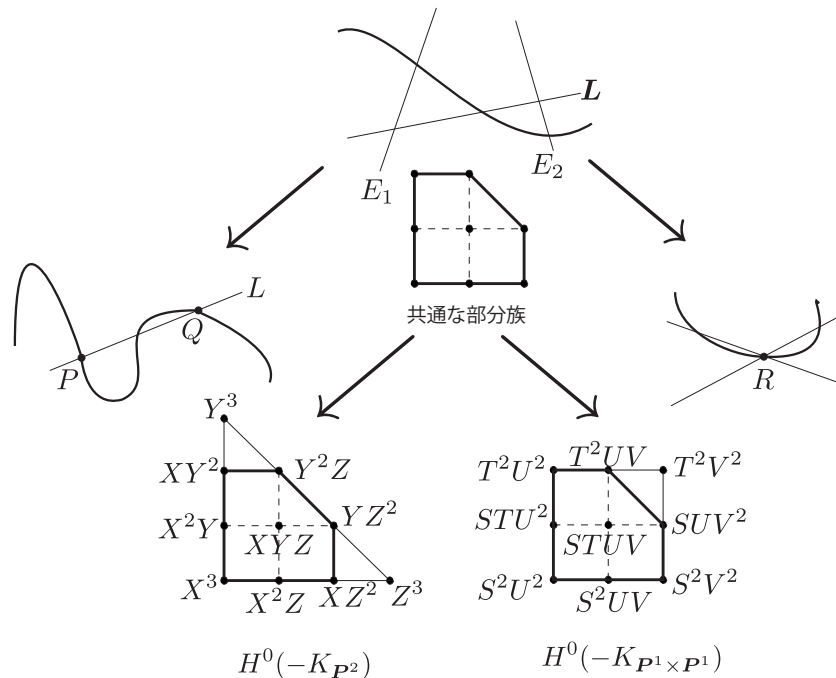
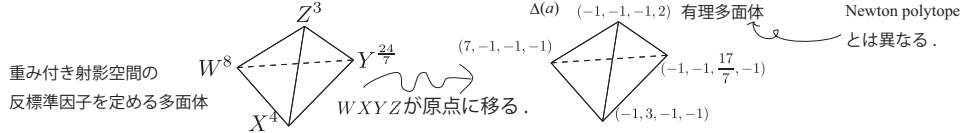


図 1 P^2 の 2 点 P, Q を通る非特異 3 次曲線 — 楕円曲線全体を網羅している — と $P^1 \times P^1$ の 1 点 R を通り 2 直線と 1 度ずつ交わる非特異 4 次曲線 — $(S : T), (U : V)$ それぞれに関しては 2 次 — が互いに移り合う。

2 Set-up

重み $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ は $\gcd(a_j) = 1$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ としても一般性は失われない.

例えば重み付き $K3$ 曲面の族 $P(3, 6, 7, 8) \supset (24)$ に対して, 以下のような多面体が定まる:



これを重み $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ に一般化して次のような多面体を定義する.

定義 2.1

$$M(a) := \left\{ (m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^4 \mid \sum a_i m_i = 0 \right\},$$

$$\Delta(a) := \{ (m_0, m_1, m_2, m_3) \in M(a) \otimes \mathbf{R} \mid m_i \geq -1 \quad (i = 0, \dots, 3) \}.$$

一般に有界な有理凸多面体 Δ に対して, 射影トーリック多様体 $P_\Delta := \text{Proj} \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}[k\Delta \cap M]$ が定まる. 特に重み $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ に対して, 射影トーリック多様体は元の重み付き射影空間 $P_{\Delta(a)} = P(a)$ である.

定義 2.2 内点に原点を含む有界な n 次元整凸多面体 Δ が反射的 (*reflexive*) であるとは, Δ の極双対

$$\Delta^\circ := \{ y \in (\mathbf{R}^n)^* \mid \text{全ての } x \in \Delta \text{ に対し } \langle x, y \rangle \geq -1 \}$$

がまた整凸多面体であることをいう.

3次元のとき, Δ が反射的であることは, P_Δ の既約反標準因子として極小曲面が $K3$ 曲面となるものが存在することと同値である [1]. このとき定まる generic member の Picard 格子を $\Lambda(\Delta)$ と記す. 特に, 95 個のリストの重み $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ に対しては $\Lambda(a) := \Lambda(\Delta(a))$ と記す.

3 Result

多項式 F で定まる零点集合を \overline{Z}_F と記す. トーラスを $T := (\mathbf{C}^*)^3$ とおき, 部分集合 Z_F を $\overline{Z}_F \cap T = Z_F$ とする.

定理 3.1 95 個のリストから族の generic member が等長同型な Picard 格子を持つ重み a, b をとる. 群同型 $M(a) \simeq \mathbf{Z}^3 \simeq M(b)$ を固定する. このとき, 有理凸多面体 $\Delta(a), \Delta(b)$ に共通な反射的凸部分多面体 Δ が存在して, 次をみたとす.

(1) $V_a := \{ F \in H^0(-K_{P(a)}) \mid \text{Newton}(F) \subset \Delta \}, V_b := \{ G \in H^0(-K_{P(b)}) \mid \text{Newton}(G) \subset \Delta \}$ のそれぞれの Zariski 開部分集合 D_a, D_b が存在して, 反標準束の切断で定まる $K3$ 曲面の族の同型が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_a & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{X}_b \\ p_a \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_b \\ D_a & \xrightarrow{\simeq} & D_b. \end{array}$$

(2) 等長同型が存在する: $\Lambda(a) \simeq \Lambda(\Delta) \simeq \Lambda(b)$.

注意 1 定理 3.1 が成り立つ重みのペアは, 一組を除き, 少なくともひとつの重みが“双対重み系”を持つ.

注意 2 双有理変換が単項式写像であるため, 絶対値写像により得られる $K3$ 曲面のアメーバは同型である.

証明の要点

(1) 実際の計算により単項式双有理変換 $\varphi_a : P_\Delta \dashrightarrow P(a), \varphi_b : P_\Delta \dashrightarrow P(b)$ は表 1 のように定まることが確かめられる. $H^0(-K_{P_\Delta})$ の部分集合 D_0 を $D_0 := \{ H \in H^0(-K_{P_\Delta}) \mid (H=0) \text{ が有理 2 重点しか持たない一般の元} \}$ と定め, 任意の元 $H \in D_0$ を取る. H の φ_a^*, φ_b^* による像をそれぞれ H_a, H_b とおく. 群同型 $M(a) \simeq \mathbf{Z}^3 \simeq M(b)$ の固定により, $P(a), P_\Delta, P(b)$ は T を共通に含むので $Z_{H_a} = Z_H = Z_{H_b}$ と見なせる. 一方, $\overline{Z}_{H_a}, \overline{Z}_H, \overline{Z}_{H_b}$ それぞれの極小曲面 $\hat{Z}_{H_a}, \hat{Z}_H, \hat{Z}_{H_b}$ は $K3$ 曲面として同型である.

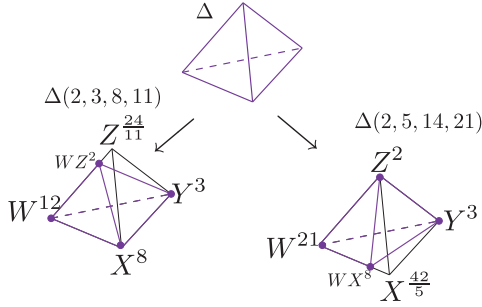
(2) Picard 格子は整数係数 2 次コホモロジー群に原始的に埋め込まれているので, $\text{rk } \Lambda(a) = \text{rk } \Lambda(\Delta) = \text{rk } \Lambda(b)$ ならば主張が示せる. ところで, $\text{rk } \Lambda(\Delta)$ は多面体 Δ の格子点の情報から求めることができる [4]. 表 1 のような Δ に対し, $\Lambda(a), \Lambda(\Delta), \Lambda(b)$ の階数が等しいことを直接確かめることができる. 故に $\Lambda(a) \simeq \Lambda(\Delta) \simeq \Lambda(b)$.

No.	Families	the vertices of Δ	Picard lattice
13	$P(1, 3, 8, 12) \supset (24)$	$Z^2, W^{24}, W^3X^7, WX^5Y, Y^3, X^4Z$	$E_6 \perp U$
72	$P(1, 2, 5, 7) \supset (15)$	$WZ^2, W^{15}, WX^7, X^5Y, Y^3, X^4Z$	(8)
50	$P(1, 4, 10, 15) \supset (30)$	$Z^2, W^{30}, W^2X^7, X^5Y, Y^3$	$E_7 \perp U$
82	$P(1, 3, 7, 11) \supset (22)$	$Z^2, W^{22}, WX^7, X^5Y, WY^3$	(9)
9	$P(1, 4, 5, 10) \supset (20)$	$W^{20}, X^5, Z^2, Y^2Z, WXY^3, W^5Y^3$	$T_{2,5,5}$
71	$P(1, 3, 4, 7) \supset (15)$	$W^{15}, X^5, WZ^2, Y^2Z, XY^3, W^3Y^3$	(10)
14	$P(1, 6, 14, 21) \supset (42)$	Z^2, Y^3, X^7, W^{42}	$E_8 \perp U$
28	$P(1, 3, 7, 10) \supset (21)$	WZ^2, Y^3, X^7, W^{21}	(10)
45	$P(1, 4, 9, 14) \supset (28)$	Z^2, WY^3, X^7, W^{28}	
51	$P(1, 5, 12, 18) \supset (36)$	Z^2, Y^3, WX^7, W^{36}	
38	$P(1, 6, 8, 15) \supset (30)$	$Z^2, W^{30}, X^5, XY^3, W^6Y^3$	$E_8 \perp A_1 \perp U$
77	$P(1, 5, 7, 13) \supset (26)$	$Z^2, W^{26}, WX^5, XY^3, WY^3$	(11)
20	$P(1, 6, 8, 9) \supset (24)$	$W^6Z^2, W^{24}, X^4, XZ^2, Y^3$	$E_8 \perp A_2 \perp U$
59	$P(1, 5, 7, 8) \supset (21)$	$W^5Z^2, W^{21}, WX^4, XZ^2, Y^3$	(12)
26	$P(2, 4, 5, 9) \supset (20)$	WZ^2, W^{10}, X^5, Y^4	$D_8 \perp D_4 \perp U$
34	$P(2, 6, 7, 15) \supset (30)$	Z^2, W^{15}, X^5, WY^4	(14)
26	$P(2, 4, 5, 9) \supset (20)$	$WZ^2, W^5Y^2, Y^4, X^5, W^8X$	$D_8 \perp D_4 \perp U$
34	$P(2, 6, 7, 15) \supset (30)$	$Z^2, W^8Y^2, WY^4, X^5, W^{12}X$	(14)
76	$P(2, 5, 6, 13) \supset (26)$	$Z^2, W^5X^2, X^4Y, WY^4, W^{13}$	
27	$P(2, 3, 8, 11) \supset (24)$	WZ^2, W^{12}, X^8, Y^3	$E_8 \perp D_4 \perp U$
49	$P(2, 5, 14, 21) \supset (42)$	Z^2, W^{21}, WX^8, Y^3	(14)
16	$P(3, 6, 7, 8) \supset (24)$	$Z^3, W^3YZ, W^6X, X^4, WY^3$	$E_8 \perp (A_2)^3 \perp U$
54	$P(3, 5, 6, 7) \supset (21)$	$Z^3, W^3XZ, W^7, WY^3, X^3Y$	(16)
43	$P(3, 4, 11, 18) \supset (36)$	Z^2, W^{12}, X^9, WY^3	$E_8 \perp E_6 \perp U$
48	$P(3, 5, 16, 24) \supset (48)$	Z^2, W^{16}, WX^9, Y^3	(16)
43	$P(3, 4, 11, 18) \supset (36)$	$Z^2, W^6Z, W^8X^3, X^9, WY^3, W^7XY$	$E_8 \perp E_6 \perp U$
48	$P(3, 5, 16, 24) \supset (48)$	$Z^2, W^8Z, W^{11}X^3, WX^9, Y^3, W^9XY$	(16)
88	$P(2, 5, 9, 11) \supset (27)$	$XZ^2, W^8Z, W^{11}X^3, WX^5, Y^3, W^9Y$	
68	$P(3, 4, 10, 13) \supset (30)$	$XZ^2, X^5Y, W^2X^6, Y^3, W^{10}$	$E_8 \perp E_7 \perp U$
83	$P(4, 5, 18, 27) \supset (54)$	$Z^2, W^9Y, W^{11}X^2, Y^3, WX^{10}$	(17)
92	$P(3, 5, 11, 19) \supset (38)$	$Z^2, W^9Y, W^{11}X, XY^3, WX^7$	
30	$P(5, 7, 8, 20) \supset (40)$	$Z^2, W^4Z, WX^5, W^5XY, Y^5$	$E_8 \perp T_{2,5,5}$
86	$P(4, 5, 7, 9) \supset (25)$	$YZ^2, W^4Z, X^5, W^5X, WY^3$	(18)
46	$P(5, 6, 22, 33) \supset (66)$	$Z^2, W^{12}X, X^{11}, Y^3$	$E_8^2 \perp U$
65	$P(3, 5, 11, 14) \supset (33)$	XZ^2, W^{11}, WX^6, Y^3	(18)
80	$P(4, 5, 13, 22) \supset (44)$	Z^2, W^{11}, WX^8, XY^3	
56	$P(5, 6, 8, 11) \supset (30)$	YZ^2, W^6, X^5, XY^3	$E_8^2 \perp A_1 \perp U$
73	$P(7, 8, 10, 25) \supset (50)$	Z^2, W^6X, X^5Y, Y^5	(19)

表 1: 族と単項式写像

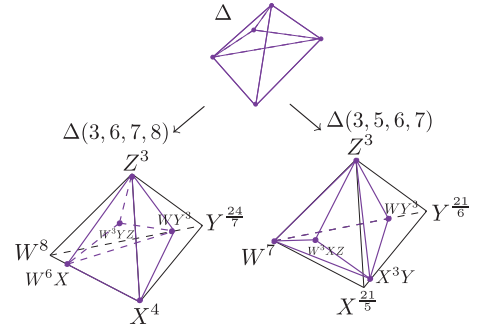
4 Some examples

例 3.1 $P(2, 3, 8, 11) \supset (24)$, $P(2, 5, 14, 21) \supset (42)$



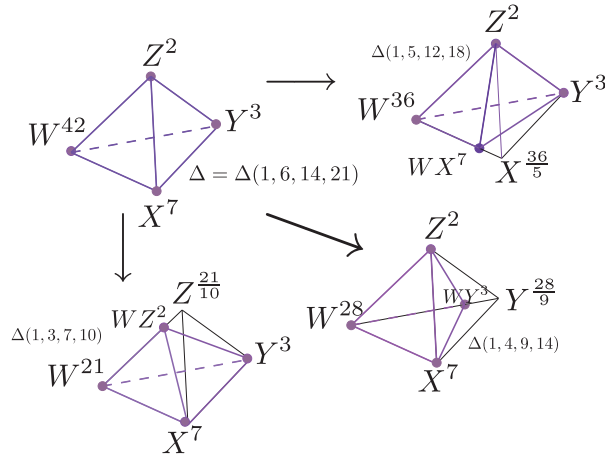
2つの族の完備線型束に対応する Newton 多面体が同型である。

例 3.2 $P(3, 6, 7, 8) \supset (24)$, $P(3, 5, 6, 7) \supset (21)$



“双対重み系”を持たない組。共通部分多面体は 6 面体。

例 3.3 $P(1, 6, 14, 21) \supset (42)$ $P(1, 3, 7, 10) \supset (21)$ $P(1, 4, 9, 14) \supset (28)$ $P(1, 5, 12, 18) \supset (36)$



$\Delta(1, 6, 14, 21)$ 自身が整で, Δ として他の有理凸多面体に共通に含まれる 4 つ組。

参考文献

- [1] V. V. BATYREV, Dual polyhedra and the mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties, *J. Alg. Geom.* **3** (1994), 493–535.
- [2] S.-M. BELCASTRO, Picard lattices of families of $K3$ surfaces, *Commun. in Algebra* **30** (2002), 61–82.
- [3] A.R. IANO-FLETCHER, Working with weighted complete intersections, *Explicit Birational Geometry of 3-folds*, eds. A. Corti and M. Reid, LMS Lecture Note Series No. 281, 2000, 101–173.
- [4] M. KOBAYASHI, Duality of weights, mirror symmetry and Arnold’s strange duality, *Tokyo J. Math.* **31** (2008), 225–251.
- [5] M. REID, Canonical 3-folds, *Proc. Alg. Geom. Anger 1979*. Sijthoff and Nordhoff, 273–310.
- [6] T. YONEMURA, Hypersurface $K3$ singularities, *Tôhoku Math. J.* **42** (1990), 351–380.

On relation of slip-rate to the solution of problems with the general slip boundary condition for motion of inhomogeneous viscous fluids

Naoto Nakano¹

Department of Mathematics, Keio University
3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

In this talk an initial-boundary value problem for motion of an inhomogeneous continuum with generalized Navier's slip boundary conditions is considered. The problem is given as follows.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \mathbf{b} \quad \text{in } Q_T (= \Omega \times (0, T)), \\ \mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\nu(\rho)\mathbb{D}(\mathbf{v}) - \beta \left(\nabla \rho \otimes \nabla \rho - \frac{1}{3}|\nabla \rho|^2 \mathbb{I} \right) \quad \text{in } Q_T, \\ (\rho, \mathbf{v})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{v}_0) \quad \text{in } \Omega, \\ K\mathbf{v} + (1-K)\Pi\mathbb{T}\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } G_T (= \Gamma \times (0, T)), \end{array} \right. \quad (1)$$

where $\Omega (\subset \mathbb{R}^3)$ is a fixed domain of the continuum with the boundary Γ , $\rho = \rho(X, t)$ the density of the continuum, $\mathbf{v} = (v_1(X, t), v_2(X, t), v_3(X, t))^T$ the velocity vector field, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ the Lagrangian derivative, \mathbb{T} the Cauchy stress tensor, $p = -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbb{T}$ the pressure, $\nu(\rho)$ the viscosity, $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T)$, $\mathbf{b} = (b_1(X, t), b_2(X, t), b_3(X, t))^T$ the external body forces, \mathbf{n} the unit outward normal vector to Γ and $\Pi \mathbf{f} = \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ the projection onto the tangent plane. The constitutive equations for \mathbb{T} (1)₄ is derived by Málek and Rajagopal [1].

$\beta > 0$ is a material modulus which express the magnitude of the influence of material inhomogeneity on the motion. If $\beta = 0$, then the governing equations immediately become the inhomogeneous incompressible Navier-Stokes equations. If β is large, then the effect of the inhomogeneity on the stress might not be neglected, and the flow is very solid-like.

$K = K(X, t)$, $0 \leq K \leq 1$ is a slip coefficient. The boundary conditions (1)₆ assigned for \mathbf{v} are called the generalized Navier's slip conditions. When $K \equiv 1$, (1)₆ becomes the adherence (no-slip) condition, namely $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ on Γ . If $K < 1$, then the material slips on the boundary. When $K \equiv 0$, the boundary conditions become $\Pi\mathbb{T}\mathbf{n} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ on Γ ; representing the perfect-slip case. Interestingly, the general

¹E-mail: nakano.naoto@gmail.com

slip condition (1)₆ formally connects the no-slip case to the perfect-slip case through K . Thus, naturally we expect the solutions of the system may have the relation with respect to K .

The problem formulated above in Eulerian coordinates X can be written in Lagrangian coordinate x . Let \mathbf{u} and q be the velocity and the pressure expressed as functions of the Lagrangian coordinates. The relation between Eulerian and Lagrangian coordinates can be written in the form

$$x = y + \int_0^t \mathbf{u}(y, s) ds \equiv X_{\mathbf{u}}(y, t), \quad \mathbf{u}(y, s) \equiv \mathbf{v}(X_{\mathbf{u}}(y, t), t).$$

From (1)₁ it is easy to derive

$$\frac{\partial \varrho_{\mathbf{u}}}{\partial t}(x, t) = 0$$

for $\varrho_{\mathbf{u}}(x, t) := \varrho(X_{\mathbf{u}}(x, t), t)$. Here, (2) has a solution

$$\varrho_{\mathbf{u}}(x, t) = \varrho_{\mathbf{u}}(x, 0) = \varrho(X_{\mathbf{u}}(x, 0), 0) = \varrho(x, 0) = \varrho_0(x).$$

This implies the density at each point in the Lagrangian coordinate space does not vary in time. Moreover, using the Jacobian determinant of the transform $X_{\mathbf{u}}$, we have $\nabla_x F(x) = \nabla_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{u}}(y, t)$ for $F_{\mathbf{u}}(y, t) = F(X_{\mathbf{u}}(y, t))$, $\nabla_{\mathbf{u}} = (J_{X_{\mathbf{u}}})^{-T} \nabla_y$ where $J_{X_{\mathbf{u}}}$ is the Jacobi matrix of the transformation $X_{\mathbf{u}}$. Then problem (1) takes the form

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0, & \varrho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbb{T}_{\mathbf{u}} + \varrho_0 \mathbf{b}_{\mathbf{u}} & \text{in } Q_T, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 & \text{in } \Omega, \\ K_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + (1 - K_{\mathbf{u}}) \Pi_{\mathbf{u}} \mathbb{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{n}_{\mathbf{u}} = 0, & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{u}} = 0 & \text{on } G_T. \end{cases} \quad (2)$$

Here,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\mathbf{u}} &= -q \mathbb{I} + 2\nu(\varrho_0) \mathbb{D}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) - \beta \left(\nabla_{\mathbf{u}} \varrho_0 \otimes \nabla_{\mathbf{u}} \varrho_0 - \frac{1}{3} |\nabla_{\mathbf{u}} \varrho_0|^2 \mathbb{I} \right), \\ \mathbb{D}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} + [\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}]^T), \quad \mathbf{b}_{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{b}(X_{\mathbf{u}}(x, t), t), \\ \mathbf{n}_{\mathbf{u}}(x, t) &= \mathbf{n}(X_{\mathbf{u}}(x, t)), \quad K_{\mathbf{u}}(x, t) = K(X_{\mathbf{u}}(x, t), t), \quad \Pi_{\mathbf{u}} \mathbf{f} = \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{u}}) \mathbf{n}_{\mathbf{u}}, \\ \Pi_{\mathbf{u}} \mathbb{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{n}_{\mathbf{u}} &= 2\nu(\varrho_0) \Pi_{\mathbf{u}} \mathbb{D}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_{\mathbf{u}} - \beta \Pi_{\mathbf{u}} (\nabla_{\mathbf{u}} \varrho_0 \otimes \nabla_{\mathbf{u}} \varrho_0) \mathbf{n}_{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

It should be remarked that by the use of Lagrangian discription we can reduce the number of unknown functions by one.

We obtained the theorem on time-local existence of a solution of problem (2) in Sobolev-Slobodetskiĭ spaces [2]:

Time-local Existence Let Ω be a bounded domain, $l \in (1/2, 1)$, $\Gamma \in W_2^{7/2+l}$, $T > 0$, $\nu \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+)$, $\inf \nu > 0$, $\varrho_0 \in W_2^{2+l}(\Omega)$, $\varrho_0(y) \geq R_0 > 0$, $\mathbf{b} \in W_2^{l,l/2}(Q_T)$ and $\mathbf{v}_0 \in W_2^{1+l}(\Omega)$. Assume that $\mathbf{b}(X, t)$ has continuous derivatives with respect to X and \mathbf{b} , $\nabla_X \mathbf{b}$ satisfy the Lipschitz condition in x and the Hölder condition with exponent $1/2$ in t , that $K(X, t)$ has continuous derivatives up to order 3 with respect to X , and $D_X^\alpha K$ ($|\alpha| \leq 3$) satisfy the Lipschitz condition in x and t . In addition suppose the following conditions for K such as

$$(\text{Condition } K) \begin{cases} (i) & K(X, t) \geq 0, \quad \sup_{(X,t) \in G_T} K(X, t) < 1, \\ & \text{or} \\ (ii) & K(X, t) \equiv k \text{ constant}, \quad 0 \leq k \leq 1. \end{cases}$$

The appropriate compatibility conditions are also satisfied. Then problem (2) has a unique solution $(\mathbf{u}, \nabla q) \in W_2^{2+l, 1+l/2}(Q_{T'}) \times W_2^{l, l/2}(Q_{T'})$ on a finite interval $(0, T')$ for some T' ($0 < T' \leq T$). In the case (ii) T' can be taken uniformly in k .

Moreover, we proved the following results on the limit with respect to k and β , respectively.

Theorem 1 Let Ω , l , Γ , T , T' , ν , \mathbf{b} , \mathbf{v}_0 , ϱ_0 , β be the same as above “Time-local Existence”. Consider the case (ii) of Condition K , i.e., $K(x, t) \equiv k$, and let $(\mathbf{u}^{(k)}, \nabla q^{(k)})$ be the solution of problem (2) with k . Then, the sequence of the solutions $\{(\mathbf{u}^{(k)}, \nabla q^{(k)})\}_{0 < k < 1}$ satisfies

$$(\mathbf{u}^{(k)}, \nabla q^{(k)}) \longrightarrow \begin{cases} (\mathbf{u}^{(1)}, \nabla q^{(1)}) & \text{as } k \rightarrow 1 \text{ (no-slip case),} \\ (\mathbf{u}^{(0)}, \nabla q^{(0)}) & \text{as } k \rightarrow 0 \text{ (perfect-slip case)} \end{cases}$$

in $W_2^{2+l, 1+l/2}(Q_{T'}) \times W_2^{l, l/2}(Q_{T'})$.

This result implies the generalized slip condition connects the no-slip condition to the perfect-slip condition in constant coefficient cases.

Moreover, the bodies under consideration in this study are so-called fluid-like bodies, and β is related to their inhomogeneity. We can assure the relation between inhomogeneous incompressible fluid-like bodies and inhomogeneous incompressible Navier-Stokes fluids through β by the following result.

Theorem 2 Let Ω , l , Γ , T , T' , ν , \mathbf{b} , \mathbf{v}_0 , ϱ_0 , K be the same as above “Time-local Existence”, and let $(\mathbf{u}_{(\beta)}, \nabla q_{(\beta)})$ be the solution of problem (2) with β . Then, the

sequence of the solutions $\{(\mathbf{u}_{(\beta)}, \nabla q_{(\beta)})\}_{\beta>0}$ converges to $(\mathbf{u}_{(0)}, \nabla q_{(0)})$ as $\beta \rightarrow 0$ in $W_2^{2+l, 1+l/2}(Q_{T'}) \times W_2^{l, l/2}(Q_{T'})$.

Finally, we introduce the function spaces used in this talk. Let Ω be a domain in \mathbb{R}^n and $r(\notin \mathbb{Z})$ is a non-negative number. By $W_2^r(\Omega)$ we denote the space of functions equipped with the standard norm

$$\|u\|_{W_2^r(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|<r} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{W_2^r(\Omega)}^2, \quad (3)$$

where

$$\|u\|_{W_2^r(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=[r]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\{r\}}} dx dy.$$

$W_2^r(\Omega)$ is called the Sobolev-Slobodetskiĭ space. Here $[r]$ is the integral part and $\{r\}$ the fractional part of r , respectively. $\|f\|_{L_2(\Omega)} = (\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ is the norm in $L_2(\Omega)$, $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ is the generalized derivative of the function f in the distribution sense of order $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, and $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ being a multi-index.

The anisotropic Sobolev-Slobodetskiĭ spaces $W_2^{r, r/2}(Q_T)$ in the cylindrical domain $Q_T = \Omega \times (0, T)$ are defined by $L_2(0, T; W_2^r(\Omega)) \cap L_2(\Omega; W_2^{r/2}(0, T))$, whose norm is introduced by the formula

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{r, r/2}(Q_T)}^2 &= \int_0^T \|u\|_{W_2^r(\Omega)}^2 dt + \int_{\Omega} \|u\|_{W_2^{r/2}(0, T)}^2 dx \\ &\equiv \|u\|_{W_2^{r, 0}(Q_T)}^2 + \|u\|_{W_2^{0, r/2}(Q_T)}^2, \end{aligned}$$

where $W_2^{r, 0}(Q_T) = L_2(0, T; W_2^r(\Omega))$ and $W_2^{0, r/2}(Q_T) = L_2(\Omega; W_2^{r/2}(0, T))$. Similarly, the norm in $W_2^{r/2}(0, T)$ (for nonintegral $r/2$) is defined by

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{r/2}(0, T)}^2 &= \sum_{j=0}^{[r/2]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(0, T)}^2 \\ &\quad + \int_0^T dt \int_0^t \left| \frac{d^{[r/2]} u(t)}{dt^{[r/2]}} - \frac{d^{[r/2]} u(t-\tau)}{d\tau^{[r/2]}} \right|^2 \frac{d\tau}{\tau^{1+2\{r/2\}}}. \end{aligned}$$

References

- [1] J. Málek and K. R. Rajagopal, On the modeling of inhomogeneous incompressible fluid-like bodies, *Mechanics of Materials*, **38** (2006), 233-242.
- [2] N. Nakano and A. Tani, Navier's slip problem for motion of incompressible inhomogeneous fluid-like bodies, *J. Math. Fluid Mech.*, accepted.

Some Elliptic Fibrations Arising from Free Rigid Body Dynamics

多羅間 大輔¹

(京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻)

1 序

本講演は、成木勇夫先生（立命館大学）との共同研究のご紹介である。

3次元自由剛体の運動は角運動量ベクトル $p \in \mathbb{R}^3$ に関する Euler 方程式

$$\frac{dp}{dt} = p \times (A^{-1}p)$$

によって記述される。 \times は \mathbb{R}^3 の通常の外積を表し、慣性テンソル A は正値 3×3 対称行列である。この力学系は、ふたつの第一積分 $H(p) = \frac{1}{2}p^T A^{-1}p$, $L(p) = \frac{1}{2}p^T p$ をもつ。解曲線は、 H , L の等位面の共通部分の連結成分に一致する。つまり、3次元自由剛体の力学系の研究は、適切な座標 $p = (p_1, p_2, p_3)$ により、

$$\begin{cases} J_1 p_1^2 + J_2 p_2^2 + J_3 p_3^2 & = 2h \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 & = 2l \end{cases}$$

と表される曲線（実楕円曲線）の研究へと翻訳される。 $A^{-1} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ である。力学系の分岐現象に着目すれば、この (J_1, J_2, J_3) でパラメタ付けられた楕円曲線の族について考察することは自然である。

また、可積分系の理論の視点に立てば、Euler 方程式に同値な Lax 方程式（Manakov 方程式）から定まるスペクトル曲線と呼ばれる平面 3 次曲線が重要な考察対象になる。これも上と同じパラメタをもつ楕円曲線の族を与えている。

したがって、同じパラメタを持つ 2 つの楕円曲線の族を得たことになる。われわれはこれらの楕円ファイバー空間を複素代数幾何学の観点から考察する。以下では変数はすべて複素数とする。

なお、以下に述べる Weierstraß 標準形をはじめ、楕円ファイバー空間の一般論について、詳しくは [Kaw, M, Nak1, Nak2] 等を参照されたい。

¹dsktrm@amp.i.kyoto-u.ac.jp

2 素朴楕円ファイバー空間

Euler 方程式の積分曲線に着目すれば、次の方程式が自然に得られる：

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $((a : b : c : d), (x : y : z : w)) \in P_3(\mathbb{C}) \times P_3(\mathbb{C})$ である。これについて、次はよく知られた事実である。

Theorem 1. パラメタ a, b, c, d がすべて異なるとき、方程式 (1) は楕円曲線を定める。さらに、この楕円曲線は複素射影直線 $P_1(\mathbb{C})$ の 4 点 a, b, c, d で分岐した 2 重被覆として与えられる。

また、方程式 (1) が複素射影空間の直積 $P_3(\mathbb{C}) \times P_3(\mathbb{C})$ 内に定める滑らかな 4 次元代数多様体を F とかく。 $(a : b : c : d)$ 成分への射影により F は自然に $P_3(\mathbb{C})$ を底空間とする楕円ファイバー空間の構造を持つが、2次元の特異ファイバーを持ち平坦ではない。 $F \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ を素朴楕円ファイバー空間と呼ぶ。

4次元代数多様体 F は、 $P_3(\mathbb{C})$ の斉次座標 x, y, z, w の符号変化を考えることで、群 $\{\pm 1\}^2$ の自然な作用を受ける。この作用は各正則ファイバー上で自由なので、 F の商多様体 Q も $P_3(\mathbb{C})$ 上の楕円ファイバー空間の構造を持つ。

3 Weierstraß 標準形

次のような $P_3(\mathbb{C})$ 上の $P_2(\mathbb{C})$ -束を考える。

$$P(\mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(2) \oplus \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(3) \oplus \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}) \rightarrow P_3(\mathbb{C}).$$

$g_2 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(4))$, $g_3 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(6))$ を次式で定める：

$$g_2 = \frac{4}{3} \{(a-b)(c-d) + \omega(a-c)(b-d)\} \{(a-b)(c-d) + \omega^2(a-c)(b-d)\},$$

$$g_3 = \frac{4}{27} \{(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d)\} \{-2(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d)\} \\ \times \{(a-b)(c-d) - 2(a-c)(b-d)\},$$

$$\Delta = \frac{16}{s^6} (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2,$$

$$J = \frac{\{(a-b)^2 (c-d)^2 + (a-c)^2 (b-d)^2 + (a-d)^2 (b-c)^2\}^3}{54(a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2},$$

そこで、 $P(\mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(2) \oplus \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(3) \oplus \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})})$ の斉次ファイバー座標 $(X : Y : Z)$ を用いて、方程式 $Y^2 Z = 4X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3$ で定まる超曲面を W とかくと自然に $P_3(\mathbb{C})$ 上の楕円ファイバー空間が定まる。これを Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間と呼ぶ。次が成り立つ。

Theorem 2. 商多様体 Q は Weierstraf 標準形 W に双有理同値であり, 正則ファイバーのなす Zariski 開集合上では双正則同型である.

W は平坦な楕円ファイバー空間であるが全空間が特異点を持つ. われわれは, W の特異点解消を行い, さらに底空間 $P_3(\mathbb{C})$ を別の多様体 \hat{B} へと改変して, W に双有理同値な楕円ファイバー空間 \widehat{W} で, 次の条件を満たすものを構成した.

- (A) \widehat{W} は平坦かつ滑らかな楕円ファイバー空間である.
- (B) \widehat{W} の特異ファイバーはすべて小平 [Kod] による楕円曲面の特異ファイバーの分類に含まれている型のものである.

ただし, \hat{B} は, まず $P_3(\mathbb{C})$ を点 $(1 : 1 : 1 : 1)$ でブローアップし, 続いて 4 直線 $a = b = c$, $b = c = d$, $c = d = a$, $d = a = b$ の固有変換を中心としてブローアップして得られる. 例外集合を C とかく.

次が, 本講演の主定理である.

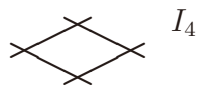
Theorem 3. 楕円ファイバー空間 F から \widehat{W} への $4 : 1$ 有理型写像 $f : F \dashrightarrow \widehat{W}$ が構成でき, f は各正則ファイバーの $4 : 1$ の同種写像を誘導する.

楕円ファイバー空間 $\widehat{W} \rightarrow \hat{B}$ の特異ファイバーは次のようになる.

- 6 平面 $a = b$, $a = c$, $a = d$, $b = c$, $b = d$, $c = d$ の固有変換の一般の点では, ファイバーは I_2 型 ([Kod] の記号) である.



- 3 直線 $a = b$, $c = d$; $a = c$, $b = d$; $a = d$, $b = c$ の固有変換上の点では, ファイバーは I_4 型である.



- 例外集合 C 上の一般の点では, ファイバーは I_0^* 型である.



- 例外集合 C と 6 平面 $a = b$, $a = c$, $a = d$, $b = c$, $b = d$, $c = d$ の固有変換の交点では, ファイバーは I_1^* 型である.



最後に, われわれの構成した楕円ファイバー空間 W とスペクトル曲線の族として得られる楕円ファイバー空間とが (双有理同値の意味で) 同一視できることについてもご説明する.

参考文献

- [Kaw] S. Kawai, Elliptic fibre spaces over compact surfaces, *Commen. Math. Univ. St. Paul*, 15, 1967, 119-138.
- [Kod] K. Kodaira, On compact analytic surfaces : I, II, III, *Ann. of Math.*, 71, 1960, 111-152; 77,1963, 563-626; 78, 1963, 1-40.
- [M] R. Miranda, Smooth models for elliptic three-folds, in *The Birational Geometry of Degenerations*, R. Friedman and D.R. Morrison (eds.), Birkhäuser, 1983, 85-133.
- [Nak1] N. Nakayama, On Weierstrass models, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, H. Hijikata et al. (eds.), Vol.II, Kinokuniya, Tokyo, 1988, 405-431.
- [Nak2] N. Nakayama, Global structures of an elliptic fibration, *Publ. RIMS., Kyoto Univ.*, 38, 2002, 451-649.
- [Nar-Tar] I. Naruki and D. Tarama, Some elliptic fibrations arising from free rigid body dynamics, preprint.

多重 L 値の間のいくつかの関係式について*

田中 立志 (九州大学)

1 序

r を正の整数とし, μ_r を 1 の r 乗根全体の集合とする. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l) \in \mathbb{Z}_{>0}^l$ と $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mu_r^l$ (ただし, $(k_1, s_1) \neq (1, 1)$) に対して,

$$L(\mathbf{k}; \mathbf{s}) = L(k_1, \dots, k_l; s_1, \dots, s_l) = \sum_{m_1 > \dots > m_l > 0} \frac{s_1^{m_1 - m_2} \dots s_{l-1}^{m_{l-1} - m_l} s_l^{m_l}}{m_1^{k_1} \dots m_l^{k_l}}$$

で定義される複素数のことを多重 L 値 (multiple L -value, MLV) という. 条件 $(k_1, s_1) \neq (1, 1)$ によりこの級数は収束する. $r = 1$ のときは (Euler-Zagier 型の) 多重ゼータ値 (MZV), $l = 1$ のときは Dirichlet L 値, とくに $r = l = 1$ のときは Riemann ゼータ値とも呼ばれている.

MZV の研究は, Zagier により MZV が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間の次元予想 ([18], 1994) が提唱されて以降, 多くの数学者や物理学者らによってなされてきた. (次元予想については昨年度の第 5 回数学総合若手研究集会のテクニカルレポート [13] にて詳述した.) とりわけ Goncharov [5] や寺杣 [17] によれば, Zagier の次元予想は少なくとも MZV が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間の次元の上限を与えている. それはすなわち MZV の間には多くの \mathbb{Q} 上の線形関係式が成り立つことを意味している. そのことを受けて, 関係式を具体的に与える研究も, すべての文献をここに挙げるのが不可能なほど今では多く存在している. (代表的なものとして, アソシエータ関係式 [4], 一般複シャッフル関係式 [8], 川島の関係式 [10] などがある. 余談であるが, 次元の上限は代数的に示されているのに対し, 具体的な関係式を与える手法のほとんどが何かしら解析的な側面を持っていることが最近少し不思議に思えてきた.)

一方, MLV の研究は MZV ほどは進展していない. MLV が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間の次元予想が明示的には知られていないことにその理由のひとつがあるように思う. しかし, 以下に述べるように, Deligne-Goncharov [3], Racinet [12] らにより MLV が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間の次元のとある上限は知られている.

定理 1 (Deligne-Goncharov). 任意の整数 $k \geq 2$ と任意の整数 $r > 0$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k, \\ k_1, \dots, k_l \geq 1, \\ s_1, \dots, s_l \in \mu_r, \\ (k_1, s_1) \neq (1, 1)}} \mathbb{Q} \cdot L(\mathbf{k}; \mathbf{s}) \leq d_k[r].$$

ただし, 数列 $\{d_k[r]\}_{k \geq 0}$ は母関数

$$\sum_{k \geq 0} d_k[r] t^k = \begin{cases} \frac{1}{1 - t^2 - t^3} & r = 1, \\ \frac{1}{1 - t - t^2} & r = 2, \\ \frac{1}{1 - (\frac{\varphi(r)}{2} + \nu)t + (\nu - 1)t^2} & r \geq 3 \end{cases}$$

で与えられる. ここに, ν は r を割る有理素数の個数, φ は Euler の φ 関数である.

*2010/2/16, 於 : MCYR6 (北海道大学)

Deligne と Goncharov によるこの定理は MLV の間にも多くの \mathbb{Q} 上の線形関係式が成り立っていることを意味している。MLV の間の線形関係式の記述に関する研究はそれほど多くはなされていないようであるが、たとえば荒川-金子 [1] や Goncharov [6] などではなされている。本稿では、近年川島学氏との共同研究 [11] で新たに得た一般導分関係式、および筆者の最近の結果 [14] として巡回和公式と呼び得る関係式族も発見し証明できたので、それらについて主に代数的視点から解説する。

2 MLV の代数的定式化

以下では MLV の具体的な関係式について代数的に議論する。まずはじめに、荒川-金子 [1] により導入された、MLV の代数的定式化について述べる。([11] も参照されたい。)

$r + 1$ 変数非可換多項式環 $\mathcal{A}_r = \mathbb{Q}\langle x, y_s | s \in \mu_r \rangle$ の部分環 $\mathcal{A}_r^1, \mathcal{A}_r^0$ を

$$\mathcal{A}_r \supset \mathcal{A}_r^1 := \mathbb{Q} + \sum_{s \in \mu_r} \mathcal{A}_r y_s \supset \mathcal{A}_r^0 := \mathbb{Q} + \sum_{s \in \mu_r} x \mathcal{A}_r y_s + \sum_{s, t \in \mu_r, t \neq 1} y_t \mathcal{A}_r y_s$$

とおく。 $z_{k,s} = x^{k-1} y_s$ ($k \geq 1, s \in \mu_r$) とし、 \mathbb{Q} -線形写像 $\mathcal{L}: \mathcal{A}_r^0 \rightarrow \mathbb{C}$ を $\mathcal{L}(1) = 1$ および

$$\mathcal{L}(z_{k_1, s_1} \cdots z_{k_l, s_l}) = L(k_1, \dots, k_l; s_1, \dots, s_l)$$

で定める。MLV の関係式を記述するということは $\ker \mathcal{L}$ の元を書き下すということにほかならない。

\mathcal{A}_r^1 上の積 $*$: $\mathcal{A}_r^1 \times \mathcal{A}_r^1 \rightarrow \mathcal{A}_r^1$ を、 \mathbb{Q} -双線形性および次の 2 条件により定める。

- (i) 任意の $w \in \mathcal{A}_r^1$ に対して、 $1 * w = w * 1 = w$,
- (ii) 任意の $k, l \geq 1$ と任意の語 $w, w' \in \mathcal{A}_r^1$ に対して、
 $z_{k,s} w * z_{l,t} w' = z_{k,s} (w * z_{l,t} w') + z_{l,t} (z_{k,s} w * w') + z_{k+l, st} (w * w')$.

この積 $*$ は調和積と呼ばれ、 \mathcal{A}_r^1 上で結合的かつ可換な積である。MLV の級数表示からくる‘調和積公式’は、写像 \mathcal{L} が $*$ -準同型である、と言い換えられる。

3 ある関係式族

川島-田中 [11] では、ある‘Newton 級数’の解析的な議論を用いて MLV のある関係式族を証明した。本節ではその関係式族を紹介する。

写像 \mathcal{I}, M_s ($s \in \mu_r$) および L_w ($w \in \mathcal{A}_r$) は \mathcal{A}_r 上の \mathbb{Q} -線形写像で、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(z_{k_1, s_1} \cdots z_{k_l, s_l} x^m) &= z_{k_1, s_1} z_{k_2, s_1 s_2} \cdots z_{k_l, s_1 \cdots s_l} x^m, \\ M_s(z_{k_1, s_1} \cdots z_{k_l, s_l} x^m) &= z_{k_1, s s_1} z_{k_2, s_2} \cdots z_{k_l, s_l} x^m, \\ L_w(w') &= w w' \quad (w' \in \mathcal{A}_r) \end{aligned}$$

(m は正の整数) で定義する。 \mathcal{A}_r 上の自己同型 ξ を $\xi(x) = x + y_1$, $\xi(y_s) = \delta(s) y_s - y_1$ で定義する。 $\delta(s) = 0$ ($s \neq 0, 1$), $\delta(0) = \delta(1) = 1$ とする。また、 $\mathcal{A}_{r,+}^1 = \sum_{s \in \mu_r} \mathcal{A}_r y_s$ とする。 $\chi_s = L_{x+\delta(s)y_s} \xi \mathcal{I} M_s$ とおく。このとき、以下が成立する。

定理 2 ([11]). $\chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1 * \mathcal{A}_{1,+}^1) \subset \ker \mathcal{L}$.

この MLV の関係式族を用いて第 5 節に述べる一般導分関係式を証明することができる。

4 導分関係式

次節で本稿の主題のひとつである導分関係式の一般化について述べるために、ここでは荒川-金子 [1] により証明された MLV の導分関係式について紹介する。

∂ が非可換多項式環 \mathcal{A}_r 上の導分であるとは、 ∂ が \mathfrak{A} 上の \mathbb{Q} -線形写像であって、ライプニッツ則

$$\partial(w w') = \partial(w) w' + w \partial(w') \quad (w, w' \in \mathcal{A}_r)$$

を満たすもののことをいう。 \mathcal{A}_r 上の導分は、 \mathcal{A}_r の生成元 x と y_s ($s \in \mu_r$) の像を与えれば一意に定まる。今、 $n \geq 1$ に対し、 \mathcal{A}_r 上の導分 ∂_n を

$$\partial_n(x) = x(x + y_1)^{n-1} y_1, \quad \partial_n(y_s) = -x(x + y_1)^{n-1} y_s + y_s(x + y_1)^{n-1} y_1 - y_s(x + y_1)^{n-1} y_s$$

で定義する。このとき、MLV の導分関係式は次で与えられる。

定理 3 (荒川-金子). 任意の $n \geq 1$ に対して、 $\partial_n(\mathcal{A}_r^0) \subset \ker \mathcal{L}$.

5 一般導分関係式

MZV の場合に導分 ∂_n の一般化を Connes-Moscovici[2] のホップ代数を参考に金子が [9] で定義し、それが MZV の新たな関係式族 (一般導分関係式と呼んでいる) を与えていることが予想された。その予想は [15] にて証明された。本節では、MLV の場合にも同様に、前節で定義した導分 ∂_n の拡張が定式化でき、かつそれが MLV の新たな関係式族を与えていることについて概説する。(詳細は [11] 参照.)

$n \geq 1, c \in \mathbb{Q}$ に対して、 \mathbb{Q} -線形写像 $\partial_n^{(c)}: \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ を

$$\partial_n^{(c)} = \frac{1}{(n-1)!} \text{ad}(\theta^{(c)})^{n-1}(\partial_1)$$

で定義する。ここに、 $\theta^{(c)}: \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ は

$$\theta^{(c)}(x) = \frac{1}{2}(xz + zx), \quad \theta^{(c)}(y_s) = \frac{1}{2}(y_s z + z y_s),$$

および

$$\theta^{(c)}(w w') = \theta^{(c)}(w) w' + w \theta^{(c)}(w') + c H(w) \partial_1(w')$$

(ただし $z = x + y_1$) で定義される \mathbb{Q} -線形写像である。 H はいわゆるオイラー作用素で、語 $w \in \mathcal{A}_r$ に対して $H(w) = \deg(w)w$ で定義される \mathbb{Q} -線形写像 (実は \mathcal{A}_r 上の導分) である。 ad は、交換子として定義されるリー括弧積である: $\text{ad}(\theta)(\partial) = [\theta, \partial] = \theta\partial - \partial\theta$.

$c = 0$ のとき、 $\partial_n^{(0)} = \partial_n$ であることが確かめられる。 $n = 1$ なら、任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して $\partial_1^{(c)} = \partial_1$ である。 $c \neq 0$ かつ $n \neq 1$ であれば、 $\partial_n^{(c)}$ はもはや \mathcal{A}_r 上の導分ではないが、次が示せる。

命題 4. (1) (可換性) 任意の $n, m \geq 1$, 任意の $c, c' \in \mathbb{Q}$ に対して、 $[\partial_n^{(c)}, \partial_m^{(c')}] = 0$.

(2) 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して、 $\partial_n^{(c)}(\mathcal{A}_r^0) \subset \mathcal{A}_r^0$.

さらに、以下の命題も成り立つ。 $w \in \mathcal{A}_r^1$ に対し、 \mathcal{H}_w を $\mathcal{H}_w(w') = w * w'$ なる \mathbb{Q} -線形写像とする。

命題 5. 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して、ある $w = w(n, c) \in \mathcal{A}_{1,+}^1$ が存在して、 \mathcal{A}_r^1 上で $\partial_n^{(c)} \chi_s = \chi_s \mathcal{H}_w$ が成り立つ。言い換えれば、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_r^1 & \xrightarrow{\mathcal{H}_w} & \mathcal{A}_r^1 \\ \chi_s \downarrow & & \downarrow \chi_s \\ \mathcal{A}_r^0 & \xrightarrow{\partial_n^{(c)}} & \mathcal{A}_r^0 \end{array}$$

が成立する。

命題 5 を用いると、次の MLV の一般導分関係式が証明される。

定理 6 ([11]). 任意の $n \geq 1$ と任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して、 $\partial_n^{(c)}(\mathcal{A}_r^0) \subset \ker \mathcal{L}$.

証明. 命題 5 より、ある $w \in \mathcal{A}_{1,+}^1$ が存在して \mathcal{A}_r^1 上で $\partial_n^{(c)} \chi_s = \chi_s \mathcal{H}_w$ が成り立つ。 $\chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1) = \mathcal{A}_{r,+}^0$ であるから、

$$\partial_n^{(c)}(\mathcal{A}_{r,+}^0) = \partial_n^{(c)} \chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1) = \chi_s \mathcal{H}_w(\mathcal{A}_{r,+}^1) \subset \chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1 * \mathcal{A}_{1,+}^1).$$

定理 2 より、これは $\ker \mathcal{L}$ に含まれる。□

6 巡回和公式

Hoffman-大野 [7] にて証明された MZV の巡回和公式は, 田中-若林 [16] の中で ‘ポアソン代数’ を参考に代数的に定式化された. 実はこれを MLV へ拡張することができることが最近明らかになったので, 本節で紹介する. (詳細は [14] 参照.)

n を正の整数とする. \mathcal{A}_r の $\mathcal{A}_r^{\otimes(n+1)}$ への作用 \diamond を

$$\begin{aligned} a \diamond (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) &= w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1}, \\ (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) \diamond b &= w_1 b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{n+1} \end{aligned}$$

$(a, b, w_1, \dots, w_{n+1} \in \mathcal{A}_r)$ で定義する. \mathbb{Q} -線形写像 $C_n : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r^{\otimes(n+1)}$ を

$$C_n(x) = x \otimes (x + y_1)^{\otimes(n-1)} \otimes y_1,$$

$$C_n(y_s) = -x \otimes (x + y_1)^{\otimes(n-1)} \otimes y_s + y_s \otimes (x + y_1)^{\otimes(n-1)} \otimes y_1 - y_s \otimes (x + y_1)^{\otimes(n-1)} \otimes y_s$$

および

$$C_n(ww') = C_n(w) \diamond w' + w \diamond C_n(w') \quad (w, w' \in \mathcal{A}_r)$$

で定義する. $\mathcal{M}_n : \mathcal{A}_r^{\otimes(n+1)} \rightarrow \mathcal{A}_r$ を $\mathcal{M}_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \cdots w_{n+1}$ とし, $\rho_n = \mathcal{M}_n C_n$ とする. また, $\check{\mathcal{A}}_r^1$ を, 語 1 と $z_{k_1, s_1} \cdots z_{k_l, s_l}$ (ただし, ある番号 q に対し $k_q > 1$) で生成される \mathcal{A}_r^1 の部分代数とする. このとき, 次を得る.

定理 7. 任意の整数 $n \geq 1$ に対し, $\rho_n(\check{\mathcal{A}}_r^1) \subset \ker \mathcal{L}$.

証明は Hoffman-大野 [7] と同様, ある級数の部分分数展開による. 定理 7 において $n = r = 1$ の場合が Hoffman-大野による MZV の巡回和公式である.

参考文献

- [1] T. Arakawa, M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan 56 (2004), no. 4, 967–991.
- [2] A. Connes, H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. 198 (1998), no. 1, 199–246.
- [3] P. Deligne, A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 1, 1–56.
- [4] V. G. Drinfel’d, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.
- [5] A. Goncharov, *Multiple ζ -values, Galois groups, and geometry of modular varieties*, European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 361–392, Progr. Math., 201, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [6] A. Goncharov, *Periods and mixed Tate motives*, preprint, arXiv:math.AG/0202154.
- [7] M. Hoffman, Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra 262 (2003), 332–347.
- [8] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 307–338.
- [9] M. Kaneko, *On an extension of the derivation relation for multiple zeta values*, The Conference on L-Functions, 89–94, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007).
- [10] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory 129 (2009), 755–788.
- [11] G. Kawashima, T. Tanaka, *Newton series and extended derivation relations for multiple L-values*, preprint, arXiv:math.NT/08013062.
- [12] G. Racinet, *Doubles melanges des polylogarithmes multiples aux racines de l’unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 95 (2002), 185–231.
- [13] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, MCYR5 テクニカルレポート (2009), 56–60.
- [14] T. Tanaka, *Cyclic sum formula for multiple L-values*, preprint.
- [15] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory 129 (2009), 2021–2034.
- [16] T. Tanaka, N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra 323 (2010), 766–778.
- [17] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149 (2002), no. 2, 339–369.
- [18] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.

1 はじめに

今回の講演は吉岡康太先生との共同研究 [YY] に基づきます。研究の発端は、向井茂先生が 1980 年前後に考察した、アーベル曲面上の安定層のモジュライに関するある予想 [M80] にあります。それは、半等質層とフーリエ向井変換を用いて、安定層のモジュライ空間の構造が算術的な条件の下で決定できるというものです。

半等質層というのはアーベル曲面上の半安定層であり、その分類、構成方法やコホモロジーが [M78] で調べられました。これを基に一般の安定層を構成する事を考えます。その際、semi-homogeneous presentation という概念が重要になります。我々の主定理は、曲面のピカル数が 1 の時、この種の分解の存在が安定層のチャーン指標のみを用いて判定できるというものです。更に、上で触れた向井先生の予想も肯定的に解決できます。

また安定層のフーリエ変換の記述において、算術群や整数係数 2 次形式が重要な役割を果たします。これから、安定層のモジュライと点のヒルベルトスキームとの間の双有理変換を明示的に構成する事もできます。

2 準備

2.1 向井格子

本稿に現れるスキーム、代数多様体は全て複素数体上のものとします。

X はアーベル曲面、 $\mathrm{NS}(X)$ をその Néron-Severi 群とします。 X の向井格子とは偶数次コホモロジー群の部分群 $H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} := H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$ と向井ペアリング

$$\langle (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \rangle := \int_X (x_1 \cup y_1 - x_0 \cup y_2 - x_2 \cup y_0), \quad x_i, y_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$$

の組 $(H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の事です。

X 上の連接層のなすアーベル圏を $\mathrm{Coh}(X)$ で、その有界導来圏を $\mathbf{D}(X)$ で表す事にします。 $E^\bullet \in \mathbf{D}(X)$ の向井ベクトルをその Chern 指標で $v(E^\bullet) := \mathrm{ch}(E^\bullet) = (\mathrm{rk}(E^\bullet), c_1(E^\bullet), \chi(E^\bullet)) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ と定義します。

2.2 安定層のモジュライ

定義 2.1 (Gieseker-丸山). (X, H) を非特異射影多様体 X とその上の豊富な因子類 H の組とする。 X 上の torsion free 層 E に対し $p_E(n) := \chi(E(nH)) / \mathrm{rk}(E)$ と置く。 E が H に関して安定 (resp. 半安定) とは、任意の部分層 $0 \neq F \subsetneq E$ に対し $p_F(n) < p_E(n)$ (resp. $p_F(n) \leq p_E(n)$) が $n \gg 0$ で成立する事をいう。

$M_X^H(r, \xi, a) := \{E \mid H \text{ に関して安定で } (\mathrm{rk}(E), c_1(E), c_2(E)) = (r, \xi, a)\}$ は準射影的スキームの構造をもち、半安定層の S -同値類を付け加える事で射影的スキーム $M_X^H(r, \xi, a)^{\mathrm{ss}}$ にコンパクト化されます。

X がアーベル曲面の時、上の (r, ξ, a) の替わりに向井ベクトル v を用いる方がよい場合があります。そこで以下では位相不変量が v で特徴づけられる安定層のモジュライ空間を $M_X^H(v)$ と書く事にします。

2.3 フーリエ向井変換

定義 2.2. X と Y を非特異射影多様体とする。それらの積多様体の導来圏の対象 $\mathbf{E}^\bullet \in \mathbf{D}(X \times Y)$ について、

^{*1} yanagida@math.kobe-u.ac.jp, 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{E^\bullet}: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y) \quad x \mapsto \mathbf{R}p_{Y*}(\mathbf{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} p_X^*(x)),$$

で積分関手 $\Phi_{X \rightarrow Y}^{E^\bullet}$ を定義する. ここで $p_X: X \times Y \rightarrow X$ と $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ は射影. もし $\Phi_{X \rightarrow Y}^{E^\bullet}$ が圏同値を与えるなら, それをフーリエ向井変換と呼ぶ. 本稿では FMT と略記する. E^\bullet を積分核と呼ぶ.

アーベル曲面上の FMT は Orlov の仕事により分類されていて, その積分核は半等質層の普遍族になります.

2.4 半等質層

X をアーベル曲面とします. $x \in X$ に対応する X 上の平行移動を T_x で表わします. X の dual variety を \hat{X} と書きます. また \mathbf{P} で X の Poincaré 束を表わします. これは $X \times \hat{X}$ 上の直線束でした.

定義 2.3. $E \in \text{Coh}(X)$ に対し $S(E) := \{(x, \hat{x}) \in X \times \hat{X} \mid T_x^*(E) \otimes \mathbf{P}|_{X \times \hat{x}} \cong E\}$ は $X \times \hat{X}$ の部分アーベル多様体であり, $\dim S(E) \leq 2$ である (証明は [M78, Proposition 3.3]). $\dim S(E) = 2$ となる E を半等質層と呼ぶ.

半等質ベクトル束 E は $T_x \otimes E \cong M \otimes X$, $M \in \text{Pic}^0(X)$ となるものです. “半等質” という言葉はこれに由来します. 半等質層の分類については [M78] と [Y09, §4] をご覧ください. 更に半等質層のコホモロジーや FMT の下での半等質層の振る舞いも決定できます. 詳しくは [M78], [YY, Fact 2.12, Proposition 2.14] をご覧ください.

3 Semi-homogeneous presentation

定義 3.1. アーベル曲面 X 上の接続層 $E \in \text{Coh}(X)$ の *semi-homogeneous presentation* とは短完全列

$$0 \rightarrow E \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow 0 \quad \text{又は} \quad 0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E \rightarrow 0$$

であって次の条件を満たすものの事である: $v(E_1) = \ell_1 v_1$, $v(E_2) = \ell_2 v_2$ によって正整数 ℓ_1, ℓ_2 と原始的向井ベクトル v_1, v_2 を定めた時, $(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0$, $\langle v_1, v_2 \rangle = -1$ かつ $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = 0$.

上の各表示を kernel presentation 及び cokernel presentation と呼ぶ.

条件から E_1, E_2 は半等質層で, これが名前の由来です. この様な層の分解があると, フーリエ向井変換の下での振る舞いが統制できます [YY, Proposition 3.2]. すると, 安定層 E がいつ semi-homogeneous presentation を持つかが問題になります. $\text{rank NS}(X) = 1$ の場合は, 向井ベクトルのみで存在条件が書き下せます.

定義 3.2. 向井ベクトル v に対し, 自然数 ℓ_1, ℓ_2 と正の原始的向井ベクトル v_1, v_2 であって

$$\begin{aligned} v &= \pm(\ell_2 v_2 - \ell_1 v_1), \\ (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) &= 0, \quad \langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -1, \quad \mu(v_1) < \mu(v_2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

を満たすものを考える. (3.1) を *numerical equation*, 解 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を v の *numerical solution* と呼ぶ.

次の結果が今回の研究の主結果です.

定理 3.3 ([YY, Theorem 3.6]). $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し, v を $\langle v^2 \rangle > 0$ なる向井ベクトルとする.

1. もし v に 2 つ以上 numerical solution が存在すれば, $M_X^H(v)$ の一般の元は kernel presentation と cokernel presentation を持つ. どちらの presentation も一意に決まる.
2. もし v の numerical solution が 1 つのみ存在すれば, $M_X^H(v)$ の一般の元は kernel presentation 又は cokernel presentation のどちらかを持つ. その presentation は一意に決まる.

定理の証明には, numerical solution $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ に対し半等質層 E_1, E_2 であって $v(E_i) = \ell_i v_i$ ($i = 1, 2$) なるものからなる複体 $E_1 \rightarrow E_2$ (この 2 項以外はゼロ層) のモジュライ空間 $\mathfrak{M}^+(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を構成する必要があります. このモジュライについては [YY, §4] をご覧ください.

4 semi-homogeneous presentation の応用：向井のある予想について

定理 3.3 を応用して次の定理が示せます。これは [M80, 予想 1, 予想 1'] を精密に述べたものです。

定理 4.1. X を $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ なるアーベル曲面とし, v を向井ベクトルで $\ell := \langle v^2 \rangle / 2$ が正のものとする. v の numerical solution が少なくとも 1 つ存在すると仮定する.

1. v の numerical solution $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ のうち $\text{rk}(v_i)$ が最小のものを考える. ここで $i \in \{1, 2\}$ は $\ell_i = \ell$ となるものの方とする. この時, 一般の $[E_1 \xrightarrow{f} E_2] \in \mathfrak{M}^+(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ は単射もしくは全射.
2. 1 の状況の下で, f の余核もしくは核は安定層である.
3. $M_X^H(v)$ の一般の元は 1 で考えた $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ に対応する semi-homogeneous presentation を持つ.

5 コホモロジー的フーリエ向井変換の行列表示

アーベル曲面間の FMT $\Phi: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$ から向井格子の同型 $\Phi^H: H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}} \rightarrow H^{\text{ev}}(Y, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ が引き起こされます Φ^H を今後コホモロジー的 FMT と呼びます. これを明示的に書き下してみよう.

以下 $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し, $n := (H^2)/2$ とします. $H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ は次の加群 $\text{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ と同型です:

$$\iota_X: H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}} \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_2(\mathbb{Z}, n) := \left\{ \begin{bmatrix} x & y\sqrt{n} \\ y\sqrt{n} & z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (r, dH, a) \mapsto \begin{bmatrix} r & d\sqrt{n} \\ d\sqrt{n} & a \end{bmatrix}.$$

$\text{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ 上の双線型形式 B を

$$B(X, X') := 2yy' - (xz' + zx'), \quad X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{bmatrix} \in \text{Sym}_2(\mathbb{Z}, n).$$

で定義します. すると $\langle v, v' \rangle = B(\iota_X(v), \iota_X(v'))$ であり, ι_X は格子の同型を与えます.

$\text{FM}(X) := \{Y: \text{代数多様体} \mid \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)\} / \sim$ とします. $\text{FM}(X)$ の任意の元 Y も $\text{rank NS}(Y) = 1$ を満たし, $\text{NS}(Y)$ の ample generator を \hat{H} と書くと $(\hat{H}^2) = 2n$ となります. そこで FMT $\Phi: \mathbf{D}(Y) \rightarrow \mathbf{D}(Z)$ に対し $\theta(\Phi) := \iota_Z \circ \Phi^H \circ \iota_Y^{-1}$ と定義できます. $Z \in \text{FM}(X)$ に対し

$$\mathcal{E}(Z) := \bigcup_{Y \in \text{FM}(X)} \{ \Phi_{Y \rightarrow Z}^{E[2k]} \in \text{Eq}(\mathbf{D}(Y), \mathbf{D}(Z)) \mid E \in \text{Coh}(Y \times Z), k \in \mathbb{Z} \}$$

と置きます. ι_Y, ι_Z 及び Φ^H は格子の isometry なので $\theta(\Phi) \in O(B)$ です.

定理 5.1.

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) \mid x^2, y^2, z^2, w^2, \frac{xy}{\sqrt{n}}, \frac{zw}{\sqrt{n}} \in \mathbb{Z} \right\}$$

で群 G を定める. 各 $Z \in \text{FM}(X)$ に対して次の全単射が存在する: $\theta(\mathcal{E}(Z)) \cong G / \{\pm 1\}$.

6 モジュライの双有理写像

最後に安定層のモジュライと点のヒルベルトスキームとの対応を見ます. [Y09] で一般のアーベル曲面 X について双有理写像 $M_X^H(v) \cdots \rightarrow X \times \text{Hilb}^{\langle v^2 \rangle / 2}(X)$ が存在する事が証明されていますが, ここでは主偏極アーベル曲面の場合にこの写像を明示化したいと思います.

向井ベクトル $v = (r, dH, a)$ に付随した 2 次形式を

$$Q_v(x, y) := -(rx^2 + 2xy + ay^2) = - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & d \\ d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

と定義します. 等方的向井ベクトル w は整数 p, q でもって $w = (p^2, pqH, q^2)$ と書けます. この時 v と w の向井ペアリングは用意した 2 次形式を用いて $\langle w, v \rangle = Q_v(q, -p)$ と書き直せます.

X が主偏極なら $\text{FM}(X) = \{X\}$ であることが知られています. そして先の算術群 G は $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ になります. すると古典的な 2 次不定方程式の理論が役立ちます.

定理 6.1. X を主偏極アーベル曲面だとする. $v = (r, dH, a)$ を向井ベクトルであって次を満たすものとする.

$$\ell := \langle v^2 \rangle / 2 \text{ は正であって平方数ではない. また判別式が } \ell \text{ である 2 次形式の類数は 1 である.} \quad (6.1)$$

この時双有理写像 $M_X^H(v) \cdots \rightarrow X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ は以下の様に記述できる.

1. 不定方程式 $2p_1q_1d - p_1^2a - q_1^2r = \epsilon$ ($\epsilon = \pm 1$) の解のうち $|p_1|$ が最小のものを取り, それから向井ベクトル $v_1 = (p_1^2, p_1q_1H, q_1^2)$ を作る. この時, 行列 $\gamma := \pm \begin{bmatrix} q_1 & \epsilon(dq_1 - ap_1) \\ -p_1 & \epsilon(dp_1 - rq_1) \end{bmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ は ${}^t\gamma Q_v \gamma = -\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\ell \end{bmatrix}$ をみたす.
2. $v_2 := (p_2^2, p_2q_2H, q_2^2)$ と置く. 但し $q_2 = -\epsilon(dq_1 - ap_1)$ 及び $p_2 = \epsilon(dp_1 - rq_1)$. この時 $M_X^H(v)$ の一般の元は numerical solution $(v_1, v_2, \ell, 1)$ もしくは $(v_2, v_1, 1, \ell)$ に対応する semi-homogeneous presentation を持つ. 更に $\theta(\Phi) = \gamma$ なる $\text{FMT}\Phi := \Phi_{X \rightarrow X}^E$ もしくはそれと dualizing functor との合成 $\mathcal{D}_X \circ \Phi$ が双有理写像 $M_X^H(v) \cdots \rightarrow X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ を与える.

最後に次元が 4 以上 20 以下 (i.e. $1 \leq \ell \leq 9$) のモジュライの双有理同値類について述べます. 定理 6.1 から ℓ を判別式とする 2 次形式が重要だと分かります. 以下に 2 次形式の同値類を挙げます ([YY, pp. 49]).

ℓ	Q_v	ℓ	Q_v
1	$2xy, x^2 - y^2$	6	$x^2 - 6y^2$
2	$x^2 - 2y^2$	7	$x^2 - 7y^2$
3	$x^2 - 3y^2$	8	$x^2 - 8y^2$
4	$x^2 - 4y^2$	9	$2x^2 + 2xy - 4y^2, x^2 - 9y^2$
5	$2x^2 + 2xy - 2y^2, x^2 - 5y^2$	10	$3x^2 + 2xy - 3y^2, x^2 - 10y^2$

命題 6.2 ([YY, Proposition 8.12]). 1. $\ell = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ なら $M_X^H(v)$ は $X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.

2. $\ell = 5$ なら $M_X^H(v)$ は $M_X^H(2, H, -2)$ もしくは $X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.

3. $\ell = 9$ なら $M_X^H(v)$ は $M_X^H(2, H, -4)$ か $X \times \text{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.

注意 6.3. $\ell = 10$ の時は $M_X^H(3, H, -3)$ と $X \times \text{Hilb}^{10}(X)$ が双有理同値か否か分かっていません.

参考文献

- [M78] S. Mukai, *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), no. 2, 239–272.
- [M80] 向井茂, アーベル曲面上のベクトル束の分類について, 数理解析研究所講究録 **409** (1980), 103–127.
- [YY] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, preprint, arXiv:0906.4603.
- [Y09] K. Yoshioka, *Fourier-Mukai transform on abelian surfaces*, Math. Ann. **345** (2009), no. 3, 493–524.

ある退化放物型方程式の解の正則性評価について

水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科 D3・日本学術振興会特別研究員 DC)

1. 序

次の退化放物型方程式を考える.

$$(dP) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

ここで, $\alpha > 1$ は定数であり, $f = f(t, x)$ は与えられた $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の \mathbb{R}^n 値関数とする. $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1} \nabla u)$ となることから, $u = 0$ のとき, 拡散係数 $\alpha u^{\alpha-1}$ が消える方程式となっている. このように, 拡散係数が消えることのある方程式は一般に退化した方程式と呼ぶ. なお, 熱方程式に対応する $\alpha = 1$ とした (dP) では, 拡散係数は消えない, すなわち退化しないことに注意しておく.

外力 f は xu や $u\nabla(-\Delta + 1)^{-1}u$ を想定している. ここで, $(-\Delta + 1)^{-1}u$ は u の Bessel ポテンシャル, すなわち $(-\Delta + 1)^{-1}u = \mathcal{F}^{-1}[(|\xi|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}u]$ で与えるものとする ($\mathcal{F}u$ は u の Fourier 変換, $\mathcal{F}^{-1}u$ は u の逆 Fourier 変換を表す). xu は $f \equiv 0$ に対する方程式 (dP)(この方程式は porous medium 方程式と呼ばれる) の解の前方自己相似変換がみたす方程式にあらわれる (cf. Giga-Kohn [8], Carrillo-Toscani [4]). u の係数は非有界であるばかりでなく, 可積分性すらもたないことに注意しておく. また, $u\nabla(-\Delta + 1)^{-1}u$ は Keller-Segel 方程式系にあらわれる非線形項である. $(-\Delta + 1)^{-1}u$ は非局所項なため, (dP) に対して比較原理が一般には成立しないことに注意しておく.

$\sigma = n(\alpha - 1) + 2$, $A > 0$ とおくと, Barenblatt 解

$$\mathcal{U}(t, x) := (1 + \sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}} \left(A - \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \frac{|x|^2}{(1 + \sigma t)^{\frac{2}{\sigma}}} \right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

が超関数の意味で porous medim 方程式をみたすことが知られている (cf. Vázquez [13]). ここで $(f)_+ = \max\{0, f\}$ である. Barenblatt 解の台の境界は滑らかでないため, (dP) の解も一般には滑らかにならないことがわかる. そこで, (dP) の弱解を定義する.

定義 1 (弱解, cf. Ladyženskaja-Solonnikov-Ural'ceva [9, pp.419]). $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ かつ, $u_0 \geq 0$, $f \in L^1((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ とする. u が (dP) の弱解であるとは, $T > 0$ が存在して, 次をみたすときをいう.

- i) 殆んどすべての $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ に対して $u(t, x) \geq 0$,
- ii) $u \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u^\alpha \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$,
- iii) u は (dP) を超関数の意味でみたす.

初期値 u_0 と外力 f に適当な条件をつければ, 弱解の存在が示せる (cf. Ôtani [12]). 我々の問題は, (dP) の弱解がどのような条件のもとに, 時空間一様な Hölder 連続になるかである. ここで, Hölder 連続性の定義を次で与える.

定義 2 (Hölder 連続性). $0 < \sigma \leq 1$ に対して, $u(t, x)$ が σ 次の Hölder 連続であるとは, $C > 0$ が存在して

$$|u(t, x) - u(s, y)| \leq C(|t - s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x - y|^{\sigma})$$

が任意の $(t, x), (s, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことをいう.

Hölder 連続性は微分可能性の拡張であることに注意しておく. 実際, u が 1 次の Hölder 連続のとき (このとき, u は空間変数について Lipschitz 連続であるという), u は \mathbb{R}^n 上殆んど至るところ空間変数に関して微分可能となる (Rademacher の定理, cf. Evans-Gariepy [6]). (dP) の弱解は一般に微分可能にすらならないことが Barenblatt 解からわかる. そこで, (dP) の弱解がもつ正則性を Hölder 連続性の立場から調べるのが我々の問題である.

この問題の応用として, 具体的に $n \geq 3$, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$, $f = xu - u\nabla(-\Delta + 1)^{-1}u$ とした (dP) の弱解の時空間一様な Hölder 連続性が退化 Keller-Segel 方程式系の解の漸近安定性とその収束の速さに関係があることを言及しておく (cf. Ogawa [11]).

2. 主定理

$f \equiv 0$ に対する (dP), すなわち porous medium 方程式の弱解の Hölder 連続性は Caffarelli-Friedman [3] によってはじめて証明された. 彼らの証明は, Aronson-Benilan 評価 [1]

$$\Delta u^{\alpha-1} \geq -\frac{C(n, \alpha)}{t}, \quad \partial_t u \geq -\frac{C(n, \alpha)}{t}u$$

と比較定理を本質的に用いている. しかし, $f \neq 0$ に対する (dP) の弱解に対して, Aronson-Benilan 評価と同等の評価が得られるかは, 一般にはわからない. また, 外力 f の典型例として非局所的非線形項があるように, (dP) に対して, 比較定理は一般には成立しない. それゆえ, Caffarelli-Friedman の手法を (dP) に適用するのは難しいと思われる.

他方, DiBenedetto-Friedman [5], Wiegner [14] は, $p > 2$ に対して, p -Laplace 発展方程式

$$(p\text{-L}) \quad \begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases}$$

の弱解 v の勾配が Hölder 連続になることを示した (より一般の p -Laplace 発展方程式については Misawa [10]). 彼らの証明には, 比較原理を用いていないことに注意しておく.

$n = 1$ のとき, $u = |\nabla v|^2$ とおくと, u はある porous medium 方程式の解となる. そのため, 彼らの手法は (dP) に対しても適用できると推測できる. 実際, DiBenedetto-Friedman は porous medium 方程式の解の Hölder 連続性を示した. 彼らは $f \neq 0$ に対する (dP) の解の Hölder 連続性も考察しており, $p > n$ に対し, $f \in L^\infty(0, \infty; L^p(\mathbb{R}^n))$ であれば, 解が Hölder 連続になると主張しているが, 証明は与えられていないようである. 我々は, 彼らの証明を拡張し, より広い関数空間に属する外力に対して, (dP) の解の Hölder 連続性を示すとともに, 解の Hölder 評価を得た.

主定理を述べるために, L^p 空間より広い関数空間である, 弱 L^p 空間を導入する.

定義 3 (弱 L^p 空間). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $p > 2$ に対し, $f \in L^p_w(\Omega)$ であるとは, $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ かつ

$$\|f\|_{L^p_w(\Omega)}^2 := \sup_{K \subset \Omega; \text{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{2}{p}}} \int_K |f|^2 dx < \infty$$

であるときをいう.

Hölder の不等式より $L^p(\Omega) \subset L^p_{\text{w}}(\Omega)$ となるが, さらに $L^p(\Omega) \subsetneq L^p_{\text{w}}(\Omega)$ となる. 実際 $|x|^{-\frac{n}{p}} \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ だが $|x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\text{w}}(\mathbb{R}^n)$ となる.

注意 4. 弱 L^p 空間は分布関数 $\mu_{|f|}(\lambda) := |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}|$ を用いて

$$L^p_{\text{w}}(\Omega) = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_{|f|}(\lambda)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

で定義できることが知られている. $p > 2$ のとき, 我々の定義と分布関数を用いた定義は同値となる. 実際, $c_0 > 0$ が存在して,

$$c_0 \|f\|_{L^p_{\text{w}}(\Omega)} \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_{|f|}(\lambda)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p_{\text{w}}(\Omega)}$$

が成り立つ (cf. Benilan-Brezis-Crandall [2, Appendix]).

弱 L^p 空間を用いて, 記号

$$A_p := \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r \leq 1} \|f\|_{L^\infty(0, \infty; L^p_{\text{w}}(B_r(a)))}$$

を導入する. ここで, $B_r(a)$ は, 中心 a , 半径 r の開球である. このとき, 次の定理が得られた.

定理 5. u を有界で非負な (dP) の弱解とする. 外力 f について, ある $p > n$ に対して, $A_p < \infty$ を仮定する. このとき, n, α, p にのみ依存する定数 $C, \sigma > 0$ が存在して,

$$(1) \quad |u(t, x) - u(s, y)| \leq C(\|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)} + A_p) (\|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})} |t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma)$$

が $(t, x), (s, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.

仮定 $A_p < \infty$ は, 外力 f が局所一様に弱 L^p であると言いかえることができる. 全空間で一様な Hölder 評価を求めるためには, 外力に一様な可積分性の評価が必要となる. なお, 定理の証明と同様にして, $f \in L^\infty(0, \infty; L^p_{\text{w,loc}}(\mathbb{R}^n))$ であれば, (dP) の解の局所 Hölder 連続性が示せる. ここで

$$L^p_{\text{w,loc}}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \text{任意のコンパクト集合 } K \text{ に対し } f \in L^p_{\text{w}}(K)\}$$

である.

注意 6. 熱方程式である, $\alpha = 1$ のとき, (1) はよく知られた熱方程式の解に対する Hölder 評価となっている. そのため, 評価式 (1) は熱方程式の解に対する Hölder 評価の拡張と考えることができる.

注意 7. 外力 f の可積分性について考える. 簡単のため, $f \in L^\infty(0, \infty; L^p_{\text{w}}(\mathbb{R}^n))$ とする. 今, 時間微分を無視することにより

$$-\Delta u^\alpha \cong \text{div } f$$

とみなす. さらに形式的に両辺を積分すると

$$-\nabla u^\alpha \cong f$$

となる. $f \in L^p_{\text{w}}$ かつ, $p > n$ から, u^α は Dirichlet の増大条件, すなわち, ある $\sigma > 0$ が存在して, 任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u^\alpha| dx \leq Cr^{n-1+\sigma}$$

をみます (cf. Giaquinta[7, pp.64]). 従って u^α は Hölder 連続となる. 定理 5 の証明での外力 f の処理は, 以上の形式的議論の正当化に対応している.

形式的議論の立場からみると, $p > n$ に対して, f が Morrey 空間 M^p に属する, すなわち

$$\int_{B_r(x_0)} |f| dx \leq Cr^{n(1-\frac{1}{p})}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

をみたしていれば, u^α が Hölder 連続になると推測できる. 実際に, 熱方程式である $\alpha = 1$ のときは, $\nabla u \in M^p$ となり, 解 u が Hölder 連続になることが知られている. しかし, 非線形である $\alpha > 1$ の場合に, u^α が Hölder 連続になるか否かは未解決である. さらに, $f \in M^p$ とすることは, ∇u^α の L^p 評価を導出することに対応している. しかし, 熱方程式の場合とは異なり, $f \in L^p$ であったとしても, ∇u^α の L^p 評価は $p = 2$ を除いては知られていない (少なくとも Barenblatt 解が存在することから, $p \gg n$ に対しては, $f \in L^p$ であったとしても $\nabla u^\alpha \notin L^p$ であることがわかる).

定理で得られる Hölder 次数 σ について, $\sigma \leq 1 - \frac{n}{p}$ が得られる. ここで, $1 - \frac{n}{p}$ は, 形式的議論によって得られる Hölder 連続性の次数と一致する. この $\sigma > 0$ の最良定数を求める問題は, $n \geq 2$ に対しては, $f \equiv 0$ であっても未解決である.

References

- [1] Aronson, D. G. and Bénilan, P., *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbf{R}^N* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), A103–A105.
- [2] Benilan, P., Brezis, H. and Crandall, M. G., *A semilinear equation in $L^1(\mathbf{R}^N)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) (1975) **2** 523–555.
- [3] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., *Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 361–391.
- [4] Carrillo, J. A. and Toscani, G., *Asymptotic L^1 -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 113–142.
- [5] DiBenedetto, E. and Friedman, A., *Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 1–22.
- [6] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., “Measure theory and fine properties of functions,” Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.
- [7] Giaquinta, M., “Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems,” Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1983.
- [8] Giga, Y. and Kohn, R. V., *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 297–319.
- [9] Ladyženskaja, O. A. and Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., “Linear and quasilinear equations of parabolic type,” Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, 1967.
- [10] Misawa, M., *Local Hölder regularity of gradients for evolutionary p -Laplacian systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **181** (2002) 389–405.
- [11] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Differential Integral Equations **21** (2008), 1113–1154.
- [12] Ôtani, M., *L^∞ -energy method and its applications*, in “Nonlinear partial differential equations and their applications,” GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **20**, 505–516, Gakkōtoshō, 2004.
- [13] Vázquez, J. L., “The porous medium equation,” Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, 2007.
- [14] Wiegner, M., *On C_α -regularity of the gradient of solutions of degenerate parabolic systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **145** (1986), 385–405.

E-mail address: sa5m16@math.tohoku.ac.jp

An Introduction to Evolutionary Game Theory: To Understand the Complex Phenomena

Mitsuru KIKKAWA *

* *Department of Science and Technology,
Meiji University, Kawasaki 214-8571 JAPAN
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp*

Abstract

Recently, game theory, a mathematical construct, has become essential to be understanding of complex social and biological phenomena. This article introduces game theory from an interdisciplinary perspective and investigates noncooperative game theory and evolutionary game theory. Basic elements concerning game theory are revised and open problems, important for the understanding of complex phenomena, are discussed.

1 Introduction

The basic elements of game theory¹⁾ have been constructed by the mathematicians, J.von Neumann, J.F.Nash and so on. But this theory is a static framework in its original form. If we extend this theory to a dynamic framework, we confront several mathematical problems, for example, the interpretation of a mixed strategy. In infinitely repeated games, if we interpret a mixed strategy as probability distribution, we can not easily find that there exists the infinite probability distribution's product. So we treat a mixed strategy as a random variable. (Aumann [1])

This paper formulates game theory in probability theory and introduces our research. This research presents open problems which are important to understand such complex phenomena.

2 Noncooperative Game Theory

First, we formulate the game.

2.1. Definition. A strategic game is

$$(2.1) \quad G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N}).$$

where (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ is the set of **players**, (ii) S_i is the set of **strategies/actions** available to player i . All the players' strategies are expressed by $\vec{s} = s_1, \dots, s_n$. The strategy s_i is called a **pure strategy**. (iii) f_i is a measurable function from the product set $\vec{S} = S_1 \times \dots \times S_n$ to a real number and this is represented by a player i 's **utility function**. —

This game is played as follows. Each player knows the details of the game. All the players $1, \dots, n$ choose their strategy simultaneously and independently. After the game, the player i obtains a payoff $f_i(\vec{s})$.

2.2. Assumption. $\forall i, S_i$ is a separable complete metric space. ²⁾ —

2.3. Assumption. $\forall i, f_i : \vec{S} \rightarrow \mathbb{R}$ is a bounded continuous function. —

2.4. Assumption. The player's purpose maximizes the own utility. —

2.5. Assumption. Common knowledge: All the players know the own utility function and another players' utility function. —

2.6. Definition. A mixed extension is

¹⁾Game theory is a general mathematical tool for examining the players' interaction in nature and society.

²⁾This assumption is necessary for a mixed strategy, the strategy is chosen randomly.

$$(2.2) \quad G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N}).$$

where (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ is the set of players, (ii) Q_i is all the probability distributions on S_i . q_i is a random variable and it is called a **mixed strategy**.³⁾ We assume that the random vector is $\vec{q} = q_1, \dots, q_n$. (iii) F_i is a real valued function on the product set $\vec{Q} = Q_1 \times \dots \times Q_n$. This is defined as follows:

$$(2.3) \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(\vec{s}),$$

where μ is the \vec{q} 's distribution. $F_i(\vec{q})$ is an expected payoff function of player i . The set of expected payoff functions is $\vec{F} = F_1, \dots, F_n$. —

2.7. Assumption. The random variable $q_i, i = 1, \dots, n$ is independent. —

2.8. Remark. q_1, \dots, q_n is independent (2.7. Assumption.) and each q_k 's distribution is $\mu_k \in Q_k$. (2.3) is redefined as follows:

$$(2.3') \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(s_1) \cdots \mu_n(s_n).$$

Here, \vec{Q} is all the probability measures on \vec{S} and $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2$ are the distribution on the set of mixed strategy \vec{q}^1, \vec{q}^2 . Under $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 \in \vec{Q}$, we can transform as follows:

$$\vec{\mu}_\alpha = \alpha \vec{\mu}_1 + (1 - \alpha) \vec{\mu}_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

We can define the new probability measure $\vec{\mu}_\alpha \in \vec{Q}$. We can understand that \vec{Q} is a convex set. \vec{Q} is the closed set in \vec{Q} . —

2.9. Definition. A **feasible set** U on $G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$ is defined as follows:

$$U = \{\vec{F}(\vec{q}) \mid \vec{q} \in \vec{Q}\}. \quad \text{—}$$

2.10. Remark. The feasible set U is a compact set on the separable complete metric space for the continuity of the expected payoff function \vec{F} . —

2.11. Definition. A **best response** of the player i 's strategy $q_i \in Q_i$ for another $n - 1$ players' strategy sets $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ is

$$(2.4) \quad F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i}).$$

The whole best response for player i is $B_i(q_{-i})$ for the strategy set q_{-i} . —

2.12. Definition. A **Nash equilibrium** of a strategic game n -person game G^* is a profile $\vec{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ with the property that for every player $i (= 1, \dots, n)$ we have the best response for another player's strategy set q_{-i}^* . —

2.13. Remark. The mapping is a point to set mapping from the product set $Q_1 \times \dots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \dots \times Q_n$ to set Q_i . It is called a **best response correspondence** for player i . —

$$B(q) = B_1(q_{-1}) \times \dots \times B_n(q_{-n}) \text{ for the strategy set } \vec{q}.$$

2.14. Theorem. The mixed strategy set $\vec{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ on G^* is a Nash equilibrium if and only if

$$(2.5) \quad \vec{q}^* \in B(q^*). \quad \text{—}$$

2.15. Theorem. The strategic game G^* has a Nash equilibrium. —

³⁾Formally, measurable space (Ω, S_i) (where Ω is a space, S_i is a σ -additive class in the subset of Ω), q_i is a random variable, if S_i is the domain.

2.16. Theorem. (Kakutani's fixed point theorem⁴) Let S be a nonempty, compact convex subset of the separable complete metric space and let $F(\cdot) : S \rightarrow S$ be a set-valued mapping for which

- (i) for all $x \in S$ the set $F(x)$ is a nonempty set and convex on S .
- (ii) for all sequences $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ and $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ such that

$$y_\nu \in F(x_\nu), \nu = 1, 2, \dots, x_\nu \rightarrow x_O, y_\nu \rightarrow y_O (\nu \rightarrow \infty), \text{ we have } y_O \in F(x_O).$$

Then there exists $x^* \in F(\cdot)$ such that $x^* \in F(x^*)$. —

2.17. Remark. We assume a finite set of the pure strategy. If the set of the pure strategy is infinite and the feasible set is compact, the strategic game G^* has a Nash equilibrium. —

3 Evolutionary Game Theory

In this section, we take up evolutionary game theory. There are two situations in evolutionary game theory. First, each player chooses a strategy randomly like as in the above situations. Second, a large number of players is assumed to search at random for a game, and when they meet, the terms of game are started. This situation is considered in mathematical biology.

First, we define an equilibrium concept in evolutionary game theory.

3.1. Definition. $q_i \in Q_i$ is an **evolutionarily stable strategy** (ESS) if for every strategy $q_j \neq q_i$, there exists some $\bar{\epsilon}_q \in (0, 1)$ such that the following inequality holds for all $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_q)$

$$(3.1) \quad F[q_i, \epsilon q_j + (1 - \epsilon)q_i] > F[q_j, \epsilon q_j + (1 - \epsilon)q_i]. \text{ —}$$

3.2. Proposition. (Bishop and Cannings [2]) $q_i \in Q_i$ is an evolutionarily stable strategy if and only if it meets these first-order and second-order best-replies:

$$(3.2) \quad F(q_j, q_i) \leq F(q_i, q_i), \quad \forall q_j,$$

$$(3.3) \quad F(q_j, q_i) = F(q_i, q_i) \Rightarrow F(q_j, q_j) < F(q_i, q_j), \quad \forall q_j \neq q_i. \text{ —}$$

(3.2) is a Nash equilibrium condition, (3.3) is an asymptotically stable condition.

Thus, ESS expresses the stable state in the system. Next, we formulate the dynamical process. We assume as follows:

3.3. Definition. Let $\pi : \vec{q} \rightarrow \mathbb{R}$. Then the system

$$(3.4) \quad \dot{\vec{q}} = \pi(\vec{q}),$$

is a **selection dynamics** if it satisfies, for all $q_i \in Q_i$

(3.5) (i) π is Lipschitz continuous.

$$(3.6) \quad \text{(ii) } \sum_{i=1}^n \pi_i(\vec{q}) = 0.$$

(3.7) (iii) $\forall q_i \in Q_i, q_i = 0 \Rightarrow \pi(\vec{q}) \geq 0$. —

3.4. Definition. π yields a **regular** selection dynamic if (3.5)–(3.7) holds; then the following limits exist and are finite:

$$(3.8) \quad \frac{\pi}{0} \equiv \lim_{q_i \rightarrow 0} \frac{\pi}{q_i}. \text{ —}$$

3.5. Definition. π_i is **monotonic** if, for $i, i' \in N$

⁴In the original paper, Kakutani [3], examines this theorem on \mathbb{R}^l . In this paper, we examine this property on the more general, separable complete metric space.

$$(3.9) \quad F(q_i, q_{-i}) \geq F(q_{i'}, q_{-i'}) \Rightarrow \frac{\pi_i(\vec{q})}{q_i} \geq \frac{\pi_{i'}(\vec{q}')}{q_{i'}}. \text{ ---}$$

This property shows that a higher payoff is a higher increment in this selection dynamics.

3.6. Definition. If the selection dynamics is monotonic, we can derive the following equation. The selection dynamics π is a **replicator equation**⁵⁾, if

$$(3.10) \quad \frac{\pi_i(\vec{q})}{q_i} = F(q_i, q_{-i}) - \sum_{k=1}^n q_k F(q_k, q_{-k}). \text{ ---}$$

3.7. Theorem. (Picard-Lindelöf theorem) If $X \subset \mathbb{R}^k$ is open and the vector field $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ Lipschitz continuous, then the system (3.4) has a unique solution $\xi(\cdot, x^O) : T \rightarrow X$ through every state $x^O \in X$. Moreover $\xi(t, x^O)$ is continuous in $t \in T$ and $x^O \in X$. ---

This theorem implies that the existence of the (local) solution and uniqueness in the replicator equation.

3.8. Example. A replicator equation in two strategies, symmetric two person⁶⁾ game is as follows:

$$(3.11) \quad \dot{x} = x(1-x)\{ax - b(1-x)\},$$

where x is the probability of choosing strategy 1 for each player.

1 \ 2	Strategy 1	Strategy 2
Strategy 1	a, a	$0, 0$
Strategy 2	$0, 0$	b, b

Payoff matrix 1 (Symmetric two person game)

The Nash equilibrium in this game depends on the signs of the payoff: a, b . ---

4 Open Problems and Concluding Remarks

This article formulates noncooperative game theory and evolutionary game theory rigorously. There is a lot of research for explaining complex social and biological phenomena with game theory however, these are applied game theory and do not explain theoretical mathematics at all. We can understand open problems of game theory through the research in this paper. For example, i) infinite strategy spaces, ii) without common knowledge (2.5. Assumption.), iii) extend a replicator equation, as a partial differential equation or stochastic differential equation. iv) statistical mechanics, many games are played simultaneously, and so on.

References

- [1] Aumann, R.J.: *Lecture on Game Theory* (Westview Pr, 1989).
- [2] Bishop, D.T. and Cannings, C.: *Adv. Appl. Prob.* **8**(1976), 616.
- [3] Kakutani, S.: *Duke Math. J.* **8**(1941), 457.
- [4] Kikkawa, M.: *Dept. Math, Hokkaido Univ. Technical Report* **126**(2008), 173. (In Japanese)
- [5] Kono, N.: *Rokko Lectures in Mathematics* **13**(2003). (In Japanese)
- [6] Osborne, M.J. and Rubinstein, A.: *Course in Game Theory* (MIT Press, 1994).

⁵⁾This equation means that if the player's payoff from the outcome i is greater than the expected utility $x \cdot Ax$, then the probability of the strategy i is higher than before.

⁶⁾If the payoff matrix $A = A^T$, this game is called a **symmetric two person game**. If the payoff matrix $A \neq A^T$, this game is called an **asymmetric two person game**.

On a relation between canonical basis and Enyang's basis of B-M-W algebra

沖中智史 (名大多元数理)

Birman-Murakami-Wenzl 代数は, 結び目の不変量の研究において Birman-Wenzl [1], Murakami [2] により発見された代数です. この代数を B_n で表すとき, その元は生成元 T_i ($1 \leq i < n$) と Kauffman 関係式 $(q - q^{-1})(1 - E_i) = T_i - T_i^{-1}$ により定まる元 E_i ($1 \leq i < n$) とを用いて構成でき, その他に次の関係式を満たします.

定義 1. $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, r^{\pm 1}, (q - q^{-1})^{-1}]$ とする. このとき, B_n は T_i ($1 \leq i < n$) により生成され, 次の関係式を満たす結合的 R -代数である.

$$\begin{aligned} (T_i - q)(T_i - r^{-1})(T_i + q^{-1}) &= 0 \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \\ T_i T_j &= T_j T_i, \quad \text{if } |i - j| \geq 2 \\ E_{i+1} T_i^{\pm 1} E_{i+1} &= r^{\pm 1} E_{i+1} \\ E_{i-1} T_i^{\pm 1} E_{i-1} &= r^{\pm 1} E_{i-1} \\ E_i T_i &= T_i E_i = r^{-1} E_i \end{aligned}$$

この代数は量子群の表限論と関係しています. それは, B, C, D 型の量子群 U とそのベクトル表現 V を考えた際に, 適当な整数 k に対してパラメータを $r = q^k$ と設定すれば, $\text{End}_U(V^{\otimes n})$ の構造は Birman-Murakami-Wenzl 代数の商として実現できることが知られており, この事実と半単純な条件下での Jones basic construction とを用いて, [3] においてこの代数の指標が決定されたり, [4] において, 半単純な場合における対称群や岩堀-Hecke 代数の orthogonal 表現の類似が提示されたり, [5] において, 作用素環論における新しい部分因子環の構成に応用されたりしてきました.

また, この代数は岩堀-Hecke 代数とも密接な関連を持ちます. それは, $E_1 E_3 \cdots E_{2f-1}$ により生成される B_n のイデアルを B^f と表すとき, フィルトレーション

$$0 = B^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \subset \cdots \subset B^1 \subset B^0 = B_n$$

の各商には, サイズの異なる岩堀-Hecke 代数を埋め込んでいくことができ, このことを利用して, 岩堀-Hecke 代数において成立する cellular 代数の構造などが, Birman-Murakami-Wenzl 代数に対しても拡張されるというものです. このアプローチでは Enyang [6], [7] により, Birman-Murakami-Wenzl 代数に対する 2 種類の基底が得

られており、さらに最近 Rui-Si [8] によって、[7] で構成された Jucys-Murphy 基底から作られる直交基底を利用した Gram 行列式の計算と、それに基づいた Birman-Murakami-Wenzl 代数の半単純性の必要十分条件が得られています。

一方それ以前に、Fishel-Grojnowski [9] により、tangle と呼ばれる図式を使うアプローチによって、岩堀-Hecke 代数における Kazhdan-Lusztig 基底を Birman-Murakami-Wenzl 代数に対して拡張した結果が提示されていました。この基底が Birman-Murakami-Wenzl 代数に cellular 代数としての構造を定義することは Xi [10] により示されたのですが、この基底の具体的な表示がどの様に組み立てられるかについては、アルゴリズムが与えられていません。

[9] における流れを述べると、まず n -Brauer 図形全体の集合 B_n より定まる Birman-Murakami-Wenzl 代数 B_n の自然な (natural) 基底というものが、標準的な n -Brauer 図形における各交差の解消を

$$\top : \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

で定めることにより得ることができます。(この基底の Brauer 代数の場合の生成元による表示は、[11, p.197] を参照.)

そして、岩堀-Hecke 代数の場合と両立しているような involution $\bar{\cdot} : B_n \rightarrow B_n$ を、 B_n の各元に対して

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \text{and} \quad q \mapsto q^{-1}, \quad r \mapsto r^{-1}$$

の操作を行うものとして定義し、その involution の下での Kazhdan-Lusztig (canonical) 基底を、involution に関する性質を観察することにより定義しました。

命題 1. 上記の involution に対して、次の性質を満たす基底 $\{C_d \mid d \in B_n\}$ が一意的に存在する。ただし、 $l(d)$ は $d \in B_n$ に含まれる交差の数を表すものとする。

- $\overline{C_d} = C_d$
- $C_d = T_d + \sum_{d': l(d') < l(d)} P_{d'd} T_{d'}$, ただし、 $P_{d'd} \in q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]$, $d' \in B_n$

手計算により得られた基底は [12] に一部掲載されており、[13] の類似を動機として、[7] で与えられた 2 種類の *up-down tableaux* でパラメトライズされる Enyang の Jucys-Murphy 基底と、Brauer 図形でパラメトライズされるこの canonical 基底との間には、2 つの *up-down tableaux* を上手くつなぎ合わせて、双方のパラメータ同士を [14, p.60] における Robinson-Shensted 対応で対応づけ、[7, p.323] において定義された *up-down tableaux* の順序を利用して大小順に並べてやることにより、 B_3 の場合に次のページで表示される様な三角行列が得られることが分かります。(ただし、各基底の元は Brauer 図形を使ったラベルのみで表示.)

同様の現象は B_4 の場合にも起こっており、 n が一般の場合にもこの現象が起こることが予想されます。

B_3 における canonical 基底から Jucys-Murphy 基底への変換行列

$can \setminus JM$	E_1	$E_1E_2T_1$	$T_1E_2E_1$	E_1E_2	E_2E_1	$T_1E_2T_1$	E_2T_1	T_1E_2	E_2	$T_1T_2T_1$	T_1	T_1T_2	T_2T_1	T_2	1
E_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$E_1E_2T_1$	$-q^{-1}$	q^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_1E_2E_1$	$-q^{-1}$	0	q^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_1E_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2E_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_1E_2T_1$	q^{-2}	$-q^{-2}$	$-q^{-2}$	0	0	q^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2T_1	0	0	0	0	$-q^{-1}$	0	q^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0
T_1E_2	0	0	0	0	0	0	q^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$T_1T_2T_1$	$-q^{-1}$	0	0	0	0	$-q^{-3}$	0	0	q^{-3}	0	0	0	0	0	0
T_1	$-q^{-1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	q^{-1}	0	0	0	0	0
T_1T_2	0	$-q^{-2}$	0	q^{-2}	0	0	$-q^{-2}$	0	0	q^{-2}	q^{-1}	0	0	0	0
T_2T_1	0	0	$-q^{-2}$	0	q^{-2}	0	$-q^{-2}$	0	0	0	0	q^{-1}	0	0	0
T_2	0	0	0	0	0	0	0	*	$-q^{-3}$	q^{-3}	q^{-2}	q^{-1}	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

where * = $-q^{-1} - q^{-2}r^{-1} + r^{-1}$

参考文献

- [1] J. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1) (1989), 249-273.
- [2] J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math. **26** (4) (1987), 745-758.
- [3] T. Halverson and A. Ram, *Characters of Algebras Containing a Jones Basic Construction: The Temperley-Lieb, Okada, Brauer, and Birman-Wenzl Algebras*, Adv. in Math. **116** (1995), 263-321.
- [4] R. Leduc and A. Ram, *A ribbon Hopf algebra approach to the irreducible representations of centralizer algebras: the Brauer, Birman-Wenzl, and type A Iwahori-Hecke algebras*, Adv. in Math. **125** (1997), 1-94.
- [5] H. Wenzl, *Quantum Groups and Subfactors of Type B, C, and D*, Commun.Math.Phys. **133** (1990), 383-432.
- [6] J. Enyang, *Cellular bases for the Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebras*, J. Algebra **281** (2004), 413-449.
- [7] J. Enyang, *Specht modules and semisimplicity for Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebras*, J. Alg. Comb. **26** (2007), 291-341.
- [8] H. Rui and M. Si, *Gram determinants and semisimplicity criteria for Birman-Wenzl algebras*, J. reine angew. Math. **631** (2009), 153-179.
- [9] S. Fishel and I. Grojnowski, *Canonical bases for the Brauer centralizer algebra*, Math. Res. Lett. **2**(1) (1995), 15-26.
- [10] C. Xi, *On the quasi-heredity of the Birman-Wenzl algebra*, Adv. Math. **154**(2) (2000), 280-298.
- [11] R. Dipper, S. Doty, and J. Hu, *Brauer Algebras, Symplectic Schur Algebras and Schur-Weyl Duality*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (1) (2008), 189-213.
- [12] S. Okinaka, *On a relation between canonical bases and Enyang's bases of B-M-W algebras*, 表現論シンポジウム 2009 年度講演集.
- [13] M. Geck, *Kazhdan-Lusztig cells and the Murphy basis*, Proc. London Math. Soc. **93** (3) (2006), 635-665.
- [14] S. Sundaram, *On the Combinatorics of Representations of $Sp(2n, \mathbf{C})$* , Ph. D. Thesis, M. I. T. (1986).

SPHERICAL CR STRUCTURES ON BRIESKORN MANIFOLDS

OMOLOLA ODEBIYI

INTRODUCTION

Brieskorn manifold $M(p, q, r)$ is a smooth, compact 3-dimensional manifold obtained by the intersection

$$S^5 \cap \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0\}.$$

where p, q, r are integers ≥ 2 . This is a typical 3-dimensional Seifert manifold.

Gromov-Lawson-Thurston[3] showed the existence of conformally flat structure on $M(p, q, r)$. This result was also shown independently by Kapovich[5] and Kuiper[6]. In this talk we are interested in the case of spherical CR structure. We showed that every $M(p, q, r)$ admits spherical CR structure.

Using Milnor's classification of $M(p, q, r)$ we proved

Theorem A. *$M(p, q, r)$ admits a Spherical CR structure which has the "form" $\Gamma \backslash S^3 - L(\Gamma)$, where the holonomy group $\Gamma \subset \text{PU}(2, 1)$ satisfies that:*

- $L(\Gamma) = \emptyset \iff \kappa > 0$
- $L(\Gamma) = \{\infty\} \iff \kappa = 0$
- $L(\Gamma) = S^1 \iff \kappa < 0$

By comparing the result of Goldman-Kapovich- Leeb[2] with Milnor's [7], we also show that:

Theorem B. *When $p = q = r$ for $p, q, r > 3$, the difference $|\tau(\rho)/2| = e(M(p, q, r)) - \chi(\Sigma)$ is $m^2 - 4m$ such that $|\tau| = 2m^2 - 8m$ is an even integer with $g \geq 2$ satisfying*

$$2 - 2g \leq \tau \leq 2g - 2.$$

Date: December 22, 2009.

1. PRELIMINARIES

1.1. Spherical CR structure.

Definition 1. *Spherical CR manifold is a smooth manifold M^{2n+1} modelled on S^{2n+1} whose coordinate changes lie in $\text{PU}(n+1, 1)$.*

The group $\text{PU}(n+1, 1)$ is called the unitary Lorentz group which is the group of isometries of the complex hyperbolic space $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}$. It acts on $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ as complex isometry and extends as Cauchy-Riemann transformation on the boundary sphere S^{2n+1} .

Therefore, the pair $(\text{PU}(n+1, 1), S^{2n+1})$ is called spherical Cauchy-Riemann geometry.

Definition 2. *Suppose a manifold M^{2n+1} admits a spherical CR structure there exist a developing pair*

$$(\rho, \text{dev}) : (\Pi_1(M) = \Pi, \tilde{M}) \longrightarrow (\text{PU}(n+1, 1), S^{2n+1}).$$

such that $\text{dev} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \text{dev} \quad (\forall \gamma \in \Pi)$. Where ρ is holonomy homomorphism and dev is the developing map.

Proposition 1. *Suppose M admits a transitive CR group then the developing map is a covering onto its image which is a homogeneous domain.*

Let Γ be a subgroup of $\text{PU}(n+1, 1)$. If we consider the boundary S^{2n+1} of $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ and the action of Γ on S^{2n+1} , there is a limit set $L(\Gamma)$ for which Γ acts properly discontinuously on the domain $S^{2n+1} - L(\Gamma)$.

Definition 3. *Let Γ be a subgroup of $\text{PU}(n+1, 1)$. The limit set $L(\Gamma)$ is defined to be the set of cluster points of the orbits $\Gamma \cdot p$ in S^{2n+1} ($p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}$).*

$$\overline{\Gamma \cdot p} \cap S^{2n+1}.$$

1.2. Milnor's classification of $M(p, q, r)$. Let G be a simply connected 3-dimensional Lie group and Π a discrete subgroup of G . Milnor has shown that $M(p, q, r)$ is diffeomorphic to $\Pi \backslash G$. According to the rational number $\kappa = p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1$, G is as follows:

- (1) $\kappa > 0$, $G = \text{SU}(2)$ and Π is a finite subgroup.
- (2) $\kappa = 0$, $G = \mathcal{N}$, the Heisenberg Lie group and Π is a discrete uniform subgroup.
- (3) $\kappa < 0$, $G = \widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$, the universal covering of $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ and Π is a cocompact subgroup.

By using the above classification we showed that $M(p, q, r)$ admits a spherical CR structure in Theorem A . This Spherical CR-structure

on $M(p, q, r)$ is homogeneous so that dev is a diffeomorphism for $\kappa > 0$, $\kappa = 0$ and an infinite cyclic covering map for $\kappa < 0$.

2. NON HOMOGENEOUS SPHERICAL CR STRUCTURE

When $\kappa < 0$, we would like to show that there exist a spherical CR structure on $M(p, q, r)$ such that the image of developing map is not homogeneous. Comparing with Theorem A, when $\kappa < 0$, if the developing image is non homogeneous and $L(\Gamma)$ is not a geometric circle but still connected then $L(\Gamma)$ might be a non rectifiable curve (Topological circle).

We state the results of Goldman-Kapovich-lee[2] and Milnor [7] below

Theorem 1. *For every genus $g \geq 2$ and every even integer τ satisfying*

$$2 - 2g \leq \tau \leq 2g - 2$$

there exists a convex-cocompact discrete and faithful representation $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{PU}(2, 1)$, ($\rho(\pi) = \Gamma$) with $\tau(\rho) = \tau$. Furthermore, the complex hyperbolic surface $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/\Gamma$ is diffeomorphic to the total space of an oriented \mathbb{R}^2 -bundle ξ over Σ with the Euler number

$$e(\xi) = \chi(\Sigma) + |\tau(\rho)/2|$$

Corollary 1. *The manifold $S^3 - L(\Gamma)/\Gamma$ is diffeomorphic to the total space of an S^1 - bundle over the surface Σ which has the same Euler number as the \mathbb{R}^2 fibration of $M = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2/\Gamma$.*

Theorem 2. *If the least common multiples of $(p, q), (p, r)$ and of (q, r) are all equal*

$$m = \text{l.c.m}(p, q) = \text{l.c.m}(p, r) = \text{l.c.m}(q, r),$$

then the Brieskorn manifold $M(p, q, r)$ fibers as a smooth circle bundle with chern number $-pqr/m^2$ over a Riemann surface of Euler characteristic $pqr(p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1)/m$.

From the above results we see that we have two S^1 bundles. Two S^1 bundles are equivalent if and only if their Euler numbers are equal. Hence we would like to show that $e(M(p, q, r)) = e(S^3 - L(\Gamma)/\Gamma)$ if we take same Σ . We prove the following lemma

Lemma 1. *When $\kappa < 0$, $M(p, q, r)$ is a nontrivial circle bundle over an oriented closed surface. By the result of Goldman-kapovich-Leeb there is a faithful representation of $\pi_1(\Sigma) = \Gamma$ into $\text{PU}(2, 1)$ whose limit set $L(\Gamma)$ is a topological (non-rectifiable) circle. Moreover $S^3 - L(\Gamma)/\Gamma$ is a nontrivial circle bundle over Σ and is diffeomorphic to $M(p, q, r)$.*

The proof of Theorem B becomes clear after proving the above lemma.

REFERENCES

- [1] S.S. Chen and L. Greenberg, *Hyperbolic Spaces, Contribution to Analysis (A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers, eds. L. Ahlfors and others)*, Academic Press, New York and London, 49–87, 1974.
- [2] W. Goldman, M. Kapovich, and B. Leeb, *Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface*, *Communications in Analysis and Geometry*, vol. 9 (1), 61–95, 2001.
- [3] M. Gromov, H.B Lawson, and W. Thurston, *Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds*, *Institut Des Hautes Etudes Scientifiques*, No 68, 27-45, 1988.
- [4] Y. kamishima, *Conformally flat manifolds whose developing maps are not surjective*, *Trans. A. M. S.* vol. 294, 367–378, 1986.
- [5] M. Kapovich, *Flat conformal structures on 3-manifolds, I: uniformization of closed Seifert manifolds*, *Journal of Differential geometry* vol 38, 191-215, 1993.
- [6] N.H Kuiper, *Hyperbolic 4-manifolds and Tessalations*, *Institut Des Hautes Etudes Scientifiques* No 68, 47-76, 1988.
- [7] J. Milnor, *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$* , *Ann. of Math. Studies*, No. 84, Princeton, 175–225, 1985.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY, MINAMI-OHSAWA 1-1, HACHIOJI, TOKYO 192-0397, JAPAN

E-mail address: akinyemi-omolola@ed.tmu.ac.jp

半導体中の電子流を記述する Quantum Hydrodynamic モデルの緩和極限と古典極限

重田 尚孝 (東京工業大学 情報理工学研究科)
西畑 伸也 (東京工業大学 情報理工学研究科)

1 イントロダクション

半導体デバイスの極微小化やダブル・ゲート等の新しい MOS 構造の開発に伴い、半導体中の電子流の解析には量子効果が無視出来なくなっている。本講演では、量子効果を考慮した半導体のモデルである quantum hydrodynamic (QHD) モデル (1) と quantum drift diffusion (QDD) モデル (5) の解析を行う。具体的結果としては

- スケール・プランク定数 ε を 0 とする極限 (古典極限) により, QDD モデルの解が drift-diffusion (DD) モデル (6) の解に収束すること
- 緩和時間 τ を 0 とする極限 (緩和極限) により, QHD モデルの解が quantum drift-diffusion (QDD) モデル (5) の解に収束すること

を示す。QHD モデルは次の系で与えられる。

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (1a)$$

$$\tau j_t + \left\{ \tau \frac{j^2}{\rho} + p(\rho) \right\}_x - \varepsilon^2 \rho \left(\frac{(\sqrt{\rho})_{xx}}{\sqrt{\rho}} \right)_x = \rho \phi_x - j, \quad (1b)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (1c)$$

ここで, ρ, j, ϕ は, それぞれ電子密度, 電流密度, 電位を表す未知関数である。 $p(\rho) = K\rho$ (K は正定数) は圧力を表す関数, $D(x) \in H^1(0, 1)$ は半導体の不純物 (正イオン) の分布を表す正の既知関数である。 τ と ε はともに正定数であり, それぞれ緩和時間とスケール・プランク定数を表す。(1b) の左辺第 3 項が量子効果を表す項である。

半導体デバイスは微小なため, 有界領域 $\Omega := (0, 1)$ 上で方程式系 (1) の初期値境界値問題を考察する。

$$j(0, x) = j_0(x), \quad (2a)$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad (2b)$$

$$\rho(t, 0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t, 1) = \rho_r > 0, \quad \phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = \phi_r \geq 0, \quad (2c)$$

$$(\sqrt{\rho})_{xx}(t, 0) = (\sqrt{\rho})_{xx}(t, 1) = 0. \quad (2d)$$

ここで, ρ_l, ρ_r, ϕ_r は与えられた定数である。初期値に対しては両立条件

$$\rho_0(0) = \rho_l, \rho_0(1) = \rho_r, (\sqrt{\rho_0})_{xx}(0) = (\sqrt{\rho_0})_{xx}(1) = 0, j_{0x}(0) = j_{0x}(1) = 0 \quad (3)$$

を仮定し，密度の正值性と亜音速条件

$$\inf_{x \in \Omega} \rho > 0, \quad \inf_{x \in \Omega} (K - \tau j^2 / \rho^2) > 0 \quad (4)$$

を満たす QHD の古典解を構成する．

一方，方程式系 (1) で形式的に $\tau = 0$ とすると，QDD モデル (5) が得られる．

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (5a)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D, \quad (5b)$$

$$j := -K\rho_x + \varepsilon^2 \rho \left(\frac{(\sqrt{\rho})_{xx}}{\sqrt{\rho}} \right)_x + \rho\phi_x. \quad (5c)$$

QDD モデル (5) に対する初期値及び境界値は，(2b)-(2d) で与える．

2 QDD モデルの古典極限について

さらに，方程式系 (5) で形式的に $\tau = 0$ とすると，DD モデル (6) が得られる．

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (6a)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D, \quad (6b)$$

$$j := -K\rho_x + \rho\phi_x. \quad (6c)$$

DD モデル (6) に対する初期値及び境界値は，(2b), (2c) で与える．DD モデルの時間大域解の一意的存在と定常解の漸近安定性は西畑-鈴木 [3] により証明されている．この結果は，DD モデルが放物-楕円型連立系であることから，大きな初期摂動に対して成立している．QDD モデルと DD モデルの関係を考慮すると， $\varepsilon \ll 1$ のとき大きな初期値に対する QDD モデルの時間大域解が一意的に存在し，解は定常解に漸近収束することが予想される．この予想は次の定理で肯定的に解決される．

定理 1 ([1]) 初期値 $\rho_0 \in H^2(\Omega)$ は密度の正值性と両立条件 $\rho(0) = \rho_l$, $\rho(1) = \rho_r$ を満たすとする．このとき，ある正定数 δ_0 が存在して， $|\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| + \varepsilon \leq \delta_0$ ならば，密度の正值性を満たす (2b)-(2d), (5) の時間大域解 $(\rho - \tilde{\rho}, \phi - \tilde{\phi}) \in \mathfrak{X}(0, \infty) \times C([0, \infty); H^4(\Omega))$ が，一意的に存在する．ここで， $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$ は QDD の定常解とする．さらに，解は指数関数的に定常解に収束し，評価式

$$\|(\rho - \tilde{\rho})(t)\|_1 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_3 + \|(\varepsilon \partial_x^2 \{\rho - \tilde{\rho}\}, \varepsilon \partial_x^4 \{\phi - \tilde{\phi}\})(t)\| \leq C e^{-\alpha t}$$

が成立する．ここで， C, α は t, ε に依らない正定数である．

さらに $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき，QDD の解が DD の解に収束することを示し，古典極限を数学的に正当化することができた．

定理 2 ([1]) 定理 1 と同じ仮定をする. $(\rho^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ を定理 1 で構成された QDD の解, (ρ^0, ϕ^0) を西畑-鈴木 [3] で構成された DD の解とする. このとき, $\phi^\varepsilon - \phi^0 \in C([0, \infty); H^4(\Omega))$ であり, さらに ε と t に依らない正定数 C, β が存在して,

$$\|(\rho^\varepsilon - \rho^0)(t)\|_1 + \|(\phi^\varepsilon - \phi^0)(t)\|_3 + \|(\varepsilon \partial_x^2 \{\rho^\varepsilon - \rho^0\}, \varepsilon \partial_x^4 \{\phi^\varepsilon - \phi^0\})(t)\| \leq C\varepsilon^\beta$$

が成立する.

3 QHD モデルの緩和極限について

定理 1 で, QDD モデルは大きな初期値に対して時間大域解が存在し, 漸近挙動が定常解で与えられることを示した. 一方, QHD モデルでは, 定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\phi})$ の十分近傍の初期値に対してのみ, 時間大域解が構成され, 定常解の漸近安定性が証明されていた ([2]). 従って, 両モデルの関係を考慮すると, 緩和時間 τ を十分小さくとるならば, 大きな初期値に対して QHD モデルの時間大域解が存在することが予想される. 実際, 次の定理が成立する.

定理 3 初期値 $(\rho_0, j_0) \in H^4(\Omega) \times H^3(\Omega)$ は (3) と (4) を満たすとする. このとき, ある正定数 δ_1 が存在して, $|\rho_l - \rho_r| + \phi_r + \varepsilon + \tau \leq \delta_1$ ならば, (4) を満たす (1), (2) の時間大域解 $(\rho - \tilde{\rho}, j - \tilde{j}, \phi - \tilde{\phi}) \in X_4(0, \infty) \times X_3(0, \infty) \times X_4(0, \infty)$ が一意的に存在し, 指数関数的な速さで定常解に収束する:

$$\begin{aligned} & \|(\rho - \tilde{\rho})(t)\|_2 + \|(j - \tilde{j})(t)\|_1 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_4 \\ & + \|(\varepsilon \partial_x^3 \{\rho - \tilde{\rho}\}, \varepsilon^2 \partial_x^4 \{\rho - \tilde{\rho}\}, \sqrt{\tau} \partial_x^2 \{j - \tilde{j}\}, \sqrt{\tau} \varepsilon \partial_x^3 \{j - \tilde{j}\})(t)\| \leq C e^{-\bar{\alpha} t}. \end{aligned}$$

ここで, $C, \bar{\alpha}$ は t, ε と τ には依らない正定数である.

さらに, $\tau \rightarrow 0$ のとき, QHD モデルの時間大域解が QDD モデルの大域解に収束することを示した.

定理 4 定理 3 と同じ仮定の下, $(\rho^\tau, j^\tau, \phi^\tau)$ を定理 3 で構成された QHD モデルの解, (ρ^0, j^0, ϕ^0) を QDD モデルの解とする. このとき, t, ε と τ には依らない正定数 $C, \bar{\beta}$ が存在して, 次の評価が任意の時刻 $t \in (0, \infty)$ で成立する.

$$\begin{aligned} & \|(\rho^\tau - \rho^0)(t)\|_1^2 + \|(\phi^\tau - \phi^0)(t)\|_3^2 \leq C\tau^{\bar{\beta}}, \\ & \|(j^\tau - j^0)(t)\|^2 \leq \|(j^\tau - j^0)(0)\|^2 e^{-t/\tau} + C\tau^{\bar{\beta}}, \quad (7) \\ & \|(\partial_x^2 \{\rho^\tau - \rho^0\}, \varepsilon \partial_x^3 \{\rho^\tau - \rho^0\}, \varepsilon^2 \partial_x^4 \{\rho^\tau - \rho^0\}, \partial_x \{j^\tau - j^0\})(t)\|^2 \leq C\tau^{\bar{\beta}}(t^{-1} + 1). \end{aligned}$$

注意 1 QDD モデルの初期値は密度 $\rho_0(x)$ のみで, 初期時刻での電流値 $j^0(0, x)$ は方程式 (5c) より定まる. 一方, QHD モデルの初期時刻での電流値 $j^\tau(0, x)$ は初期値 $j_0(x)$ で与えられる為, 一般的には両モデルの初期電流の差から初期層が生じる. 不等式 (7) の右辺第一項は, $t \rightarrow \infty$ または $\tau \rightarrow 0$ で初期層が指数関数的に減衰することを意味している.

注意 2 本稿で紹介した全ての定理 (定理 1 から定理 4) は, 緩和時間 τ やスケール・プランク定数 ε が十分小さいならば, 任意に大きな初期値に対して成立している.

記号 非負の整数 $k \geq 0$ に対して, $H^k(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ の意味で k 階の Sobolev 空間を表し, そのノルムを $\|\cdot\|_k$ と書く. $H^0 = L^2$ であり, このノルムは $\|\cdot\| := \|\cdot\|_0$ とする. また非負の整数 $k, l \geq 0$ に対して, $C^k([0, \infty); H^l(\Omega))$ は $H^l(\Omega)$ に値をとり, $[0, \infty)$ 上において k 階連続微分可能な関数空間を表す. $H^k(0, \infty; H^l(\Omega))$ は $H^l(\Omega)$ に値をとり, $[0, \infty)$ 上 $k - 1$ 階連続微分可能で, k 階までの導関数が L^2 可積分な関数空間を表す. 最後に関数空間 $X_i(0, \infty)$ と $\mathfrak{X}([0, \infty))$ を,

$$X_i(0, \infty) := \bigcap_{k=0}^{[i/2]} C^k([0, \infty); H^{i-2k}(\Omega)),$$

$$\mathfrak{X}(0, \infty) := C([0, \infty); H^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^4(\Omega)) \cap H^1(0, \infty; L^2(\Omega))$$

と定める. ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

参考文献

- [1] S. NISHIBATA, N. SHIGETA AND M. SUZUKI, Asymptotic behaviors and classical limits of solutions for a quantum drift-diffusion model, to appear in *Math. Models Methods Appl. Sci.*.
- [2] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Initial boundary value problems for a quantum hydrodynamic model of semiconductors: asymptotic behaviors and classical limits, *J. Differ. Equ.*, **244** (2008), 836-874.
- [3] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Relaxation limit of a time global solution to a hydrodynamic model of semiconductors, to appear.

ローレンツ系の非双曲構造に関する不安定周期軌道解析に関する数値的研究*

齊木 吉隆

京都大学数理解析研究所

Email: saiki@kurims.kyoto-u.ac.jp

キーワード：非双曲力学系, (不) 安定多様体, 接構造, (不) 安定周期軌道, 共変リアプノフ解析

概要

力学系の非双曲構造はさまざまな系に見出されるものの、理解は十分に進んでいない。本研究では、共変リアプノフ解析を用いてローレンツ系の”安定多様体と不安定多様体のなす角度”をカオストラクタ、周期軌道上で計測し、パラメタ変化に伴う接構造の発生と周期軌道の関連を議論する。

1 はじめに

カオストラクタには、一般に無数の不安定周期軌道(UPO(unstable periodic orbit))が埋め込まれていることが知られている。また、カオス力学系の不安定周期解は、カオスの重要な特徴である不安定性と回帰性を持ち合わせた解である。そのため、周期軌道はカオス解析において重要な役割を果たし得ることは想像に難くない。ただ、不安定周期軌道は、その不安定性故に、実際に数値的な検出を行なうことに困難を伴うため、これまでに多くの研究がなされているわけではない。本報告では、力学系理論ならびに現象解析の双方で精力的に研究されている非双曲構造を、系に埋め込まれた周期軌道を用いて解析する。特に、ローレンツ系の非双曲構造(安定多様体と不安定多様体の接構造)を系に埋め込まれた周期軌道の多様体構造に着目することによって考察する。

2 周期軌道の多様体構造

本報告では、ローレンツ系($dx/dt = \sigma(y-x), dy/dt = rx-y-xz, dz/dt = xy-bz$ ($\sigma = 10, b = 8/3, r$: 変数))に焦点をあて、その周期軌道の多様体の構造を調べる。近年、力学系の安定(不安定)多様体の接空間の基底となる共変リアプノフベクトル(CLV(covariant Lyapunov vector))¹を同定する共変リアプノフ解析(Ginelli *et al.* (2007))が開発されており、本研究においてもそれを用いている。

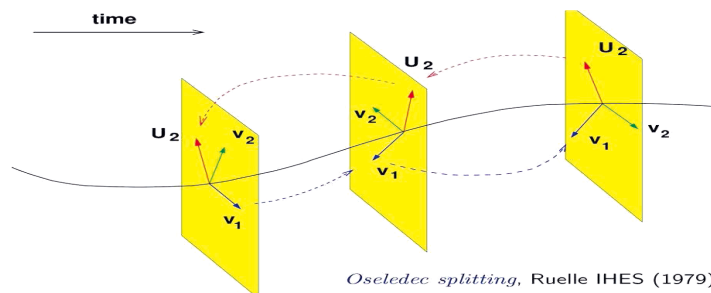


図1：CLVの計算方法概念図 ((i) 正の時間方向で(直交化)リアプノフベクトル(Shimada and Nagashima (1979)) (ii) 逆の時間方向で共変リアプノフベクトル(Oseledec Splitting)を計算)

*本研究は小林幹氏との共同研究に基づきます。また、山田道夫氏ならびに犬伏正信氏には、議論していただきました。ここに謝意を表します。

¹オセレデッツ・スプリッティングとも呼ばれる(付録参照)

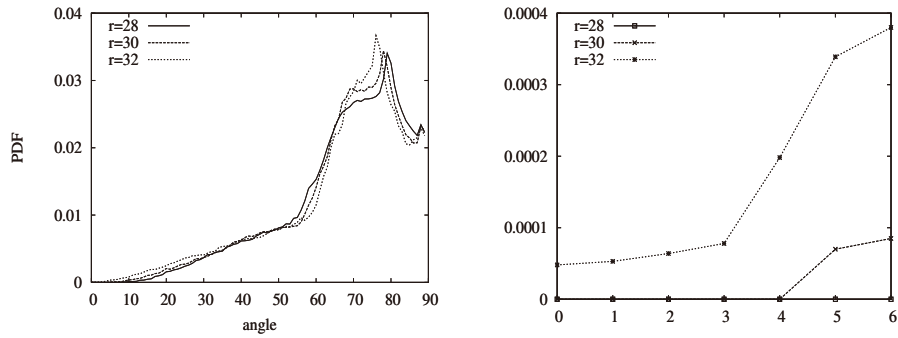


図2: カオス軌道上で安定多様体と不安定多様体のなす角度出現頻度分布 ($r = 28, 30, 32$) (左) と詳細図 (右) (r を 28 から 32 に上げると小角度の比率が増加し, $r = 32$ では 0 度付近に値をもつようになる)

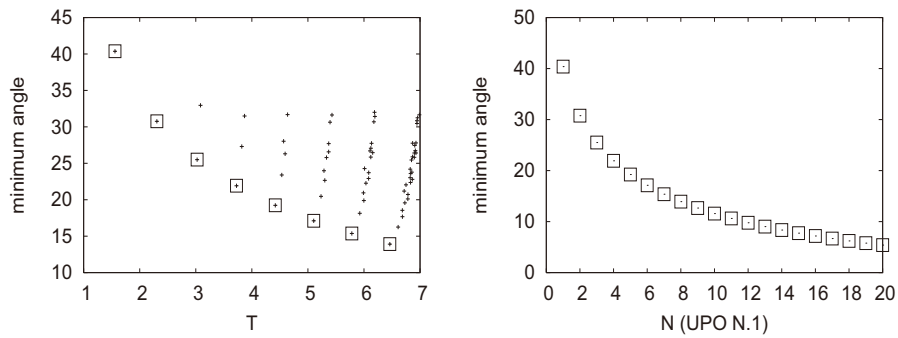


図3: ポアンカレ写像周期 9 以下の各 UPO ($r = 28$) (左), $\text{UPO } x^N y^1$ ($N = 1, \dots, 20$) (右) 上で安定多様体と不安定多様体がなす最小角度

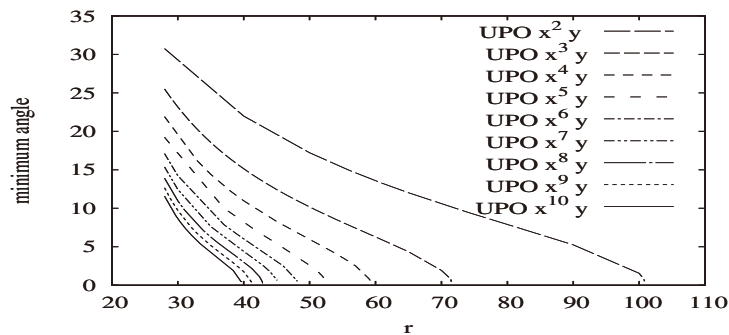


図4: r を 28 から大きくしてサドルノード分岐点まで追跡した $\text{UPO } x^N y^1$ (グラフは上から順に $N=2, 3, \dots, 10$) の安定多様体と不安定多様体がなす最小角度 ($\text{UPO } x^N y^1$ の最小角度順は保存されるながら 0 に近づいていく様に見えるが, 実際には 0 には届かず正值に留まる)

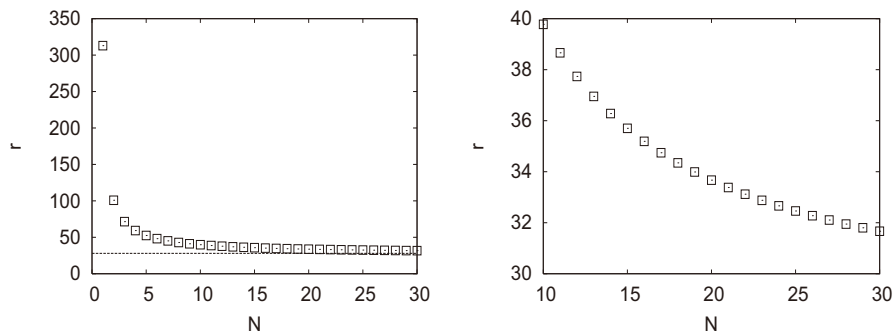


図5: $\text{UPO } x^N y^1$ ($N = 1, \dots, 20$) のサドルノード分岐点 (左) と詳細図 (右) (N に関してサドルノード分岐点は単調減少する)

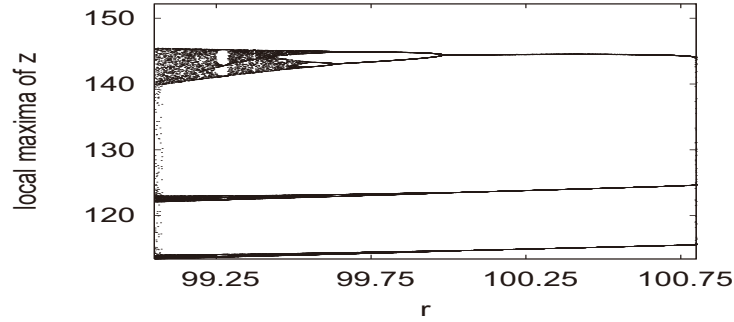


図 6: x^2y^1 周期窓付近の分岐図 (サドルノード分岐点 $r_2^* = 100.795$) (ノード周期軌道の周期倍分岐が確認できる)

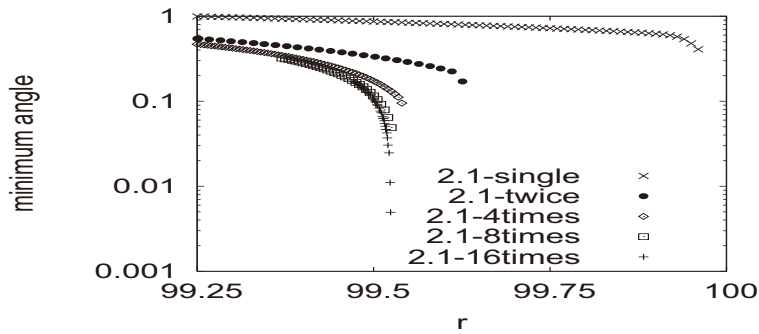


図 7: x^2y^1 ノード周期軌道の周期倍分岐周期軌道 (1, 2, 4, 8, 16 倍) の最小アングル

結果

1. $r = 28$ の場合は双曲的である (cf. Tucker(2002)) が, $r = 32$ 付近では非双曲的になる (接構造をもつ) ことが示唆される (図 2)
2. $r = 28$ のポアンカレ写像周期 $N + 1$ の UPO の中で, UPO $x^N y^1$ (片方を N 回連続でまわり, もう一方を 1 回まわる周期軌道) という系列の UPO 上の多様体間最小アングルが最も小さい (図 3)
3. $r = 28$ から r を上げたとき, UPO の多様体間最小アングル順が保存される (図 4)
4. UPO $x^N y^1$ は $r \nearrow$ 大でサドルノード分岐をおこし, その分岐点は, N が大きいものほど $r = 28$ の近くに存在する (図 5)
5. $r = 28$ で存在する UPO は $r \nearrow$ 大でおこるサドルノード分岐におけるサドル周期軌道に対応しており, ノード周期軌道は, $r \searrow$ 小で周期倍分岐をおこす (図 6)
6. ノード周期軌道の周期倍分岐で生まれる 2^n 周期の周期軌道が, $r \searrow$ 小で不安定した直後で多様体間最小アングルが小さくなる (図 7)

3 まとめ

ローレンツ系で $r : 28 \nearrow$ 大としたときに, 安定多様体と不安定多様体の接構造が発生する. $r = 28$ で多様体間の最小アングルが小さい UPO $x^N y^1$ に着目するとそれらは $r \nearrow$ 大でサドルノード分岐をおこし, その対となるノード周期軌道は, $r : r_N^* \searrow$ 小で周期倍分岐をおこす. 周期倍分岐で生まれた 2^n 周期の周期軌道が不安定化する部分に着目すると, $n \nearrow$ 大で最小アングルが 0 に近づき接構造を捉えられると結論づけられる. なお, このシナリオはエノン写像で得られている数学的結果に類似している.

参考文献

- Barreira L and Pesin Y B 2001 *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, University Lecture Series, **23**, (AMS, Providence)
- Barreira L and Pesin Y B 2007 *Nonuniform hyperbolicity*, (Cambridge University Press)
- Bonatti C, Diaz L J and Viana M 2000 *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity* Encyclopedia of Mathematical Sciences **102** (Cambridge)
- Doedel E J, Krauskopf and Osinga H M 2006 Global bifurcations of the Lorenz manifold *Nonlinearity* **19** 2947–2972
- Franceschini V, Giberti C and Zheng Z 1993 Characterization of the Lorenz attractor by unstable periodic orbits *Nonlinearity* **6** 251–258
- Ginelli F, Poggi P, Turchi A, Chate H, Livi R and Politi P 2007 Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors *Phys. Rev. Lett.* **99**(13) 130601
- Kuptsov V, and Kuznetsov P 2009 Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor *Phys. Rev. E* **80** 016205
- Oseledec V I 1968 A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** 197–231
- Palis J and Takens F 1993 *Hyperbolicity & sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations* Cambridge studies in advanced mathematics **35** (Cambridge: Cambridge University Press)
- Robinson C 2001 力学系 上・下 (シュプリンガー東京)
- Ruelle D 1979 Ergodic theory of differentiable dynamical systems *Publ. Math. IHES* **50** 275–306
- Shimada I and Nagashima T 1979 A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems *Prog. Theor. Phys* **61** 1605–1616
- Smale 1967 Differentiable dynamical systems *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** 747–817
- Sparrow C 1982 *The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors* (Applied Mathematical Sciences Vol 41) (New York: Springer)
- Tucker W 2002 A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem *Found. Comput. Math.* **2** 53–117
- Yang H L, Takeuchi K A, Ginelli F, Chate H and Radons G 2009 Hyperbolicity and the effective dimension of spatially extended dissipative systems *Phys. Rev. Lett.* **102**(7) (2009) 074102
- Zoldi S M 1998 Unstable periodic orbit analysis of histograms of chaotic time series *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) (16) 3375–3378

付録 (Robinson (2001))

定義 (リアプノフ指数)

$f : M \rightarrow M$ を m 次元多様体上の微分同相写像とし, $|\cdot|$ を M 上のリーマン計量 (接空間の内積) から導かれる接ベクトルのノルムとする. 各 $x \in M$ と $v \in T_x M$ に対し, 極限が存在する限り

$$\lambda(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(|Df_x^k v|)$$

と定義し, リアプノフ指数と呼ぶ.

定理 (オセレデッツの乗法エルゴード定理)

M を m 次元コンパクト多様体, \mathcal{B} を M のボレル集合によって生成される σ -加法族とし, $f : M \rightarrow M$ を C^2 微分同相写像とする. このとき, どの $\mu \in \mathcal{M}(f)$ ($\mathcal{M}(f)$ は, f に対する不変なボレル確率測度全体の集合) に対しても全測度をもつ不変集合 $B_f \in \mathcal{B}$ が存在して, 任意の点 $x \in B_f$ においてリアプノフ指数が存在する. すなわち,

- 集合 B_f は (i) 不変, すなわち $f(B_f) = B_f$ であり, (ii) 全測度をもつ, すなわち, すべての $\mu \in \mathcal{M}(f)$ について $\mu(B_f) = 1$ である.
- 各 $x \in B_f$ に対し, x での接空間は部分空間の増大列として

$$\{0\} = V_x^0 \subset V_x^1 \subset \dots \subset V_x^{s(x)} = T_x M$$

と表せ, しかも (i) $v \in V_x^j \setminus V_x^{j-1}$ については $\lambda(x, v)$ を定義する極限が存在して $\lambda_j(x) = \lambda(x, v)$ はすべてのそのような v について同一の値を取る. また, (ii) 部分空間束

$$\{V_x^j : x \in B_f, s(x) \geq j\}$$

はすべての $1 \leq j \leq s(x)$ について $Df_x V_x^j = V_{f(x)}^j$ という意味で不変である.

- 関数 $s : B_f \rightarrow \{1, \dots, m\}$ は可測関数で $s \circ f = s$ という意味で不変である.
- $x \in B_f$ ならば, そのリアプノフ指数は

$$-\infty \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_{s(x)}(x)$$

を満たす. $1 \leq j \leq m$ に対し, 関数 $\lambda_j(\cdot)$ は, (i) 矛盾なく定義され, しかも集合

$$\{x \in B_f : s(x) \geq j\}$$

の上で可測であり, (ii) $\lambda \circ f = \lambda_j$ という意味で不変である.

Somos sequences and determinant identities for theta functions

内田 幸寛

京都大学大学院理学研究科

1 はじめに

k を 4 以上の自然数とする．複素数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が漸化式

$$s_n s_{n-k} = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha_i s_{n-i} s_{n-k+i}$$

を満たすとき, $\{s_n\}$ を Somos k 数列 (Somos k sequence) という．ただし, $\lfloor k/2 \rfloor$ は $k/2$ の切り捨てである．特に, 初期値が $s_0 = s_1 = \cdots = s_{k-1} = 1$ であり, 係数 α_i がすべて 1 であるとき, $\{s_n\}$ を Somos (k) 数列 (Somos (k) sequence) という．Somos 数列は, 1980 年代に Michael Somos によって, 楕円テータ関数の研究の中で考察された．また, 楕円曲線の等分多項式から生じる elliptic divisibility sequence は Somos 4 数列の特別な場合である．

定義から, Somos (k) 数列が有理数列であることは明らかである．実際には, $k = 4, 5, 6, 7$ のとき, s_n は常に整数であることが証明されている．証明は, 直接的なもの他に, Fomin, Zelevinsky [3] によるクラスター代数を使うものがある．これに対し, $k = 8$ のときは整数でない項を含んでいることが確かめられる．実際, s_{17} は整数でない．

$k = 4, 5$ のとき, Somos k 数列は楕円曲線とその上の点から構成されることが知られている．この関係は多くの人々によって知られていたが, Hone [4] は次のような Weierstrass の σ 関数による表示を得た．

定理 1.1. 一般の Somos 4 数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は

$$s_n = AB^n \frac{\sigma(u + nv)}{\sigma(v)^{n^2}}$$

と表せる．ただし, σ 関数は楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

に対応し, A, B, u, v, g_2, g_3 は数列 s_n から定まる複素数である．

本講演では, まず古典的なテータ関数の関係式から Somos 数列の漸化式が得られることを示す．次に, Somos (6) 数列という特定の Somos 数列に対し, 定理 1.1 と同様の表示が得られることを示し, その応用として, Somos (6) 数列の漸近的振る舞いを考察する．

以下で使われる記号を定義する．複素数を成分とする n 次正方形行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表す． $2n$ 次交代行列 A に対し, A の Pfaffian を $\text{pf } A$ で表す．このとき, $(\text{pf } A)^2 = \det A$ である．正整数 g に対し, g 次 Siegel

上半空間 \mathfrak{H}_g を

$$\mathfrak{H}_g = \{ \tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t \tau = \tau, \text{Im } \tau \text{ は正定値} \}$$

で定義する．複素数 z に対し， $e(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ と定義する．

2 テータ関数の行列式恒等式と Somos 数列

まず，テータ関数の定義を復習する．

定義 2.1. $a, b \in \mathbb{R}^g, z \in \mathbb{C}^g, \tau \in \mathfrak{H}_g$ とする．指標付きテータ関数を

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e \left(\frac{1}{2} {}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)(z+b) \right)$$

で定義する．

以降で用いられるのは指標が半整数の場合，すなわち， $a, b \in (1/2)\mathbb{Z}^g$ の場合である．このとき，指標つきテータ関数は z について偶関数または奇関数になる．

1884年，Casparry と Frobenius は独立に次の公式を証明した (cf. [1, p. 473, Ex. v]) ．

定理 2.2. $n > 2^g$ を整数とする． $a, b \in (1/2)\mathbb{Z}^g, \tau \in \mathfrak{H}_g, w_1, w_2, \dots, w_n, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^g$ とする．このとき，

$$\det \left(\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w_i + z_j, \tau) \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w_i - z_j, \tau) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = 0.$$

この公式の系として，本質的には Weierstrass によって証明された次の公式が得られる．

系 2.3. $\tau \in \mathfrak{H}_g, a, b \in (1/2)\mathbb{Z}^g$ とする． $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau)$ が z について奇関数であるとする． $n > 2^g$ を偶数とし， $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^g$ とする．このとき，

$$\text{pf} \left(\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z_i + z_j, \tau) \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z_i - z_j, \tau) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = 0.$$

この公式を使うことで次の定理が証明できる．

定理 2.4. $\tau \in \mathfrak{H}_g, a, b \in (1/2)\mathbb{Z}^g$ とする． $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau)$ が z について奇関数であるとする．数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を

$$s_n = AB^n C^{n^2} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u + nv, \tau) \tag{1}$$

で定義する．ここで， A, B, C は 0 でない複素数であり， $u, v \in \mathbb{C}^g$ である．このとき，数列 $\{s_n\}$ は漸化式

$$\sum_{i=0}^{2^g} \alpha_i s_{n+i} s_{n-i} = 0$$

を満たす．ただし，係数 α_i は次のようにして定まる．

$$W = \left(\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ((i+j)v, \tau) \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ((i-j)v, \tau) \right)_{0 \leq i, j \leq 2^g}$$

とおき， W_k を W から第 k 行と第 k 列を取り除いて得られる 2^g 次交代行列とする．このとき，

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k \text{pf } W_k}{C^{2k^2}}.$$

注意 2.5. 定理 2.4 において, $\alpha_{2g} \neq 0$ のとき, $\{s_n\}$ は Somos 2^{g+1} 数列である. $g = 1$ のときは定理 1.1 からこのことの逆が成り立つ. しかし, $g \geq 2$ のときは成り立たない. 実際, 後で述べるように, Somos (8) 数列は (1) の形に書けない. また, 後で述べる Somos (6) 数列の場合は, $g = 2, \alpha_4 = 0$ となっている.

定理 2.2 を用いることで, Somos 数列に関する次の恒等式を得る.

定理 2.6. $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を (1) で定義される数列とする. $r > 2^g$ を整数として, $m_1, m_2, \dots, m_r, n_1, n_2, \dots, n_r$ を整数とする. このとき,

$$\det (s_{m_i+n_j} s_{m_i-n_j})_{1 \leq i, j \leq r} = 0. \quad (2)$$

注意 2.7. $g = 1, r = 3$ のとき, $\{s_n\}$ は Somos 4 数列であり, 定理 2.6 は Ma [5] によって証明されている.

注意 2.8. 定理 2.6 を, ある Somos 数列が (1) の形に表されないことを証明するために使うことができる. 例えば, $g = 2, r = 5$ のとき, Somos (8) 数列は定理 2.6 の関係式を満たさない. したがって, 2次元のテータ関数で (1) の形に表すことはできない.

3 Somos (6) 数列と超楕円曲線の有理点

Somos [6] は 1993 年, Somos (6) 数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ について, テータ級数による次の明示公式を得た. 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = c_1 c_2^{xy} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} (-1)^{k_2} c_3^{k_1^2} c_4^{k_2^2} c_5^{k_1 k_2} \cos(c_6 k_1 x + c_7 k_2 y)$$

で定義したとき,

$$s_n = f(n - 2.5, n - 2.5).$$

ただし, c_1, c_2, \dots, c_7 は近似的に得られる実定数である.

2000 年, van Wamelen はこのテータ級数に対応する種数 2 の曲線の定義方程式を計算し, 次の結果を得た.

$$y^2 = 8x^5 + 213x^4 + 366x^3 - 773x^2 + 394x - 63.$$

超楕円 σ 関数の理論を用いるために, 変数変換して得られる方程式

$$y^2 = x^5 + 218x^4 + 3790x^3 - 39400x^2 + 112425x - 102650$$

で定まる曲線を C とし, その無限遠点を ∞ とする.

定理を述べるために, 超楕円 σ 関数について述べる. 詳細は [8] およびその中で挙げられている文献を参照していただきたい. J を C の Jacobi 多様体とする. このとき群同型 $\text{Pic}^0(C) \xrightarrow{\sim} J$ が存在する. また, 周期行列 $\omega', \omega'' \in M_2(\mathbb{C})$ があって, $\Lambda = \omega' \mathbb{Z}^2 + \omega'' \mathbb{Z}^2$ が \mathbb{C}^2 の格子となり, 解析的同型 $J(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2 / \Lambda$ が存在する. さらに, 周期行列 $\eta', \eta'' \in M_2(\mathbb{C})$ があって, $\omega', \omega'', \eta', \eta''$ は一般化 Legendre 関係式と呼ばれる関係式を満たす. 超楕円 σ 関数 $\sigma: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\sigma(u) = c \exp\left(\frac{1}{2} {}^t u \eta' \omega'^{-1} u\right) \vartheta \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} (\omega^{-1} u, \omega'^{-1} \omega'')$$

で定義する. ただし, c は定数, $\delta'' = {}^t(1/2, 1/2)$, $\delta' = {}^t(1, 1/2)$ である. このとき $\sigma(u)$ は奇関数である.

Somos (6) 数列のテータ級数による表示を超楕円 σ 関数で書き直すことで, 次の定理を得る.

定理 3.1. $P, Q \in J(\mathbb{Q})$ を同型 $\text{Pic}^0(C) \xrightarrow{\sim} J$ によって次のように対応する点とする .

$$(35 - 4\sqrt{65}, 41280 - 5120\sqrt{65}) + (35 + 4\sqrt{65}, 41280 + 5120\sqrt{65}) - 2\infty \mapsto P,$$

$$(-81 - 8\sqrt{109}, 72832 + 6976\sqrt{109}) + (-81 + 8\sqrt{109}, 72832 - 6976\sqrt{109}) - 2\infty \mapsto Q.$$

$J(\mathbb{C})$ と \mathbb{C}^2/Λ を同一視したときに , $u \bmod \Lambda = P, v \bmod \Lambda = Q$ となる $u, v \in \mathbb{C}^2$ を取る . 数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を

$$s_n = AB^n C^{n^2} \frac{\sigma(u + nv)}{\sigma(v)^{n^2}}$$

で定義する . ただし ,

$$A = \frac{1}{\sigma(u)}, \quad B = \frac{16\sqrt{5}\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)}, \quad C = \frac{1}{16\sqrt{5}}$$

である . このとき , $\{s_n\}$ は Somos (6) 数列である . すなわち ,

$$s_0 = s_1 = \cdots = s_5 = 1,$$

$$s_{n+3}s_{n-3} = s_{n+2}s_{n-2} + s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2.$$

Somos による表示には近似的なパラメータが入っているが , 定理 3.1 に現れる定数はすべて厳密に定まった値であることに注意する . 定理 2.6 と定理 3.1 によって , Somos (6) 数列は $r \geq 5$ に対して (2) を満たすことがわかる .

定理 3.1 を用いることで , Somos (6) 数列の大きさの漸近的な振る舞いが分かる .

定理 3.2. 定理 3.1 と同じ記号を用いる . v', v'' を $v = \omega'v' + \omega''v''$ を満たす \mathbb{R}^2 の元とする . このとき ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log |s_n| = -\log(16\sqrt{5}) - \log \left| \exp \left(-\frac{1}{2} {}^t v (\eta'v' + \eta''v'') \right) \sigma(v) \right|$$

$$= 0.080774 \dots$$

右辺の $-\log \left| \exp \left(-\frac{1}{2} {}^t v (\eta'v' + \eta''v'') \right) \sigma(v) \right|$ は Archimedes 素点における点 Q の標準局所高さであることを注意しておく (cf. [7]) . 定理 3.2 の証明には , Faltings [2] による Abel 多様体上の Diophantus 近似の結果を用いる . したがって , ある代数体 K があって , J 上の点 P, Q が K 有理点であることが証明に必要である .

参考文献

- [1] H. F. Baker, *Abelian Functions: Abel's theorem and the allied theory of theta functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.
- [2] G. Faltings, Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. of Math. (2)* **133** (1991) 549–576.
- [3] S. Fomin, A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon, *Adv. in Appl. Math.* **28** (2002) 119–144.
- [4] A. N. W. Hone, Elliptic curves and quadratic recurrence sequences, *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005) 161–171.
- [5] X. Ma, Magic determinants of Somos sequences and theta functions, *Discrete Math.* **310** (2010) 1–5.
- [6] M. Somos, Somos 6 Sequence, <http://grail.cba.csuohio.edu/~somos/somos6.html>.
- [7] K. Yoshitomi, On height functions on Jacobian surfaces, *Manuscripta Math.* **96** (1998) 37–66.
- [8] 内田幸寛 , Division polynomials of hyperelliptic Jacobians, 第 5 回数学総合若手研究集会テクニカルレポート , (2009) 109–116. <http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1980/>.

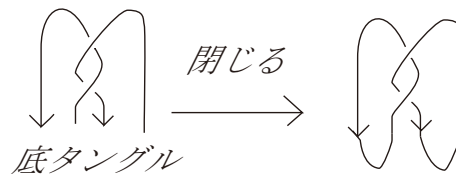
境界底タンゲルの普遍 sl_2 不変量について

鈴木 咲衣

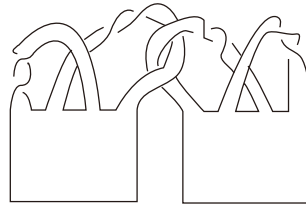
京都大学数理解析研究所

1 概要

底タンゲルとは立方体 $[0, 1]^3$ 中のタンゲルで、境界が底に一直線に並び、一つの紐の2つの境界が隣り合っているようなものをいう。ただし、閉じた成分は含まない。任意の絡み目のイソトピー類は底タンゲルの境界を閉じることにより得られる。



\mathbb{R}^3 内の任意の結び目 K は、 \mathbb{R}^3 に埋め込まれたコンパクトで向き付けられた曲面の境界となる。そのような曲面を K のザイフェルト曲面と呼ぶ。絡み目 $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ は、各成分 L_i が互いに交わりを持たないザイフェルト曲面を張るときに境界絡み目と呼ばれる。



境界絡み目

1成分底タンゲル T を $[0, 1]^3$ の底の直線で閉じた結び目 K を考える。 K は $[0, 1]^3$ に埋め込まれたコンパクトで向き付けられた曲面を張る。そのような曲面を底タンゲル T のザイフェルト曲面と呼ぶ。底タンゲル $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ は、各成分 T_i が互いに交わりを持たないザイフェルト曲面を張るときに境界絡み目と呼ばれる。

任意のリボン Hopf 代数 U とその有限次元表現を与えるごとに、絡み目の不変量を構成することが出来る [5]。普遍不変量とは、リボン Hopf 代数 U から定義され、先の不変量に対して普遍性を持つような、タンゲルと絡み目の不変量である [3, 4]。リー環 sl_2 の量子展開環 $U_h(sl_2)$ は完備化されたリボン $\mathbb{Q}[[h]]$ -Hopf 代数である。リボン Hopf 代数 $U_h(sl_2)$ から得られる普遍不変量を普遍 sl_2 不変量と呼ぶ。この講演では、境界底タンゲルの普遍 sl_2 不変量の代数的性質を紹介する。



図 1: 基本図. 向きは任意.

2 底タンゲルの普遍 sl_2 不変量と色つき Jones 多項式

h を不定元とした形式的冪級数環を $\mathbb{Q}[[h]]$ と書く. 量子展開環 $U_h(sl_2)$ とは, トポロジカルに H, E, F で生成され, 関係式

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

で定義される h 進完備 $\mathbb{Q}[[h]]$ -代数である. ただし,

$$q = \exp h, \quad K = q^{H/2} = \exp \frac{hH}{2}$$

と置いた. $U_h(sl_2)$ の完備化された n 重テンソル積を $U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ と書く. 上で定義された代数 $U_h(sl_2)$ は, (完備化された) リボンホップ代数構造を持つ (cf. [2]).

$$[i]_q = \frac{q^i - 1}{q - 1}, \quad [n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q, \quad i \in \mathbb{Z}, n \geq 0,$$

$$e = q^{-1/2}(q-1)E, \quad \tilde{F}^{(i)} = \frac{F^i K^i}{[i]_q!}, \quad i \geq 1,$$

$$D = q^{\frac{1}{4}H \otimes H} = \exp\left(\frac{h}{4}H \otimes H\right),$$

とおくと, 普遍 R -行列は,

$$R = D \left(\sum_{n \geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{F}^{(n)} K^{-n} \otimes e^n \right) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}, \quad (1)$$

$$R^{-1} = D^{-1} \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \tilde{F}^{(n)} \otimes K^{-n} e^n \right) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2} \quad (2)$$

で与えられる.

底タンゲル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ に対して, T の普遍 sl_2 不変量 $J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ を以下で定める. まず T の図式 P を一つ選び, その交点の集合を $C(P)$ とおく. ただし P は基本図 (図 1 参照) を縦と横につなげて得られる絡み目図式とする. 射

$$s: C(P) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$$

を図式 P のステイトと呼ぶ. 図式 P のステイトの集合を $S(P)$ と書く. 各ステイト $s \in S(P)$ に対して, $U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ の元 $J(P, s)$ を以下で定める. まず図式 P の各基本図に対して, 図 2 のようにラベルを張る. (図 2 にない基本図にはラベルを張らない.) ここで “ S ” は, 紐

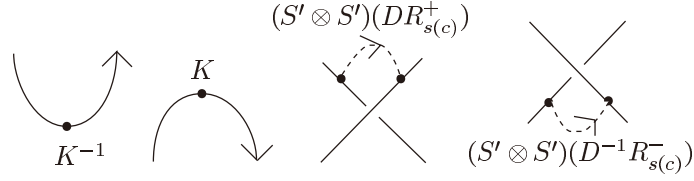


図 2: 基本図へのラベルの置き方. ただし $R^{\pm 1} = D^{\pm 1} \sum_{n \geq 0} R_n^{\pm}$ とおいた.

の向きが下向きするとき id に, 上向きするとき S におき換える. $J(P, s) \in U_h(sl_2)^{\otimes n}$ のテンソル積の i 成分を, T_i 成分に置かれたラベルの積で定義する. ここで, ラベルは紐を逆向きにたどりながら読み, 読んだ順に左から右へ書く, という方法で積をとる. すると, $J(P, s)$ のステイト和

$$J_T = \sum_{s \in S(P)} J(P, s)$$

は T の図式の取り方によらない値となり, 底タングルの不変量を定める (cf. [4]).

次に普遍 sl_2 不変量と色つき Jones 多項式の関係性を述べる.

$$\rho_i: U_h(sl_2) \rightarrow \text{End}(W_i), \quad i = 1, \dots, n$$

を $U_h(sl_2)$ の有限次元表現とする. W_i に付随する射 $\text{tr}_q^{W_i}: U_h(sl_2) \rightarrow \mathbb{Q}[[h]]$,

$$\text{tr}_q^{W_i}(x) = \text{tr}(\rho_i(K^{-1}x)), \quad x \in U_h(sl_2)$$

を量子トレースと呼ぶ. $U_h(sl_2)$ に付随した Reshetikhin と Turaev の不変量 (色つき Jones 多項式) は, ローラン多項式環 $\mathbb{Z}[q^{1/4}, q^{-1/4}]$ に値をもつ. 絡み目 $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ が底タングル $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ を閉じて得られるとする. 各 L_i に W_i を対応させて得られる L の色つき Jones 多項式を $J_{L; W_1, \dots, W_n}$ と書く. このとき

$$J_{L; W_1, \dots, W_n} = (\text{tr}_q^{W_1} \otimes \dots \otimes \text{tr}_q^{W_n})(J_T).$$

が成り立つ.

3 主定理とその応用

$K^{\pm 2}, e, \tilde{F}^{(i)}, i \geq 1$ で生成される $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -部分代数を U_q^{ev} とする. U_q^{ev} の, フィルトレーション $\mathcal{F}_k(U_q^{ev}) = U_q^{ev} e^k U_q^{ev}, k \geq 0$ を用いた完備化を \tilde{U}_q^{ev} とする. すなわち

$$\tilde{U}_q^{ev} = \text{Image} \left(\varprojlim_k U_q^{ev} / \mathcal{F}_k(U_q^{ev}) \rightarrow U_h(sl_2) \right).$$

同様に, $(U_q^{ev})^{\otimes n}$ の, フィルトレーション

$$\mathcal{F}_k((U_q^{ev})^{\otimes n}) = \sum_{i=1}^n (U_q^{ev})^{\otimes i-1} \otimes \mathcal{F}_k(U_q^{ev}) \otimes (U_q^{ev})^{\otimes n-i}, \quad k \geq 0$$

を用いた完備化を $(\tilde{U}_q^{ev})^{\tilde{\otimes} n}$ とする. フレーミング 0 の n 成分底タングルの普遍 sl_2 不変量は $(\tilde{U}_q^{ev})^{\tilde{\otimes} n}$ に含まれることが知られている (cf. [2]). $K^{\pm 2, e, (q-1)FK}$ で生成される $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -部分代数を \bar{U}_q^{ev} とする. $(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}$ の, フィルトレーション $\mathcal{F}_k((\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}) = \mathcal{F}_k((U_q^{ev})^{\otimes n}) \cap (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}, k \geq 0$ を用いた完備化を $(\bar{U}_q^{ev})^{\sim \otimes n}$ とする.

定理 1. T をフレーミング 0 の n 成分境界底タングルとする. このとき $J_T \in (\bar{U}_q^{ev})^{\sim \otimes n}$ が成り立つ.

次に主定理の応用を紹介する. $\mathbb{Q}(q^{1/2})$ -加群

$$\text{Span}_{\mathbb{Q}(q^{1/2})}\{V_l \mid l \geq 1\}, \quad V_l : l \text{ 次元既約表現}$$

にテンソル積で積を定めた環を \mathcal{R} とする. $l \geq 0$ に対して,

$$P_l = \prod_{i=0}^{l-1} (V_2 - q^{i+\frac{1}{2}} - q^{-i-\frac{1}{2}}) \in \mathcal{R}$$

とおく. 先の部分代数 $(\bar{U}_q^{ev})^{\sim \otimes n}$ から量子トレース $\text{tr}_q^{P_{l_1}} \otimes \cdots \otimes \text{tr}_q^{P_{l_n}}$ を取ることにより次の定理が得られる.

定理 2. T をフレーミング 0 の n 成分境界底タングルとする. このとき次が成り立つ.

$$J_{L; P_{l_1}, \dots, P_{l_n}} \in \frac{\{2l_j + 1\}!}{\{1\}} I_{l_1} \cdots \hat{I}_{l_j} \cdots I_{l_n},$$

ただし

$$\begin{aligned} \{l\} &= q^{l/2} - q^{-l/2}, \quad \{l\}! = \{l\}\{l-1\} \cdots \{1\}, \\ I_l &= \langle \{l-k\}! \{k\}! \{l\}! \mid k = 0, \dots, l \rangle_{\text{ideal in } \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] K. Habiro, Bottom tangles and universal invariants. *Alg. Geom. Topol.* **6** (2006), 1113–1214.
- [2] K. Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants for integral homology spheres. *Invent. Math.* **171** (2008), no. 1, 1–81.
- [3] R. J. Lawrence, A universal link invariant. in: *The interface of mathematics and particle physics* (Oxford, 1988), 151–156, *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.*, vol. 24, Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [4] T. Ohtsuki, Colored ribbon Hopf algebras and universal invariants of framed links. *J. Knot Theory Ramifications* **2** (1993), no. 2, 211–232.
- [5] N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), no. 1, 1–26.

球上における非線形シュレディンガー方程式 の定在波の安定性について

菊池 弘明 (北海道大学大学院理学研究院)*

1 Introduction

次の方程式について考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times B_1, \\ u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial B_1. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$, $N \geq 1$, $1 < p < 2^* - 1$ であり, $2^* \in \mathbb{R}_+$ は $N = 1$ または 2 のときは, $2^* = \infty$, $N \geq 3$ ならば, $2^* = 2N/(N-2)$ とする. 方程式 (1) は $N = 2, p = 3$ のとき, 光ファイバー中のレーザービームの伝播を記述するモデル方程式になっている.

以下では, 方程式 (1) のエネルギー空間 $H_0^1(B_1)$ での局所適切性が成立するものとして話を進める. つまり, 次を仮定する:

Assumption 1. 任意の $u_0 \in H_0^1(B_1)$ に対して, ある $T = T(\|u_0\|_{H^1}) > 0$ と $u|_{t=0} = u_0$ となる方程式 (1) の解 $u \in C([0, T], H_0^1(B_1))$ が存在して, 次の2つの保存則を満たす:

$$E_B(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2(B_1)} = \|u_0\|_{L^2(B_1)},$$

ここで, $E_B \in C^2(H_0^1(B_1), \mathbb{R})$ は

$$E_B(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B_1)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(B_1)}^{p+1}$$

と定義する.

Remark 2. $N = 1, 2$ かつ $p \in (1, 3]$ のときは, Ogawa-Ozawa [6] により, 上の仮定が成立することが証明されている.

*この講演は福泉麗佳氏 (東北大学大学院情報科学研究科) との共同研究に基づく.

この講演では, 方程式 (1) の定在波の安定性について考える. ここで, 定在波とは, $u(t, x) = e^{i\omega t} Q_\omega(x)$, $\omega \in \mathbb{R}$ という形をした方程式 (1) の解である. このとき, $Q_\omega \neq 0$ は次を満たす:

$$\begin{cases} -\Delta Q + \omega Q - |Q|^{p-1}Q = 0, & x \in B_1, \\ Q = 0, & x \in \partial B_1. \end{cases} \quad (2)$$

このとき, $S_\omega \in C^2(H_0^1(B_1), \mathbb{R})$ を

$$S_\omega(u) = E_B(u) + \frac{\omega}{2} \|u\|_{L^2(B_1)}^2 = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B_1)}^2 + \frac{\omega}{2} \|u\|_{L^2(B_1)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(B_1)}^{p+1}$$

とおくと, $u \in H_0^1(B_1)$ が方程式 (2) の解であることと S_ω の臨界点であることは同値になることに注意する. 方程式 (2) の解は無数個存在することが知られているが, ここでは基底状態のみ着目する. 基底状態とは, 方程式 (2) の非自明解のなかで, S_ω の値を最小にする解のことである. このとき, $\omega > -\lambda_1$ ならば, 基底状態は一意的に存在し, さらに球対称で, 動径方向に関して単調減少であることが知られている. ここで, λ_1 は $-\Delta$ in B_1 の第 1 固有値である. (球対称性については, Gidas, Ni and Nirenberg [3], 一意性については, Zhang [7], Kwong and Li [5] を参照されたい).

Definition 3. Q_ω を (2) の基底状態とする. このとき, $e^{i\omega t} Q_\omega$ が安定であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|u_0 - Q_\omega\|_{H^1} < \delta$ ならば, $\sup_{t>0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|u(t) - e^{i\theta} Q_\omega\|_{H^1} < \epsilon$ となることである. ここで, $u(t)$ は $u|_{t=0} = u_0$ とする方程式 (1) の解である. 安定でないとき不安定であるという.

主定理を述べる前に過去の結果を紹介する. 領域を全空間にした方程式, つまり,

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (3)$$

については, 定在波 $e^{i\omega t} R_\omega$ は, すべての $\omega > 0$ に対して, $1 < p < 1 + 4/N$ ならば安定であり, $1 + 4/N \leq p < 2^* - 1$ ならば不安定となることが知られている (例えば, Cazenave [1] 等を参照されたい). ここで, R_ω は方程式 (3) の基底状態である. 方程式 (1) については, Fibichi and Merle [2] が数値計算を用いて, $p = 1 + 4/N$ のときは, 方程式 (3) とは異なり, 定在波 $e^{i\omega t} Q_\omega$ は安定となることを予想している.

今回は $p = 1 + 4/N$ を含む以下の結果を得た:

Theorem 4. $N \geq 1$, Q_ω を (2) の基底状態とする. すると, 次が成り立つ:

- (i) $1 < p < 2^* - 1$ とする. ある $\epsilon_0 > 0$ が存在して, $\omega \in (-\lambda_1, -\lambda_1 + \epsilon)$ ならば, 定在波 $e^{i\omega t} Q_\omega$ は安定である,
- (ii) $1 < p \leq 1 + 4/N$ とする. ある $\omega_1 > 0$ が存在して, $\omega \in (\omega_1, \infty)$ ならば, 定在波 $e^{i\omega t} Q_\omega$ は安定である,
- (iii) $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ とする. ある $\omega_2 > 0$ が存在して, $\omega \in (\omega_2, \infty)$ ならば, 定在波 $e^{i\omega t} Q_\omega$ は不安定である.

さらに, $N = 1$ に限れば次のことが得られる:

Theorem 5. $N = 1, Q_\omega$ を (2) の基底状態とする. $1 < p \leq 1 + 4/N$ のとき, $\omega > -\lambda_1$ ならば, 定在波 $e^{i\omega t}Q_\omega$ は安定である.

2 $p = 1 + 4/N$ での全空間と単位球の違い

このセクションでは, 何が原因して, $p = 1 + 4/N$ のときで, 領域が全空間と単位球で安定性の結果が異なるのかを述べる. その答えを最初に言うと, それは基底状態のエネルギーの値が異なることである. まず, $p = 1 + 4/N$ のときの全空間の場合について簡単に振り返る. $E_{\mathbb{R}^N} \in C^2(H_0^1(B_1), \mathbb{R})$ を

$$E_{\mathbb{R}^N}(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1}$$

と定義すると, 汎関数 $E_{\mathbb{R}^N}$ は方程式 (3) の保存量であることが分かる. そして, R_ω を (3) の基底状態とすると, 簡単な計算により, $p = 1 + 4/N$ のときは, $E_{\mathbb{R}^N}(R_\omega) = 0$ となることが従う. 各 $s > 1$ に対して, $u_s \in C([0, T], H^1(\mathbb{R}^N))$ を $u_s|_{t=0} = sR_\omega$ を満たす (3) の解とすると, u_s は存在する限り, 次の virial 等式

$$\frac{d^2}{dt^2} \int |x|^2 |u_s(t)|^2 dx = 16E_{\mathbb{R}^N}(u_s(t))$$

を満たし, 上の等式とエネルギー $E_{\mathbb{R}^N}$ は保存量であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int |x|^2 |u_s(t)|^2 dx &= 16E_{\mathbb{R}^N}(sR_\omega) \\ &= 16s^2 \left(\frac{1}{2} \|\nabla R_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{s^{p-1}}{p+1} \|R_\omega\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1} \right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

仮に解 u_s が時間大域的に存在するとする. すると, 上の式から十分時間が経つと, $\int |x|^2 |u_s(t)|^2 dx < 0$ となるので矛盾である. よって, 解 u_s は有限時間で爆発する. また, 明らかに $sR_\omega \rightarrow R_\omega$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ as $s \rightarrow 1$ となるので, これから定在波 $e^{i\omega t}R_\omega$ は不安定であることが分かる. このように, エネルギーの値が 0 だと容易に不安定性が示せる.

次に単位球の場合について考える. この場合も基底状態のエネルギーは計算出来,

$$E_B(Q_\omega) = \frac{1}{2} |\partial_r Q_\omega(1)|^2 \quad (4)$$

である. このことから, エネルギーの値は正であるため, 全空間のときに不安定性を示すのに用いた議論をすることは出来なく, 逆に次の安定性の十分条件を確かめることが出来る.

Proposition 6. $Q_\omega \in H_0^1(B_1)$ を方程式 (2) の基底状態とする. すると, $\partial_\omega \|Q_\omega\|_{L^2}^2 > 0$ ならば, 定在波 $e^{i\omega t} Q_\omega$ は安定となる.

$S'_\omega(Q_\omega) = 0$ に注意すると,

$$\omega \partial_\omega \|Q_\omega\|_{L^2}^2 = -2 \int (-\Delta Q_\omega - Q_\omega^p) \partial_\omega Q_\omega dx = -2 \partial_\omega E_B(Q_\omega)$$

となる. $E_B(Q_\omega) = |\partial_r Q_\omega(1)|^2/2$ であるから, $\partial_\omega E_B(Q_\omega) = \partial_r Q_\omega(1) \partial_{r\omega} Q_\omega(1)$ が従う. そして, $Q_\omega(r)$ は r に関して狭義単調減少であるから, $\partial_r Q_\omega(1) < 0$ となることに注意すると, $\partial_\omega \|Q_\omega\|_{L^2}^2$ の符号を調べるには, $\partial_{r\omega} Q_\omega(1)$ の符号を調べればよいことが分かる. $\partial_\omega Q_\omega$ は

$$-\Delta v + \omega v - p Q_\omega^{p-1} v = -Q_\omega$$

を満たす. このとき, $\partial_\omega Q_\omega$ を rescale して, 振動数 ω に関して極限をとることで全空間 \mathbb{R}^N の基底状態 R_ω に帰着させること出来, $\partial_{r\omega} Q_\omega(1)$ の符号を解析することが可能となる. $N = 1$ のときは, $\partial_{r\omega} Q_\omega(1)$ の符号を調べるには, $\partial_\omega Q_\omega$ の零点を調べれば十分であることが分かるため, 定理 5 を得ることが出来る.

参考文献

- [1] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, New York University, New York, 2003.
- [2] G. Fibich and F. Merle, *Self-focusing on bounded domains*, Phys. D **155** (2001), 132–158.
- [3] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R^n* , Adv. Math. Suppl. Stud. **7A** Academic Press (1981), 369–402.
- [4] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), 160–197.
- [5] M. Kwong and Y. Li, *Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 339–363.
- [6] T. Ogawa and T. Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrodinger mixed problem*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 531–540.
- [7] L. Zhang, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u + u + u^p = 0$ in a ball*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1141–1164.

Strong consistency for Bayesian estimator with approximations *

A. Kohatsu-Higa [†], N. Vayatis [‡], Kazuhiro Yasuda [§]

Abstract. We consider the asymptotic behavior of a Bayesian parameter estimation method under discrete stationary observations. We suppose that the transition density of the data is unknown, and therefore we approximate it using a kernel density estimation method applied to the Monte Carlo simulations of approximations of the theoretical random variables generating the observations. In this article, we estimate the error between the theoretical estimator, which assumes the knowledge of the transition density and its approximation which uses the simulation. We prove the strong consistency of the approximated estimator and find the order of the error.

1 Settings

Let $\Delta > 0$ be a time interval of observations.

- (i). **(Observation process).** Let $\{Y_{i\Delta}\}_{i=0,1,\dots,N}$ be a sequence of $N + 1$ -observations of a Markov chain having transition density $p_{\theta_0}(y, z)$ and known invariant measure μ_{θ_0} . Set $Y_i := Y_{i\Delta}$.
- (ii). **(Evaluation process).** Denote by $X^y(\theta)$ a random variable defined such that its law is given by $p_{\theta}(y, \cdot)$.
- (iii). **(Approximated process).** Denote by $X_{(m)}^y(\theta)$ the simulation of the evaluation $X^y(\theta)$. m is the parameter that determines the quality of the approximation. Denote by $\tilde{p}_{\theta}^N(y, z) = \tilde{p}_{\theta}^{m(N)}(y, z)$ the transition density for the process $X_{(m)}^y(\theta)$.
- (iv). **(Approximated transition density).** Let $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a kernel which satisfies $\int K(x)dx = 1$ and $K(x) > 0$ for all x . Denote by $\hat{p}_{\theta}^N(y, z; \hat{\omega})$ the kernel density estimate of $\tilde{p}_{\theta}^N(y, z)$ based on n simulated (independent and identically distributed) copies of $X_{(m)}^y(\theta)$ and denoted by $X_{(m)}^{y,(k)}(\theta, \cdot)$, $k = 1, \dots, n$; for $h > 0$,

$$\hat{p}_{\theta}^N(y, z; \hat{\omega}) := \hat{p}_{\theta}^N(y, z; \hat{\omega}; m(N), h(N), n(N)) := \frac{1}{n(N)h(N)} \sum_{k=1}^n K\left(\frac{X_{(m(N))}^{y,(k)}(\theta, \hat{\omega}) - z}{h(N)}\right).$$

- (v). For given m , we introduce the “average” transition density over all trajectories with respect to the kernel K ;

$$\bar{p}_{\theta}^N(y, z) := \bar{p}_{\theta}^N(y, z; m(N), h(N)) := \hat{E}\left[\hat{p}_{\theta}^N(y, z; \cdot)\right] = \hat{E}\left[\frac{1}{h(N)}K\left(\frac{X_{(m(N))}^{y,(1)}(\theta, \cdot) - z}{h(N)}\right)\right].$$

*This paper is an abbreviated version of Kohatsu-Higa et al. [1].

[†]Osaka university and JST. The present research has been supported by research grants of the Japanese government.

[‡]ENS de Cachan.

[§]Hosei university. e-mail: k.yasuda@hosei.ac.jp

Our purpose is to estimate the posterior expectation of a function $f \in C^1(\Theta)$ given the data;

$$E_N[f] := E_\theta[f|Y_0, \dots, Y_N] = \frac{I_N(f)}{I_N(1)} := \frac{\int_{\Theta} f(\theta) q_\theta(Y_0^N) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} q_\theta(Y_0^N) \pi(\theta) d\theta},$$

where $q_\theta(Y_0^N) = q_\theta(Y_0, \dots, Y_N) = \mu_\theta(Y_0) \prod_{j=1}^N p_\theta(Y_{j-1}, Y_j)$ is the joint density of (Y_0, Y_1, \dots, Y_N) and let $\Theta := [\theta_l, \theta_u]$ ($-\infty < \theta_l < \theta_u < +\infty$) be the parameter set. We assume that $\theta_0 \in (\theta_l, \theta_u)$.

We propose to estimate this quantity on the basis of simulated instances of the process;

$$\hat{E}_{N,m}^n[f] := \frac{\hat{I}_{N,m}^n(f)}{\hat{I}_{N,m}^n(1)} := \frac{\int_{\Theta} f(\theta) \hat{q}_\theta^N(Y_0^N) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} \hat{q}_\theta^N(Y_0^N) \pi(\theta) d\theta},$$

where $\hat{q}_\theta^N(Y_0^N) := \mu_\theta(Y_0) \prod_{j=1}^N \hat{p}_\theta^N(Y_{j-1}, Y_j)$.

2 Main Theorem

We will give main assumptions.

Assumption 2.1 *We assume the following*

- (1). **(Observation process)** $\{Y_i\}_{i=0,1,\dots,N}$ is an α -mixing process with $\alpha_n = O(n^{-5})$ and has an invariant measure $\mu_{\theta_0}(y)$.
- (2). **(Identifiability)** Assume that there exists a positive function c_1 such that

$$\int |p_\theta(y, z) - p_{\theta_0}(y, z)| dz \geq c_1(y) |\theta - \theta_0|,$$

and $C_1(\theta_0) := \int c_1(y)^2 \mu_{\theta_0}(y) dy \in (0, +\infty)$.

And also assume that there exists a positive function c_2 such that

$$\inf_N \int |\bar{p}_\theta^N(y, z) - \bar{p}_{\theta_0}^N(y, z)| dz \geq c_2(y) |\theta - \theta_0|,$$

and $C_2(\theta_0) := \int c_2(y)^2 \mu_{\theta_0}(y) dy \in (0, +\infty)$.

- (3). **(Parameter tuning)**

(a). *We assume the following boundedness;*

$$\sup_N \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \hat{p}_\theta^N(Y_i, Y_{i+1}, \hat{\omega}) - \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \bar{p}_\theta^N(Y_i, Y_{i+1}) \right) \right| < +\infty \quad a.s.$$

(b). *Assume that for each $y, z \in \mathbb{R}$, there exists a factor $C_1^N(y, z)$ and $c_1(y, z)$ such that*

$$|p_\theta(y, z) - \bar{p}_{\theta_0}^N(y, z)| \leq C_1^N(y, z) a_1(N),$$

where $\sup_N C_1^N(y, z) < +\infty$ and $a_1(N) \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$, and

$$C_1^N(y, z) a_1(N) \sqrt{N} < c_1(y, z),$$

where c_1 satisfies the following;

$$\sup_N \sup_{\theta \in \Theta} \iint \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \bar{p}_\theta^N(y, z) \right| c_1(y, z) \mu_{\theta_0}(y) dy dz < +\infty.$$

- (c). *There exist some function $g^N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and constant $a_2(N)$, which depends on N , such that for all $y, z \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \bar{p}_\theta^N(y, z) - \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(y, z) \right| \leq |g^N(y, z)| a_2(N),$$

where $\sup_N E_{\theta_0} [|g^N(Y_0, Y_1)|^4] < +\infty$ and $a_2(N) \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$.

Theorem 2.2 *Under Assumption 2.1 and certain assumptions, there exists some positive random variable Ξ such that $\Xi < +\infty$ a.s. and*

$$|E_N[f] - \hat{E}_{N,m}^n[f]| \leq \frac{\Xi}{\sqrt{N}} \text{ a.s.}$$

And also, we have

$$|E_N[f] - f(\theta_0)| \leq \frac{\Xi_1}{\sqrt{N}} \text{ a.s., and } |\hat{E}_{N,m}^n[f] - f(\theta_0)| \leq \frac{\Xi_2}{\sqrt{N}} \text{ a.s.,}$$

where Ξ_1 is some positive random variable with $\Xi_1 < +\infty$ a.s. and Ξ_2 is some positive random variable with $\Xi_2 < +\infty$ a.s.

Remark 2.3 *From Assumption 2.1 (iii), we have a parameter tuning result which relates the number of data N , the number of time-steps used in the approximation process m , the number of the Monte-Carlo simulations n and the bandwidth size of the kernel density estimation h .*

3 Outline of Proof

First we introduce some notation. Let $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ be strictly positive functions of two variables. Then let

$$\begin{aligned} H(p, q) &:= \iint (\ln p(y, z)) q(y, z) \mu_{\theta_0}(y) dy dz, \\ Z_N(\theta) &:= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \{ \ln p_\theta(Y_i, Y_{i+1}) - H(p_\theta, p_{\theta_0}) \}, \\ \varepsilon(\theta) &:= H(p_\theta, p_{\theta_0}) - H(p_{\theta_0}, p_{\theta_0}), \\ \beta_N(\theta) &:= Z_N(\theta) - Z_N(\theta_0). \end{aligned}$$

And also we set;

$$\begin{aligned} \bar{Z}_N(\theta) &:= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} (\ln \hat{p}_\theta^N(Y_i, Y_{i+1}) - H(\bar{p}_\theta^N, \bar{p}_{\theta_0}^N)), \\ \bar{\varepsilon}^N(\theta) &:= H(\bar{p}_\theta^N, \bar{p}_{\theta_0}^N) - H(\bar{p}_{\theta_0}^N, \bar{p}_{\theta_0}^N), \\ \bar{\beta}_N(\theta) &:= \bar{Z}_N(\theta) - \bar{Z}_N(\theta_0). \end{aligned}$$

Set $\Theta_0 := \Theta \setminus \{\theta_0\}$. The following proposition states the properties that are needed to achieve the proof of Theorem 2.2

Proposition 3.1 *Under Assumption 2.1 and certain assumptions,*

(i). *There exist some strictly negative constant c_1, c_2 such that*

$$c_1 \leq \inf_{\theta \in \Theta_0} \frac{\varepsilon(\theta)}{(\theta - \theta_0)^2} \leq \sup_{\theta \in \Theta_0} \frac{\varepsilon(\theta)}{(\theta - \theta_0)^2} \leq c_2 < 0.$$

(ii). *There exist some random variable d_1, d_2 such that*

$$d_1 \leq \inf_N \inf_{\theta \in \Theta_0} \frac{\beta_N(\theta)}{\theta - \theta_0} \leq \sup_N \sup_{\theta \in \Theta_0} \frac{\beta_N(\theta)}{\theta - \theta_0} \leq d_2 \quad a.s.$$

(iii). *There exist some strictly negative constant c_3, c_4 such that*

$$c_3 \leq \inf_N \inf_{\theta \in \Theta_0} \frac{\bar{\varepsilon}^N(\theta)}{(\theta - \theta_0)^2} \leq \sup_N \sup_{\theta \in \Theta_0} \frac{\bar{\varepsilon}^N(\theta)}{(\theta - \theta_0)^2} \leq c_4 < 0.$$

(iv). *There exist some random variable d_3, d_4 such that*

$$d_3 \leq \inf_N \inf_{\theta \in \Theta_0} \frac{\bar{\beta}_N(\theta)}{\theta - \theta_0} \leq \sup_N \sup_{\theta \in \Theta_0} \frac{\bar{\beta}_N(\theta)}{\theta - \theta_0} \leq d_4 \quad a.s.$$

You can find the proof of this proposition in Kohatsu-Higa et al. [1]. We give the outline of the proof of Theorem 2.2 using the results of Proposition 3.1.

Idea of the Proof of Theorem 2.2. We decompose the approximation error as follows;

$$E_N[f] - \hat{E}_{N,m}^n[f] = \left(\frac{I_N(f) - f(\theta_0)I_N(1)}{I_N(1)} \right) - \left(\frac{\hat{I}_{N,m}^n(f) - f(\theta_0)\hat{I}_{N,m}^n(1)}{\hat{I}_{N,m}^n(1)} \right).$$

The goal is then to prove that there exists some random variable C_1 and C_2 such that

$$\left| \frac{I_N(f) - f(\theta_0)I_N(1)}{I_N(1)} \right| \leq \frac{C_1}{\sqrt{N}} \quad a.s., \quad \text{and} \quad \left| \frac{\hat{I}_{N,m}^n(f) - f(\theta_0)\hat{I}_{N,m}^n(1)}{\hat{I}_{N,m}^n(1)} \right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{N}} \quad a.s.$$

Indeed, we can write $I_N(f)$ and $\hat{I}_{N,m}^n(f)$ as follows;

$$\begin{aligned} I_N(f) &= e^{NH(p_{\theta_0}, p_{\theta_0}) + \sqrt{N}Z_N(\theta_0)} \int_{\Theta_0} f(\theta) e^{N\varepsilon(\theta) + \sqrt{N}\beta_N(\theta)} \mu_{\theta}(Y_0) \pi(\theta) d\theta, \\ \hat{I}_{N,m}^n(f) &= e^{NH(\hat{p}_{\theta_0}^N, \hat{p}_{\theta_0}^N) + \sqrt{N}\bar{Z}_N(\theta_0)} \int_{\Theta_0} f(\theta) e^{N\bar{\varepsilon}(\theta) + \sqrt{N}\bar{\beta}_N(\theta)} \mu_{\theta}(Y_0) \pi(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Then by using the Laplace method and Proposition 3.1, we have our conclusion. In fact, as N goes to infinity the leading term in the quotients $\frac{I_N(f)}{I_N(1)}$ and $\frac{\hat{I}_{N,m}^n(f)}{\hat{I}_{N,m}^n(1)}$ are determined by $\varepsilon(\theta)$ and $\bar{\varepsilon}(\theta)$ due to Proposition 3.1. Their behavior is similar to Gaussian integrals where the variance tends to zero and therefore the integrals will tend to the value in their ‘‘mean’’ which in this case is θ_0 as it follows from Proposition 3.1. Details can be found in Kohatsu-Higa et al. [1]. ■

References

- [1] A. Kohatsu-Higa, N. Vayatis, K. Yasuda, *Tuning of a Bayesian estimator under discrete observations and unknown transition density*, in preparation.

The Deuring-Shafarevich formula for a p -rank of Jacobi variety

塩見大輔 (名古屋大学)

素数 p を一つ固定し, \mathbb{F}_q を $q = p^e$ 個からなる有限体, $\overline{\mathbb{F}}_q$ をその代数的閉包とする. 有限体 \mathbb{F}_q 上の一変数代数関数体 K に対し, J_K を $K \cdot \overline{\mathbb{F}}_q$ の $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上のヤコビ多様体 (= 次数 0 の因子類群) とする. 任意の素数 l に対して, $J_K(l)$ を J_K の l -torsion group とする. アーベル多様体の理論から, $J_K(l)$ の群構造に関して次の結果が成り立つ.

$$J_K(l) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{2g_K} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & l \neq p \text{ のとき,} \\ \bigoplus_{i=1}^{\lambda_K} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & l = p \text{ のとき.} \end{cases} \quad (1)$$

ここで, g_K は K の種数であり, λ_K は K の Hasse-Witt 不変量と呼ばれる量である. 一般的に, 種数と Hasse-Witt 不変量の間には, $0 \leq \lambda_K \leq g_K$ という関係が成り立つ. 特に, $\lambda_K = 0$ のとき, K を super-singular と呼び, $\lambda_K = g_K$ のとき, K を ordinary と呼ぶ.

代数関数体の種数に関して, Riemman-Hurwitz の公式と呼ばれる古くから知られている次の関係式がある.

Theorem 1. (Riemman-Hurwitz の公式) 体 L を K の geometric な有限次分離拡大とすると,

$$2g_L - 2 = [L : K](2g_K - 2) + \deg_L D_{L/K}. \quad (2)$$

ただし, $D_{L/K}$ は L/K の different である.

特に, L/K を素数 l 次巡回拡大 ($l \neq p$) とすれば, $D_{L/K}$ を具体的に計算することができる.

$$2g_L - 2 = l(2g_K - 2) + \sum_{\mathcal{P}: \text{prime}} (e_{\mathcal{P}} - 1) \deg_L \mathcal{P}. \quad (3)$$

ただし, $e_{\mathcal{P}}$ は素点 \mathcal{P} の L/K における分岐指数である. 等式 (1) から, Riemman-Hurwitz の公式はヤコビ多様体の l -rank ($l \neq p$) に関する関係式とみなすことができる.

次に, ヤコビ多様体の p -rank について述べる. この場合, Riemman-Hurwitz の公式に比べると適用できる範囲が限られるが, 次の定理が知られている.

Theorem 2. (Deuring-Shafarevich の公式) 体 L を K の次数 p の geometric な cyclic-拡大とするととき,

$$\lambda_L - 1 = p(\lambda_K - 1) + \sum_{\mathcal{P}: \text{prime}} (e_{\mathcal{P}} - 1) \deg_L \mathcal{P}. \quad (4)$$

等式 (3) と比較すると, Riemman-Hurwitz の公式と酷似していることが分かる. 等式 (4) を繰り返し用いることで Galois p -拡大まで拡張することはできるが, 一般に non- p -拡大や non-Galois-拡大に関しては反例が知られている.

Deuring-Shafarevich の公式は, Deuring [De] によって L/K が分岐するケースで証明された (ただし, この論文にはいくつかの誤りがある). 不分岐のケースには, 1954 年に Shafarevich [Sha] が証明を与えている. 最終的には, Subrao [Su] が Artin-Scherier 曲線を調べることで, 分岐するケースも含めて完全な証明を与えている. 現在までに, Deuring-Shafarevich の公式に関して, いくつかの別証明が知られている.

本論文では, 合同ゼータ関数の零点の modulo p での関係式を用いた Deuring-Shafarevich の公式の別証明について述べる.

1 合同ゼータ関数

まず, 証明の準備として, 合同ゼータ関数の基本的性質について説明をする. 合同ゼータ関数の詳細については [Ro] を参考のこと.

有限体 \mathbb{F}_q 上の一変数代数関数体 K に対し, その合同ゼータ関数を

$$\zeta(s, K) = \prod_{\mathcal{P}: \text{prime}} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s}\right)^{-1} \quad (5)$$

と定義する. ただし, $\mathcal{N}\mathcal{P}$ は \mathcal{P} の剰余類体の元の個数とする. このとき, 上のオイラー積は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束し, その領域で正則関数となる. 合同ゼータ関数 $\zeta(s, K)$ は, 整数係数多項式 $Z_K(X)$ によって,

$$\zeta(s, K) = \frac{Z_K(q^{-s})}{(1 - q^{1-s})(1 - q^{-s})} \quad (6)$$

と表される. オイラーの積表示から $Z_K(0) = 1$ となるので, $Z_K(X)$ は次のように因数分解できる.

$$Z_K(X) = \prod_{i=1}^{2g_K} (1 - \pi_{i,K} X). \quad (7)$$

ただし, 各 $\pi_{i,K}$ は代数的整数である. 等式 (5), (6), (7) を合わせると,

$$\prod_{\mathcal{P}: \text{prime}} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s}\right)^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^{2g_K} (1 - \pi_{i,K} q^{-s})}{(1 - q^{1-s})(1 - q^{-s})} \quad (8)$$

を得る. この両辺に \log 微分を施し, q^{-s} のベキ級数の各係数を比較することで次の公式を得る.

$$q^N + 1 - \sum_{i=1}^{2g_K} (\pi_{i,K})^N = \sum_{\substack{P:\text{prime} \\ \deg_K P \mid N}} \deg_K P, \quad \text{for all } N \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

上の等式は, 代数関数体の次数の和という代数的な量と, 合同ゼータ関数の零点のベキ乗和という解析的な量とを結びつける重要な公式で, 関数体版の素数定理の証明にも使われる.

次に, Hasse-Witt 不変量と合同ゼータ関数の根との関係について述べる. まず, ord_p を p -進付値とし,

$$\gcd(d_K, p) = 1, \quad \text{ord}_p((\pi_{i,K})^{d_K} - 1) > 0 \quad (\text{for all } \pi_{i,K} \text{ with } \text{ord}_p(\pi_{i,K}) = 0) \quad (10)$$

を満たすように $d_K \in \mathbb{N}$ を一つ固定する. Hasse-Witt 不変量は, 等式 (6) によって定まる整数係数多項式 $Z_K(X)$ を用いて,

$$\lambda_K = \deg(Z_K(X) \pmod{p}) \quad (11)$$

と表すことができる. この事実と d_K の決め方から, $d_K \mid m$ を満たす自然数 m に対して,

$$\sum_{i=1}^{2g_K} (\pi_{i,K})^{mp^s} \longrightarrow \lambda_K \quad (s \rightarrow \infty) \quad (12)$$

が成り立つ. ただし, 上の式の極限は ord_p から定まる p -進距離によるものである.

2 Deuring-Shafarevich の公式の証明

このセクションでは, Deuring-Shafarevich の公式の証明について述べる. 体 L を K の次数 p の geometric な cyclic-拡大とする. また, 証明を簡略化するために, L/K を不分岐拡大と仮定する. このとき, L と K の素点の間には, 次の合同式が成り立つ.

Lemma 2.1. 自然数 m, s ($\gcd(m, p) = 1$) に対して,

$$\sum_{\substack{P \text{ in } L \\ \deg_L P \mid mp^s}} \deg_L P \equiv p \times \sum_{\substack{P \text{ in } K \\ \deg_K P \mid mp^s}} \deg_K P \pmod{p^s}. \quad (13)$$

上の合同式は, K の素点 P に対して, $\sum_{P \mid P} \deg_L P = p \times \deg_K P$ という事実を用いることで示される. また, 合同式は $\text{mod } p^s$ で等しいことから, s が大きくなるほど, p -進的に右辺と左辺が近づくことが分かる.

上の Lemma を用いて, Deuring-Shafarevich の公式を証明する. 自然数 m を $d_K \mid m$, $d_L \mid m$, $\gcd(m, p) = 1$ を満たすようにとる. 上の Lemma と等式 (9) を用いると, 自然数 s に対して,

$$q^{mp^s} + 1 - \sum_{i=1}^{2g_L} (\pi_{i,L})^{mp^s} \equiv p \times (q^{mp^s} + 1 - \sum_{i=1}^{2g_K} (\pi_{i,K})^{mp^s}) \pmod{p^s} \quad (14)$$

が成り立つ. このとき, s を大きくすると, 合同式の左辺と右辺は, それぞれ, p -進的に $1 - \lambda_L$, $p(1 - \lambda_K)$ に近づく. よって, $s \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\lambda_L - 1 = p(\lambda_K - 1) \quad (15)$$

を得る. これは, L/K が不分岐のケースでの Deuring-Shafarevich の公式と一致する.

Remark 2.1. 拡大 L/K が分岐する場合にも同様のアイデアで証明できるが, この場合は, Lemma 2.1 において, 分岐する素点がすべて和のなかに入るように自然数 m を取る必要がある.

Remark 2.2. 不分岐 p 拡大の場合は, Riemann-Hurwitz の公式と等式 (15) から K が ordinary であることと, L が ordinary であることが同値である.

参考文献

- [De] M. Deuring, Automorphismen und Divisorenklassen der Ordnung ι in algebraischen Funktionenkörpern, Math. Ann. **113** (1937), 208-215.
- [Ro] Rosen, Michael, Number Theory in Function Fields, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Sha] I. R. Shafarevich; On p -Extensions., Amer. Math. Soc. Trans. Series II, **4** (1954), 59-71.
- [Su] Subrao, Doré; The p -rank of Artin-Schreier curves. Manuscripta Math. **16** (1975), no. 2, 169-193.

Daisuke Shiomi (JSPS Research Fellow)
 Graduate School of Mathematics
 Nagoya University
 Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan
 Mail: m05019e@math.nagoya-u.ac.jp

On the global monodromy of a fibration of the Fermat surface of degree n

栗田 育子 (明治大学大学院理工学研究科)

4次元多様体を研究する”視点”として, 4次元多様体をリーマン面の退化族として捉える見方がある. このような研究は, 小平邦彦による種数 1 の特異ファイバー分類 (1963) や上野-浪川による種数 2 の特異ファイバーの分類 (1973) など, 代数幾何や複素多様体論において研究されてきた. その後, 位相的視点から松本-モンテシノスにより, 一般の種数 $g \geq 2$ の特異ファイバーの位相的分類がなされた (1991). しかしながら, リーマン面の退化族に関して, 今なお多くの未解決問題が残っている.

私の研究目的は, リーマン面の退化族とモノドロミーと呼ばれる負の擬周期写像との関連性を調べることである. 今後, 今回紹介する結果を足がかりにし, さらなる問題解決へと進んでいきたい.

まず初めに, リーマン面の退化に関する概念の定義や関連する結果を紹介する. 以下, M を複素曲面, B を複素曲線とする.

定義 1. 正則写像 $f: M \rightarrow B$ が種数 g のリーマン面の退化 (degeneration) であるとは, f が次の条件を満たすときを言う: (i) f は全射かつ proper である. (ii) 有限個の臨界値 $s_1, s_2, \dots, s_r \in B$ が存在する. (iii) もし $s \neq s_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) ならば, $f^{-1}(s)$ は種数 g のコンパクトリーマン面である.

$f^{-1}(s_i)$ を特異ファイバー (singular fiber), $f^{-1}(s)$ ($s \neq s_i$) を一般ファイバー (general fiber) と呼ぶ. $s_0 \neq s_i$ とし, $\gamma_i \subset B \setminus \{s_i\}$ を s_0 を基点とする臨界点 s_i のみを囲うループとする. すると, $f^{-1}(\gamma_i)$ は mapping torus であり, $f^{-1}(s_0)$ の自己同相写像 $\rho_i: f^{-1}(s_0) \rightarrow f^{-1}(s_0)$ を得る. この自己同相写像 ρ_i アイソトピー類を特異ファイバー $f^{-1}(s_i)$ の局所モノドロミー (local monodromy) と呼ぶ.

また, s_0 を固定し, 同相写像

$$\rho: \pi_1(B \setminus \{s_i\}, s_0) \rightarrow \mathcal{M}(f^{-1}(s_0))$$

を大域的モノドロミー (global monodromy) と呼ぶ. ここで, $\mathcal{M}(f^{-1}(s_0))$ は基点となる一般ファイバー $f^{-1}(s_0)$ の写像類群である.

大域的モノドロミーを決定することは大変難しく, 大域的モノドロミーを計算した例はあまりない. 知られている具体例においては, コンピューターを利用してモノドロミーを決定しているものがほとんどである.

今回, [1], [2], [5], [6] の中に現れる退化族のモノドロミーは n にはほぼ関わらず規則的な法則があることを発見し, コンピューターを使わずに大域的モノドロミーを決定した. その結果を紹介するとともに概要を説明する.

1 フェルマー曲面から $\mathbb{C}P^1$ への退化

はじめに、フェルマー曲面から $\mathbb{C}P^1$ への退化を定義する。この退化写像は 1990 年頃に松本幸夫氏によって問題提議されたものである。

複素曲面 $V_n := \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 : z_0^n - z_1^n - z_2^n + z_3^n = 0\}$ を次数 n のフェルマー曲面 (Fermat surface of degree n) と呼ぶ。 $\mathbb{C}P^1$ を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなして、 $f : V_n \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を次のように定義する：

$$f([z_0 : z_1 : z_2 : z_3]) := \begin{cases} z_2^{n-1}/z_0^{n-1} & \text{if } z_0 = z_1 \text{ and } z_2 = z_3, \\ (z_0 - z_1)/(z_2 - z_3) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mathbb{C}P^3$ の開被覆を $\mathbb{C}P^3 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$, ($U_i := \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 : z_0 \neq z_i\}$, $i = 1, 2, 3$, U_4 は $[1 : 1 : 1 : 1]$ の周りの開近傍) とし、次のように座標変換をする： $X := z_0/(z_0 - z_1)$, $Y := z_2/(z_0 - z_1)$, $Z := z_3/(z_0 - z_1)$. すると、 $V_n \cap U_1 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3 : X^n - (X-1)^n - Y^n + Z^n = 0\}$ であり $f : V_n \cap U_1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は次のように表される。

$$f(X, Y, Z) = 1/(Y - Z).$$

$s (\neq 0) \in \mathbb{C}$ に対して、ファイバーは $f^{-1}(s) \cap U_1 = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : g_s(X, Y) = 0\}$ である。ここで $g_s(X, Y) := X^n - (X-1)^n - Y^n + (Y-1/s)^n$ である。

$X_k := \nu_k/(\nu_k - 1)$ を $\frac{\partial g_s}{\partial X} = 0$ の解、 $Y_l := \tau_l/s(\tau_l - 1)$ を $\frac{\partial g_s}{\partial Y} = 0$ の解とする。ここで ν_k ($k = 1, 2, \dots, n-2$) と τ_l ($l = 1, 2, \dots, n-2$) は 1 以外の 1 の $(n-1)$ 乗根とする。さらに、 $s_{k,l}^{(j)}$ を $s^n = \left(\frac{\nu_k - 1}{\tau_l - 1}\right)^{n-1}$ ($j = 1, 2, \dots, n, k, l = 1, 2, \dots, n-2$) の解とする。すると $s_{k,l}^{(j)}$ は f の臨界値である。正則値 $s_0 (\neq s_{k,l}^{(i)}, 0, \infty)$ に対して一般ファイバー $f^{-1}(s_0)$ は種数 $(n-2)(n-3)/2$ の複素曲線である。尚、この退化に現れる特異ファイバーの位相的種類は、松本 [6] によって決定されている。

2 分岐被覆写像

次に、一般ファイバーの構成やモノドロミーの決定を行うために重要な分岐被覆写像を定義する。 $(n-1)$ 重分岐被覆写像 $p_s : f^{-1}(s) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$p_s(X, Y) := X$$

で定義する。 $X_j^{(l)}$ を $g_{s_0}(X, Y_l) = 0$ の解とすると、 $X_j^{(l)}$ は p_{s_0} の branch point である。

基点となる一般ファイバーを構成するためには、 X を基点 X_0 から各 branch points $X_j^{(l)}$ へ動かしたときの $g_{s_0}(X, Y) = 0$ の解の軌道を調べればよい。また、モノドロミーを求めるために、 s を s_0 から f の臨界点に動かしたときの分岐被覆写像の branch point の軌道を追跡する。

3 基点となる一般ファイバーの決定

核となる定理の証明をし、分岐被覆写像の branch point の位置を決定する。その後、基点となる一般ファイバー $f^{-1}(s_0)$ を構成するためのモノドロミーデータを決定する。以下、 n を奇数と仮定する。 (n が偶数の場合も同様の結果を得るため、省略する。)

核となる定理は以下である：

定理 2. $X_0 = 1/2$ とし, $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}$ を $g_{s_0}(X_0, Y) = 0$ の解とする. そのとき, s_0 が十分小さい正の実数ならば, $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}$ は直線 $\{Y \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} Y = 1/2s_0\}$ 上に $\operatorname{Im} Y^{(1)} > \operatorname{Im} Y^{(2)} > \dots > \operatorname{Im} Y^{(n-1)}$ の順に並ぶ. さらに, 直線上で $Y^{(l)}$ と $Y^{(l+1)}$ の間に Y_l が存在する.

簡単のため $\Psi(X) = X^n - (X-1)^n$ とおく. この核となる定理の証明のアイデアを説明する. $\bar{\phi}_{X_0}(v) := g_{s_0}(X, 1/2 + iv)$ とおく. ここで s_0 は実数とする. $X_0 = 1/2$ のとき, $\Psi(X_0)$ は実数であり, $w = \bar{\phi}_{X_0}(v)$ は \mathbb{R}^2 上にグラフを描くことができる. このグラフ $w = \bar{\phi}_{X_0}(v)$ と w 軸との交点が $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}$ であり, $Y^{(l)}$ たちは順番に直線 $\{Y \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} Y = 1/2s_0\}$ 上に並ぶことがわかる.

曲線 $C = \{X : \operatorname{Im} \Psi(X) = 0\}$ とおく. また, $C = L \cup H$ と表す. ここで $L := \{X = x + yi : x = 1/2\}$, $H = \{X = x + yi : h(x, y) = 0\}$ ($h(x, y)$ は多項式) である. B_k を直線 L と点 X_k で交差する曲線 H の連結成分とする. さらに $B_{k,+} := \{X \in B_k : \operatorname{Re} X > 1/2\}$, $B_{k,-} := \{X \in B_k : \operatorname{Re} X < 1/2\}$, $B_+ := \{X \in L : \operatorname{Im} X > \operatorname{Im} X_1\}$, $B_- := \{X \in L : \operatorname{Im} X < \operatorname{Im} X_{n-2}\}$ とおく. $B_{k,+}$, $B_{k,-}$, B_+ , B_- たちを曲線 C の枝 (branch) と呼ぶ. 正則値 s_0 を十分小さい正の実数とすると, 以下の結果を得る.

命題 3. branch points $X_j^{(l)}$ と X_k の位置は, 以下の通りである：

- (I) k が奇数の場合, $X_k^{((n-3)/2)}, X_k^{((n-7)/2)}, \dots, X_k^{(3)}, X_k^{(1)}$ (resp. $X_{k+1}^{((n-3)/2)}, X_{k+1}^{((n-7)/2)}, \dots, X_{k+1}^{(3)}, X_{k+1}^{(1)}$) は k 番目の枝 $B_{k,+}$ (resp. $B_{k,-}$) 上にこの順序で位置している.
- (II) k が偶数の場合, $X_k^{((n-1)/2)}, X_k^{((n-5)/2)}, \dots, X_k^{(4)}, X_k^{(2)}$ (resp. $X_{k+1}^{((n-1)/2)}, X_{k+1}^{((n-5)/2)}, \dots, X_{k+1}^{(4)}, X_{k+1}^{(2)}$) は k 番目の枝 $B_{k,+}$ (resp. $B_{k,-}$) 上にこの順序で位置している.
- (III) $X_1^{((n-1)/2)}, X_1^{((n-5)/2)}, \dots, X_1^{(4)}, X_1^{(2)}$ (resp. $X_{n-1}^{((n-1)/2)}, X_{n-1}^{((n-5)/2)}, \dots, X_{n-1}^{(4)}, X_{n-1}^{(2)}$) は B_+ (resp. B_-) 上にこの順序で位置している.

さらに, $X_0 = 1/2$ とする. X を曲線 C に沿って X_0 から $X_j^{(l)}$ へ動かすことにより, Y についての方程式 $g_{s_0}(X, Y) = 0$ の解の動きを目で見ることができる. よって, 次の定理を得る：

定理 4. $g_{s_0}(X_0, Y) = 0$ の解 $Y^{(l)}$ たちの入れ替わりは以下である：

- (I) 曲線 C 上の X_0 から $X_j^{(l)}$ ($1 \leq l < (n-1)/2$) への道 $\gamma_j^{(l)}$ に対して, $Y^{(l)}$ たちの入れ替わりは $(l, l+1), (n-1-l, n-l)$.
- (II) 曲線 C 上の X_0 から $X_j^{((n-1)/2)}$ への道 $\gamma_j^{((n-1)/2)}$ $Y^{(l)}$ たちの入れ替わりは $((n-1)/2, (n-1)/2+1)$.

この定理は, 基点となる一般ファイバーの $f^{-1}(s_0)$ のトポロジカルデータを与えている.

4 大域的モノドロミーの決定

最後に, f のグローバルモノドロミーのトポロジカルデータを決定する. 簡単のため, $S = 1/s^n$, $S_{k,l} = 1/(s_{k,l}^{(j)})^n$ とおく. S が実数であるように動かすことにより, X についての方程式 $g_S(X, Y_l) = 0$ の解の動きを追跡することができる. 主定理は以下である.

定理 5. branch point $X_j^{(l)}$ たちの入れ替わりは以下である :

- (I) $S_{k,l} > 0$ の場合 (つまり, k と l が両方奇数 (もしくは両方偶数), 枝 $B_{k,+}$ と $B_{k,-}$ (resp. $B_{n-1-k,+}$ と $B_{n-1-k,-}$) 上の 2 つの branch points $X_k^{(l)}$ と $X_{k+1}^{(l)}$ (resp. $X_{n-1-k}^{(l)}$ と $X_{n-2-k}^{(l)}$) が点 X_k (resp. X_{n-1-k}) でぶつかる.
- (II) $k (\neq 1, \neq n-2)$ が奇数かつ l が偶数 ($S_{k,l} < 0$) の場合, 枝 $B_{k+1,+}$ と $B_{k-1,-}$ (resp. $B_{n-k,+}$ と $B_{n-k-2,-}$) 上の 2 つの branch points $X_{k+1}^{(l)}$ と $X_k^{(l)}$ (resp. $X_{n-k}^{(l)}$ と $X_{n-1-k}^{(l)}$) が点 X_k (resp. X_{n-k-1}) でぶつかる.
- (III) k が偶数かつ l が奇数の場合, 枝 $B_{k+1,+}$ and $B_{k-1,-}$ (resp. $B_{n-k,+}$ と $B_{n-k-2,-}$) 上の 2 つの branch points $X_{k+1}^{(l)}$ と $X_k^{(l)}$ (resp. $X_{n-k}^{(l)}$ と $X_{n-1-k}^{(l)}$) が点 X_k (resp. X_{n-k-1}) でぶつかる.
- (IV) $k = 1$ (resp. $n-2$) かつ l が偶数の場合, 枝 B_+ と $B_{2,+}$ (resp. $B_{n-3,-}$ と B_-) 上の 2 つの branch points $X_1^{(l)}$ と $X_2^{(l)}$ (resp. $X_{n-2}^{(l)}$ と $X_{n-1}^{(l)}$) が点 X_1 (resp. X_{n-2}) でぶつかる.
- (V) $S = 0$ の場合, branch point たちは, $\Psi(X) = 0$ の解でぶつかる.

参考文献

- [1] K.Ahara, *On the Topology of Fermat Type Surface of Degree 5 and the Numerical Analysis of Algebraic Curves*, Tokyo Journal of Mathematics vol.16, no.2, (1993) pp.321-340
- [2] K.Ahara, *On the Monodromy Homomorphism from the Fibering structure of Fermat Type Surface of Degree 6*, MIMS Technical Report, Meiji Univ, no.24,(2000)
- [3] K.Ahara and I.Awata, *On the Global Monodromy of a Fibration of the Fermat Surface of Odd Degree n* , preprint, (2009)
- [4] Y.Kuno, *On the Global Monodromy of a Lefschetz Fibration Arising from the Fermat Surface of Degree 4*, preprint, (2009)
- [5] Y.Matsumoto, *On the Topological Structure of the Fermat Surface of Degree 5*, Kodai. Math. vol.17, no.3 (1994) pp.560-570
- [6] Y.Matsumoto, *On the Fibering Structure of the Fermat Surface*, Proceeding of algebraic geometry and topology of Hodge theory, degenerations and complex surface, (2004), in Japanese
- [7] Y.Matsumoto and J.M.Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic Homeomorphism and Degeneration of Riemann Surfaces*, Bull. AMS. 30, (1994), pp.70-75
- [8] Y.Matsumoto and J.M.Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic Maps and Degeneration of Riemann Surfaces, I, II*, Preprint, University of Tokyo and Universidad Complutense de Madrid, (1991/1992)

Universal coverings and Schur multipliers of loop groups

浅井 康友 (筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻)

1 普遍中心拡大、Schur multiplier

はじめに群の普遍中心拡大および Schur multiplier について定義と基本的な性質を述べる。詳しくは [4] など参照してほしい。以下この節において G は完全群 (G の交換子群が G 自身であるような群) であると仮定する。群 E と全射群準同型 $\varphi: E \rightarrow G$ の組 (E, φ) が G の中心拡大であるとは $\text{Ker } \varphi$ が E の中心 $Z(E)$ に含まれることを言う。中心拡大の中で最も普遍的なものが普遍中心拡大である。

定義 1.1. (E, φ) を G の中心拡大とする。 (E, φ) が普遍中心拡大であるとは、 E が完全群で、任意の G の中心拡大 (E', φ') に対して、 $\varphi = \varphi' \circ \rho$ を満たす群準同型 $\rho: E \rightarrow E'$ が一意的に存在することを言う。

定理 1.2. (a) 完全群 G に対して普遍中心拡大 (\widehat{G}, φ_G) が存在する。普遍中心拡大は同型を除いて一意に定まる ($\text{Ker } \varphi_G$ を G の Schur multiplier といい、 $M(G)$ と書く)。

(b) (E, φ) を G の中心拡大とし E は完全群とする。 (E, φ) が普遍中心拡大であるための必要十分条件は $\widehat{E} \simeq E$ 、すなわち (E, id_E) が E の普遍中心拡大であることである。

(c) (E, φ) を G の中心拡大とすると $\varphi_G = \varphi \circ \psi$ となる $\psi: \widehat{G} \rightarrow E$ が一意に定まる。このとき E が完全群であれば (\widehat{G}, ψ) は E の普遍中心拡大である。

2 Loop 群および Steinberg 群

\mathfrak{g} を複素数体 \mathbb{C} 上の有限次元単純リー代数とし、その Cartan 部分代数 \mathfrak{h} を一つとって固定する。 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ (\mathfrak{h} の双対空間) に対して $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x\}$, $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ とすると \mathfrak{g} はルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

をもつ。 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ である。 Φ を \mathfrak{g} のルート系という。 Φ に対して、ルート系の底と呼ばれる \mathfrak{h}^* の底 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Phi$ が存在して、任意の $\alpha \in \Phi$ は $\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_l\alpha_l$ ($k_1, \dots, k_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ または $\mathbb{Z}_{\leq 0}$) と表すことができる (l を Φ の rank という)。

一般に \mathfrak{h}^* の非退化な双一次形式 $(-, -)$ が、 \mathfrak{g} の非退化な双一次形式 (キリング形式) から定まる。 $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して、 $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ とおくと $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ となる。 Φ (さらには \mathfrak{g}) の構造は $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ によって同型を除いて一意に定まり、 Φ は $A_l (l \geq 1), B_l (l \geq 3), C_l (l \geq 2), D_l (l \geq 4), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ のいずれかの型であることが知られている。 \mathfrak{g} に対して、その構造定数が全て整数となるような特別な基底 (Chevalley 底) $\{e_\alpha, h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \leq i \leq l\}$ をとることができる。

V を有限次元ベクトル空間、 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を \mathfrak{g} の忠実な表現とする。 $V_\mu = \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}, \rho(h).v =$

$\mu(h)v, \Lambda = \{\mu \in \mathfrak{h}^* | V_\mu \neq \{0\}\}$ とすると V はウェイト空間分解

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} V_\mu$$

をもつ。 L_ρ を $\mu \in \Lambda$ によって \mathbb{Z} 上生成される \mathfrak{h}^* の部分加群とすれば、 L_ρ は \mathfrak{h}^* の lattice となる。 ρ と Chevalley 底 $\{e_\alpha, h_i\}$ を用いて、Chevalley-Demazure 群スキーム $G_\rho(\Phi, -)$ と呼ばれる (1 をもつ) 可換環から群への表現可能共変関手が構成される [1]。 $G_\rho(\Phi, -)$ は、 Φ と L_ρ によって同型を除いて一意的に定まる。今、 L_Λ が一番大きくなるように (すなわち基本ウェイト lattice となるように) ρ をとり、 ρ から定まる Chevalley-Demazure 群スキームを $G_{sc}(\Phi, -)$ とする。可換環 R に対して $G_{sc}(\Phi, R)$ を R 上の (universal) Chevalley 群という。特に R が体 F 上の Laurent 多項式環 $F[X, X^{-1}]$ のとき、 $G_{sc}(\Phi, R)$ を F 上の Loop 群という。 Φ が A_l, C_l 型るとき、 $G_{sc}(\Phi, -)$ はそれぞれ $SL_{l+1}(-), Sp_{2l}(-)$ と同型であることが知られているので、例えば Φ が A_1 型であれば $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]) \simeq SL_2(F[X, X^{-1}])$ となる。環 R が体 F や F 上の Laurent 多項式環 $F[X, X^{-1}]$ の場合、 $G_{sc}(\Phi, R)$ は以下のような群表示をもつ。

定理 2.1 ([2][7]). R を体 F または Laurent 多項式環 $F[X, X^{-1}]$ とする。 $G_{sc}(\Phi, R)$ は $x_\alpha(r)$ ($\alpha \in \Phi, r \in R$) を生成元とし、以下の (A),(B),(B'),(C) を基本関係としてもつような群と同型である。

(A) $x_\alpha(s)x_\alpha(t) = x_\alpha(s+t);$

(B) $[x_\alpha(s), x_\beta(t)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij} s^i t^j);$

(B') $w_\alpha(u)x_\beta(s)w_\alpha(u)^{-1} = x_{\beta'}(\eta_{\alpha\beta} u^{\langle \alpha, \beta \rangle} s)$ ($w_\alpha(u) = x_\alpha(u)x_{-\alpha}(-u^{-1})x_\alpha(u)$);

(C) $h_\alpha(u)h_\alpha(v) = h_\alpha(uv)$ ($h_\alpha(u) = w_\alpha(u)w_\alpha(-1)$).

ここで、 $s, t \in R, u, v \in R^\times$ (R の単元群), $\alpha, \beta \in \Phi, \beta' = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha$ である。(B) の右辺の積は $i\alpha + j\beta \in \Phi$ となる $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$ 全体をとり、 $N_{\alpha\beta ij}$ は \mathfrak{g} の構造にのみ依存して定まる定数である。また、 $\eta_{\alpha\beta} = \pm 1$ で $\eta_{\alpha\beta}$ は \mathfrak{g} の Chevalley 底のとり方に依存して定まる定数である ($G_{sc}(\Phi, R)$ は Chevalley 底のとり方によらない)。

定義 2.2. $\bar{x}_\alpha(r)$ ($\alpha \in \Phi, r \in R$) を生成元とし、定理 2.1 の (A),(B),(B') を基本関係として定義される群 $St(\Phi, R)$ を R 上の Steinberg 群という。

定理 2.3. R を体 F または Laurent 多項式環 $F[X, X^{-1}]$ とする。このとき $\pi : St(\Phi, R) \rightarrow G_{sc}(\Phi, R)$ ($\bar{x}_\alpha(r) \mapsto x_\alpha(r)$) は全射準同型であり、中心拡大でもある ($\text{Ker } \pi$ を $K_2(\Phi, R)$ と書く)。

3 研究と今後の課題

下の図式からもわかるように $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ と $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ 、あるいは $M(G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ と $M(St(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ は、 $K_2(\Phi, F[X, X^{-1}])$ を介して密接に結びついている。したがって両者の研究を並行して進めることが重要となる。

Figure1 (各列は完全列)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & K_2(\Phi, F[X, X^{-1}]) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & M(St(\Phi, F[X, X^{-1}])) & \rightarrow & \widehat{St}(\Phi, F[X, X^{-1}]) & \rightarrow & St(\Phi, F[X, X^{-1}]) \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & M(G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])) & \rightarrow & \widehat{G}_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]) & \rightarrow & G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]) \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K_2(\Phi, F[X, X^{-1}]) & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & & &
 \end{array}$$

rank $\Phi \geq 3$ の場合、 $F \neq F_2, F_3$ であれば $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ は $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大である。なぜなら一般に次の定理が知られているからである。

定理 3.1 ([4]). rank $\Phi \geq 3$, R を 1 をもつ可換環とする。また $\Phi = C_3, F_4$ のときは R が F_2 と同型な剰余体をもたないとし、 $\Phi = A_3, B_3, D_4$ のときは $R = \langle u^2 - 1 | u \in R^\times \rangle$ であるとする。このとき $\widehat{St}(\Phi, R) \simeq St(\Phi, R)$ である。

rank $\Phi < 3$ の場合についても F の位数が十分大きいときは [3]、[7] と同様に $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大は $(St(\Phi, F[X, X^{-1}]), id)$ となる。しかし例えば、 $\Phi = A_1, F = F_4, F_9$ のときは $(St(\Phi, F[X, X^{-1}]), id)$ は普遍中心拡大とはならない ($\widehat{St}(A_1, F_4) \not\simeq St(A_1, F_4), \widehat{St}(A_1, F_9) \not\simeq St(A_1, F_9)$ から容易に導かれる)。

上の定理からも分かるように、多くの場合に $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ は $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大で、その群表示は定義 2.2 で与えられる。しかし、rank Φ や体 F の位数が小さい場合、 $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ が $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大になるとは限らない。私は体の位数が小さい場合でも統一的に記述できるような、普遍中心拡大の群表示を与えたいと考えた。 $\Phi = A_1$ の場合については、 $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大が以下のような群表示をもつことを示した。

定理 3.2. $\Phi = A_1$ 、 F を位数が 4 以上の体とし、 $a, a^2, (a^2 - 1) \in F^\times$ となる a を一つとって固定する。このとき $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大は、 $\bar{x}_\alpha(r)$ ($\alpha \in \Phi, r \in F[X, X^{-1}]$) を生成元とし、以下の $(B'), (\theta 1), (\theta 2), (\theta 3)$ を基本関係としてもつ群と同型ある。

$$(B') \quad w_\alpha(u) \bar{x}_\beta(s) w_\alpha(u)^{-1} = \bar{x}_{\beta'}(\eta_{\alpha\beta} u^{(\alpha, \beta)} s) \quad (\eta_{\alpha\beta} \text{ は定理 2.1 と同じ});$$

$$(\theta 1) \quad [\theta_\alpha(s, t), \bar{x}_\beta(r)] = 1;$$

$$(\theta 2) \quad \theta_\alpha(s, r) \theta_\alpha(t, r) = \theta_\alpha(s + t, r);$$

$$\theta_\alpha(s, t) \theta_\alpha(s, r) = \theta_\alpha(s, t + r);$$

$$(\theta 3) \quad [\bar{x}_\alpha(s), \bar{x}_\alpha(t)] = \theta_\alpha((a^2 - 1)t, s).$$

ここで、 $s, t, r \in F[X, X^{-1}], u \in F[X, X^{-1}]^\times, \alpha, \beta \in \Phi, \theta_\alpha(s, t) = \bar{x}_\alpha(s) \bar{x}_\alpha(t) \bar{x}_\alpha(s + t)^{-1}$ である。

F の位数が 2 または 3 のとき、 $G_{sc}(A_1, F[X, X^{-1}])$ は完全群ではないことが知られているので、 $G_{sc}(A_1, F[X, X^{-1}])$ が完全群である (普遍中心拡大をもつ) ような全ての場合において、その群表示は上の定理のように与えられることが分かる。

$St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ が $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大であるとき、 $M(G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])) \simeq K_2(\Phi, F[X, X^{-1}])$ である。 $K_2(\Phi, F[X, X^{-1}])$ については以下のような群表示 (Matsumoto type presentation) が知られている。 $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ が $G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の普遍中心拡大でない場合に $M(G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ の群表示を決定することも今後の課題である。

定理 3.3 ([5]). F を任意の体とする。このとき $K_2(\Phi, F[X, X^{-1}])$ は $\hat{C}_{\alpha_i}(u, v)$ ($\alpha \in \Pi, u, v \in F[X, X^{-1}]$) を生成元とし、以下の (M1) から (M7) を基本関係としてもつ群と同型である。

$$(M1) \hat{C}_{\alpha_i}(u, v)\hat{C}_{\alpha_i}(uv, w) = \hat{C}_{\alpha_i}(u, vw)\hat{C}_{\alpha_i}(v, w);$$

$$(M2) \hat{C}_{\alpha_i}(u, 1) = \hat{C}_{\alpha_i}(1, v) = 1;$$

$$(M3) \hat{C}_{\alpha_i}(u, v) = \hat{C}_{\alpha_i}(v^{-1}, u);$$

$$(M4) \hat{C}_{\alpha_i}(u, v) = \hat{C}_{\alpha_i}(u, -uv);$$

$$(M5) \hat{C}_{\alpha_i}(u, v) = \hat{C}_{\alpha_i}(u, (1-u)v) \text{ (if } 1-u \in F^*);$$

$$(M6) \hat{C}_{\alpha_i}(u, v^{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}) = \hat{C}_{\alpha_j}(u^{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}, v) \text{ (これを } \hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(u, v) \text{ と書く);}$$

$$(M7) \hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(u, vw) = \hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(u, v)\hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(u, w) \text{ (}\hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(uv, w) = \hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(u, w)\hat{C}_{\alpha_i \alpha_j}(v, w)\text{)}.$$

ここで、 $u, v, w \in F[X, X^{-1}]^\times, \alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ である。

群表示ではなく、 $M(G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ や $M(St(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ のアーベル群としての詳細な構造を決定することも重要である。体 F 上の Chevalley 群については、すでに決定されており、[6] で表にまとめられている。 $M(G_{sc}(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ や $M(St(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ に対して、このような表を完成させることも今後の目標である。 $M(St(\Phi, F[X, X^{-1}]))$ については [4],[8] あるいは [3] から、10 個の場合を除いて全て求めることができる。

Table1 $St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ の Schur multiplier($St(\Phi, F[X, X^{-1}])$ が完全群でない場合を除く)

Φ	F	Schur multiplier	Φ	F	Schur multiplier
A_1	F_4, F_5, F_9	未決定	C_3	F_2	\mathbb{Z}_2
A_2	F_2, F_3, F_4	未決定	D_4	F_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
A_3	F_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	F_4	F_2	\mathbb{Z}_2
B_3	F_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	G_2	F_3, F_4	未決定
	F_3	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	その他		1
C_2	F_3, F_4	未決定			

参考文献

- [1] E. Abe, Chevalley groups over local rings, Tôhoku Math. J. 21(1979), 474-494.
- [2] E. Abe and J. Morita, Some Tits systems with affine Weyl groups in Chevalley groups over Dedekind domains, J. Algebra 115(1988), 450-465.
- [3] J. Morita and U. Rehmann, A Matsumoto-type theorem for Kac-Moody groups, Tôhoku Math. J. 42(1990), 537-560.
- [4] Michael R. Stein, Generators, relations and Coverings of Chevalley groups over commutative rings, Amer. J. Math. 93(1971), 965-1004.
- [5] M. Tomie, Group presentation of the Schur-multiplier derived from a loop group, Tsukuba J. Math 31(2007), 355-395.
- [6] Robert L. Griess. JR., Schur multipliers of the known finite simple groups, Bull. Amer. Math. Soc., 78(1972), 68-71.
- [7] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale University, 1967.
- [8] van der Kallen, W. and Michael R. Stein, On the Schur multipliers of Steinberg and Chevalley groups over commutative rings, Math. Z. 155(1977), 83-94.

回転対称性を考慮した核融合プラズマの3次元境界形状逆推定

Rotational symmetry in 3-D fusion plasma boundary shape identification

北海道大学大学院工学研究科, 核融合科学研究所*

石丸武志, 前田忠昭, 松山哲士, 板垣正文, 鈴木康浩*, 渡邊清政*

Abstract:

A 3-D Cauchy-condition surface method is now under development to evaluate the plasma boundary shape in a nuclear fusion device. The number of unknowns in such a 3-D analysis is quite large. The authors have developed a new method to reduce the number of unknowns to $1/n$ when the geometry has an n -fold rotational symmetry in the toroidal direction. Results of test calculations demonstrate the validity of the present formulation.

1. 背景

トーラス形状をした核融合装置では、プラズマ境界形状を知ることが運転制御上極めて重要となる。プラズマ温度は1億度を超えるため、プラズマ外部に配置した磁気センサーの信号から間接的にプラズマ境界形状を逆解析するという手法が採られる。

核融合装置には、トカマク型とヘリカル型がある。トカマク型のプラズマは回転軸対称形状をしており、2次元問題に近似できる。この場合は、磁気センサー信号からプラズマの位置と形状を同定するためにCauchy条件面法^[1,2]と呼ばれる手法が確立されている。一方、ヘリカル型などの非軸対称プラズマは3次元問題として扱わなくてはならないが、Cauchy条件面法が3次元問題に拡張された例はない。2次元Cauchy条件面法に比べて未知数の数が増大する一方で、配置できる磁気センサーの数には限りがある。

本研究では、ヘリカル型装置のプラズマが回転軸対称ではないものの、 $1/n$ 回転対称性を持つことに注目した。ヘリカル形状をトロイダル方向に n 分割し、分割後の一領域のみを取り出してモデル化すれば、磁気センサーの数に比する未知数の数を低減できる。これによって、計算コストの削減のみならず逆解析解の精度向上を目的とした。

2. 定式化

開発中の3次元CCS法^[3]は、デカルト座標系でのベクトル・ポテンシャル(A_x, A_y, A_z)を用いて定式化する。図1に示すように、円筒座標系におけるベクトル・ポテンシャルの成分 A_r, A_ϕ と A_x, A_y には

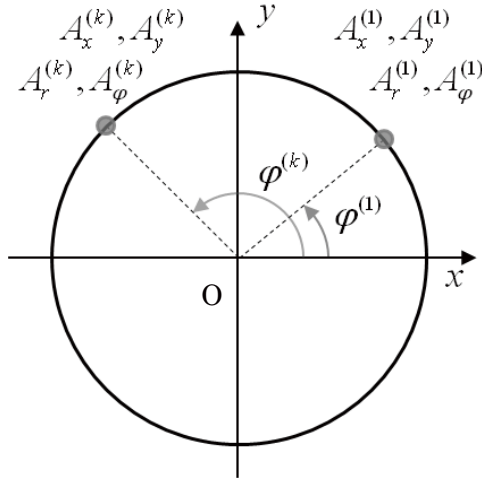


図1 ベクトル・ポテンシャルの回転変換

$$\begin{pmatrix} A_r^{(1)} \\ A_\phi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi^{(1)} & \sin \varphi^{(1)} \\ -\sin \varphi^{(1)} & \cos \varphi^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} A_x^{(k)} \\ A_y^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi^{(k)} & -\sin \varphi^{(k)} \\ \sin \varphi^{(k)} & \cos \varphi^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^{(k)} \\ A_\phi^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

のように、トロイダル角 $\varphi^{(1)}$ を介した関係がある。 A_r, A_ϕ が回転対称性を保って部分(1)から部分(k)へ写像されるとき、 $A_r^{(k)} = A_r^{(1)}, A_\phi^{(k)} = A_\phi^{(1)}$ であるから、式(1)を式(2)に代入して三角関数の加法定理を適用すれば、回転角を $\Delta\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)} - \varphi^{(1)}$ と記すとき、

$$\begin{pmatrix} A_x^{(k)} \\ A_y^{(k)} \\ A_z^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi^{(k)} & -\sin \Delta\varphi^{(k)} & 0 \\ \sin \Delta\varphi^{(k)} & \cos \Delta\varphi^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \\ A_z^{(1)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

の1次変換形式を得る。当然ながら、 $A_z^{(k)} = A_z^{(1)}$ である。式(3)は A_x, A_y, A_z を x, y, z 座標表示のまま部分(1)から部分(k)へ写像できることを示している。

3次元 CCS 法で使われる境界積分方程式は、 \mathbf{u}, \mathbf{q} 内の各成分を

$$\mathbf{u} = \{A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)}, \dots, A_x^{(k)}, A_y^{(k)}, A_z^{(k)}\}^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{q} = \left\{ \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial n}, \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial n}, \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial n}, \dots, \frac{\partial A_x^{(k)}}{\partial n}, \frac{\partial A_y^{(k)}}{\partial n}, \frac{\partial A_z^{(k)}}{\partial n} \right\}^T \quad (5)$$

とした時、

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gu} \quad (6)$$

の行列方程式に離散化される。左辺のみに注目すると、 $1/n$ 回転対称性を持つ時、

$$\mathbf{Hu} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1,3n-2} & H_{1,3n-1} & H_{1,3n} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots & H_{2,3n-2} & H_{2,3n-1} & H_{2,3n} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & \cdots & H_{3,3n-2} & H_{3,3n-1} & H_{3,3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{l,1} & H_{l,2} & H_{l,3} & \cdots & H_{l,3n-2} & H_{l,3n-1} & H_{l,3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{L-1,1} & H_{L-1,2} & H_{L-1,3} & \cdots & H_{L-1,3n-2} & H_{L-1,3n-1} & H_{L-1,3n} \\ H_{L,1} & H_{L,2} & H_{L,3} & \cdots & H_{L,3n-2} & H_{L,3n-1} & H_{L,3n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \\ A_z^{(1)} \\ \vdots \\ A_x^{(n)} \\ A_y^{(n)} \\ A_z^{(n)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。\$L\$はコーシー条件面上の節点数および磁気センサー信号データの個数で決まる行列の行数である。右辺ベクトルに式(3)を適用すれば、\$A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)}\$のみで記述することができる。行列の\$l\$行目を例にとれば、

$$(\mathbf{Hu})_l = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n (H_{l,3k-2} \cos \Delta\varphi^{(k)} + H_{l,3k-1} \sin \Delta\varphi^{(k)}), \\ \sum_{k=1}^n (-H_{l,3k-2} \sin \Delta\varphi^{(k)} + H_{l,3k-1} \cos \Delta\varphi^{(k)}), \\ \sum_{k=1}^n H_{l,3k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \\ A_z^{(1)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。式(6)右辺の\$\mathbf{Gu}\$についても同様である。以上の定式化により、回転角\$\Delta\varphi^{(k)}\$のみを与えることで元の行列\$\mathbf{H}, \mathbf{G}\$の列数と未知数の数を\$1/n\$に減少させることができる。

境界積分方程式中の特異点\$i\$がコーシー条件面に置かれている場合は、\$A_x, A_y, A_z\$のそれぞれ独立に方程式を立て、かつ、いずれについても同一の基本解を使うので、式(7)中で

$$\mathbf{Hu}^{\text{CCS}} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 & \cdots & H_{1,3n-2} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & \cdots & 0 & H_{2,3n-1} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & \cdots & 0 & 0 & H_{3,3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{3n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & H_{3n-2,3n-2} & 0 & 0 \\ 0 & H_{3n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & H_{3n-1,3n-1} & 0 \\ 0 & 0 & H_{3n,3} & \cdots & 0 & 0 & H_{3n,3n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \\ A_z^{(1)} \\ \vdots \\ A_x^{(n)} \\ A_y^{(n)} \\ A_z^{(n)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

のように\$3n \times 3n\$の正方行列を構成している。\$A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)}\$に対応させれば、

$$\mathbf{Hu}_{123}^{\text{CCS}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n (H_{1,3k-2} \cos \Delta\varphi^{(k)}) & \sum_{k=1}^n (-H_{1,3k-2} \sin \Delta\varphi^{(k)}) & 0 \\ \sum_{k=1}^n (H_{2,3k-1} \sin \Delta\varphi^{(k)}) & \sum_{k=1}^n (H_{2,3k-1} \cos \Delta\varphi^{(k)}) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^n H_{3,3k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} \\ A_y^{(1)} \\ A_z^{(1)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる。

3. 数値計算例

核融合科学研究所の大型ヘリカル装置 LHD は 1/5 回転対称性を持つ。回転対称性を考慮した 3 次元 CCS 法コードにより磁場分布を再構築した。図 2 に $\varphi=18^\circ$ のポロイダル断面における磁場の φ 成分の等高線を示す。左図(a)は、3 次元磁気流体平衡コード HINT^[4]による基準解であり、右図(b)は本解析結果である。CCS 法ではプラズマの外部においてのみ物理的に意味のある解を与えるので、プラズマ境界内の磁場は 0 として描いている。

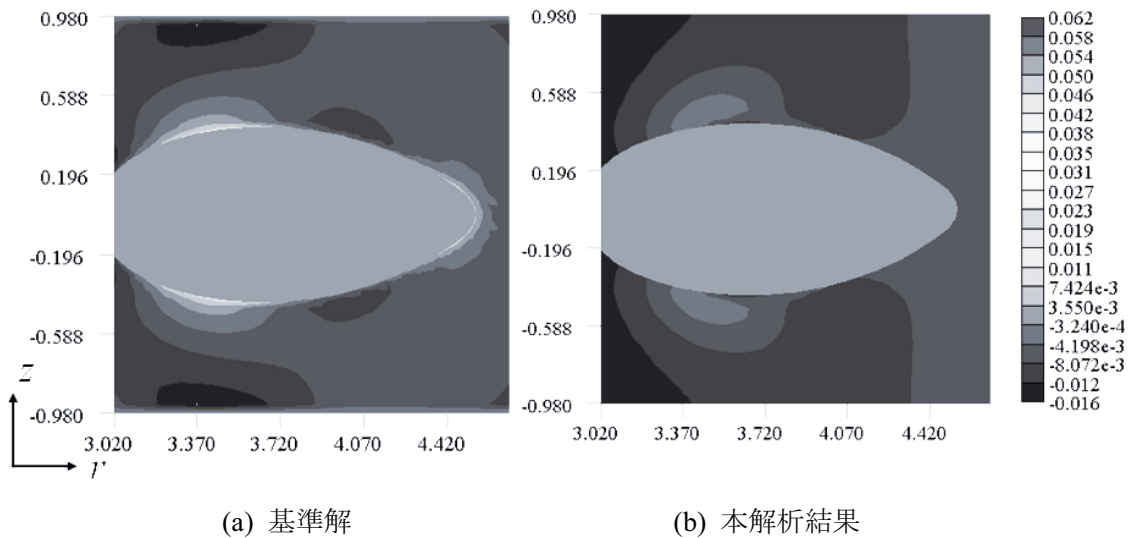


図 2 磁場成分 B_φ の等高線図

HINT コードにより得られた基準解と本解析結果は、プラズマ境界の外で概ね一致していることが見て取れる。

4. 結び

3 次元 CCS 法コードにベクトル・ポテンシャルの回転対称性を組み込むことができた。解析結果を HINT コードより得られた磁場 3 成分の結果と比較し、良い一致をみることができた。今後は本解析結果をもとにし、ヘリカル装置の核融合プラズマの境界形状同定方法を確定すべく研究を進める予定である。

参考文献

- [1] Kurihara, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- [2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.
- [3] 前田忠昭ほか, 第 6 回数学総合若手研究集会テクニカルレポート「大型ヘリカル装置の 3 次元プラズマ境界形状逆推定の試み」(2010)
- [4] Harafuji, K., Hayashi T., Sato T., *J. Comput. Phys.*, **81** (1989) 169.

Complex dynamics and monetary policy in a two-country business cycle model

Ken-ichi ISHIYAMA

The Faculty of Law, Seikei University

Email: ishiyama00026@cc.seikei.ac.jp

Keywords: large open economy, growth cycle, monetary policy, unstable periodic orbit, chaos

Abstract

We have observed large increases in trade and capital flows for two decades. Does it mean an increase in possibility of global recession? This problem is closely related whether the government in each country should take a coordinated policy to control business cycles or not. The purpose of this paper is to obtain some implications concerning the problem through analyzing phenomena represented by a nonlinear two-country model. Unstable periodic orbits embedded in a chaotic attractor and unstable periodic orbits near the attractor are numerically detected in the cases of different policies and a coordinated policy. They play an important role when characterizing the model phenomena.

1 Introduction

We have observed large increases in trade and capital flows for two decades. Does it mean an increase in possibility of global recession? This problem is closely related whether the government in each country should take a coordinated policy to control business cycles or not. A two-country KWG model presented in Asada et al. (2003, Ch.10) is considered to be useful to discuss such a problem though there have been many international business cycle models since a pioneering work of Lorenz (1987) was presented.

Taking the KWG model, Ishiyama (2010) studied what occurs when trade and capital flows between two countries like Euroland and the USA are allowed, and exemplified that interactions between the large open economies give rise to chaotic growth cycles and temporal comovements of GDP growth rates. It is known that an infinite number of unstable periodic orbits are embedded in a chaotic attractor and that they are the skeleton of the attractor (See e.g., Auerbach et al. 1987). Ishiyama (2010) found many unstable periodic orbits embedded in a chaotic attractor in order to understand complex dynamics in the attractor. As pointed out in Ishiyama and Saiki (2005), it is important that the detected periodic orbits are *embedded* in a chaotic attractor. However, in this article, we will use unstable periodic orbits near a chaotic attractor as well as those embedded in the attractor so as to examine the effects of monetary policies of governments on relationships between growth rates of GDP in two countries.

The general model of two-country KWG type presented in Asada et al. (2003, Ch.10) consists of the following three subsystems.

$$\begin{array}{l}
 \dot{\omega} = \dot{\omega} - \hat{p} \\
 \dot{l} = -i(\rho - (r - \pi)) \\
 \dot{m} = \mu - \hat{p} - i(\rho - (r - \pi)) - n \\
 \dot{\pi} = \beta_{\pi}(\alpha_{\pi}(\hat{p} - \pi) + (1 - \alpha_{\pi})(\hat{p}_o - \pi))
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \dot{\eta} = \hat{p} - \hat{e} - \hat{p}^* \\
 \dot{\varepsilon} = \beta_{\varepsilon}(\alpha_{\varepsilon}(\hat{e} - \varepsilon) + (1 - \alpha_{\varepsilon})(\hat{e}_o - \varepsilon))
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \dot{\omega}^* = \dot{\omega}^* - \hat{p}^* \\
 \dot{l}^* = -i^*(\rho^* - (r^* - \pi^*)) \\
 \dot{m}^* = \mu^* - \hat{p}^* - i^*(\rho^* - (r^* - \pi^*)) - n^* \\
 \dot{\pi}^* = \beta_{\pi}^*(\alpha_{\pi}^*(\hat{p}^* - \pi^*) + (1 - \alpha_{\pi}^*)(\hat{p}_o^* - \pi^*))
 \end{array}$$

They denote the dynamics of the domestic economy, financial and trade links between the two economies, and the foreign economy, respectively. The KWG disequilibrium model expresses interactions among markets for goods, labor, assets, and money when international trade and capital flows are allowed.

The case that the steady growth rate of the money supply in the domestic economy is higher than the rate in the foreign economy, namely, $\mu = 0.025$ and $\mu^* = 0.022$ was mainly studied in Ishiyama (2010) from the numerical point of view. Setting parameters and specialized functions as in Ishiyama (2010), the model demonstrates chaotic growth cycles. In this article, in order to capture the effects of a coordinated monetary policy on growth cycles in the two countries, we investigate the dynamical property of the model when μ varies from 0.025 to 0.022, other things being equal.

The phase in the domestic economy is identified by the sign of $x = \hat{Y} - n = -\hat{l}$, and that in the foreign economy is by the sign of $x^* = \hat{Y}^* - n^* = -\hat{l}^*$, where \hat{Y} and \hat{Y}^* denote the growth rates of GDP in the domestic and the foreign economies, respectively; while n and n^* mean natural growth rates of the domestic and foreign economies, respectively. The domestic economy is thought to be in a boom if $x > 0$, otherwise in a slump. The same is true of the foreign economy. In the next section the dynamics of x and x^* will be studied.

2 Relationship between GDP growth rates of interacting KWG economies

Figure 1 (right) illustrates a chaotic attractor for $\mu = 0.025$. The maximum Lyapunov exponent calculated on the attractor is about 0.13. It means the trajectories of arbitrary initial conditions on the attractor will display aperiodic behavior and sensitive dependence on initial conditions. We can see temporal comovements of growth rates of GDP from Figure 1 (left). Two examples of unstable periodic orbits detected in the chaotic attractor by using a damped Newton method are illustrated in Figure 2. Paying attention to their periods, they are named $UPO_{21.5214}$ and $UPO_{22.6451}$, respectively. Chaotic trajectories are closures of the set of such unstable periodic orbits. It should be noted that both of $UPO_{21.5214}$ and $UPO_{22.6451}$ are similar in shape to the chaotic attractor. Figure 2 also shows that an economy on the attractor goes along such an unstable periodic orbit if it starts from a point sufficiently close to the periodic orbit. It implies that growth patterns which correspond to the patterns those periodic orbits generate are often observed during a long time evolution on the attractor. In this context, those unstable periodic solutions are representatives of chaotic behavior of the model. However, they seem to be too complicated to capture the dynamical properties.

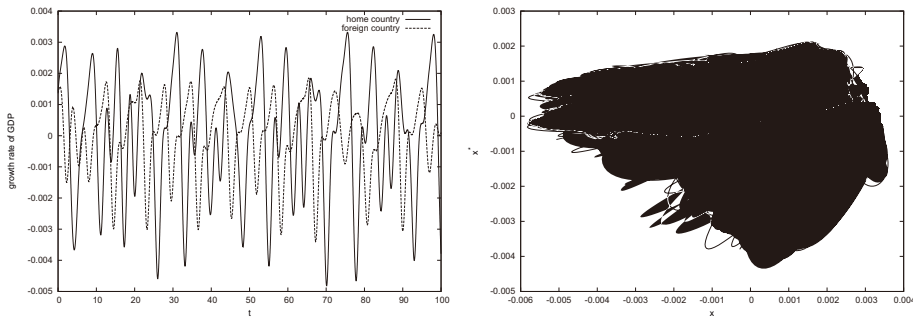


Figure 1: Chaotic time series (left) and chaotic attractor (right) projected onto $x-x^*$ plane ($\mu = 0.025$).

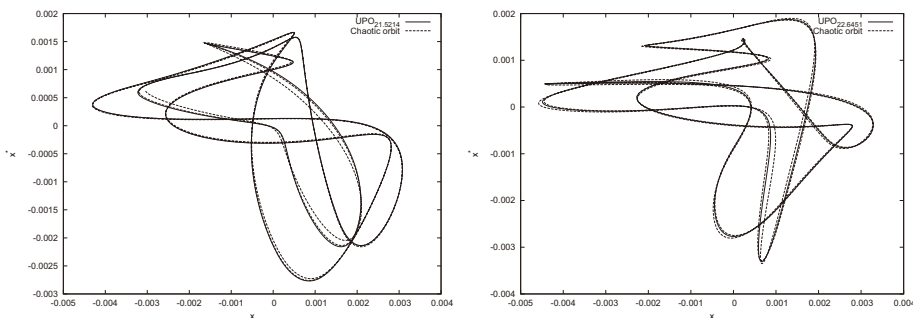


Figure 2: Unstable periodic orbits embedded in a chaotic attractor ($\mu = 0.025$). Dashed line is a chaotic orbit going along an unstable periodic orbit embedded in the chaotic attractor.

Figure 3 displays two opposite extreme unstable periodic orbits discovered near the attractor. We can see a positive correlation between x and x^* on $UPO_{3.0003}$ (Figure 3 left). On the other hand, a negative correlation between x and x^* is confirmed on $UPO_{3.0147}$ (Figure 3 right). Although these simple orbits are not embedded in the chaotic attractor, some unstable periodic orbits in the attractor (or the

attractor itself) are thought to consist of such simple orbits. Therefore, it may be worth focusing on the two unstable periodic orbits with interesting property with respect to relationships between growth rates of GDP in the two countries.

Now we follow the branches of $UPO_{3.0003}$ and $UPO_{3.0147}$ by decreasing the parameter μ from $\mu = 0.025$. Figure 4 shows the bifurcation diagram of the two-country KWG model, in which the probability of the event that $x > 0$ and $x^* > 0$ at a time randomly chosen in the time series of a periodic solution is plotted as a function of the domestic government's policy parameter μ . If x and x^* positively depend on each other, $P(x > 0, x^* > 0)$ would be high, and vice versa. The branch of $UPO_{3.0003}$ is the highest position among the branches, while that of $UPO_{3.0147}$ is the lowest position among them for $0.022 \leq \mu \leq 0.025$. It suggests that $UPO_{3.0003}$ and $UPO_{3.0147}$ survive as periodic orbits for $0.022 \leq \mu \leq 0.025$, their characteristics still remaining. In fact, at $\mu = \mu^* = 0.022$, $UPO_{3.0003}$ and $UPO_{3.0147}$ become $UPO_{3.0165}$ and $UPO_{3.0148}$, respectively. They are depicted in Figure 5. In addition, Figure 6 implies that not only an unstable periodic orbit which leads to a positive correlation between x and x^* but also an unstable periodic orbit which causes a negative correlation between them exist near a chaotic attractor even if two countries take a coordinated monetary policy. The maximum Lyapunov exponent measured on the attractor plotted in Figure 5 (left) is around 0.01. Although instability of chaotic business cycles is weakened under the coordinated policy ($\mu = \mu^*$), temporal synchronization and desynchronization as typical behavior can be observed because $UPO_{3.0165}$ and $UPO_{3.0148}$ are found near the attractor. We may be able to derive this implication from comparing Figure 5 (left) with Figure 1 (right), however, the comparison is not enough to confirm. Hence, we have focused on special solutions of the model, which are numerically extracted. In the next section, let us conclude our results.

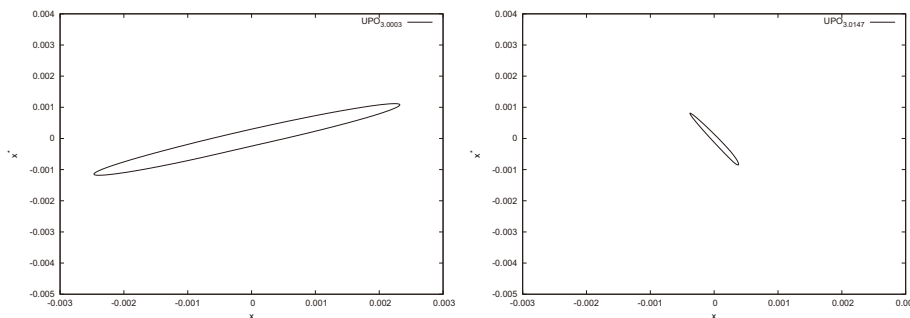


Figure 3: Unstable periodic orbits near the chaotic attractor ($\mu = 0.025$). A positive correlation between x and x^* is observed on $UPO_{3.0003}$ (left), whereas a negative correlation between x and x^* is confirmed on $UPO_{3.0147}$ (right).

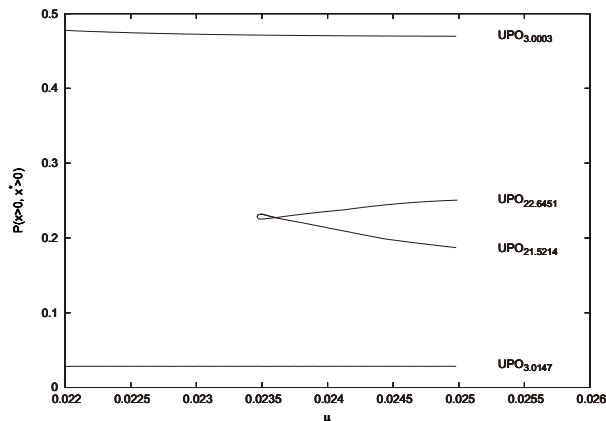


Figure 4: Bifurcation diagram of $P(x > 0, x^* > 0)$ as a function of the domestic government's policy parameter μ , where $P(x > 0, x^* > 0)$ is the probability of the event that $x > 0$ and $x^* > 0$ at a time randomly chosen in the time series of a periodic solution.

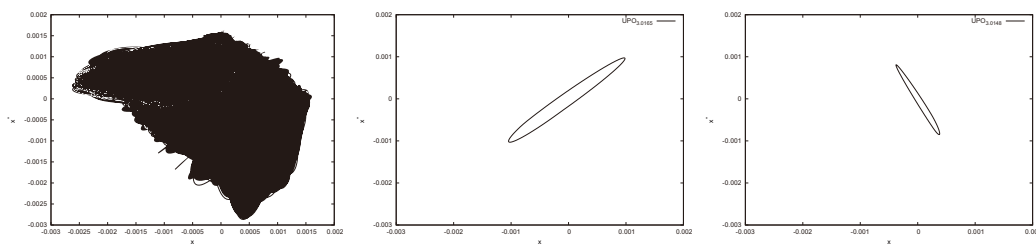


Figure 5: Chaotic attractor projected onto $x-x^*$ plane and unstable periodic orbits near the attractor ($\mu = 0.022$). Unstable periodic orbit with a positive correlation between x and x^* (middle: $UPO_{3,0165}$); unstable periodic orbit with a negative correlation between x and x^* (right: $UPO_{3,0148}$).

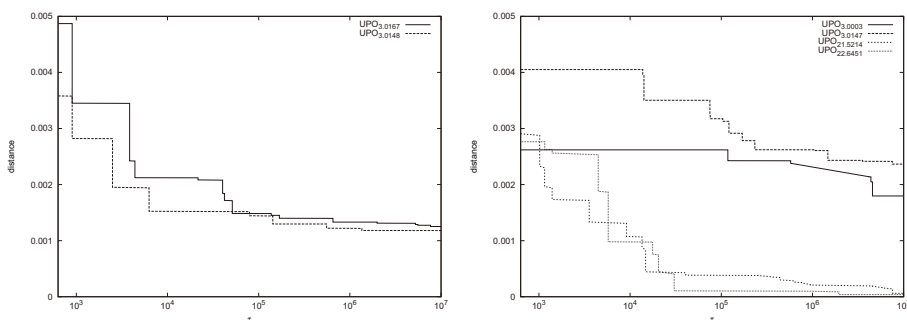


Figure 6: Distance between a point of UPO_T and a chaotic trajectory $\{X(t)|0 \leq t \leq \tau\}$ (left: $\mu = 0.022$, right: $\mu = 0.025$). T indicates the period of an unstable periodic orbit named UPO_T .

3 Conclusion

We review that two-country KWG model represents chaotic behavior when different monetary supply policies are adopted, and that under the circumstances, growth cycles of two interacting economies can temporally synchronize and desynchronize as typical behavior. Unstable periodic orbits numerically extracted in a chaotic attractor are evidences of the typical dynamics. On the other hand, we detect two opposite extreme unstable periodic orbits near the chaotic attractor. Along one of the periodic orbits, growth rates of GDP in two countries seem to behave in the same way as each other, whereas we find a negative correlation between the growth rates on the other periodic orbit. We can conjecture these opposite unstable periodic orbits cause the complex dynamics of two interacting economies. By following branches of these orbits, we confirm they exist near a chaotic attractor even if a coordinated monetary policy is taken. It exemplifies that it is not necessarily the case that such a coordinated monetary policy between two countries can give rise to comovements of the growth rates of their GDP.

References

- Asada T, Chiarella C, Flaschel P and Franke R 2003 *Open Economy Macrodynamics: An Integrated Disequilibrium Approach*, (Springer-Verlag)
- Auerbach D, Cvitanovic P, Eckmann J -P, Gunaratne G. and Procaccia I 1987 Exploring chaotic motion through periodic orbits *Physical Review Letters* **58** 2387–2389
- Ishiyama K and Saiki Y 2005 Unstable periodic orbits and chaotic economic growth *Chaos, Solitons & Fractals* **26** 33–42
- Ishiyama K 2010 Relationships between phases of business cycles in two large open economies *Journal of Regional Development Studies* forthcoming
- Lorenz H -W 1987 International trade and possible occurrence of chaos *Economics Letters* **23** 135–138

プラズマディスラプション時の渦電流に対する境界要素法解析

北海道大学大学院工学研究科 猪口 翔互 西山 修輔 富岡 智 日野 友明

1 目的

核融合炉内においてプラズマが突然に消失するディスラプションが起きた際、炉構造材に大きな電磁力が加わる。これを評価するために、真空容器壁面に発生する電磁力の解析を行った。真空容器壁面には、有限の導電性材料を考慮し、ディスラプション時の渦電流を、ラプラス変換を併用した過渡応答境界要素法により求める。

解くべき方程式はマクスウェル方程式から導かれる時間微分を含むポアソン方程式である。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}(t)}{\partial t} \quad (1)$$

但し、 \mathbf{E} は電界、 μ は透磁率、 \mathbf{J} はプラズマ電流分布を表す。

時間依存問題に対し、時間発展による解析誤差を伴う時間領域の境界要素法を使わず、ラプラス変換を用いることが本研究の特徴である。

2 解析

2.1 解析体系

解析対象とするモデルを図1に示す。この図はトロイダル形状をしているトカマク型核融合炉のポロイダル断面を表している。真空容器断面の内側寸法は5 m × 10 mである。

図中の楕円内に存在するプラズマによるプラズマ電流分布を K 点の線電流で表し、それぞれにプラズマ電流の初期値と消滅までの時間を与えている。プラズマ電流の初期値の合計は10MAで、全ての電流が消滅するまでの時間は10msとした。線電流の初期値の空間分布にはガウス分布を用いた。上方の線電流が早く消滅するよう設定することで垂直移動現象 (VDE: Vertical Displacement Event) を表現した。外側寸法に関してはスキンドepsが構造材の厚みより十分に小さく、今回の解析には関係しないため設定していない。

また、真空容器材料の物性値として、国際熱核融合試験炉ITERに採用されているオーステナイト系鋼SS316L(N)-IGの値を用いた。真空容器内側を媒質1、構造材を媒質2とし、それぞれ添字1,2で表すと、各媒質の透磁率および導電率は、 $\mu_1 = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m、 $\mu_2 = 1.004\mu_0$ H/m、 $\sigma_2 = 1.265 \times 10^6$ S/mとする。ただし、 μ_0 は真空の透磁率を示す。媒質1、媒質2の境界上での電界を解析し、構造材に生じる渦電流を評価する。

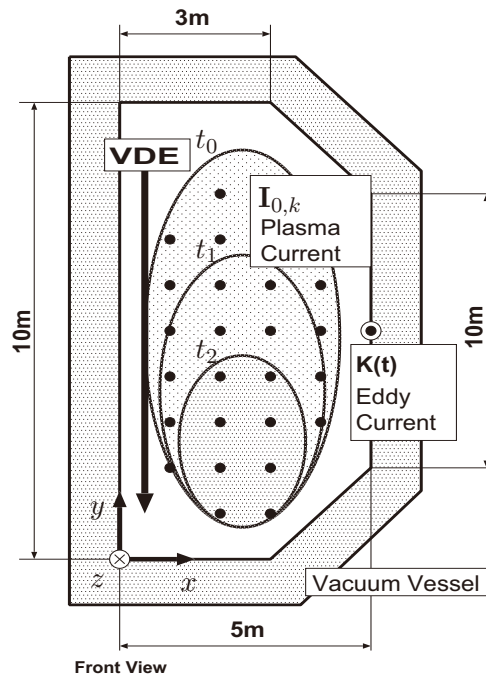


図1: 解析モデルの正面図

2.2 支配方程式

電界ベクトルを \mathbf{E} として、式 (1) の右辺のソース項を \mathbf{w} とした次式を支配方程式とする。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{w} \quad (2)$$

また、次式を満足するようなグリーン関数 u^* を定める。

$$\nabla^2 u^* = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3)$$

ただし δ は Dirac のデルタ関数である。また、 \mathbf{r}_i はソース点を、 \mathbf{r} は観測点を示す位置ベクトルである。これら 2 式から積分方程式は以下の様になる。

$$c_i \mathbf{E}_i + \int_{\Gamma} \mathbf{E} \nabla u^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} u^* \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4)$$

ここで Ω 、 Γ 、 \mathbf{n} はそれぞれ、領域、境界、境界上の単位法線ベクトルを表す。 c_i はデルタ関数の積分による定数であり、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$ が領域内のとき 1、なめらかな境界上では 1/2 となる。この積分方程式に境界条件とソース項 \mathbf{w} を与えることで \mathbf{E} について解析できる。なお後述の境界条件により、構造材 (媒質 2) 内の電界を求める必要はない。以降は 2 次元解析について示す。

2.3 プラズマ電流分布

ソースとなるプラズマ電流分布は線電流の集合として扱う。線電流の初期値はそれぞれ $I_{0,k}$ ($k = 1, \dots, K$) で、線形に減少し時間 T_k 後には全て消滅するとした。ステップ関数を $U(t)$ とすると、

$$U(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad (5)$$

であり、 $t \leq 0$ で電流が $I_{0,k}$ で、 $0 < t < T$ では t の増加と共に線形に減少し、 $t \geq T$ で電流が 0 になる電流は、

$$I_k(t) = I_{0,k} + \frac{I_{0,k}}{T} \{-t U(t) + [t - T] U(t - T)\} \quad (6)$$

と表す。電流分布はこのような線電流が K 本集合したものととして、

$$J_z(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^K I_k(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (7)$$

と表す。ここで $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$ は k 番目の線電流の位置を示す位置ベクトルである。

またプラズマは楕円形状をしているとして、プラズマ電流分布の初期値はガウス分布を利用して以下の様にと与えた。

$$I_{0,k} = \frac{1}{2\pi\alpha_x\alpha_y} \exp\left(-\frac{|x_k - x_0|^2}{2\alpha_x^2} - \frac{|y_k - y_0|^2}{2\alpha_y^2}\right) \sum_{k=1}^K I_{0,k} \quad (8)$$

ここで α_x 、 α_y は x 方向、 y 方向の半径であり、 $\alpha_x = 1.0\text{m}$ 、 $\alpha_y = 3.5\text{m}$ とした。ガウス分布の中心は $x_0 = 2.5\text{m}$ 、 $y_0 = 5.0\text{m}$ である。

2.4 ラプラス変換された支配方程式

式 (6) のラプラス変換を考える。[$t - T$] $U(t - T)$ のラプラス変換は以下の様にかかる。

$$\mathcal{L}\{[t - T] U(t - T)\} = \int_0^\infty [t - T] U(t - T) e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} e^{-sT} \quad (9)$$

これを用いると式 (6) のラプラス変換は以下の様になる。

$$\mathcal{L}\{I_k(t)\} = I_{0,k} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 T} (-1 + e^{-sT}) \right\} \quad (10)$$

したがってポアソン方程式をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{L}\{E_z\} &= \mu_0 (s \mathcal{L}\{J_z(\mathbf{r}, t)\} - J_z(\mathbf{r}, 0)) \\ &= \mu_0 \sum_{k=1}^K I_{0,k} \left\{ \frac{1}{s T_k} (-1 + e^{-s T_k}) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。以後ラプラス変換されていることを $\mathcal{L}\{E_{1z}\} = \hat{E}_{1z}$ のようにハット (^) をつけることで表す。これよりラプラス変換された境界積分方程式は式 (12) となる。

$$c_i \hat{E}_{1z}(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\hat{E}_{1z} \nabla u^* - u^* \nabla \hat{E}_{1z}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \mu_0 \sum_{k=1}^K I_{z,k} \left\{ \frac{1}{s T_k} (-1 + e^{-s T_k}) \right\} u_{i,k}^* \quad (12)$$

2.5 境界条件

図 2 のように導体表面での電界は真空容器内側の電界と連続であり、以下の第三種境界条件を設定することができる。

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \hat{E}_{1z}}{\partial x} = -\sqrt{\frac{s\sigma_2}{\mu_2}} \hat{E}_{1z} \quad (13)$$

また、構造材内部の電界の変化は指数関数的に減少することから境界上の \hat{E}_{1z} を用いて以下の様に書ける。

$$\hat{E}_{2z} = \hat{E}_{1z} e^{-\sqrt{s\mu_2\sigma_2}x} \quad (14)$$

ラプラス変換された渦電流 $\hat{K}_z(s)$ は、 E_{2z} を構造材内部方向へ積分し、導電率をかけることによりられる。

$$\hat{K}_z(s) = \int_0^\infty \sigma_2 \hat{E}_{1z} e^{-\sqrt{s\mu_2\sigma_2}x} dx = \frac{\sigma_2 \hat{E}_{1z}}{\sqrt{s\mu_2\sigma_2}} \quad (15)$$

これにより求められた $\hat{K}_z(s)$ を数値的にラプラス逆変換することにより、時間領域における渦電流が求められる。

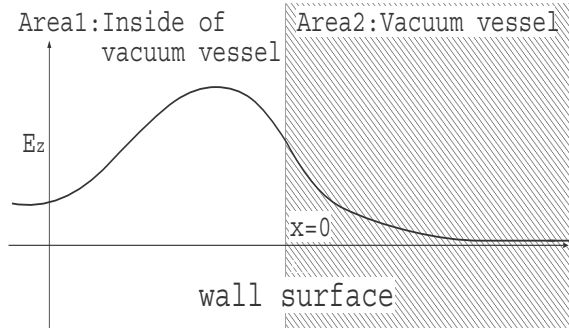


図 2: 各領域での電界変化

3 結果と今後の課題

図 1 中の右側構造材表面上の点 (○) で観測した電界の時間変化の様子を図 4 に、同じ点での渦電流の時間変化の様子を図 5 に示す。また、強制入力したプラズマ電流の総和の時間変化を図 3 に示す。縦の破線は全プラズマ電流が消滅を始める時間 $T = 0$ と完全に消滅する時間 $T = 10\text{ms}$ を表している。

図 4、図 5 より、プラズマ電流が消滅を開始する時刻 $t = 0$ での電界と渦電流の立ち上がりの応答が良いことがわかる。また、渦電流が時間変化でほとんど減衰しないことがわかる。

壁面電界の減衰時間に関しては、物性値やディスプレイのタイプによっても大きく異なる。ピークが電流完全消滅時間 $T = 10\text{ms}$ と異なる時間に現れているのは、プラズマ全体ではなく観測点近傍のプラズマ電流が、観測点の電界に大きく影響を与えているためと考えられる。

渦電流の変曲点は電界のピーク位置にある。プラズマ電流消滅中に直線的に増加し、 $T = 10\text{ms}$ から減衰を始める。しかし、あまりに減衰が遅く渦電流に関しては正しく求められているとは言い難い。構造材の導電率と透磁率の設定を変えることで渦電流の時間変化の様子は変わってくるが、やはりどれも減衰が非常に遅かった。文献によれば、プラズマ電流が消滅する時間 T の 30 倍程度の時間で、渦電流は十分に減衰している [1, 2]。現在この理由を検討中である。

今後はこれを 3 次元において解析する予定である。

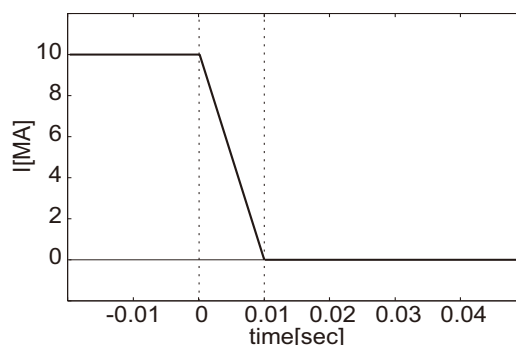


図 3: 強制入力したプラズマ電流の総和

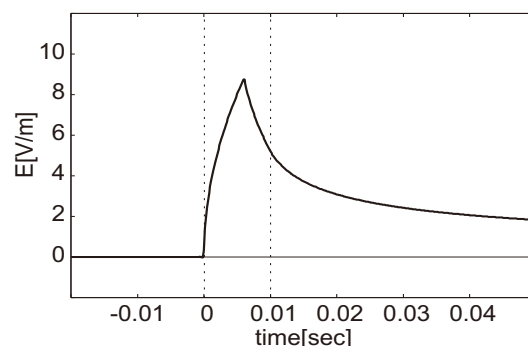


図 4: 壁面での電界時間変化

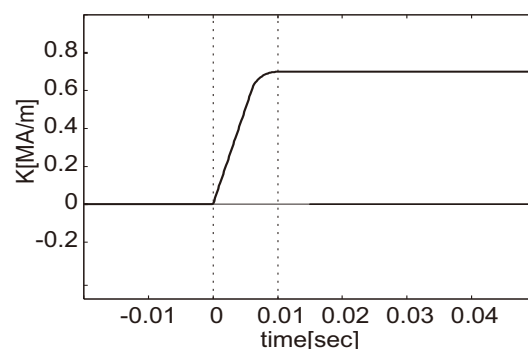


図 5: 渦電流時間変化

参考文献

- [1] 内一哲哉, 木内卓朗, 関村直人: 「核融合炉保全のための構造健全性評価に関する研究」, 日本 AEM 学会誌, Vol.9, No.2 (2001), pp.105-114.
- [2] 井口将秀, 齊藤正克: 「破壊力学解析による ITER 真空容器の構造健全性評価」, 筑波大学システム情報工学研究科修士論文 (2007).

Spacelike submanifolds in de Sitter space from the viewpoint of singularity theory

加世堂 公希 (Masaki KASEDOU)

北海道大学大学院理学院

1 序

本稿では写像の特異点の視点からの、de Sitter 空間上の空間的部分多様体の幾何学的性質の研究を紹介する。一般に可微分な写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ が点 $p \in \mathbb{R}^m$ で特異点をもつとは、 f の p での微分写像が $\text{rank } d_p f < \min(m, n)$ を満たすときを言う。

n 次元 de Sitter 空間は擬内積 $\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n x_i y_i$ を持つ $(n+1)$ 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}_1^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ 上の擬球 $S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ として定義される。Minkowski 空間内のベクトル v が空間的、時間的または光的であるとは、 $\langle v, v \rangle$ の値がそれぞれ正、負または 0 である場合を言う。我々は de Sitter 空間内の空間的部分多様体に対してその接空間が常に空間的なベクトルで構成される場合の研究を行っている。de Sitter 空間上の余次元が 1 の場合の空間的超曲面では符号を除いて一意に定まる時間的単位法線と空間的超曲面の位置ベクトルを用いて光錐 Gauss 像を定めると、光錐 Gauss-Kronecker 曲率と光錐主曲率が定義され、丁度光錐 Gauss-Kronecker 曲率が 0 になる点が光錐 Gauss 像特異点と対応する。

一方、余次元が 2 以上の場合の部分多様体には双曲空間 [4] の研究で与えられた管状超曲面の類似を考え、部分多様体の法線束から de Sitter 空間内の空間的な空間的管状超曲面を構成し、空間的管状超曲面の光錐 Gauss 像の特異点と空間的部分多様体の幾何学的性質の関係を述べることができる。さらに [8] による関数芽 (一般には写像芽) の \mathcal{K} -同値関係による多様体間の接触型の言い換えを用いて、空間的部分多様体と de Sitter ホ口超球面の間の接触型を、ホ口球面的高さ関数の \mathcal{K} -同値類によって分類することができる。また別の写像の特異点を用いた研究として de Sitter 空間内の余次元が 2 の空間的部分多様体に対して、長さを除いて一意的に決まる光的方向から構成される光的超曲面を用いた方法で空間的部分多様体の幾何学的性質の研究も行われている。この方法は [2] によって空間的曲線の場合が研究され、[6] によってその次元の一般化が行われている。

2 de Sitter 空間上の空間的部分多様体

2.1 空間的超曲面と de Sitter ホ口超球面

n, r を $n > r$ を満たす自然数、 $U \subset \mathbb{R}^{n-r}$ を開部分集合としその座標系を $u = (u_1, \dots, u_{n-r})$ と表す。埋め込み写像 $X: U \rightarrow S_1^n$ が空間的であるとは偏微分 $\partial X(u)/\partial u_1 \cdots \partial X(u)/\partial u_{n-r}$ の

一次結合で表される 0 でない全てのベクトル v が空間的である (すなわち $\langle v, v \rangle > 0$) ときをいう。 $r \geq 1$ のとき埋め込み写像 X およびその像 $M = X(U)$ を de Sitter 空間内の余次元 r の空間的部分多様体と呼び、特に $r = 1$ のとき空間的超曲面と呼ぶ。

空間的超曲面上の各点 $p = X(u)$ に対してその接空間に擬直交する双曲空間 $H^n(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$ 上の点 $e(u)$ がとれる。したがって $\mathbb{L}(u) = X(u) + e(u)$ により光錐方向の元を対応させる光錐 Gauss 像 $\mathbb{L} : U \rightarrow LC^*$ が定義される、ただし LC^* は 0 でない光的ベクトルの集合を表し、光錐と呼ばれる。接空間 $T_p M$ と $T_u U$ を同一視することにより $T_p M$ 上の線形変換 $d\mathbb{L}(u)$ の $n - r$ 個の固有値を点 p における主曲率 $\kappa_{p,i}$ 、固有値の積を光錐 Gauss-Kronecker 曲率 K_p と表す。光錐 Gauss 像の特異点はその微分写像 $d_p \mathbb{L}$ が退化することと同値なので、曲率の定義から空間的超曲面上の $K_p = 0$ の点 (光錐放物点) に対応することが分かる。超曲面上の全ての点 p について $\kappa_{p,1} = \cdots = \kappa_{p,n-1}$ を満たす場合を全臍的と呼ぶ。全臍的な超曲面の主曲率は点 p によらず一定の値をとり、かつ de Sitter 空間のある 2 次形式超曲面に含まれる。

Proposition 2.1. ([5]) 主曲率が 0 の全臍的な超曲面は、de Sitter ホ口超球面 $\{x \in S_1^n \mid \langle x, v \rangle = +1\}$ (v は光的) に含まれる。またこの条件は光錐 Gauss 像が定値写像となる条件と同値である。

de Sitter ホ口超球面は de Sitter 空間の平坦な空間的超曲面である。一方、光錐高さ関数 $\bar{H} : U \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}$ を $\bar{H}(u, v) = \langle X(u), v \rangle - 1$ で定め、パラメータ $u_0 \in U, v_0 = \mathbb{L}(u_0)$ を固定した関数 $\bar{h}_{v_0} = \bar{H}|_{U \times \{v_0\}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を光錐方向を固定した光錐高さ関数という。光錐 Gauss 像と光錐高さ関数の間に以下の関係があることが分かる。

Proposition 2.2. ([5]) $H(u, v) = 0$ かつ $H_{u_i}(u, v) = 0$ ($i = 1, \dots, n - 1$) となる必要十分条件は $v \in \mathbb{L}(U)$ である。また $v_0 = \mathbb{L}(u_0)$ の仮定の下で、超曲面上の点 p が放物点になる必要十分条件は Hesse 行列 $\text{Hess}(h_{v_0})(u)$ が退化するときである。

したがって光錐 Gauss 像の特異点が現れる条件はパラメータを固定した光錐高さ関数の Taylor 展開による 2 次の項に関係していることが分かる。

2.2 空間的部分多様体から構成される空間的管状超曲面

余次元 2 以上の部分多様体 M 上では各点 $p = X(u)$ について条件 $\text{Image}(d_p \mathbf{n}) \subset T_p M$ を満たす時間的単位法線 $\mathbf{n} : U \rightarrow T_p M^\perp$ を 1 つとり、 M の接空間と定義域 U の接空間を同一視することで $d\mathbf{n}(u_0)$ を $T_p M$ 上の線形変換とみなす。これを空間的部分多様体 M の型作用素と呼び、その固有値を主曲率、全ての固有値の積を Gauss-Kronecker 曲率として定義する。各点 u_0 においてこの定義は向き $\mathbf{n}(u_0)$ によるが、写像 \mathbf{n} の微分係数にはまったく依存しないことが分かる。すべての主曲率が 0 のときその点を $\mathbf{n}(u_0)$ についてのホ口球面的点と呼ぶ。

M のホ口球面的超曲面 $HS_X : U \times H^{r-1}(-1) \rightarrow LC^*$ を $HS_X(u, \mu) = X(u) + e(u, \mu)$ で定め、 M のホ口球面的高さ関数 $H : U \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}$ を $h_v(u) = \langle X(u), v \rangle - 1$ で定める。 HS_X と H には命題 2.2 の類似が成立する。

次に空間的管状超曲面を考える。 $H^{r-1}(-1) = \{\mu \in \mathbb{R}_1^r \mid \langle \mu, \mu \rangle = -1\}$ とおき、時間的単位法線方向を与える写像を $e : U \times H^{r-1}(-1) \rightarrow H^{n-1}(-1)$ と与える。de Sitter 空間上の空間的管状

超曲面を $\bar{X}_\theta(u, \mu) = \cosh \theta X(u) + \sinh \theta e(u, \mu)$ と定義する。空間的管状超曲面は M の形状によって特異点を持つが、各点において十分小さな $\theta \neq 0$ をとれば局所的に埋め込みとみなしてよい。空間的管状超曲面の光錐 Gauss 像は各点 $\bar{X}_\theta(u, \mu)$ の光的法線方向 $\bar{X}_\theta(u, \mu) + e(u, \mu)$ によって定義される。この法線方向によって、空間的超曲面の光錐主曲率、光錐 Gauss-Kronecker 曲率や光錐高さ関数を定義することができる。このとき光錐 Gauss 像の特異点は次の命題で述べられる条件として解釈され、特異点を通して空間的部分多様体と空間的管状曲面との間に幾何学的な関係があることが分かる。

Proposition 2.3. ([7]) 余次元 2 以上の空間的部分多様体 X とその空間的管状超曲面 \bar{X}_θ のそれぞれに対応する点に対して、以下の条件は同値である。

- (1) de Sitter ホロ球面的超曲面芽が特異点を持つ
- (2) 空間的部分多様体上の点 $p_0 = X(u_0)$ が法線方向 $e(u_0, \mu_0)$ についてのホロ球面的点を持つ
- (3) 空間的管状超曲面の光錐 Gauss 像が特異点を持つ
- (4) 空間的管状超曲面が Gauss-Kronecker 曲率が 0 の点 (光錐放物点) を持つ

2.3 Montaldi の接触の理論

C^∞ 多様体 $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ($i = 1, 2$) について $\dim X_1 = \dim X_2$, $\dim Y_1 = \dim Y_2$, $a_i \in X_i \cap Y_i$ ($i = 1, 2$) を満たすとする。2組の多様体 X_i と Y_i の接触型が同値であるとは、ある微分同相写像芽 $\Phi : (\mathbb{R}_1^{n+1}, a_1) \rightarrow (\mathbb{R}_1^{n+1}, a_2)$ があって、 $\Phi((X_1, a_1)) = (X_2, a_2)$, $\Phi((Y_1, a_1)) = (Y_2, a_2)$ を満たすときである。Montaldi は多様体間の接触型の関係を写像間の \mathcal{K} -同値関係を用いて表した。本稿では関数芽の場合を考えるだけで十分である。

Theorem 2.4. ([8]) $g_i : (X_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$ をはめ込み芽とし、 $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を沈めこみとする。 $(Y_i, y_i) = (f_i^{-1}(0), y_i)$ を満たすならば、多様体 X_i と Y_i の接触型が同値である必要十分条件は $f_1 \circ g_1$ と $f_2 \circ g_2$ が \mathcal{K} -同値である。

2つの関数芽が \mathcal{K} -同値であるとは、定義域の微分同相な座標変換 Φ とある p_2 における関数芽 g があって、 $f_1 \circ \Phi = g \cdot f_2$ かつ $g(u_1) \neq 0$ と表されるときをいう。この理論を我々の設定に用いることで (詳細は [7]) 空間的部分多様体と de Sitter ホロ超球面との接触型が高さ関数の特異点の \mathcal{K} -同値関係により記述できる。

3 主結果

2つの写像芽 $f_i : (U, u_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, q_i)$ が \mathcal{A} -同値であるとは、定義域と値域の微分同相な座標変換 Φ, Ψ によって $f_1 \circ \Phi = \Psi \circ f_2$ と表されるときをいう。写像芽と関数芽の特異点の分類について光錐高さ関数の族から生成される Legendre はめ込みが Legendre 安定 (詳細は [3] を参照) という仮定の下で、以下の関係が成り立つ。

Theorem 3.1 ([7]). 余次元 2 以上の de Sitter 空間内の 2 つの空間的部分多様体 $X_i : (U_i, u_i) \rightarrow (S_1^n, p_i)$ ($i = 1, 2$) について、対応する Legendre はめ込みが Legendre 安定である時、次の条件は同値となる。

- (1) de Sitter ホロ球面的超曲面芽が \mathcal{A} -同値でうつりあう
- (2) de Sitter ホロ球面的高さ関数芽が \mathcal{K} -同値でうつりあう
- (3) 光錐 Gauss 像が \mathcal{A} -同値でうつりあう
- (4) 光的方向を固定した光錐高さ関数芽が \mathcal{K} -同値でうつりあう
- (5) 空間的部分多様体とこれに接触する de Sitter ホロ超球面との接触型は等しい。
- (6) 空間的管状超曲面とこれに接触する de Sitter ホロ超球面との接触型は等しい。

補足として条件 (1) と (3) は Legendre 安定という仮定がなくても常に同値であり、これらの条件から他の条件を導くことができる。その逆は仮定がないと成立しない。

ここまでの議論から双曲空間 $H_+^n(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$ の部分多様体で構成された管状超曲面の場合 [4] とほぼ平行に類似を考えられることが分かった。de Sitter 空間の場合には空間的な多様体の他にも時間的、光的な部分多様体を考えることができる。特に光的な場合には面積が消えてしまい、第 1 基本量の定義がうまくいかないなどの問題が残されているので、今後はこの課題に取り組むつもりである。

参考文献

- [1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differential Maps, Volume I, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] T. Fusho and S. Izumiya, Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space, J. Geom. 88 (2008), 19–29.
- [3] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, Singularities of hyperbolic Gauss maps, Proc. London Math Soc. 86 (2003) 485–512.
- [4] S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space, J. London Math. Soc. (2) 71 (2005) 779–800.
- [5] M. Kasedou, Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space, J. of Geom 94 Issue 1 (2009) 107–121.
- [6] M. Kasedou, Spacelike submanifolds of codimension two in de Sitter space, to appear in J. of Geom. and Phys. 60 (2010) 31–42.
- [7] M. Kasedou, Spacelike submanifolds in de Sitter space, Preprint, available from <http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/2024/>
- [8] J.A. Montaldi, On contact between submanifolds, Michigan Math. J. 33 (1986) 195–199.
- [9] 泉屋周一、石川剛郎、応用特異点論、共立出版、1998

Examples of minimizers on sub-Riemannian structures

Yumiko Kitagawa

Osaka City University

Advanced Mathematical Institute

A sub-Riemannian structure on a manifold M is a pair (D, g) such that D is a smooth distribution on M and g is a Riemannian metric on D . A sub-Riemannian manifold is a triple (M, D, g) such that M is a manifold and (D, g) is a sub-Riemannian structure on M . In particular, if $D = TM$ then (M, D, g) is nothing but a Riemannian manifold (M, g) .

Riemannian geometry tells us that a minimizer (i.e., a shortest path) between two points of a Riemannian manifold (M, g) is a geodesic, provided that the curve is parametrized by arc-length, and the geodesics are characterized to be the curves satisfying the geodesic equation expressed in local coordinates as:

$$\ddot{x}^i + \sum \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0,$$

where Γ_{jk}^i denotes the Christoffel symbol. Conversely, every geodesic is locally length minimizing.

In the formulation of symplectic geometry, the geodesics $x(t)$ are the projections to the base manifold M of the integral curves $(x(t), p(t))$ of the Hamiltonian vector field \vec{E} defined on the cotangent bundle T^*M , where E is the energy function associated to the metric g .

Now in sub-Riemannian geometry, it is also of fundamental importance to study minimizers between two points of a sub-Riemannian manifold (M, D, g) . Since the metric g is defined only on the subbundle D of TM in this sub-Riemannian case, there is no canonical means to define the length

of a general curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. But we can well speak of the length of γ if γ is an integral curve of D , that is, if $\dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$ for all t .

On the other hand Chow's theorem tells that if M is connected and if D is nonholonomic (in other word, bracket-generating), then any two points of M can be joined by a piecewise smooth integral curve of D .

Hence, especially for a nonholonomic sub-Riemanniannian manifold (M, D, g) , it makes sense and is important to study the minimizers (length minimizing piecewise smooth integral curves) between two points of the sub-Riemannian manifold (M, D, g) . However, contrary to the Riemannian case, this problem is very subtle, mainly because the space $C_D(p, q)$ of all integral curves of D joining p and q may have singularities, while the space $C(p, q)$ of all curves joining p and q has no singularity and is a smooth infinite dimensional manifold, which makes difficult to apply directly the method of variation to the sub-Riemanniannian case.

For a sub-Riemannian manifold (M, D, g) we define a *normal biextremal* to be an integral curve of the Hamiltonian vector field \vec{E} associated to the Hamiltonian function $E : T^*M \rightarrow \mathbf{R}$, where E is the energy function associated with the sub-Riemannian metric g . We then define a *normal extremal* to be the projection to M of a normal biextremal. Then, as in Riemannian geometry, a normal extremal is locally a minimizer.

However, R. Montgomery ([6], [7]) and I. Kupka [3] discovered that there exists a minimizer which is not a normal extremal, and hence called it abnormal. The appearance of abnormal minimizers is a surprising phenomenon never arising in Riemannian geometry but peculiar to sub-Riemannian geometry.

If D is a distribution on M , then the annihilator bundle D^\perp , considered as a submanifold of the symplectic manifold T^*M , carries a (singular) characteristic distribution $\text{Ch}(D^\perp)$. An integral curve of this characteristic system $\text{Ch}(D^\perp)$ contained in $D^\perp \setminus \{\text{zero section}\}$ is called an *abnormal biextremal*, of which the projection to M is called an *abnormal extremal*.

A rigorous application of the Pontryagin Maximum Principle of Optimal Control Theory to sub-Riemannian geometry shows that a minimizer of sub-Riemannian manifold (M, D, g) is either a normal extremal of (D, g) or an

abnormal extremal of D .

This settled the long discussions that had been made until 1990's by many mathematicians with erroneous statements, and gave a right way to treat the problem of length-minimizing paths in sub-Riemannian geometry.

In this talk we will give a survey on the problem of length-minimizing paths mainly following Liu and Sussmann [5]. We then consider this problem in a concrete case of the standard Cartan distribution and some examples. Referring to [9], we will carry out detailed computation of extremals, which will well illustrate how normal and abnormal extremals appear in sub-Riemannian geometry[4].

References

- [1] É. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. École Norm. Sup. 27 (1910), pp. 109–192.
- [2] W. L. Chow, Uber System Von Linearen Partiellen Differentialgleichungen Erster Ordnung, Math. Ann. 117 (1940–1941), pp. 98–105.
- [3] I. Kupka, Abnormal extremals, preprint, 1992.
- [4] Y. Kitagawa, The infinitesimal automorphisms of a homogeneous subriemannian contact manifold, Nara Women's University Annual reports of Graduate School of Humanities and Sciences, No.20, pp.147-163, (2005).
- [5] Wensheng Liu and Hector J. Sussman, Shortest Paths for Sub-Riemannian Metrics on Rank-Two Distributions, MEMOIRS of the American Mathematical Society, vol.118, Number 564 (1995).
- [6] R. Montgomery, Abnormal Minimizers, SIAM J. Control and Optimization, vol. 32, no. 6 (1994), pp. 1605–1620.
- [7] R. Montgomery, A Survey of Singular Curves in Subriemannian Geometry, Journal of Dynamical and Control Systems, vol.1 (1995), pp. 49–90.

- [8] R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications, American Mathematical Society (Mathematical Surveys and Monographs Volume 91), 2000.
- [9] M. Okada, Minimizers on Sub-Riemannian manifolds, (in Japanese), MSc Thesis Kyoto Univ. of Edu., 1996.
- [10] R. Stricharz, Sub-Riemannian Geometry, J. Diff. Geom. 24 (1986), pp. 221–263.
- [11] R. Stricharz, Corrections to Sub-Riemannian Geometry, J. Diff. Geom. 30 (1989), pp. 595–596.
- [12] N. Tanaka, A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto Univ., 9, 1975.

Uncertainty-Driven Plasma Diffusion

Takahiro SHIMAZAKI

Graduate school of Engineering, Hokkaido University, N-13, W-8, Sapporo 060-8628, Japan

We have constructed a semiclassical collisional diffusion model. In this model, a field particle is treated as either a point charge or a spatially distributed charge. The test particle is treated as a distributed point charge with Gaussian distribution. The collisional changes in velocity in our model is of the same order as the classical theory for a typical proton in a fusion plasma of $T = 10$ keV and $n = 10^{20}$ m $^{-3}$. The spatial extent of the distribution, or uncertainty, for the test particle obtained in our model grows in time, and becomes of the order of the average interparticle separation $\Delta\ell \equiv n^{-1/3}$ during a time interval $\tau_r \sim 3 \times 10^7 \Delta\ell / g_{\text{th}}$, where $g_{\text{th}} = \sqrt{2T/m}$ is the thermal speed, with m being the mass of the particle under consideration. The time interval is 3–4 order of magnitudes smaller than the collision time. This suggests that particle transport cannot be understood in the framework of classical mechanics, and that the quantum-mechanical distribution of individual particles in plasmas may cause the anomalous diffusion.

Keywords: anomalous diffusion, uncertainty, distribution function, Coulomb potential, magnetic length, Schrödinger equation.

1 Introduction

We have pointed out in the first paper [1] that (i) for distant encounters in typical fusion plasmas of $T = 10$ keV and $n = 10^{20}$ m $^{-3}$, the average potential energy $\langle U \rangle \sim 30$ meV is as small as the uncertainty in energy $\Delta E \sim 40$ meV, and (ii) in the presence of a magnetic field $B = 3$ T, the spatial size of the wavefunction in the plane perpendicular to the magnetic field is as large as $\ell_B \sim 1.4 \times 10^{-8}$ m which is much larger than the typical electron wavelength $\lambda_e \sim 10^{-11}$ m, as well as ion wavelengths $\lambda_i \sim 10^{-13}$ m.

In considering diffusion of plasmas correctly, it was also pointed out more than half a century ago [2, 3] that one must consider the wave character of charged particles when the temperature T is high, i.e. the relative speeds of interacting particles are fast. The criterion of the classical theory to be valid in terms of relative speed g in a hydrogen plasma is given in Ref. [3], as

$$g \ll \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} = 4.4 \times 10^6 \text{ m/s}, \quad (1)$$

where $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C and $\hbar \equiv h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s stand for the elementary electric charge and the reduced Planck constant. In contemporary fusion plasmas with $T \sim 10$ keV or higher, ions as well as electrons should be treated quantum-mechanically. In current plasma physics, however, the quantum-mechanical effects enters as a minor correction to the Coulomb logarithm, $\ln \Lambda$, in the case of close encounters [4]. Nonetheless, the neoclassical theory [5] is capable of predicting a lot of phenomena such as those related to the current conduction. Such phenomena linearly depend on the change in velocity Δv or in position

Δr . The quantum-mechanical changes, e.g. in the velocity $^{\text{QM}}\Delta v$, are stochastic. The average or expectation value of Δv conforms to the classical prediction $^{\text{CL}}\Delta v$ due to the Ehrenfest's theorem: for $\xi = v, r$

$$\langle \Delta \xi \rangle = \langle ^{\text{CL}}\Delta \xi + ^{\text{QM}}\Delta \xi \rangle = ^{\text{CL}}\Delta \xi. \quad (2)$$

However, diffusion is quadratic in Δg or Δr :

$$\langle (\Delta \xi)^2 \rangle = \langle (^{\text{CL}}\Delta \xi)^2 \rangle + \langle (^{\text{QM}}\Delta \xi)^2 \rangle > \langle (^{\text{CL}}\Delta \xi)^2 \rangle. \quad (3)$$

This might be the reason why we cannot understand the so-called anomalous diffusion using classical theories that only give correct $\langle \Delta \xi \rangle$.

In quantum mechanics [1, 6], the *size* of a charge q in the presence of a magnetic induction \mathbf{B} , becomes the magnetic length $\ell_B = \sqrt{\hbar/qB}$, where $\hbar = h/2\pi$ stands for Dirac constant. In typical fusion plasma with a temperature T and a density n , ℓ_B is as large as one tenth of the inter-particle separation $\Delta\ell \equiv n^{-1/3}$, which is considerably longer than the typical de Broglie wavelength, $\lambda \approx h/\sqrt{2mT}$:

$$\lambda \ll \ell_B \sim \Delta\ell. \quad (4)$$

2 Interaction potential

We will not solve the Schrödinger equation here, instead we will adopt an alternative method as described in what follows. Let us assume that the initial wave function of a *field* particle is Gaussian with the center at the origin:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2}\ell_B^3} \exp\left(-\frac{r^2}{\ell_B^2}\right). \quad (5)$$

author's e-mail: oikawa@qe.eng.hokudai.ac.jp

If the *test* particle with the same charge q as the field particle has the similar distribution as Eq. (5), the probability $dP(\mathbf{r})$ of finding the test particle within an infinitesimal volume $d^3\mathbf{r}$ around a position \mathbf{r} is given as

$$dP(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2}\ell_B^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{\ell_B^2}\right) d^3\mathbf{r}. \quad (6)$$

The Coulomb potential energy in this case is given by

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\ell_B}\right), \quad (7)$$

whereas the potential due to a point charge is

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8)$$

as shown in Fig. 1

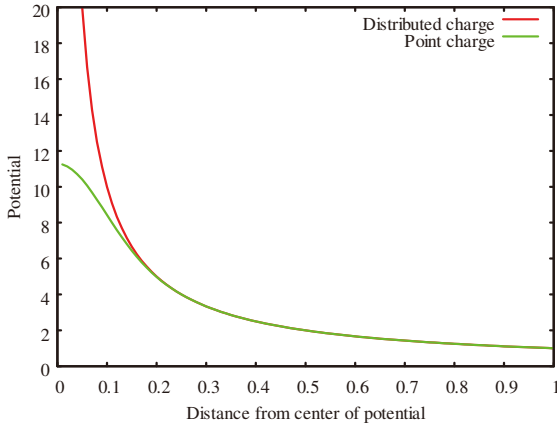


Fig. 1 Interaction potentials U ; due to a point charge at the origin, and due to a distributed charge centered at the origin.

3 Method

We solve a set of classical equations of motion, in which the test particle q for several initial positions at $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ with a velocity $\mathbf{v} = \mathbf{v}(0)$ in the presence of the potential field given by Eq. (7). For each initial position, Eq. (6) is used to mimic the quantum-mechanical distribution of the test particle in order to calculate particle scattering in the plasma.

For simplicity, initial speed is fixed to be the thermal velocity v_{th} and initial positions are restricted within the sphere of a radius $3\ell_B$ centered at the initial position $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, as shown in Fig. 2. The test particle moves during $\Delta t = \Delta\ell/g_{\text{th}}$, the time for the electron with its thermal speed to travel the average interparticle separation in classical mechanics.

4 Numerical Results

In the calculations, we have ignored the effect of magnetic field \mathbf{B} , because $\Delta t \approx 10^{-13}$ sec is much shorter than the

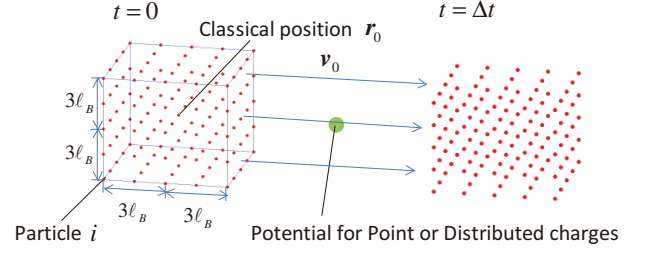


Fig. 2 Distributed system before ($t = 0$) and after ($t = \Delta t$) the interaction.

cyclotron period of the order of 10^{-8} sec for protons in a plasma with $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$ and $T = 10$ keV.

4.1 Case 1: Potential due to a point charge

Let us define the time-dependent variance in position as

$$\sigma^2(\Delta t) \equiv \text{VAR}[\mathbf{r}(\Delta t)] = \langle (\mathbf{r}(\Delta t) - \bar{\mathbf{r}}(\Delta t))^2 \rangle, \quad (9)$$

where $\bar{\mathbf{r}} \equiv \langle \mathbf{r} \rangle$ stands for the averaged position using Eq. (5), with $\langle \cdot \rangle$ being the ensemble average over the impact parameter b .

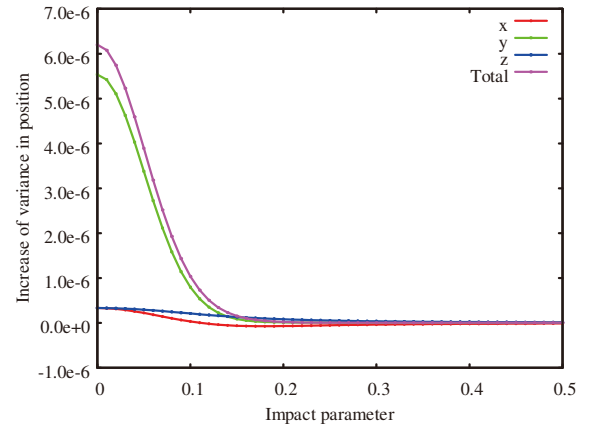


Fig. 3 Incremental variance of a particle in position as a function of classical impact parameter b , in the case of an interaction potential $U \propto 1/r$ due to a point charge at the origin.

Figure 3 shows the increase in variance in position during the time interval Δt as a function of the classical impact parameter, defined as

$$\frac{\sigma^2(\Delta t) - \sigma^2(0)}{\sigma^2(0)}, \quad (10)$$

the average over the impact parameter b of which is

$$\left\langle \frac{\sigma^2(\Delta t) - \sigma^2(0)}{\sigma^2(0)} \right\rangle_b \sim 1.44 \times 10^{-7}, \quad (11)$$

from which

$$(1 + 1.44 \times 10^{-7})^N \times \ell_B^2 = \Delta \ell^2, \quad (12)$$

$$\therefore N \sim 3.2 \times 10^7. \quad (13)$$

Therefore, the variance in position, i.e., the spatial extent of the proton under consideration, becomes as large as the average interparticle separation $\Delta \ell$

$$\tau_r \sim 3.2 \times 10^7 \Delta t = 3 \times 10^{-6} \text{ sec}, \quad (14)$$

under the condition that the increase in the variance be constant. Quantum-mechanically, the wavefunction of each proton overlaps with each other at the time $t \sim \tau_r$, which is much smaller than the collision time for protons of the order of several milliseconds in the plasma.

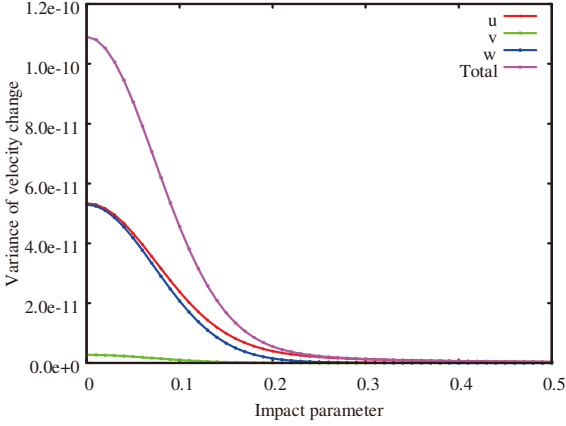


Fig. 4 Variance of a particle in velocity (right) in the case of an interaction potential U due to a point charge at the origin.

Figure 4 shows the variance in velocity $\text{VAR}[v]$. The averaged variance, over the impact parameter, of velocity change is

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \approx 0.6 \times 10^{-11} v_{\text{th}}^2. \quad (15)$$

The corresponding variance in classical mechanics is given by

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{b_0}{\Delta t} \right)^2 \ln \Lambda \approx 2.3 \times 10^{-11} v_{\text{th}}^2, \quad (16)$$

where $b_0 = q^2 / 4\pi\epsilon_0 \mu v_{\text{th}}^2$ and $\ln \Lambda \approx 17$ are the impact parameter for $\pi/2$ scattering and the Coulomb logarithm.

4.2 Case 2: Potential due to a distributed charge

Figures 5 and 6 show the variances in position and in velocity, respectively, as a function of the classical impact parameter normalized by the average interparticle separation $\Delta \ell \equiv n^{-1/3}$ and the thermal speed $v_{\text{th}} \equiv \sqrt{2T/m}$.

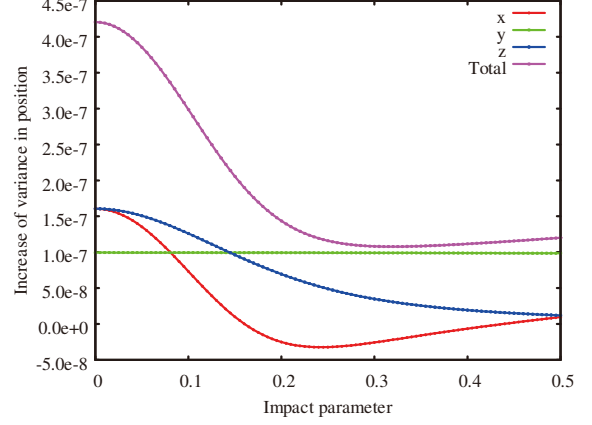


Fig. 5 Incremental variance of a particle in position as a function of classical impact parameter b . Interaction potential $U \propto r^{-1} \text{erf}(r/\ell_B)$ is due to a distributed charge centered at the origin.

The incremental variance in position during the time interval $\Delta t \equiv \Delta \ell / g_{\text{th}}$, averaged over the impact parameter b , in this case is

$$\left\langle \frac{\sigma^2(\Delta t) - \sigma^2(0)}{\sigma^2(0)} \right\rangle_b \sim 1.34 \times 10^{-7}. \quad (17)$$

Therefore, the variance in position, i.e., the spatial extent of a particle, becomes as large as the average interparticle separation $\Delta \ell$

$$\tau_r \sim 3.4 \times 10^7 \Delta t, \quad (18)$$

which is approximately the same as Case 1 given in Eq. (14), i.e., the field particle being a point charge.

The variance of velocity change for a distributed potential is

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \approx 0.12 \times 10^{-11} v_{\text{th}}^2. \quad (19)$$

5 Summary

We have constructed a semiclassical collisional diffusion model. In this model, a field particle is treated as either a point charge or a spatially distributed charge. The test particle is treated as a distributed point charge with Gaussian distribution. The collisional changes in velocity in our model is of the same order as the classical theory for a typical proton in a fusion plasma of $T = 10$ keV and $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$. The spatial extent of the distribution, or uncertainty, for the test particle obtained in our model grows in time, and, irrespective of the interaction potential $U(r)$, becomes of the order of the average interparticle separation $\Delta \ell \equiv n^{-1/3}$ during a time interval $\tau_r \sim 3 \times 10^7 \Delta t$, which is 3–4 order of magnitudes smaller than the collision time. This suggests that particle transport cannot be

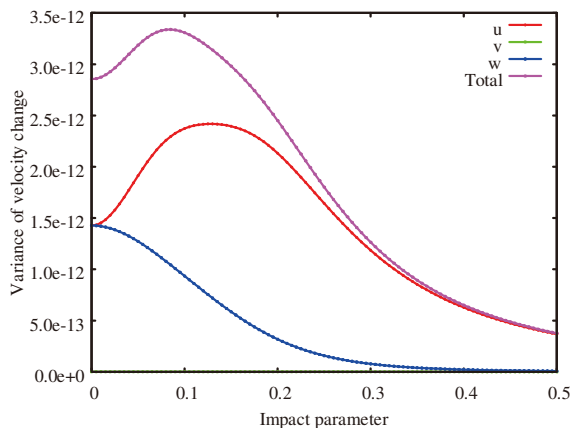


Fig. 6 Variance of a particle in velocity. Interaction potential U is due to a distributed charge centered at the origin.

understood in the framework of classical mechanics, and that the quantum-mechanical distribution of charged particle in plasmas may cause the anomalous diffusion.

In magnetically confined fusion plasmas, diffusion is governed by the banana particle motion due to the toroidicity of the magnetic field \mathbf{B} and the plasma current I_p , with which we have not dealt in this study. The diffusion model presented here is semiclassical, so we will need to solve Schrödinger's equation for exact analysis; this will be reported soon.

Acknowledgement

The authors would like to thank Dr. A. Wakasa, Prof. Y. Matsumoto, and Prof. M. Itagaki for their fruitful discussions on the subject. The author would also acknowledge the continuous encouragement of the late Prof. T. Yamashina. Part of the GPU/CUDA coding was done by Mr. R. Ueda. This research was partially supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research (C), 21560061.

- [1] S. Oikawa, T. Oiwa, and T. Shimazaki, to be published in *Plasma Fusion Res.* **4** (2009).
- [2] R. E. Marshak, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **410**, 49(1941).
- [3] R. S. Cohen, L. Spitzer, Jr., and P. McR. Routly, *Phys. Rev.* **80**, 230(1950).
- [4] S. I. Braginskii, *Reviews of Plasma Physics*, M. A. Leontovich (ed.), (Consultants Bureau, New York, 1965).
- [5] R. J. Hawryluk, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 537(1998).
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, 3rd ed., translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- [7] V. Sokolov and A. K. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 165002 (2004)
- [8] P. Yushmanov et al., *Nucl. Fusion* **30** 1999(1990).

Fano 3-folds with higher index and graded rings

Kaori Suzuki

Abstract

We use the computer system Magma to study graded rings of Fano 3-folds of index ≥ 2 . We list the number of families that can be realised in codimension up to 4.

1 Introduction

Definition 1. A normal projective 3-fold X is called a \mathbb{Q} -Fano 3-fold if and only if X has \mathbb{Q} -factorial terminal singularities, $-K_X$ is ample, and the Picard number $\rho(X) = 1$.

The anti-canonical divisor $-K_X$ is only expected to be a Weil divisor. In the following definition, equality of divisors means linear equivalence .

Definition 2. Let X be a Fano 3-fold. The Fano index $f = f(X)$ of X is

$$f(X) = \max\{m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid -K_X = mA \text{ for some (integral) Weil divisor } A\}.$$

Fano index is bounded $f \leq 19$, and it does not take the values 18, 16, 15, 14, 12 ([Su]) and 10 ([Pr]). We study Fano 3-folds of $f \geq 2$, and explain especially the case $f \geq 3$, since $f = 2$ work slightly differently: in those cases there is another discrete invariant, the genus, which does not play a role when $f \geq 3$. Furthermore, we list the number of possible numerical types of Fano 3-folds of each index .

We work over the complex number field \mathbb{C} throughout.

Theorem 3. For each $f \geq 2$, the number of Hilbert series of some (X, A) with X a Fano 3-fold of Fano index f and A a primitive ample divisor is:

f	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17	19
number of series	1413	231	124	63	11	23	10	2	3	2	1	1

The following theorem is a result of our classification; the proof is Step 2 of section 3.

Theorem 4. $H^0(X, \mathcal{O}(-K_X)) \neq 0$ for any Fano 3-fold (X, A) of index $f \geq 2$.

A first analysis of the possible realisations of these Hilbert series in low codimension is in section 2. As with all the results in this paper, we used computer algebra the Magma system [Mag]. Tabulating these examples by codimension gives the following (in which a blank entry is a zero).

f	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17	19	total
codim 0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	7
codim 1	8	7	2	5	1	4	3	2	2	1			35
codim 2	26	6	7	1	0	0							40
codim 3	2	0	0	2	0	0							4
codim 4	≤ 73	3	2	1	1	1							≤ 81

Text files with the Magma code to make the classification of Theorem 3 and with all the proposed models is at the webpage [BS1].

2 Definitions and tools

A Fano 3-fold X with primitive ample divisor A , which we denote by (X, A) from now on, has a graded ring

$$R(X, A) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nA)).$$

This graded ring is finitely generated, and $X \cong \text{Proj } R(X, A)$. The *Hilbert series* $P(t)$ of (X, A) is defined to be that of the graded ring $R(X, A)$: thus $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nA))$ is the coefficient of t^n in $P(t)$.

A choice of homogeneous generators for $R(X, A)$ determines a map

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$$

into some weighted projective space \mathbb{P}^N , where $x_i \in H^0(X, \mathcal{O}_X(a_i A))$. With this embedding for a minimal set of generators, we say that (X, A) has *codimension* $N - 3$.

We compute the Hilbert series of a Fano 3-fold (X, A) using the Riemann–Roch formula of Theorem 5. There is a finite collection of quotient singularities whose invariants appear in the Riemann–Roch formula which is known as the *basket of singularities* of X .

We describe the quotient singularities that can arise in this context. Let the group \mathbb{Z}/r of r th roots of unity act on \mathbb{C}^3 via the diagonal representation $\varepsilon \cdot (x, y, z) \mapsto (\varepsilon^a x, \varepsilon^a y, \varepsilon^c y)$. The quotient singularity $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/r)$ is denoted $\frac{1}{r}(a, b, c)$. By [Su] Lemma 1.2, when we work with Fano 3-folds of index f below, we may assume that $b = -a$, $c = f$ and that r is coprime to a, b, c . We abbreviate the notation $\frac{1}{r}(a, -a, f)$ to $[r, a]$; the index f is always clear from the context. Thus a *basket of singularities* \mathcal{B} is a collection of singularity germs $[r, a]$.

For a singularity $p = \frac{1}{r}(a, -a, f)$, we define $i_p(n) = -n/f \pmod{r}$. The notation \bar{c} denotes the least residue of c modulo r .

Theorem 5 ([Su] Theorem 1.4). *Let X, A be a Fano 3-fold of index $f \geq 3$ and with basket \mathcal{B} .*

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{1-t} + \frac{(f^2 + 3f + 2)t + (8 - 2f^2)t^2 + (f^2 - 3f + 2)t^3}{12(1-t)^4} A^3 \\ &\quad + \frac{t}{(1-t)^2} \frac{Ac_2(X)}{12} + \sum_{p \in \mathcal{B}} \frac{1}{1-t^r} \sum_{k=1}^{r-1} c_p(k) t^k. \end{aligned} \tag{1}$$

Theorem 6 ([Ka]). *Let (X, A) be a Fano 3-fold with basket \mathcal{B} . Then*

$$-K_X c_2(X) = 24 - \sum_{[r,a] \in \mathcal{B}} \left(r - \frac{1}{r} \right).$$

3 The algorithm

We explain our algorithm for arbitrary $f \geq 3$.

Step 1. Assembling possible baskets:

A basket \mathcal{B} comprising germs $[r, a]$ of a Fano 3-fold must satisfy several conditions.

1. Kawamata's condition ([Ka], Theorem 2): $\sum_{[r,a] \in \mathcal{B}} \left(r - \frac{1}{r} \right) < 24$.
2. Positive degree: The degree $A^3 > 0$
3. Excess vanishing: $H^0(X, \mathcal{O}(nA)) = 0$ for each $n = -2, -3, \dots, -f + 1$.
4. Bogomolov–Kawamata bound ([Su] Proposition 2.4 and [Ka] Proposition 1):

$$(4f^2 - 3f)A^3 \leq 4fAc_2(X).$$

5. Imposing stability: $f^2 A^3 \leq 3Ac_2(X)$.

Step 2. Computing Hilbert series:

For each basket in \mathcal{B} , compute a rational expression for $P(t)$ according to the formula (1).

Step 3. Estimating the degrees of generators:

Suppose $P(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots$ is the Hilbert series of some graded ring R . Then R must have p_1 generators of degree 1. These generate at most a $q_2 = \frac{1}{2} p_1 (p_1 - 1)$ -dimensional subspace of R_2 . If $p_2 - q_2 < 0$, then this routine stops. On the other hand, if $p_2 - q_2 \geq 0$, then R must have at least $p_2 - q_2$ generators in degree 2. And so we continue into higher degree.

Step 4. Confirming small cases:

When the number of generators is small, we attempt to build a Fano 3-fold realising the given Hilbert series or prove that in fact more generators are needed. We describe the method in an example.

The basket $\mathcal{B} = \{[2, 1], [3, 1], [7, 3]\}$ with index $f = 5$ determines the rational function

$$\begin{aligned} P &= \frac{t^8 + t^5 + t^4 + t^3 + 1}{t^{13} - t^{12} - t^{11} + t^9 + t^8 - t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^2 - t + 1} \\ &= \frac{-t^{20} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{11} - t^9 - t^8 - t^7 - t^6 + 1}{\prod_{d=1,2,3,3,4,5,7}(1 - t^d)} \end{aligned}$$

which suggests a variety defined by 5 equations of weights 6, 7, 8, 9, 10:

$$X_{6,7,8,9,10} \subset \mathbb{P}^6(1, 2, 3, 3, 4, 5, 7).$$

In fact, these equations can be written as the five maximal Pfaffians of a skew 5×5 matrix, as in [ABR] Remark 1.8 or [R2] section 4, and it can be checked that this X is a Fano 3-fold with singularities equal to the basket.

4 Examples in codimension 4 ([BS2])

When $f = 2$ and $|-K_X| = |2A|$ is not empty, it may contain an element $S \in |2A|$ that is a K3 surface polarised by A . At least, many of the numerical conditions we impose here to generate Hilbert series of Fanos reduce to the same as those used for K3 surfaces in [B].

Consider, for instance, the following codimension 4 candidate:

$$X \subset \mathbb{P}(2, 2, 3, 5, 5, 7, 12, 17)$$

whose basket contains only $\frac{1}{17}(5, 12, 2)$. Setting a degree 2 variable to zero reveals a K3 surface known to exist because it has a Type 1 projection from a $\frac{1}{17}(5, 12)$ point to codimension 3:

$$(S \subset \mathbb{P}(2, 3, 5, 5, 7, 12, 17)) \dashrightarrow (T_{10,12,14,15,17} \subset \mathbb{P}(2, 3, 5, 5, 7, 12)).$$

The K3 surface T can be constructed easily, and moreover it can be forced to contain a linear $\mathbb{P}(5, 12)$. This curve can be unprojected to construct S . This is how we proceed with cases in codimension 4 here, but there is a twist.

When we project from a quotient singularity—say the point $\frac{1}{17}(5, 12, 2)$ in the example above—the result will always contain a line of index 2 singularities. That is, when we project we automatically incur canonical singularities that play a role in Riemann–Roch. And so the result of projection will not have Hilbert series already on our lists.

There are two ways out. The first is to make a double projection. In the example above, after projecting from the $\frac{1}{17}(5, 12, 2)$ point, we can project from the resulting $\frac{1}{12}(5, 7, 2)$ singularity. This second projection contracts the index 2 line, and we land in the family

$$Z_{10,12} \subset \mathbb{P}(2, 2, 3, 5, 5, 7).$$

To proceed, we would need an analysis of the exceptional locus of such double projections, and then a Type III-style unprojection result, following [R2] Example 9.16.

The second approach is to consider also weak Fano 3-folds with canonical singularities. As remarked upon in [RS], Theorem 3 illustrates again the strange bottleneck in codimension 3 for general unprojection methods. This method is explained in detail in [BKR]. We construct the example above by imposing the plane $\mathbb{P}(2, 5, 12)$ on the codimension 3 weak Fano 3-fold

$$\mathbb{P}(2, 5, 12) \subset Y_{10,12,14,15,17} \subset \mathbb{P}(2, 2, 3, 5, 5, 7, 12).$$

Such Y has a non-isolated singularity $\frac{1}{12}(2, 5, 7)$ on a line of index 2 singularities, and these are all canonical and not terminal singularities.

Remark 1. *When $f \geq 3$, similar construction by another unprojections is available which is now in progress.*

References

- [ABR] S. Altınok, G. Brown, M. Reid, Fano 3-folds, $K3$ surfaces and graded rings, in *Topology and geometry: commemorating SISTAG*, *Contemp. Math.* **314** (2002), 25–53.
- [B] G. Brown, A database of polarised $K3$ surfaces, *Exp. Math.* **16**, (2006), 7–20.
- [BKR] G. Brown, M. Kerber, M. Reid, $K3$ surfaces and Fano 3-folds, Tom and Jerry in progress.
- [BS1] G. Brown, K. Suzuki, Lists of examples and Magma code available for download at www.kent.ac.uk/ims/grdb
- [BS2] G. Brown, K. Suzuki, Fano 3-folds with divisible anti-canonical class, in *Manuscripta Math.* **123-1**;(2007),37–51.
- [Ka] Y. Kawamata, Boundedness of \mathbb{Q} -Fano Threefolds, *Contemp. Math.* 131 (1992), 439–445.
- [Mag] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma algebra system I: The user language, *J. Symb. Comp.* **24** (1997) 235–265.
- [Pr] Y. Prokhorov, \mathbb{Q} -Fano threefolds of large Fano index, I, (2008), arXiv:0812.1695.
- [R2] M. Reid, Graded rings and birational geometry, in *Proc. of algebraic geometry symposium (Kinosaki, Oct 2000)*, K. Ohno (Ed.), 1–72.
- [RS] Reid, Miles, Suzuki, Kaori, Cascades of projections from log del Pezzo surface, *Number theory and algebraic geometry*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 303, CUP, (2003), 227–249.
- [Su] K. Suzuki, On \mathbb{Q} -Fano 3-folds with Fano index ≥ 9 , *Manuscripta Mathematica* **114**, Springer, 229–246.

Faculty of Business Administration, Yokohama National Univ., 79-4 Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama, 145-8501, Japan. Email: suzuki@ynu.ac.jp

This work was supported by KAKENHI 20840017.

Landau-Lifshitz 方程式の Walker wall 解の安定性について

高棹圭介 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

Landau-Lifshitz 方程式は、1935年に Landau と Lifshitz [7] によって提唱された強磁性体の磁化ベクトルを記述するものである。強磁性体は、現在コンピュータのハードディスクの記憶媒体など工学的応用の面から無くてはならないものである一方、原子サイズのスケールからミリメートルのスケールまで様々な複雑な現象が観察される理学的にも大変興味深い対象である。現在ではこの Landau-Lifshitz 方程式の数学的な研究もされており、例えば Guo [3, 4] 等により大域解の存在などが示されている。

強磁性体の内部では、磁化ベクトルがほとんど変化しない部分 (磁区) と急激に変化する部分 (磁壁, Domain wall) が存在することが知られている [5, 6, 7]。ここで扱う Walker wall とは、1本の直線状の磁壁が等速で移動する物理現象を表した Landau-Lifshitz 方程式の travelling wave 解である。

今回は、Walker wall について得られた Landau-Lifshitz 方程式の安定性に関する結果を報告する。

\mathbb{R}^2 を薄い強磁性体とし、 $m = (m_1, m_2, m_3) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow S^2$ を強磁性体内の磁化ベクトルとする。但し S^2 は \mathbb{R}^3 内の単位球面である。 $H = (0, h, 0)$ を強磁性体に与える外磁場とする。但し $h \in \mathbb{R}$ は定数である。このとき Landau-Lifshitz 方程式は

$$\partial_t m = \eta m \times \partial_t m + m \times \nabla_{L^2} E(m) \quad (1)$$

である。ここで、 $E(m)$ は磁化エネルギーであり、

$$E(m) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x m|^2 dx + \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}} m_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 - m_2^2) dx - \int_{\mathbb{R}} m \cdot H dx, \quad a > 0$$

で与えられるものである。また、 $\nabla_{L^2} E(m)$ は $E(m)$ の L^2 -gradient であり、

$$\nabla_{L^2} E(m) = -\partial_x^2 m + am_1 e_1 - m_2 e_2 - H$$

である。但し $\{e_1, e_2, e_3\}$ は \mathbb{R}^3 の標準基底である。

注意 1. 定数 a は強磁性体の異方性からくるパラメータである。 η は Gilbert loss parameter と呼ばれる定数であり、 $E(m)$ の単調減少に関係している。

また、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $|m(x, 0)| = 1$ を満たす m が、(1) の滑らかな解だと仮定すると、(1) の両辺に m を内積することにより $\partial_t m \cdot m = 0$ となり、任意の $x \in \mathbb{R}, t \in [0, +\infty)$ に対し $|m(x, t)| = 1$ が成り立つ。

$v \in \mathbb{R}$ に対し, $z = x - vt$ としてパラメータを (x, t) から (z, t) へ置き換える. (1) の厳密解として次の travelling wave 解 (Walker wall) が存在する.

$$M_0(z) = \left(\sin \theta \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\delta}\right), -\tanh\left(\frac{z}{\delta}\right), \cos \theta \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\delta}\right) \right)$$

但し,

$$\sin 2\theta = \frac{2h}{a\eta}, \quad \delta = (1 + a \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad v = \frac{a \sin 2\theta}{2\sqrt{1 + a \sin^2 \theta}}$$

である [8]. $h = 0$ のときは $v = 0$ であり, M_0 は定常解となる.

$$\begin{cases} M_1 = (\cos \theta, 0, -\sin \theta), \\ M_2(z) = (-t_\delta(z) \sin \theta, -s_\delta(z), -t_\delta(z) \cos \theta) \end{cases}$$

とおく. 但し, $s_\delta(z) = \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\delta}\right)$, $t_\delta(z) = \tanh\left(\frac{z}{\delta}\right)$ とする. このとき, $\{M_1, M_0, M_2\}$ は互いに直交し, \mathbb{R}^3 での moving frame となっている.

(1) の解 m を

$$m(z, t) = r_1(z, t)M_1 + r_2(z, t)M_2(z) + \lambda M_0(z) \quad (2)$$

と表現する. 但し $|m| = 1$ より $\lambda = (1 - r_1^2 - r_2^2)^{\frac{1}{2}}$ である. (1) に (2) を代入し, M_1, M_2 の成分について (1) を書き直すと

$$\begin{cases} (1 + \eta^2)\partial_t r_1 = \lambda f_2 - r_2 f_0 + \eta(\lambda r_1 f_0 - \lambda^2 f_1 - r_2^2 f_1 + r_1 r_2 f_2) + (1 + \eta^2)v\partial_z r_1, \\ (1 + \eta^2)\partial_t r_2 = r_1 f_0 - \lambda f_1 + \eta(r_1 r_2 f_1 - r_1^2 f_2 - \lambda^2 f_2 + \lambda r_2 f_0) + (1 + \eta^2)v\partial_z r_2 \\ \quad + (1 + \eta^2)v\lambda\delta^{-1}s_\delta \end{cases} \quad (3)$$

が得られる. 但し,

$$\begin{cases} f_0 = 2\partial_z r_2 \delta^{-1} s_\delta - r_2 \delta^{-2} t_\delta s_\delta - \partial_z^2 \lambda + \lambda \delta^{-2} s_\delta^2 + (-r_2 s_\delta - t_\delta \lambda + h)t_\delta \\ \quad + a s_\delta \sin \theta (r_1 \cos \theta - r_2 t_\delta \sin \theta + \lambda s_\delta \sin \theta), \\ f_1 = -\partial_z^2 r_1 + a \cos \theta (r_1 \cos \theta - r_2 t_\delta \sin \theta + \lambda s_\delta \sin \theta), \\ f_2 = -\partial_z^2 r_2 + r_2 \delta^{-2} s_\delta^2 - 2\partial_z \lambda \delta^{-1} s_\delta + \lambda \delta^{-2} t_\delta s_\delta + (-r_2 s_\delta - t_\delta \lambda + h)s_\delta \\ \quad - a t_\delta \sin \theta (r_1 \cos \theta - r_2 t_\delta \sin \theta + \lambda s_\delta \sin \theta) \end{cases}$$

である.

定義 2. r が初期値 r_0 の (3) の解であるとは, $r \in C([0, +\infty); H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)) \cap C^1((0, +\infty); L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2))$ と $r_0 \in H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ が $r(0) = r_0$ と (3) を満たすことである.

$r = (r_1, r_2)$ について $(0, 0)$ を中心に (3) をテイラー展開し, r に関して 2 次以上の項を消去すると次の線形偏微分方程式が得られる.

$$(\eta^2 + 1)\partial_t r = J\mathcal{L}r + \mathcal{M}r \quad (4)$$

但し,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= J \begin{pmatrix} L-p & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, & J &= \begin{pmatrix} \eta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}, \\ L &= \partial_z^2 - \delta^{-2}(1 - 2s_\delta^2), & p &= 2 + a - 2\delta^{-2}, \\ \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} \eta^2 M_+ - M_- & 0 \\ \eta(M_+ + M_-) & (1 + \eta^2)M_+ \end{pmatrix}, & M_\pm &= v(\delta^{-1}t_\delta \pm \partial_z) \end{aligned}$$

である.

注意 3. s_δ は $-L$ の唯一の第1固有ベクトルであり, その固有値は0である. また, $\sigma(-L) = \{0\} \cup [\delta^{-2}, \infty)$ である [2]. このことから

$$\ker \mathcal{L} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s_\delta \end{pmatrix} \right\}$$

が得られる.

定義 4. r が初期値 r_0 の (4) の解であるとは, $r \in C([0, +\infty); H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2))$ と $r_0 \in H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ が $r(0) = r_0$ と (4) を満たすことである.

定理 5. ある η_0, h_0 に対し, $\eta_0 < \eta$, $0 < a < 2\eta$, $|h| < h_0$ とする. このとき, r_0 を初期値とする線形化 Landau-Lifshitz 方程式 (4) の解 r が存在する.

証明には Hille-吉田の定理を使う. 次に, (4) の解 r の挙動について得られた結果を述べる.

定理 6. ある η_0, h_0 に対し, $\eta_0 < \eta$, $0 < a < 2\eta$, $|h| < h_0$ とする. このとき, r_0 を初期値とする (4) の解 r に対しある定数 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ が存在して

$$\|r(t) - u\|_{H^1} \leq c_1 e^{-c_2 t}$$

が成り立つ.

最後に, 元の方程式 (1) に対する Walker wall の安定性に関して得られた結果を述べる. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$R(\alpha, z) = \begin{pmatrix} M_0(z - \alpha) \cdot M_1(z) \\ M_0(z - \alpha) \cdot M_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0(z - \alpha) \cdot M_2(z) \end{pmatrix}$$

と定義する. Walker wall の安定性を次で定義する.

定義 7. M_0 が安定であるとは, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $r_0 \in H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ に対し, $\|r_0\|_{H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} < \varepsilon$ ならば, r_0 を初期値とする (3) の解 r に対しある定数 $\alpha = \alpha(r_0)$ が存在し,

$$r(t) \rightarrow R(\alpha) \quad (t \rightarrow \infty) \text{ in } H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことである.

注意 8. $r(z, t) \equiv R(\alpha, z)$ とすると, r に対応する元の方程式 (1) の解 m に対し

$$m(z) = (M_0(z - \alpha) \cdot M_1(z))M_1(z) + (M_0(z - \alpha) \cdot M_2(z))M_2(z) + \lambda(z)M_0(z)$$

が成り立つ. これは $m(z, t) = M_0(z - \alpha)$ であることを表している.

$a = 0, h = 0, v = 0$ の場合, すなわち定常解での安定性については [1] を参照されたい. 以下の定理はその拡張である.

定理 9. ある η_0, h_0 に対し, $\eta_0 < \eta, 0 < a < 2\eta, |h| < h_0$ とする. このとき, 定義 8 の $\varepsilon = \varepsilon(\eta, a, h) > 0$ が存在し, M_0 は安定である.

参考文献

- [1] G. Carbou and S. Labbé, *Stability for static walls in ferromagnetic nanowires*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **6** (2006), 273-290.
- [2] S. Chang, S. Gustafson, K. Nakanishi and T. Tsai, *Spectra of linearized operators for NLS solitary waves* SIAM J. Math. Anal. **39** (2007/08), no. 4, 1070–1111.
- [3] B. Guo, *Landau-Lifshitz Equations*, World Scientific Pub Co Inc, 2008.
- [4] B. Guo and S. Fengqiu, *The global solution for Landau-Lifshitz-Maxwell equations*, J. Partial Diff. Eqs. **14**(2001), 133-148.
- [5] A. Hubert and R. Schaefer, *Magnetic Domains, The Analysis of Magnetic Microstructures*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1998.
- [6] M. Kurzke, C. Melcher, and R. Moser, *Domain Walls and Vortices in Thin Ferromagnetic Films*, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [7] L. D. Landau and E. Lifshitz, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sovietunion **8**(1935).
- [8] E. Magyari and H. Thomas, *Stability of Uniformly Driven Domain Walls*, Z. Phys. B – Condensed Matter **59**(1985), 167-176.

C^* -対応から得られる C^* -環

高橋 賢一

北海道大学大学院理学院数学専攻

1 初めに

C^* -環 \mathcal{A} 上の C^* -対応 (ϕ, E) とは, ヒルベルト右 \mathcal{A} -加群 E と, \mathcal{A} から E 上の随伴作用素を持つ線形作用素全体への $*$ -準同型写像 ϕ の組のことである. Pimsner[8] は Cuntz, Krieger によって定義された Cuntz-Krieger 環 [1,2] の C^* -対応を使った自然な拡張を定義した. しかし, その構成法では ϕ が単射であるという仮定も付随していたために, Cuntz-Krieger 環の発展概念である Graph Algebra との整合性がうまくつかなかったことが問題となった. その後 Kajiwara, Pinzari, Watatani[5] による研究等により Pimsner が提唱した環の別解釈, 構成法が与えられた.

本稿では, 現在 Graph Algebra との整合性がつくという点で最も最良の構成法と言われている Katsura[3] による Cuntz-Pimsner 環構成法を紹介する.

2 C^* -対応とフォック空間

このセクションでは, 研究対象となる環を構成するために必要な C^* -対応, フォック空間という概念を定義する.

定義 2.1. \mathcal{A} を C^* -環, E は線形空間かつ, 右 \mathcal{A} -加群の構造をもつとする. 写像 $E \times E \ni (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle_E \in \mathcal{A}$ が次の条件を満たすとき, E 上の \mathcal{A} -値右内積という.

- (i) $\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle_E = \lambda \langle x, y_1 \rangle_E + \langle x, y_2 \rangle_E$ $(x, y_1, y_2 \in E, \lambda \in \mathbb{C})$
- (ii) $\langle x, y \rangle_E^* = \langle y, x \rangle_E$ $(x, y \in E)$
- (iii) $\langle x, ya \rangle_E = \langle x, y \rangle_E a$ $(x, y \in E, a \in \mathcal{A})$
- (iv) $\langle x, x \rangle_E \geq 0$ $(x \in E)$
- (v) $x \in E, \langle x, x \rangle_E = 0 \Rightarrow x = 0$

このような右内積を持つ E のことを, 前ヒルベルト右 \mathcal{A} -加群という.

通常の前ヒルベルト空間と同様に, シュワルツの不等式「 $\|\langle x, y \rangle_E\| \leq \|\langle x, x \rangle_E\|^{1/2} \|\langle y, y \rangle_E\|^{1/2}$ ($x, y \in E$)」が成り立つ. そこで, $\|x\|_E := \|\langle x, x \rangle_E\|^{1/2}$ ($x \in E$) と定めると, $\|\cdot\|_E$ は E 上のノルムであることがわかる. このノルムに関し完備である E のことをヒルベルト右 \mathcal{A} -加群という.

集合 E, F をヒルベルト右 \mathcal{A} -加群とする. E から F への写像 T で

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, T^*y \rangle_E \quad (x \in E, y \in F)$$

を満たす F から E への写像 T^* が存在するもの全体を $\mathcal{L}(E, F)$ で表す. 一般に, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ならば, T は E, F を単にバナッハ空間と扱ったときの有界線形作用素となる. 従って, 集合 $\mathcal{L}(E, F)$ は, E から F への有界線形作用素全体の部分集合であるが, 作用素ノルムに関して閉集合であることがわかる. 特に $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ は単位元 1_E をもつ C^* -環である.

次に, 一般のヒルベルト空間におけるコンパクト作用素全体と関係が深い集合を定義する. $x \in E, y \in F$ に対し $\theta_{y,x} : E \rightarrow F$ を

$$\theta_{y,x}(z) := y\langle x, z \rangle_E \quad (z \in E)$$

として定めると, $\theta_{y,x} \in \mathcal{L}(E, F)$ となる. この $\theta_{y,x}$ を階数 1 の作用素という. この階数 1 の作用素による 1 次結合全体の作用素ノルムに関する閉包を $\mathcal{K}(E, F)$ と表す. $E = F$ のときは, 単に $\mathcal{K}(E)$ とする. 特に, $\mathcal{K}(E)$ は $\mathcal{L}(E)$ の両側イデアルとなる.

定義 2.2. \mathcal{A} を C^* -環とし, E をヒルベルト右 \mathcal{A} -加群とする. このとき更に, $*$ -準同型 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ が与えられているとき, 組 (ϕ, E) を \mathcal{A} 上の C^* -対応であるという.

C^* -環 \mathcal{A} は自明な形で右 \mathcal{A} -加群になるが, \mathcal{A} 上に \mathcal{A} -値右内積を $\langle a, b \rangle_{\mathcal{A}} := a^*b$ ($a, b \in \mathcal{A}$) により定めるとヒルベルト右 \mathcal{A} -加群となる. 更に $*$ -準同型 $\phi^{(0)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$ を $\phi^{(0)}(a)b := ab$ ($a, b \in \mathcal{A}$) として定めることにより $(\phi^{(0)}, \mathcal{A})$ は C^* -対応となる.

フォック空間を考える上で C^* -対応におけるテンソル積が必要となる. (ϕ, E) を \mathcal{A} 上の C^* -対応として, $E \odot E$ を E の代数的テンソル積とする. ここで $E \odot E$ の部分空間 N を, $N := \text{span}\{xa \odot y - x \odot \phi(a)y : x, y \in E, a \in \mathcal{A}\}$ により定め, 商線形空間 $(E \odot E)/N$ を考える. $x \odot y$ の同値類を $x \otimes y$ で表す. このとき, $x, x', y, y' \in E, a \in \mathcal{A}$ に対し

$$(x \otimes y)a := x \otimes (ya), \quad \langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle := \langle y, \phi(\langle x, x' \rangle_E)y' \rangle_E$$

と定め, これを線形拡張すると, $(E \odot E)/N$ 上の \mathcal{A} による右作用, \mathcal{A} -値右内積が得られる. これにより, $(E \odot E)/N$ は前ヒルベルト右 \mathcal{A} -加群となる. この $(E \odot E)/N$ を完備化した空間を $E \otimes_{\phi} E$ または単に $E^{\otimes 2}$ と表す. 一般に $T \in \mathcal{L}(E)$ に対して, $(T \otimes id)(x \otimes y) = Tx \otimes y$ ($x, y \in E$) を満たす写像 $T \otimes id \in \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} E)$ が存在する. そこで, $\phi^{(2)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} E)$ を $\phi^{(2)}(a) := \phi(a) \otimes id$ ($a \in \mathcal{A}$) として定めると, $(\phi^{(2)}, E \otimes_{\phi} E)$ は \mathcal{A} 上の C^* -対応となる. 以降, 帰納的に $E^{\otimes(n+1)} := E \otimes_{\phi^{(n)}} E^{\otimes n}$ として定義する.

定義 2.3. $\mathcal{F}(E) := \mathcal{A} \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E^{\otimes n} \right)$ により得られるヒルベルト右 \mathcal{A} -加群を E のフォック空間という. $\mathcal{F}(E)$ の元を, $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ もしくは $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$ (但し, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}, \mathbf{x}_1 \in E, \mathbf{x}_m \in E^{\otimes m}$ ($m \geq 2$)) と表すことにする.

3 フォック共変表現と Cuntz-Pimsner 環

このセクションでは, 研究対象である Cuntz-Pimsner 環を定義し, いくつかの結果を述べることにする.

定義 3.1. 任意の $a \in \mathcal{A}, x \in E$ に対して $\varphi_{\infty}(a), \tau_{\infty}(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E))$ を

- $\varphi_{\infty}(a)(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} := (\phi^{(0)}(a)\mathbf{x}_0, \phi(a)\mathbf{x}_1, \phi^{(2)}(a)\mathbf{x}_2, \dots)$ ($(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \mathcal{F}(E)$)
- $\tau_{\infty}(x)(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} := (0, x\mathbf{x}_0, x \otimes \mathbf{x}_1, x \otimes \mathbf{x}_2, \dots)$ ($(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \mathcal{F}(E)$)

により定める. ここで, $\varphi_{\infty}(\mathcal{A}) \cup \tau_{\infty}(E)$ で生成される C^* -環を $C^*(\varphi_{\infty}, \tau_{\infty})$ とする.

更に, \mathcal{A} の両側イデアル J_E を $J_E := \{a \in \mathcal{A} : \phi(a) \in \mathcal{K}(E), ab = 0 (b \in \text{Ker } \phi)\}$ とし, $\mathcal{F}(E)$ の部分ヒルベルト右 \mathcal{A} -加群 $\mathcal{F}(E) \cdot J_E$ を $\mathcal{F}(E) \cdot J_E := \{(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} a : (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \mathcal{F}(E), a \in J_E\}$ と定める. 特に, $\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ は $C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)$ の部分集合かつ両側イデアルとなることがわかるため, $C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)/\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ も C^* -環となる. そこで, $C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)$ から $C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)/\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ への商写像を σ とし, $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)/\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ を $\varphi := \sigma \circ \varphi_\infty$, $\tau : E \rightarrow C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)/\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ を, $\tau := \sigma \circ \tau_\infty$ と定める.

組 (φ, τ) をフォック共変表現といい, $\varphi(\mathcal{A}) \cup \tau(E)$ で生成される C^* -環を \mathcal{O}_E と表し, この環を Cuntz-Pimsner 環という. 以降, Cuntz-Pimsner 環に関するいくつかの性質を述べる.

まず, φ は \mathcal{A} から $C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)/\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ への $*$ -準同型, τ は E から $C^*(\varphi_\infty, \tau_\infty)/\mathcal{K}(\mathcal{F}(E) \cdot J_E)$ への線形写像であり, 次の等式が成り立つ.

- (i) $\tau(x)^* \tau(y) = \varphi(\langle x, y \rangle_E) \quad (x, y \in E)$
- (ii) $\varphi(a) \tau(x) = \tau(\phi(a)x) \quad (a \in \mathcal{A}, x \in E)$

上の 2 つの等式が成り立つことから, $\psi_\tau(\theta_{x,y}) = \tau(x) \tau(y)^* \quad (x, y \in E)$ をみたす $*$ -準同型写像 $\psi_\tau : \mathcal{K}(E) \rightarrow \mathcal{O}_E$ が存在する. 更に, 次の等式が成り立つ.

- (iii) $\varphi(a) = \psi_\tau(\phi(a)) \quad (a \in J_E)$

定義 3.2. (ϕ, E) を C^* -環 \mathcal{A} 上の C^* -対応, \mathcal{B} を C^* -環とする. $*$ -準同型 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ および, 線形写像 $t : E \rightarrow \mathcal{B}$ が条件 (i), (ii) をみたすとき, 組 (π, t) を E の \mathcal{B} への表現という. 更に, 条件 (iii) をみたすとき, (π, t) を共変表現という.

組 (φ, τ) がフォック共変表現と呼ぶのはこのことからである. 次の定理により, 組 (φ, τ) は普遍表現であるといえる.

定理 3.3. (π, t) を E 上の共変表現, $C^*(\pi, t)$ を $\pi(\mathcal{A}) \cup t(E)$ で生成される C^* -環とすると, $\rho \circ \varphi = \pi, \rho \circ \tau = t$ をみたす $*$ -準同型 $\rho : \mathcal{O}_E \rightarrow C^*(\pi, t)$ が存在する. (π, t) において更なる条件

- π が単射
- 任意の 1 次元トーラスの元 z に対し, $\beta_z(\pi(a)) = \pi(a), \beta_z(t(x)) = zt(x) \quad (a \in \mathcal{A}, x \in E)$ をみたす $*$ -準同型 $\beta_z : C^*(\pi, t) \rightarrow C^*(\pi, t)$ が存在する

が仮定されているとき, \mathcal{O}_E と $C^*(\pi, t)$ は同型となる.

4 例

このセクションでは, 今回の構成法により Cuntz-Krieger 環を構成できることを紹介する.

例 4.1 (Cuntz-Krieger 環 [2,4]). 行列 \bar{A} を行列要素が 0 または 1 だけからなる $n \times n$ 行列で, どの行どの列も零ベクトルではないものとする. このとき, 次の 2 条件をみたす n 個の 0 ではない半等長作用素 S_1, \dots, S_n で生成される C^* -環を \bar{A} による Cuntz-Krieger 環という.

$$(A) S_i S_i^* S_j S_j^* = 0 \quad (i \neq j) \quad (B) S_i^* S_i = \sum_{j=1}^n \bar{A}_{(i,j)} S_j S_j^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

ここで, \bar{A} の行列要素が全て 1 の場合が Cuntz 環である.

$V := \{1, 2, \dots, n\}$, $W := \{(i, j) \in V \times V : \overline{A}_{(i,j)} = 1\}$ と定める. (気持ちとしては, V を頂点のなす集合, W を行列 \overline{A} から与えられる有向辺の集合と考える.) その上で, C^* -環 \mathcal{A} を V 上の関数全体. 線形空間 E を W 上の関数全体とする. E 上の \mathcal{A} による右作用, \mathcal{A} -値右内積, そして $*$ -準同型 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ を次で定めると, (ϕ, E) は C^* -対応となる.

$x, y \in E$, $a \in \mathcal{A}$ に対して

- $(xa)(i, j) := x(i, j)a(j) \quad ((i, j) \in W)$
- $\langle x, y \rangle(j) := \sum_{i:(i,j) \in W} \overline{x(i, j)}y(i, j) \quad (j \in V)$
- $(\phi(a)x)(i, j) := a(i)x(i, j) \quad ((i, j) \in W)$

ここで, (ϕ, E) のフォック共変表現を (φ, τ) とする. 今, 任意の W の元 (k, l) に対し $q_{(k,l)} \in E$ を, $q_{(k,l)}(i, j) := \delta_{(k,l),(i,j)}$ (クロネッカーのデルタ) $((i, j) \in W)$ と定め, 更に任意の $1 \leq i \leq n$ をみたく i に対し, $\omega_i \in E$ を $\omega_i := \sum_{(k,l) \in W, k=i} q_{(k,l)}$ と定義する. その上で $S_i := \tau(\omega_i)$ ($i = 1, \dots, n$) とすると, S_1, \dots, S_n は $(A), (B)$ の条件をみたく半等長作用素となる. またこのとき $\{S_i\}_{i=1}^n$ により生成される C^* -環は Cuntz-Pimsner 環 \mathcal{O}_E と一致する.

参考文献

- [1] J. Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, *Comm. Math. Phys.* 57 (1977), 173-185.
- [2] J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^* -algebras an topological Markov chains, *Invent. Math.* 56 (1980), 251-268.
- [3] T. Katsura, On C^* -algebras associated with C^* -correspondences, *J. Funct. Anal.* 217 (2004), 366-401.
- [4] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Hilbert C^* -bimodules and countably generated Cuntz-Krieger algebras, *J. Operator Theory.* 45 (2001), 3-18.
- [5] T. Kajiwara, C. Pinzari, Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^* -algebras generated by Hilbert bimodules, *J. Funct. Anal.* 159 (1998), 295-322.
- [6] E.C. Lance, Hilbert C^* -modules, A Toolkit for Operator Algebraists, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [7] K. Matsumoto, Actions of symbolic dynamical systems on C^* -algebras, *J. Reine Angew. Math.* 605 (2007), 23-49.
- [8] M. Pimsner, A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by \mathbb{Z} , in "Free Probability Theory" (D. V. Voiculescu, Ed.), AMS (1997).

A conservative finite difference scheme for the Gardner equation

西山 博太 (中央大学大学院理工学研究科数学専攻)

1 はじめに

Gardner 方程式

$$u_t + \alpha uu_x + \nu u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

を考える。但し、 α, ν は定数とする。

本講演では Eq.(1) に対して、離散変分法 [1] を用いて保存量を満足するような有限差分スキームを導出する。そして、数値実験を行うため以下に問題設定をおこなう。

Problem (Basic 1-soliton)

Eq.(1) のソリトン解

$$u = \left(2 \tan^{-1} \left[\frac{1 + a_1 \exp(p_1 x - \Omega_1 t)}{1 + \exp(p_1 x - \Omega_1 t)} \right] \right)_x, \quad \Omega_1 = p_1^3, \quad a_1 = \frac{\alpha + \nu p_1}{\alpha - \nu p_1} \quad (2)$$

が [2] で与えられている。この問題設定のもとで数値実験を行い導出した差分スキームにより得られた数値解とソリトン解との比較及び離散的保存量の保存性について考える。

2 離散変分法による離散的 Gardner 方程式の導出

2.1 差分と和分の導入

この節では、微分と積分を差分と和分で適切に近似する。ある有界領域 $\Omega = [a, b]$ に対して、関数 $f(x)$ の空間変数 x に関する mesh size Δx を次のように定義する。

$$\Delta x \equiv \frac{b - a}{N}$$

[シフト演算子]

独立変数が Δx だけずれた関数値を与える演算子であり、次のように定義する。

$$s^+ f(x) \equiv f(x + \Delta x), \quad s^- f(x) \equiv f(x - \Delta x), \quad s^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(s^+ + s^-)$$

[平均演算子]

関数値を平均化する演算子であり、次のように定義する。

$$\mu^+ \equiv \frac{1}{2}(s^+ + 1), \quad \mu^- \equiv \frac{1}{2}(s^- + 1), \quad \mu^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(\mu^+ + \mu^-)$$

[1 階差分]

前進差分 δ^+ 、後退差分 δ^- 、中心差分 $\delta^{(1)}$ を次のように定義する。

$$\delta^+ f(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \delta^- f(x) \equiv \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}, \quad \delta^{(1)} f(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

[2 階差分]

2 階差分 $\delta^{(2)}$ は次のような中心差分で定義する。

$$\delta^{(2)} f(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

[和分]

積分の近似である和分は台形公式を用いて次のように定義する。

$$\sum_{k=0}^N f_k \Delta x \equiv \left(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{N-1} f_k + \frac{1}{2} f_N \right) \Delta x$$

$x = a + k\Delta x$ における $f(x)$ の値を f_k と略記する。

[部分積分公式]

部分積分公式の離散版である部分積分公式は次のようになる。

$$\sum_{k=0}^N f_k (\delta^{(1)} g_k) \Delta x + \sum_{k=0}^N (\delta^{(1)} f_k) g_k \Delta x = \frac{1}{2} [f_k (s^{(1)} g_k) + (s^{(1)} f_k) g_k]$$

次に 1 階微分と 2 階微分の間で成立する部分積分公式の部分積分公式は次のようになる。

$$\sum_{k=0}^N \frac{(\delta^+ f_k)(\delta^+ g_k) + (\delta^- f_k)(\delta^- g_k)}{2} \Delta x + \sum_{k=0}^N (\delta^{(2)} f_k) g_k \Delta x = \frac{1}{2} [(\delta^+ f_k)(\mu^+ g_k) + (\delta^- f_k)(\mu^- g_k)]$$

2.2 離散の変分と差分スキーム

本節の目的は離散の変分を導入し、それを用いて差分スキームを構成することである。まず、前節で定義した演算子を用いて自由エネルギー G を与え、それを離散化する。

Eq.(1) の自由エネルギーを次のように与える。

$$G(u, u_x) = \frac{\alpha}{6} u^3 + \frac{\nu}{12} u^4 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3)$$

Eq.(3) に対応する離散的自由エネルギー $G_d(u_k)$ を次のように与える。

$$G_d(u_k) = \frac{\alpha}{6} u_k^3 + \frac{\nu}{12} u_k^4 - \left(\frac{(\delta^+ u_k)^2 + (\delta^- u_k)^2}{2} \right) \quad (4)$$

次に全自由エネルギー $I(u)$ を次のように与える。

$$I(u) = \int_a^b G(u, u_x) dx \quad (5)$$

Eq.(5) に対応する離散的全自由エネルギー $I_d(u_k)$ を次のように与える。

$$I_d(u_k) = \sum_{k=0}^N G_d(u_k) \Delta x \quad (6)$$

本来の第 1 変分は u を微小に変化させて $u + \delta u$ として、 $G(u + \delta u)$ と $G(u)$ の差から

$$I(u + \delta u) - I(u) = \int_a^b \left(\frac{\delta G}{\delta u} \right) \delta u dx + [G_{u_x} \delta u]_a^b$$

のように計算した。

これに対して離散の変分は $u + \delta u$ と u ではなくこの 2 つに対応するものを独立に u_k と v_k にとり従来の変分計算と同様に部分積分を用いて

$$I_d(u_k) - I_d(v_k) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{\delta G_d}{\delta(u_k, v_k)} \right) (u_k - v_k) \Delta x$$

が成り立つように定義する。但し、この定義は境界項が消えるように境界条件が離散化されていることが前提となっている。Eq.(1) の場合の離散変分導関数 $\frac{\delta G_d}{\delta(u_k, v_k)}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_d}{\delta(u_k, v_k)} &= \frac{\alpha}{6} \{(u_k)^2 + u_k v_k + (v_k)^2\} + \frac{\nu}{12} \{(u_k)^2 + (v_k)^2\} (u_k + v_k) \\ &+ \frac{1}{2} \delta^{(2)}(u_k + v_k). \end{aligned}$$

2.3 離散的 Gardner 方程式

以上の離散化により目的の差分スキームが次のように導かれる。時間を刻み幅 Δt で離散化し、時刻 $t = n\Delta t$, 点 $x = a + k\Delta x$ における $u(x, t)$ に対応する離散値を u_k^n と書く。

時間微分を前進差分で近似し置き換える。次に、周期境界条件の下で離散的 Gardner 方程式に対応する次の差分スキームを得る。

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = -\delta^{(1)} \frac{\delta G_d}{\delta(u_k^{n+1}, u_k^n)}, \quad (7)$$

$$\frac{\delta G_d}{\delta(u_k^{n+1}, u_k^n)} = \frac{\alpha}{6} \{(u_k^{n+1})^2 + u_k^{n+1} u_k^n + (u_k^n)^2\} + \frac{\nu}{12} \{(u_k^{n+1})^2 + (u_k^n)^2\} (u_k^{n+1} + u_k^n) \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2} \delta^{(2)}(u_k^{n+1} + u_k^n) \quad (9)$$

$$u_k^0 = \phi_k, \quad (10)$$

$$u_0^n = u_N^n \text{ and } \delta^{(1)} u_0^n = \delta^{(1)} u_N^n. \quad (11)$$

2.4 離散的自由エネルギーの保存

離散的自由エネルギー (4) が保存されるとは適切な境界条件の下で離散的全自由エネルギーが時間とともに一定であることを保証をする等式

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{k=0}^N \{G_d(u_k^{n+1}) - G_d(u_k^n)\} \Delta x = 0 \quad (12)$$

が成り立つことである。

Eq.(7) は離散的全自由エネルギーが成り立つ。

2.5 離散的質量の保存

同様に離散的質量が保存されるとは適切な境界条件の下で離散的質量が時間とともに一定であることを保証をする等式

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{k=0}^N \{u_k^{n+1} - u_k^n\} \Delta x = 0 \quad (13)$$

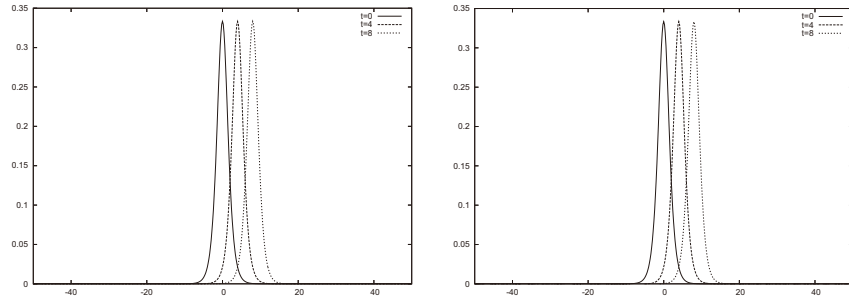
が成り立つことである。Eq.(7) は離散的質量の保存が成り立つ。

3 数値実験

係数およびその他のパラメータを $x_0 = 0$, $p_1 = 1$, $\alpha = 8$, $\nu = 6$ と設定する。ソリトン解 (2) および Eq.(7) の数値解を Figure1. に示した。

次に離散的保存量 (離散的質量と離散的自由エネルギー) の保存性を Figure2. に示した。

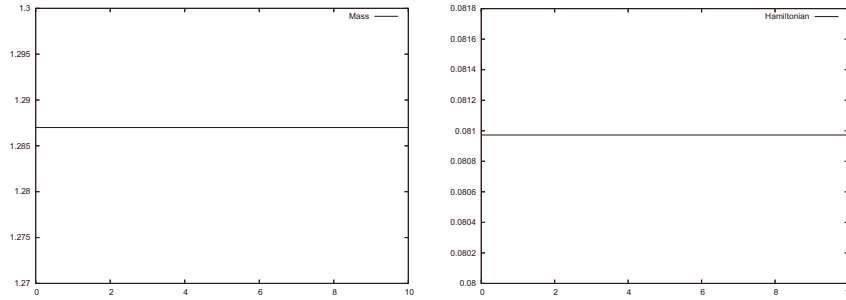
Figure 1. The Problem and numerical and exact solution behavior $t = 0.0 \sim 10.0$



left) exact solution behavior

right) numerical solution behavior

Figure 2. The computed value Mass and free energy for Problem



left) Mass

right) free energy

4 まとめ

Gardner 方程式に対して離散の変分法を用いることで離散的な保存量 (質量と Hamiltonian) をもつ差分スキームを導出することに成功した。そして, 実際に数値実験の設定を行い厳密解と数値解との比較及び離散的な保存量の保存性に関して良好な結果を得ることができた。

参考文献

- [1] D. Furihata, (1999) Finite Difference Scheme for $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \frac{\delta G}{\delta u}$ That Inherit Energy Conservation or Dissipation Property, J. Comput. Phys., 156, 181-205.
- [2] K.W. Chow, R.H.J. Grimshaw, E.Ding, Interactions of breathers and solitons in the extended Korteweg-de Vries equation, Wave Motion, 43(2005) 158-166.
- [3] T. Kakutani, N. Yamasaki, Solitary waves on a two-layer fluid, J. Phys. Soc. Jpn, 45(1978) 674-679.
- [4] J. W. Miles, On internal solitary waves, Tellus, 33(1981) 397-401.
- [5] P.L.F. Liu, On interfacial waves over random topography, Wave Motion 24(1996) 169-184.
- [6] R. Grimshaw, Internal solitary waves, in: R. Grimshaw(Ed.), Environmental Stratified Flows, Chapter 1, Kluwer, Boston, 2001, pp1-28.
- [7] R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves, J. Phys. Oceanogr. 34 (2004), 2774-2779.
- [8] A. V. Slyunyaev, Dynamics of localized waves with large amplitude in a weakly dispersive medium with a quadratic and positive cubic nonlinearity, J. Exp. Theor. Phys. 92(2001) 529-534.

A remark about generic Torelli for some geometric surfaces of geometric genus 2

林暢克

ここでは、代数多様体のモジュライをそのコホモロジーで捉えようとするトレリ問題の一種である変形トレリ問題の具体的な曲面についての考察を紹介したい。

モジュライの問題とは、あるデータを持つ代数多様体がどのくらい存在するか、を問う問題で、それは各代数多様体を点に対応させてできるパラメータ空間によって計られる。しかし、そのパラメータ空間の構造は一般には非自明なことが多く、それを解明するための手段としてトレリ問題が考えられた。

非特異代数多様体のコホモロジーは、ホッジ構造という美しい構造を持つ。そのホッジ構造により周期写像が定義される。この周期写像が単射かを問うのがトレリ問題である。

しかしこれは成り立たないことが多いので色々なパターンが考えられた。その1つが変形トレリ問題である。

これは周期写像とその接写像の組から多様体が回復できるか、という問題である。

この問題についてはよく研究がされていて、1986年の斎藤政彦さんの論文[7]である種の重み付き射影空間内の超曲面について大部分が肯定的に解決されている。

本稿では、[7]の主定理の例外とされた曲面について D.Cox, R.Donagi[4] の手法に基づいて考察した筆者の試みを紹介する。

x, y, z, w をそれぞれ次数が $1, 1, 2, 5$ の変数とし、これらを斉次座標にもつ重み付き射影空間を $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, 1, 2, 5)$ とする。 X を \mathbb{P} 内で $F = w^2 - z^5 - \phi_2 z^3 - \phi_3 z^2 - \phi_4 z - \phi_5$, $\phi_i = \phi_i(x, y)$, $\deg(\phi_i) = 2i$ で定義された曲面とする。 R を X のヤコビ環、つまり $R = \mathbb{C}[x, y, z, w]/(F_x, F_y, F_z, F_w)$, ただし、 F_x, F_y, F_z, F_w はそれぞれ F の偏微分、 R^a を R の次数が a の部分とする。

すると、ここで問題にされる極小ホッジ構造は以下で与えられる。

$$R^{11} \otimes R^{11} \rightarrow R^{22} \cong \mathbb{C} \tag{0.1}$$

$$R^1 \otimes R^{10} \rightarrow R^{11} \tag{0.2}$$

これは、周期写像とその接写像をヤコビ環で書いたものである。

ここで、 R のポアンカレ多項式は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{a=0}^{\infty} (\dim R^a) t^a &= \frac{(1-t^9)^2(1-t^8)}{(1-t)^2(1-t^2)} \\ &= 1 + 2t + 4t^2 + 6t^3 + 9t^4 + 12t^5 + 16t^6 + 20t^7 + 24t^8 \\ &\quad + 26t^9 + 28t^{10} + 28t^{11} + 28t^{12} + 26t^{13} + 24t^{14} + 20t^{15} + 16t^{16} \\ &\quad + 12t^{17} + 9t^{18} + 6t^{19} + 4t^{20} + 2t^{21} + t^{22} \end{aligned}$$

ここで、次に注意する。

Lemma 0.1. 上の状況において、次の双線形射が存在するとする。

$$\alpha : \bigotimes_{i=1}^k R^{a_i} \times \bigotimes_{j=1}^l R^{b_j} \rightarrow \mathbb{C}$$

ここで、 $\{a_i\}_{i=1}^k, \{b_j\}_{j=1}^l, \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{j=1}^l b_j = 22$ とする。もし $\text{Max}_{1 \leq j \leq l}(\{b_j\}) \geq 2$ なら、

$$\text{Ker}\left(\bigotimes_{i=1}^k R^{a_i} \rightarrow R^a\right) = \left\{u \in \bigotimes_{i=1}^k R^{a_i} \mid \alpha\left(u, \bigotimes_{j=1}^l R^{b_j}\right) = 0\right\}$$

が成立する。

よって、 $K^{11} := \text{Ker}(R^1 \otimes R^{11} \rightarrow R^{12})$ を調べればよいが、次の 1 連の補題から $K^{10} := \text{Ker}(R^1 \otimes R^{10} \rightarrow R^{11})$ を調べることになる。

Lemma 0.2. $R^1 \otimes R^a \rightarrow R^{a+1}$ は $a \neq 1, 3, 4, 5, 6, 7$ に対して全射である。

Lemma 0.3. $a = 11$ の時、 $R^1 \times R^a \rightarrow R^{a+1}$ のシンメトライザーは $R^1 \times R^{a-1} \rightarrow R^a$ と同型である。 $a = 10, 12$ では不成立である。

ここで、 $R^1 \times R^a \rightarrow R^{a+1}$ のシンメトライザーとは $\psi : R^1 \times B \rightarrow R^a : \psi(u, T) = T(u), B = \{T \in \text{Hom}(R^1, R^a) : uT(v) = vT(u) \text{ for any } u, v \in R^a\}$ 、のことである。この証明で補題 0.2, 0.3 とポアンカレ多項式を使う。 $\dim(R^{10}) = \dim(R^{11}) = \dim(R^{12}) = 28 > \dim(R^9) = \dim(R^{13})$ に注意。

Lemma 0.4.

$$K_u^{10} \cong K_u^{11} ; w \rightarrow vw$$

という同型が存在する。ここで、 v は u と v で R^1 を張るような R^1 の元である。

ここで次を定義する。

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{ある } v \in R^{11} \text{ に対し、} (x - \lambda y) \otimes v \in K \} \quad (0.3)$$

$$M := \begin{cases} \prod_{\lambda \in \Lambda} (x - \lambda y) & (\Lambda : \text{有限}) \\ 0 & (\Lambda : \text{無限}) \end{cases} \quad (0.4)$$

このとき、示したことは次である。

$$L := \begin{bmatrix} \Phi_{2,x} & \Phi_{2,y} & \Phi_{3,x} & \Phi_{3,y} \\ \Phi_{3,x} & \Phi_{3,y} & (\Phi_{4,x} - \frac{3}{5}\Phi_{2,x}\Phi_2) & (\Phi_{4,y} - \frac{3}{5}\Phi_{2,y}\Phi_2) \\ \Phi_{4,x} & \Phi_{4,y} & (\Phi_{5,x} - \frac{2}{5}\Phi_{2,x}\Phi_3) & (\Phi_{5,y} - \frac{2}{5}\Phi_{2,y}\Phi_3) \\ \Phi_{5,x} & \Phi_{5,y} & -\frac{1}{5}\Phi_{2,x}\Phi_4 & -\frac{1}{5}\Phi_{2,y}\Phi_4 \end{bmatrix}$$

とする。

Proposition 0.5. X を $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5)$ 内の 10 次超曲面とする。もし X と X' が "general" で、 M と M' が定数倍しか違わないなら、 X と X' の ホッジ構造の無限小変形の代数的部分は同型である。

Proposition 0.6. $u \in R^1$ とする。 u が M を割り切ることと、 u が $\det(L)$ を割り切るとは同値。

命題 0.6 は ホッジ構造の無限小変形の代数的部分の写像の解析と具体的な計算をすることにより出る。

命題 0.7 は M の定義から K^{11} をみないといけませんが、補題 0.5 によって、 K^{10} を調べて計算した。

命題 0.6 により、多様体としては全く違うものなのに ホッジ構造の無限小変形の代数的部分は同型であるものの存在の可能性が示唆された。

命題 0.7 により、ホッジ構造の無限小変形の代数的部分からそれを特徴付け得るような多項式を見つけることができた。

これらより次がいえる。

Theorem 0.7. $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5)$ の 10 次曲面に対しては変形トレリが成立しない。特に $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5)$ の 10 次曲面に対してその極小ホッジ構造の代数的部分に対応させる写像のファイバーの次元は 3 以上である。

参考文献

- [1] J. Carlson and P. Griffiths, *Infinitesimal variations of the Hodge structure and the global Torelli problem*, Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff and Noordhoff (1980), 51–76.

- [2] K. Chakiris, *A Torelli theorem for simply connected elliptic surfaces with a section and $p_g \geq 2$* , Amer. Math. Soc. (1982), 227–232.
- [3] R. Donagi, *Generic Torelli for projective hypersurfaces*, Compos. Math., **50** (1983), 325–353.
- [4] D. Cox and R. Donagi *On the Failure of Variational Torelli for Regular Elliptic Surfaces with a Section*, Math. Ann. **273** (1986), 673–683.
- [5] E. Horikawa, *Algebraic surfaces of general type with small c_1^2 , 2*, Inventiones math, **37** (1976), 121–155.
- [6] E. Horikawa, *On Algebraic Surfaces with Pencils of Curves of Genus 2*, In: Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K. Kodaira, Tokyo and Cambridge: Iwanami Shoten, Publishers and Cambridge University Press. (1977), 79–90.
- [7] M-H. Saito *Weak Global Torelli theorem for certain weighted projective hypersurfaces*, Duke. Math. (1986), 67–111.

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
 OSAKA UNIVERSITY
 TOYONAKA, OSAKA, 560-0043
 JAPAN

E-mail address: n-hayashi@math.sci.osaka-u.ac.jp

大型ヘリカル装置の3次元プラズマ境界形状逆推定の試み

Trial calculation to reconstruct 3-D plasma boundary shape in large helical device

北海道大学大学院工学研究科，核融合科学研究所*

前田忠昭，石丸武志，松山哲士，板垣正文，鈴木康浩*，渡邊清政*

Abstract:

The 2-dimensional (2-D) Cauchy condition surface (CCS) method to identify the plasma boundary shape has been expanded to deal with 3-D nuclear fusion plasma. This 3-D CCS method solves a set of boundary integral equations in terms of 3-D vector potential with the aid of measured magnetic sensor signals and coil current data. A trial calculation was made for the large helical device LHD. Results of the reconstructed magnetic field profile show an acceptable accuracy, and demonstrate the validity of the present formulation.

1. はじめに

核融合装置内部のプラズマ境界形状を知ることは，運転制御上極めて重要であると共にプラズマの MHD 平衡に関わる情報を引き出すためにも有用である．この場合，プラズマ温度は一億度を超えるため，プラズマ内部の直接測定は困難である．そのため，プラズマ外部に配置した磁気センサー信号から，間接的にプラズマ境界形状を逆推定することになる．

トカマク型のように回転軸対称形状をしたプラズマは，2次元問題に近似できる．この場合は，磁気センサー信号からプラズマの位置と形状を同定する逆解析手法として Cauchy 条件面法^[1,2]と呼ばれる手法が確立されている．ここで Cauchy 条件面とは，Dirichlet 条件（磁束）と Neumann 条件（磁場）が共に未知な閉曲面をいう．一方，ヘリカル型などの非軸対称なプラズマは3次元問題となる．3次元問題に対して Cauchy 条件面法が定式化された例はなく，2次元 Cauchy 条件面法に比べて未知数の数が増大するため，逆解析の解が一意に求まるか否か数理的に未解明であった．本研究は Cauchy 条件面法を3次元化し，非軸対称なプラズマの境界形状を逆解析できるようにすることを目的とする．

本研究では，境界要素法^[3]で3次元 Poisson 方程式を解く計算コードをベースとし，磁気センサー信号を取り込んで解析できる3次元 Cauchy 条件面法コードに発展させた．既に，このコードを用いて，本来軸対称であり，2次元 Cauchy 条件面法でプラズマ境界形状を求められるトカマク型プラズマについて逆解析を行い，3次元 Cauchy 条件面法が成立することは検証済みである^[4]．今回は，非軸対称であるヘリカル型プラズマにコードを適用し，大型ヘリカル装置 LHD の磁気センサーデータ，コイルデータを基に磁場3成分を逆解析し，磁場分布の再現度を検証した．

2. Cauchy 条件面法

2次元 Cauchy 条件面法では, Dirichlet 条件と Neumann 条件の両方を未知とする Cauchy 条件面を, 図1のようにプラズマ中の適当な位置に設置する. 無限遠方の境界 Γ_∞ と, 実際のプラズマ内に十分含まれるような Cauchy 条件面の境界 Γ_C で囲まれるドーナツ状の閉領域 $\Omega_{C-\infty}$ を考える. 実際には領域 Ω_{C-P} にはプラズマが存在するが, 閉領域 $\Omega_{C-\infty}$ の内部を真空磁場と仮定する. プラズマ外部の磁気センサー信号と外部コイル電流値に基づいて真空磁場を支配する境界積分方程式を解き, 得られた Cauchy 条件に基づいて同じ境界積分方程式を解けば, 任意の点での磁束が求められる. 磁束分布の等高線を描き, 最も外側の閉曲線を最外殻磁気面, すなわちプラズマ境界であると判定する. Cauchy 条件面法での計算結果は, プラズマ境界の外側で正しく求められる.

本研究での3次元 Cauchy 条件面法では, Dirichlet 条件と Neumann 条件を, それぞれベクトルポテンシャル, およびその微分値として計算を行う. 境界 Γ_C は, 図1のように3次元で配置されたプラズマ領域内に円環状に設定する. Γ_C 上には境界要素の数に比例したノード点が存在する. この各ノード点に対して Dirichlet 条件と Neumann 条件を定める. この2つの条件を未知数とし, 磁気センサー信号とコイル電流値に基づき, 真空場に対する境界積分方程式を立てる. また本研究では, ベクトルポテンシャルをデカルト座標系で記述する方針である. デカルト座標系のベクトルラプラシアンは

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_k = \nabla^2 A_k \quad (k = x, y, z) \quad \text{であるが,}$$

他の座標系では成分ごとに独立した等式にならない. センサー信号として, 円筒座標系による磁場3成分(B_r, B_ϕ, B_z)を与える. CCS上の節点で A_x, A_y, A_z を未知数とし,

$$B_r = \sin \phi \frac{\partial}{\partial z} A_x - \cos \phi \frac{\partial}{\partial z} A_y + \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \right) A_z \quad (1)$$

$$B_\phi = \cos \phi \frac{\partial}{\partial z} A_x + \sin \phi \frac{\partial}{\partial z} A_y + \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \right) A_z \quad (2)$$

$$B_z = -\frac{\partial}{\partial y} A_x + \frac{\partial}{\partial x} A_y \quad (3)$$

の関係を満たすように, 特異点 i をセンサー位置に置いた境界積分方程式の組を作る. ここで, トロイダル角を ϕ とした. 境界積分方程式の具体形は以下の通りである.

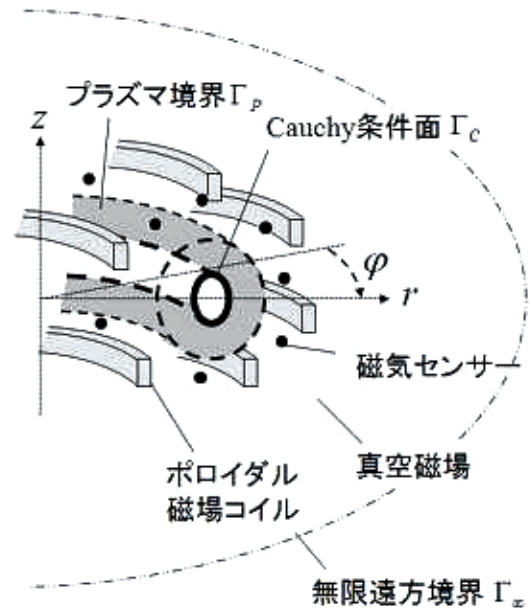


図1 Cauchy 条件面の配置

$$\begin{aligned}
B_j - W_j^{(B)} = & \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left(L_x^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_x}{\partial n} - A_x \left(L_x^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left(L_y^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_y}{\partial n} - A_y \left(L_y^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \left(L_z^j \phi_i^* \right) \frac{\partial A_z}{\partial n} - A_z \left(L_z^j \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、 $j=r, \varphi, z$ であり、 $W_j^{(B)}$ は外部磁場コイル電流の寄与である。作用素 L はセンサー信号の種類によって決まる作用素である。さらに特異点 i を CCS 上に置いた境界積分方程式も加えて、これらを連立させて解く。式(4)を解けば Γ_c 上の Dirichlet 条件 (A_k) と Neumann 条件 ($\partial A_k / \partial n$) が全て既知となる。両者を式(4)に再度代入すれば任意の位置 i で A_k と $\partial A_k / \partial n$ が求まるので、式(1)~(3)によって磁場 3 成分を計算することができる。

3. 計算条件

本研究では、図1で示したプラズマ境界の外側に、境界を囲むように磁束センサーを 20 個、磁場センサーを 451 個配置した。Cauchy 条件面は、プラズマ境界の内部とみられる箇所に円環状に配置し、トロイダル方向に 1/5 回転対称を考慮して 32 境界要素で表現した。このとき $r-z$ 断面上では、中心(3.7m, 0.0m)、半径 0.075m の円となるように設定した。この条件のもと、センサー位置での磁束と磁場の信号値から Cauchy 条件面上のベクトルポテンシャル A_k と、その微分値 $\partial A_k / \partial n$ を求めた。さらに、それらに基づいて式(4)によって任意の位置でのベクトルポテンシャル A_k とその微分値 $\partial A_k / \partial n$ を求め、式(1)~(3)から任意の位置の磁場 3 成分 (B_r, B_φ, B_z) を計算した。

4. 結果

図2にセンサー位置での磁場 3 成分の逆解析結果を示す。縦軸にセンサー位置での逆解析値を、横軸に平衡計算コード HINT^[5]による磁場を表している。両者は概ね一致している。

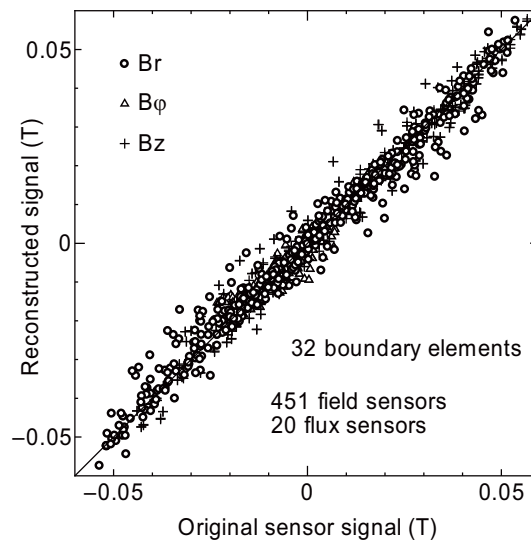


図2 センサー位置での計算結果比較

図3に $\varphi=18$ 度の横長断面での磁場の z 方向成分の分布図を示す。左図がCauchy条件面法での逆解析結果であり、右図はHINTによって得られた磁場分布基準解の図である。黒線はLHDでの最外殻磁気面を示している。図より、逆解析された磁場分布は、最外殻磁気面の外側でHINTの磁場分布図と比較的良好一致を示している。

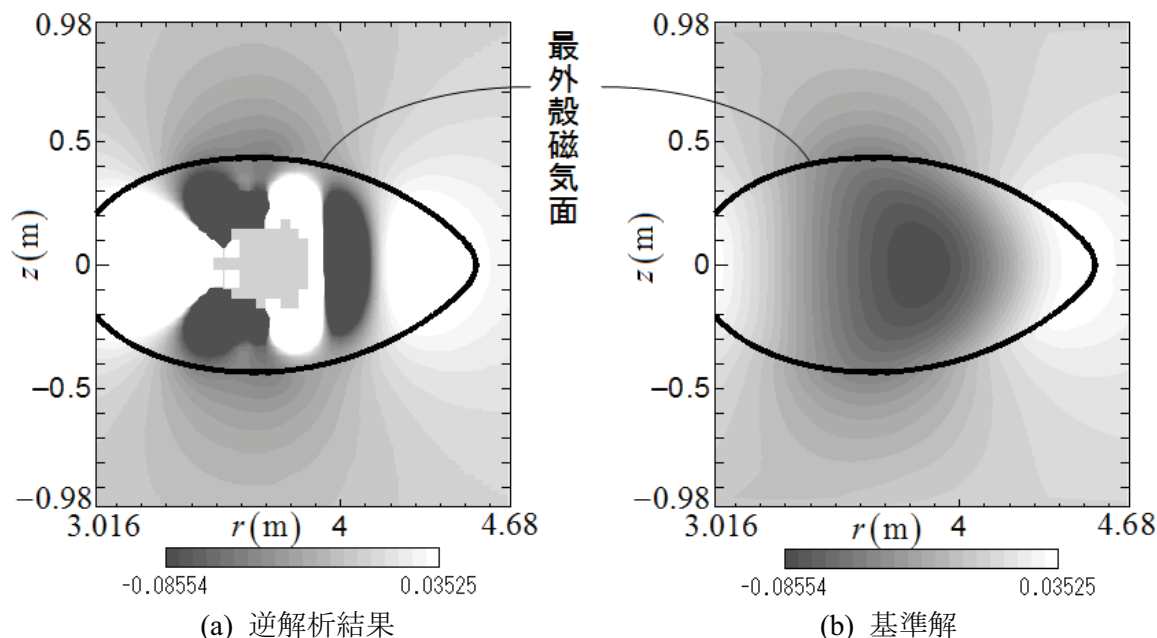


図3 磁場 z 方向成分の分布図と最外殻磁気面

5. まとめ

本研究では、3次元Cauchy条件面法をLHDに適用し、磁場3成分の逆解析を行った。センサー信号値の再現は概ね良好であり、磁場3成分の分布も良い傾向を示している。今後は解析精度の向上を図るとともに、非軸対称プラズマにおける最外殻磁気面を数値的に判定する方法を検討する予定である。

6. 参考文献

- [1] Kurihara, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- [2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.
- [3] Brebbia, C.A., “*The Boundary Element Method for Engineers*”, Pentech Press, London (1978).
- [4] 前田忠昭, 第5回数学総合若手研究集会テクニカルレポート「大型ヘリカル装置の3次元プラズマ境界形状逆推定の試み」(2009)
- [5] Harafuji, K., Hayashi, T., Sato T., *J. Comput. Phys.*, **81** (1989) 169.

Exact values of triple product L -functions for modular forms

室蘭工業大学 栞田 亮

1 Abstract

重さ k の $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z})$ に関する尖点形式全体からなる集合を $S_k(\Gamma)$ と定義する。 $f(z) \in S_{k_1}(\Gamma), g(z) \in S_{k_2}(\Gamma), h(z) \in S_{k_3}(\Gamma)$ をヘッケ固有形式とする。このとき $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m)\mathbf{e}(mz)$ に対して $\alpha_p + \beta_p = a(p), \alpha_p\beta_p = p^{k-1}$ となるように $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{C}$ をとる。同様に、 $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b(m)\mathbf{e}(mz)$ に対して $\alpha'_p + \beta'_p = b(p)$ となるように $\alpha'_p, \beta'_p \in \mathbb{C}$ をとり、 $h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)\mathbf{e}(mz)$ に対して $\alpha''_p + \beta''_p = a(p), \alpha''_p\beta''_p = p^{k-1}$ となるように $\alpha''_p, \beta''_p \in \mathbb{C}$ をとる。このとき Triple tensor product L 関数を

$$L(s, f \otimes g \otimes h) = \prod_p \{(1 - \alpha_p\alpha'_p\alpha''_p p^{-s})(1 - \alpha_p\alpha'_p\beta''_p p^{-s})(1 - \alpha_p\beta'_p\alpha''_p p^{-s})(1 - \alpha_p\beta'_p\beta''_p p^{-s}) \\ \times (1 - \beta_p\alpha'_p\alpha''_p p^{-s})(1 - \beta_p\alpha'_p\beta''_p p^{-s})(1 - \beta_p\beta'_p\alpha''_p p^{-s})(1 - \beta_p\beta'_p\beta''_p p^{-s})\}^{-1}$$

と定義する。

この Triple tensor product L 関数の特殊値については、今まで P.B.Garrett 氏や T.Orloff 氏、水本信一郎氏などによって研究されてきた。とくに特殊値の具体的な値については、水本氏によって計算されている。今回我々は、その水本氏とは違った方法で特殊値の具体的な値を計算した。その方法とは 3 次のジーゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数を利用したものである。詳しくは以下で紹介する。

2 アルゴリズム

Triple tensor product L 関数の特殊値については、以下のことが知られている。

$\overline{\mathbb{Q}}$ を有理数体 \mathbb{Q} の代数閉包とする。また、

$$\frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} - 1 \leq n \leq k_2 + k_3 - 2 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とする。(ただし $k_3 \leq k_2 \leq k_1, k_1 \leq k_2 + k_3 + 2$) このとき、

$$\frac{L(n, f \otimes g \otimes h)}{\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \langle h, h \rangle \pi^{4n+3-k_1-k_2-k_3}} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

となる。■

ここで注意として、本発表では k_1, k_2, k_3, n について、 $k_1 = k_2 = k_3 = k$ かつ $n = 2k - 2$ に限定して特殊値を計算するものとする。

さて、次数が n 、ウェイト k のジーゲルアイゼンシュタイン級数を

$$G_{n,k}(Z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma^\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, Z)^{-k} |j(\gamma, Z)|^{-2s}$$

とする。このとき $G_{n,k}(Z, s)$ は $\operatorname{Re}(s) > (n+1-k)/2$ 上で広義一様絶対収束し、 s の関数として \mathbb{C} 上全体に有理型関数として解析接続できる。また、 $G_{n,k}(Z, 0)$ は $n \geq k+1$ で Z に関して正則保型形式なので、次のようにフーリエ展開することができる。

$$G_{n,k}(Z, 0) = \sum_A C_{n,k}^*(A) \mathbf{e}(\operatorname{Tr}(AZ))$$

ここで A は半正半正定値 n 次対称行列を走る。

また $E_{3,k}(Z, s)$ を次のように定義する。

$$E_{3,k}(Z, s) = \zeta(1-k)\zeta(3-2k)G_{3,k}(Z, s)$$

次に具体的な特殊値を求める際に利用する公式を紹介する。いま、

$$F_{3,k}(z_1, z_2, z_3; s) = E_{3,k}\left(\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_3 \end{pmatrix}, s\right)$$

と 3 次のジューゲルアイゼンシュタイン級数の対角成分を制限したものとする。このとき、

$$F_{3,k}(\gamma z_1, z_2, z_3; s) = j(\gamma, z_1)^k F_{3,k}(z_1, z_2, z_3; s)$$

すなわち $F_{3,k}(z_1, z_2, z_3; s)$ は z_1 に関してウェイト k の Γ に関する C^∞ -保型形式である。よって $f_1 \in S_k(\Gamma^1)$ のとき、ピーターソン内積 $\langle F_{3,k}(z_1, z_2, z_3; s), f_1(z_1) \rangle$ が定義できるが、これは z_2, z_3, s の関数であり、 z_2 に関してウェイト k の Γ に関する C^∞ -保型形式であるので、 $f_2 \in S_k(\Gamma)$ に対して、ピーターソン内積 $\langle \langle F_{3,k}(z_1, z_2, z_3; s), f_1(z_1) \rangle, f_2(z_2) \rangle$ が定義でき、さらにこれは z_3 に関してウェイト k の Γ に関する C^∞ -保型形式であるので、 $f_3 \in S_k(\Gamma)$ に対して、ピーターソン内積 $\langle \langle \langle F_{3,k}(z_1, z_2, z_3; s), f_1(z_1) \rangle, f_2(z_2) \rangle, f_3(z_3) \rangle$ が定義できる。

定理 (Garrett の公式)

$$\langle \langle \langle E_{3,k}\left(\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_3 \end{pmatrix}, s \right), f(z_1) \rangle, g(z_2) \rangle, h(z_3) \rangle = \zeta(1-k-2s)\zeta(3-2k-4s)\rho(s)_k L(s+2k-2, f \otimes g \otimes h)$$

ただし

$$\begin{aligned} \rho(s)_k &= (-1)^{\frac{k}{2}} 2^{8-4s-5k} \pi^{3-s-2k} \zeta(2s+k)^{-1} \zeta(4s+2k-2)^{-1} \\ &\quad \times \Gamma(s)^{-1} \Gamma(s+k)^{-1} \Gamma(2s+2k-2)^{-1} \\ &\quad \times \Gamma(s+k-1)\Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\Gamma(s+k-1)\Gamma(s+2k-2) \end{aligned}$$

である。■

これによって Triple tensor product L 関数の具体的な特殊値を求めることができる。いま、 $\dim S_l(\Gamma) = d$ で f_1, \dots, f_d を $S_l(\Gamma)$ の直交基底でヘッケ固有関数であるとする。すなわち $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ ($i \neq j$) である。また $l \geq 4$ のとき $E_{3,l}(Z, 0)$ は Z の正則関数で、

$$E_{3,l}(Z, 0) = \sum_{A \geq 0} C_{3,l}(A) \mathbf{e}(\operatorname{Tr}(AZ))$$

とフーリエ展開できる。以上より

$$F_{3,l}(z_1, z_2, z_3; 0) = \sum_{0 \leq h, i, j \leq d} C_{hij} f_h(z_1) f_i(z_2) f_j(z_3)$$

となる。ここで C_{hij} は定数である。このとき

$$\begin{aligned} \langle \langle \langle E_{3,k} \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_3 \end{pmatrix}, 0 \rangle, f_h(z_1) \rangle, f_i(z_2) \rangle, f_j(z_3) \rangle &= \zeta(1-k)\zeta(3-2k)\rho(0)L(2k-2, f_h \otimes f_i \otimes f_j) \\ &= \langle \langle \langle \sum_{h',i',j'} C_{h'i'j'} f_{h'}(z_1) f_{i'}(z_2) f_{j'}(z_3), f_{h'}(z_1) \rangle, f_{i'}(z_2) \rangle, f_{j'}(z_3) \rangle \end{aligned}$$

ここで $\langle f_0(z_1), f_h(z_1) \rangle = 0, \langle f_{h'}(z_1), f_h(z_1) \rangle = 0$ ($h' \neq h$) より

$$\begin{aligned} \langle \langle \langle E_{3,k} \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_3 \end{pmatrix}, 0 \rangle, f_h(z_1) \rangle, f_i(z_2) \rangle, f_j(z_3) \rangle &= \zeta(1-k)\zeta(3-2k)\rho(0)L(2k-2, f_h \otimes f_i \otimes f_j) \\ &= C_{hij} \langle f_h, f_h \rangle \langle f_i, f_i \rangle \langle f_j, f_j \rangle \end{aligned}$$

ゆえに

$$C_{hij} = \zeta(1-k)\zeta(3-2k)\rho(0) \frac{L(2k-2, f_h \otimes f_i \otimes f_j)}{\langle f_h, f_h \rangle \langle f_i, f_i \rangle \langle f_j, f_j \rangle}$$

よってこの C_{hij} を求めればよい。

ここで3次の半整数対称行列 A を $A = \begin{pmatrix} m_1 & r_{12}/2 & r_{13}/2 \\ r_{12}/2 & m_2 & r_{23}/2 \\ r_{13}/2 & r_{23}/2 & m_3 \end{pmatrix}$ とする。このとき $F_{3,l}(z_1, z_2, z_3; 0)$ は

$$F_{3,l}(z_1, z_2, z_3; 0) = \sum_{m_1, m_2, m_3} C_{3,l}(m_1, m_2, m_3) \mathbf{e}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3)$$

となる。(ここで $C_{3,l}(m_1, m_2, m_3) = \sum_{r_1, r_2, r_3} c_{3,l} \begin{pmatrix} m_1 & r_{12}/2 & r_{13}/2 \\ r_{12}/2 & m_2 & r_{23}/2 \\ r_{13}/2 & r_{23}/2 & m_3 \end{pmatrix}$ であり、このとき r_1, r_2, r_3 は

$\begin{pmatrix} m_1 & r_{12}/2 & r_{13}/2 \\ r_{12}/2 & m_2 & r_{23}/2 \\ r_{13}/2 & r_{23}/2 & m_3 \end{pmatrix} \geq 0$ となる値を走る。) 一方、 $a_{f_h}(m)$ で $f_h(z)$ の m 番目のフーリエ係数を表すものとすると、

$$F_{3,l}(z_1, z_2, z_3; 0) = \sum_{m_1, m_2, m_3} \sum_{0 \leq h, i, j \leq d} C_{hij} a_{f_h}(m_1) a_{f_i}(m_2) a_{f_j}(m_3) \mathbf{e}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3)$$

となる。このことから、 C_{hij} を求めるには次の方程式を解けばよい。

$$\sum_{0 \leq h, i, j \leq d} C_{hij} a_{f_h}(m_1) a_{f_i}(m_2) a_{f_j}(m_3) = C_{3,l}(m_1, m_2, m_3)$$

このとき m_1, m_2, m_3 は $(d+1)^3$ 個の値を走るの、 $(d+1)^3$ 元連立方程式となる。(このときの m_1, m_2, m_3 の選び方は、方程式が解を持つようにうまく選ぶ) この連立方程式を解くことによって、 C_{hij} を求めることができ、それによって Triple tensor product L 関数の特殊値の具体的な値を求めることができる。また3次のジューゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数 $C_{3,k}(B)$ は $\text{rank} B = 3$ のときは Katsurada [Ka] によって知られており、 $C_{3,k}(B)$ は $\text{rank} B = 2$ のときは Maass によって、 $C_{3,k}(B)$ は $\text{rank} B = 1$ のときは Siegel によって知られている。

3 特殊値の計算の主結果

ここまでで紹介した Triple product L 関数の特殊値を求めるアルゴリズムを、MATHEMATICA にプログラミングし計算させた結果を掲載する。

定理 (特殊値の計算結果) Triple tensor product L 関数の特殊値の値は次のようになる。

重さ k	特殊値	素因数分解した値
$k = 12$	$-\frac{564350976000}{10982063}$	$-1 \cdot 2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 23^{-1} \cdot 691^{-2}$
$k = 16$	$-\frac{146313069686784000}{405563359}$	$-1 \cdot 2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31^{-1} \cdot 37 \cdot 3617^{-2}$
$k = 18$	$-\frac{158714306150400000000}{1924313689}$	$-1 \cdot 2^{20} \cdot 3^8 \cdot 5^8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 59 \cdot 43867^{-2}$
$k = 20$	$-\frac{3225535275339281608704000}{30489001321}$	$-1 \cdot 2^{15} \cdot 3^{13} \cdot 5^3 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 157 \cdot 283^{-2} \cdot 617^{-2}$
$k = 22$	$-\frac{964297022442911539200000000}{6034648489}$	$-1 \cdot 2^{19} \cdot 3^8 \cdot 5^8 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 131^{-2} \cdot 593^{-2} \cdot 38329^{-2}$
$k = 26$	$-\frac{519495909171429531890851061760000000}{432873200761}$	$-1 \cdot 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^7 \cdot 7^7 \cdot 11 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 173 \cdot 311 \cdot 657931^{-2}$

とくに、 $k = 12$ のときこの値は、水本氏によって求められた値と一致した。

注意 この表に掲載した値は、特殊値に $\zeta(1-k)\zeta(3-2k)\rho(0)$ をかけた値である。

参考文献

- [Ka] H Katsurada. *AN EXPLICIT FORMULA FOR THE FOURIER COEFFICIENTS OF SIEGEL-EISENSTEIN SERIES OF DEGREE 3*. Nagoya MATHEMATICAL JOURNAL (1997)
- [Mi] S Mizumoto. *Special Values of Triple Product L -Functions and Nearly Holomorphic Eisenstein Series*. Mathematics Subject Classification (2000)

核融合プラズマの3次元境界形状逆推定への磁束ループ信号の取り込み

Use of magnetic flux loop signals to reconstruct 3-D fusion plasma boundary shape

北海道大学大学院工学研究科, 核融合科学研究所*

松山哲士, 石丸武志, 前田忠昭, 板垣正文, 鈴木康浩*, 渡邊清政*

Abstract:

The 3-D Cauchy-condition surface method is now under development to evaluate the plasma boundary shape in a nuclear fusion device. One needs to incorporate the magnetic flux loop signals properly in this 3-D formulation. To express the flux loop signal, which is defined as the loop integral of vector potential, only the portions of fundamental solution in the boundary integral equation are integrated along the closed loop. Test calculation results demonstrate the validity of the present formulation.

1. はじめに

核融合プラズマの境界形状を逆推定する Cauchy 条件面(CCS)法^[1,2]を3次元に拡張する場合^[3], 磁束ループ信号に対応させて境界積分方程式を正しく定式化する必要がある. 磁束ループ信号は, 閉ループに沿ったベクトル・ポテンシャルの積分量である. 本研究では, 境界積分方程式の基本解部分のみを積分することで, 磁束ループ信号を Cauchy 条件面上のベクトル・ポテンシャルで表現することを可能とした.

2. 定式化

閉曲線 C を縁とする断面 S における磁束 ψ は, ストークスの定理によって

$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

のように C に沿ったベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} の一周線積分で表される.

式(1)において $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ であるとき,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x dx + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz \quad (2)$$

となる. 但し, 右辺の3積分はそれぞれ関数 A_x, A_y, A_z の経路 C に沿った線積分である.

ここでは, C をループ半径 $r = \text{const.}$ の円とし, トロイダル方向に磁束ループをとった場合について考える. 計算の煩雑を避けるため \mathbf{A} をデカルト座標系で表すことにする. すなわち,

$$\mathbf{A} = (A_x(\varphi), A_y(\varphi), A_z(\varphi)), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z_0) \quad (\varphi: \text{トロイダル角})$$

とする. $x(\varphi) = r \cos \varphi$, $y(\varphi) = r \sin \varphi$, $z(\varphi) = z_0$, $dx = -r \sin \varphi d\varphi$, $dy = r \cos \varphi d\varphi$, $dz = 0$ だから,

$$\begin{aligned} \psi &= \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} A_x(\varphi)(-r \sin \varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} A_y(\varphi)(r \cos \varphi) d\varphi + 0 \\ &= r \int_0^{2\pi} \{-\sin \varphi A_x(\varphi) + \cos \varphi A_y(\varphi)\} d\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

となり，これを，円周を N 個のセグメントに等分割して離散化すれば，

$$\psi = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = r \sum_{j=1}^N \left\{ -\sin \varphi_j A_x(\varphi_j) + \cos \varphi_j A_y(\varphi_j) \right\} \Delta \varphi_j \quad (\Delta \varphi_j = 2\pi / N) \quad (4)$$

の数値積分で近似できる．

磁束ループ信号に対する境界積分方程式は，基本解部分を一周数値積分して，

$$\psi - W^{(\psi)} = \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial n} (\Sigma_x^{(\psi)} \phi_i^*) - A_x \left(\Sigma_x^{(\psi)} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{CCS}}} \left\{ \frac{\partial A_y}{\partial n} (\Sigma_y^{(\psi)} \phi_i^*) - A_y \left(\Sigma_y^{(\psi)} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma \quad (5)$$

と与えることができる．ここで， $W^{(\psi)}$ はコイル電流の寄与であり，基本解 ϕ_i^* に関わる一周数値積分は，

$$\begin{aligned} \Sigma_x^{(\psi)} \phi_i^* &= \sum_{j=1}^N \left\{ -r \Delta \varphi_j \sin \varphi_j \cdot \phi_i^*(\varphi_j) \right\}, & \Sigma_y^{(\psi)} \phi_i^* &= \sum_{j=1}^N \left\{ r \Delta \varphi_j \cos \varphi_j \cdot \phi_i^*(\varphi_j) \right\} \\ \Sigma_x^{(\psi)} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} &= \sum_{j=1}^N \left\{ -r \Delta \varphi_j \sin \varphi_j \cdot \frac{\partial \phi_i^*(\varphi_j)}{\partial n} \right\}, & \Sigma_y^{(\psi)} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} &= \sum_{j=1}^N \left\{ r \Delta \varphi_j \cos \varphi_j \cdot \frac{\partial \phi_i^*(\varphi_j)}{\partial n} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる．

3. 数値計算例

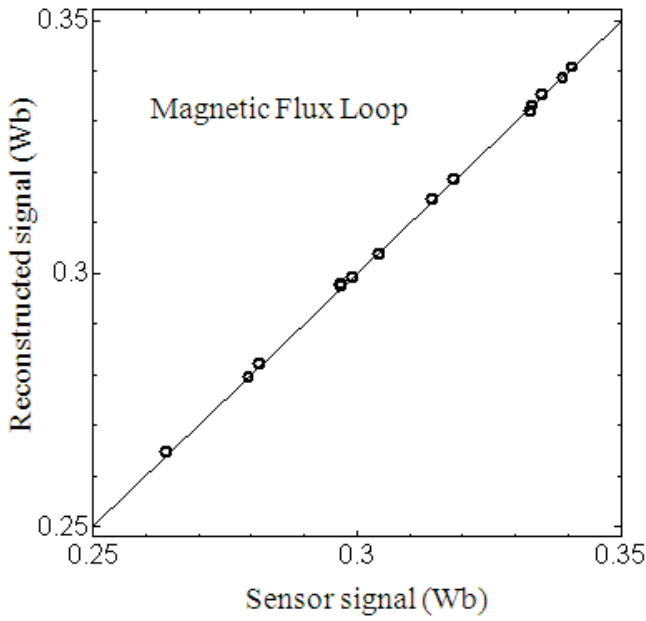
磁束ループ信号に対する上記定式化の妥当性をトカマク型装置 JT-60 とヘリカル型装置 LHD について検証した．それぞれの解析条件を表 1 に示す．

表 1 解析条件

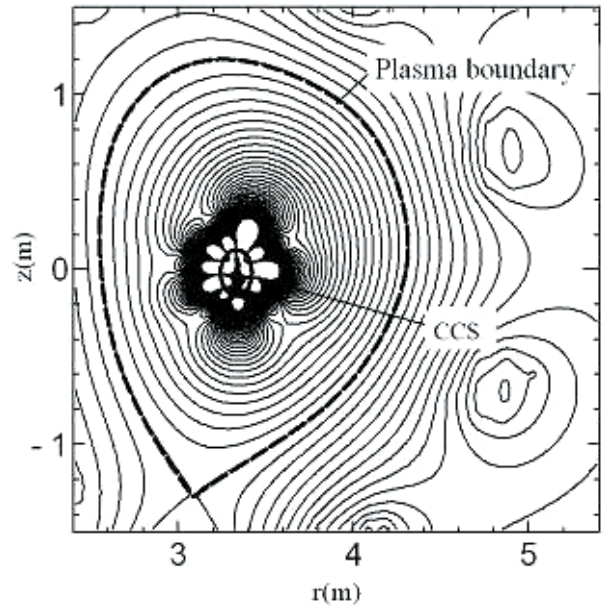
	磁場センサー 信号数	磁束ループ 信号数	CCS 形状
JT-60	720	15	中心 $(r, z) = (3.33, -0.02)$ ， 長半径 0.13m，短半径 0.09m の楕円を断面とするチューブ
LHD	451	20	中心 $(r, z) = (3.7, 0)$ ，半径 0.075m の円を断面とするチューブ

3.1 トカマク型装置 JT-60

図 1 (a) は JT-60 の磁束ループ信号の再現を表し，グラフの横軸が磁束ループ信号値，縦軸がセンサー位置における逆解析値である．両者はよく一致している．図 1 (b) は r - z 断面における磁束の等高線である．中央の楕円が Cauchy 条件面の断面であり，実線が計算結果，波線は平衡計算コード SELENE^[4]によって順解析された最外殻磁気面の基準解である．CCS 周りの最も外側の閉曲線が逆解析された最外殻磁気面であるが，これはプラズマ境界の基準解とよく一致している．



(a) 磁束ループ信号の再現

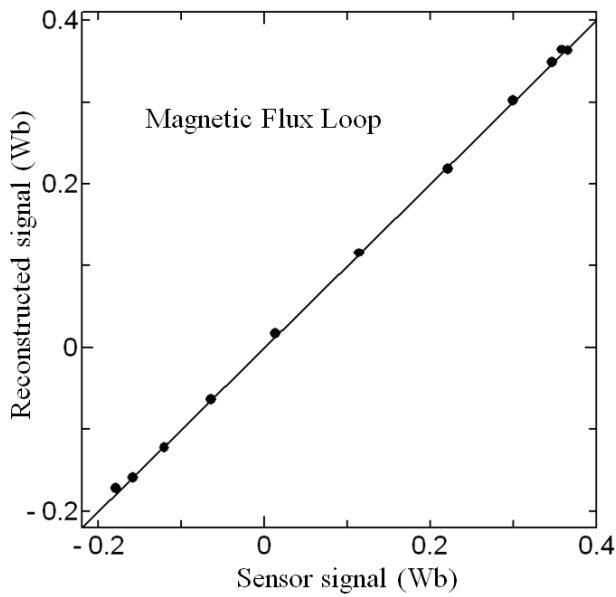


(b) r-z 断面における磁束の等高線

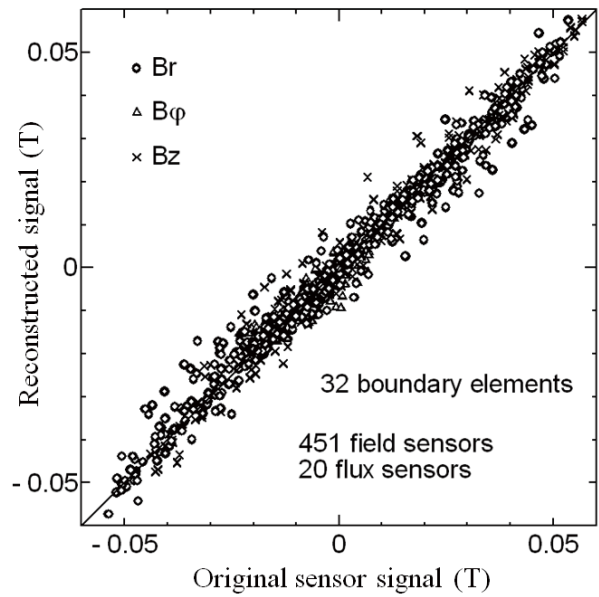
図1 JT-60 に対する計算結果

3.2 ヘリカル型装置 LHD

図2(a)は図1(a)と同様、ヘリカル型装置 LHD における磁束ループ信号の再現を示す。この場合も磁束ループ信号値と逆解析値はよく一致している。図2(b)は磁場センサー信号の再現を表す。磁場信号の逆解析値と信号値との一致の精度は良くないが、傾向は概ね再現している。



(a) 磁束ループ信号の再現



(b) 磁場センサー信号の再現

図2 LHD に対する計算結果

図3は磁場成分 B_r の等高線である。(a)が CCS 法による逆解析結果、(b)が平衡計算コード HINT^[5]による基準解であり、実線は HINT コードで求めた最外殻磁気面を表している。最外殻磁気面の外側で、逆解析解は基準解と概ね一致している。

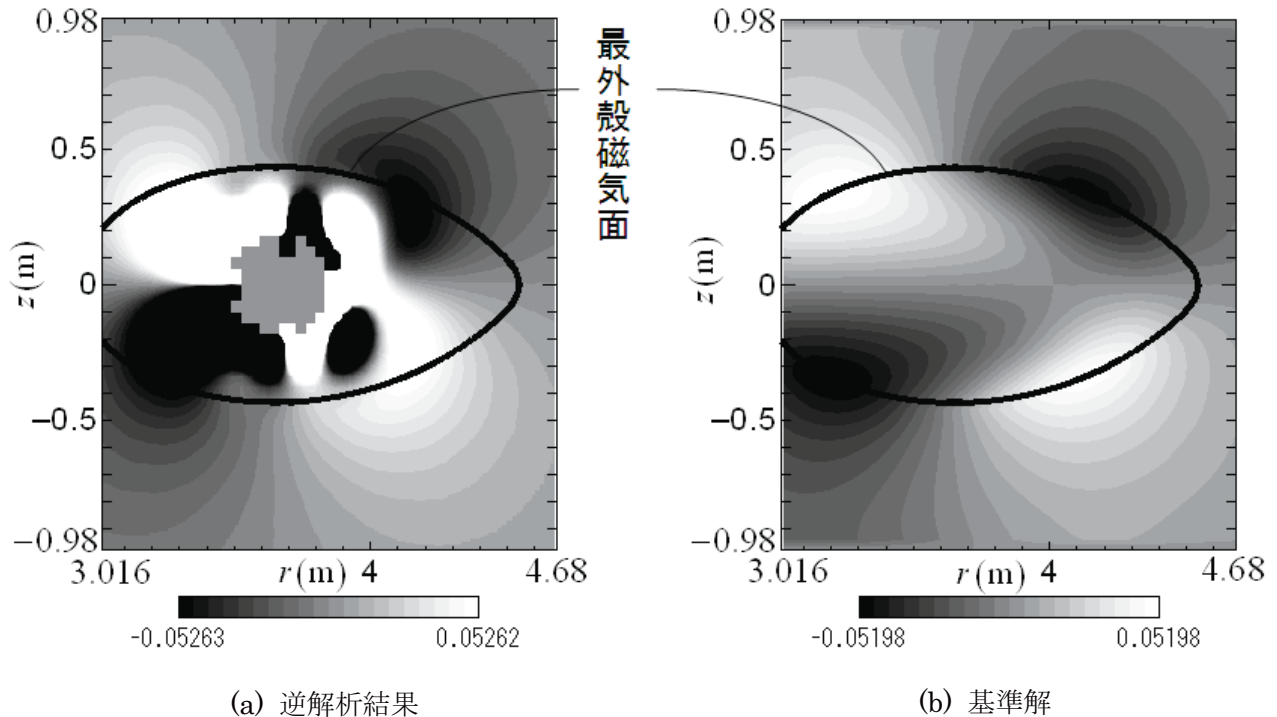


図3 LHD における磁場成分 B_r の等高線

4. 結び

ループに沿った積分量である磁束ループ信号に対する境界積分方程式を定式化し、3次元 Cauchy 条件面法への組み込みを行った。その妥当性を JT-60, LHD それぞれに対して検証し、良好な結果を得た。今後の課題は、ヘリカル型装置に対する解析精度の向上と、逆解析における最外殻磁気面の判定法を見つけることである。

参考文献

- [1] Kurihara, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- [2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.
- [3] 前田忠昭ほか, 第6回数学総合若手研究集会テクニカルレポート「大型ヘリカル装置の3次元プラズマ境界形状逆推定の試み」(2010)
- [4] Azumi, M. et al., *Computing Methods in Applied Science and Engineering* (1980) 335, North-Holland, Amsterdam.
- [5] Harafuji, K., Hayashi T., Sato T., *J. Comput. Phys.*, **81** (1989) 169.

作用素環における Lie 群-Lie 環対応について

安藤 浩志 (京都大学数理解析研究所 D1)*
with 松澤 泰道 (Leipzig 大学/北海道大学 D1)†

2010 年 2 月

概要

有限次元 Lie 群 G は無限小変換たち-Lie 環 \mathfrak{g} との間に緊密な関係が有ります. 1 パラメータ部分群 $g(t)$ ($g(t+s) = g(t)g(s)$, $g(0) = e$) は常に $g(t) = e^{tX}$, $X \in \mathfrak{g}$ の形に書けます. 指数写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は局所微分同相です. Lie 群の積構造は, 単位元の近くでは Lie 環 \mathfrak{g} の環構造によって近似され, しばしば \mathfrak{g} は群を直接調べるよりも有用な情報を提供します. 無限次元では状況はそれほど鮮明ではありません. 確かに無限次元 Hilbert 空間 \mathcal{H} 上のユニタリ作用素全体 $U(\mathcal{H})$ では Stone の定理によって 1 パラメータ部分群に対応する生成子 X が見つかりますが, X は一般に非有界です. 又生成子 X, Y があっても, $XY, X+Y$ などが定義できるとは限りません. この為 $U(\mathcal{H})$ と閉部分群に対する Lie 群-Lie 環対応はうまく機能しません. 本研究ではこの問題を作用素環の立場から考察しました. Murray-von Neumann の定理によれば, 有限 von Neumann 環 (特に II_1 型環) \mathfrak{M} に付属する閉作用素全体 $\overline{\mathfrak{M}}$ には自然に $*$ -環の構造が定義されます. この事は $U(\mathfrak{M})$ とその閉部分群には適切な Lie 環が存在しそうだと思わせる. 実際にこれらは位相的に良い性質を持つ Lie $*$ 環を持つ事が証明できました [10]. また非有界作用素環の中で $\overline{\mathfrak{M}}$ として実現できるクラスをテンソル圏の観点から特徴付けました. Lie 環構造の解明には Lie 群と Lie 環との関連付けに重要である強レゾルベント収束による位相と, 作用素環サイドから得られる測度位相の関係を

明らかにする事が必要です. 以下では必要な予備知識と概要を書きます. 詳細は [10] をご参照下さい.

1 Lie 群と Lie 環- $U(\mathcal{H})$ での困難-

序文でも述べたように, 無限次元での Lie 群-Lie 環対応には困難が付きまとう. \mathcal{H} を可分無限次元 Hilbert 空間とする. 有限次元の状況から, $U(\mathcal{H})$ の閉部分群 G は何らかの意味で “無限次元 Lie 群” と考えたい. 実際, 強位相によって, $U(\mathcal{H})$ は完備可分距離付け可能な位相群 (Polish 群) の構造をつ. そこで G を “Lie 群” として扱おうとすると, 対応する “Lie 環” が存在するかどうか問題となる. また無限次元なので, 位相的に良い性質を持つものでなければ解析は難しい. 素朴に考えると, 強連続 1 係数ユニタリ群 $u(t) \in U(\mathcal{H})$ は Stone の定理によって, $u(t) = e^{tA}$ と歪自己共役作用素 A で生成される. そこで

$$\mathfrak{g} := \{A; A^* = -A, e^{tA} \in G, \forall t\}$$

で G の Lie 環を定義したい. しかし 1 係数ユニタリ群の生成子は非有界であるため, 扱いは簡単ではない.

非有界性に伴う定義域の問題

$\text{dom}(X_1), \text{dom}(X_2)$ が稠密でもしばしば $\text{dom}(X_1) \cap \text{dom}(X_2) = \{0\}$ となり, この場合 $\text{dom}(0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2) = \{0\} \neq \text{dom}(0) = \mathcal{H}$ になってしまう. 随伴についても困難が伴う. $(X_1 X_2)^* \neq X_2^* X_1^*$ かもしれない: $X_1 X_2$ は稠密に定義されず, 随伴が定義できないかもしれないし, また定義できても $(X_1 X_2)^* \supsetneq X_2^* X_1^*$

*andonuts@kurims.kyoto-u.ac.jp

†matsuzawa@math.sci.hokudai.ac.jp

となり得る. したがって \mathfrak{g} は線形空間ですらない可能性があり, まして Lie 環であることは一般には期待できない. 仮に Lie 環になったとしても連続性に不安が残る: 歪自己共役作用素の強レゾルベント収束とユニタリ群の強収束は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + 1)^{-1} = (A + 1)^{-1} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n} = e^{tA}, \forall t.$$

の関係にある. しかし, $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$ (強レゾルベント) から $\overline{A_n + B_n} \rightarrow \overline{A + B}$ や $\overline{[A_n, B_n]} \rightarrow \overline{[A, B]}$ が従うかどうかは判らない. これら一連の問題は Lie 群と Lie 環を有機的に繋げるには非有界作用素の使用が不可避であるが, それらは一般に環構造を持たない事に起因する. この困難のため, $U(\mathcal{H})$ の閉部分群に対する Lie 群-Lie 環対応は昔から考えられていたが, 殆ど進展が見られなかった.

今回我々は作用素環論 [2] の視点からこの問題を考え直した. 問題解決の鍵を握るのは, Murray-von Neumann による有限 von Neumann 環 \mathfrak{M} に付属する閉作用素全体 $\overline{\mathfrak{M}}$ は自然な環構造を持つという定理である.

2 有限 von Neumann 環と非有界作用素

2.1 von Neumann 環

\mathcal{H} を Hilbert 空間, \mathcal{H} 上の有界作用素全体を $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ とする. $S \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ が, 代数演算

$$(x, y) \mapsto x + y, xy, x \mapsto x^*, \lambda x \ (\lambda \in \mathbb{C})$$

に関して閉じているとき, $*$ 環であるという. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ は \mathcal{H} 上の $1_{\mathcal{H}}$ を含む $*$ 環で, 弱位相¹で閉じているとき, \mathcal{H} 上の von Neumann 環と呼ばれる. このとき

$$\mathfrak{M}' := \{y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}); xy = yx, \forall x \in \mathfrak{M}\}$$

は von Neumann 環で, \mathfrak{M} の交換団と言う. $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の $1_{\mathcal{H}}$ を含む $*$ 環 \mathfrak{M} に対し, \mathfrak{M} が弱閉である事と

¹ $p_{\xi, \eta}(x) := |\langle \xi, x\eta \rangle|$ となる半ノルム系 $\{p_{\xi, \eta}; \xi, \eta \in \mathcal{H}_1\}$ で定義される $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の局所凸位相.

$(\mathfrak{M}')' = \mathfrak{M}$ が成り立つ事は同値. (von Neumann の二重交換団定理). $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ には様々な局所凸位相が定義できる. 主なものは弱, σ 弱, 強, 強*, σ 強, σ 強*, ノルム, および Arens-Mackey 位相である. 例えば σ 弱位相は, $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty, \sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$ を満たすベクトル列 $\{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset \mathcal{H}$ によって

$$p_{\{\xi_n\}, \{\eta_n\}}(x) := \left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi_n, x\eta_n \rangle \right|$$

で定義される半ノルム族達により定義される. 突然たくさん位相が現れて「何が違うんだ!」と戸惑われるかもしれない. 随伴写像 $x \mapsto x^*$ は弱連続だが, 強連続でない. 従って随伴が連続となるよう少し強めた位相- (σ) 強*位相も重要となる. σ 強*位相は $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$ なる $\{\xi_n\} \subset \mathcal{H}$ 達により

$$p_{\{\xi_n\}}(x) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x\xi_n\|^2 + \|x^*\xi_n\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

なる半ノルム族で定義される. 強*も同様. これらは全て異なる位相であるが, ノルム有界部分では σ 弱 = 弱, σ 強 = 強で, σ 位相は $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上完備である. 積写像 $(x, y) \mapsto xy$ は弱, 強いずれでも連続にはならないが, ノルム有界部分では (σ) 強連続. また有界線形汎関数については σ 強*連続性は σ 弱連続性に, 強*連続性は弱連続性に一致する. σ 弱連続な $*$ -準同型あるいは線形汎関数は正則とも呼ばれる. von Neumann 環 \mathfrak{M} は中心 $\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ が $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ のとき, 因子環と呼ばれる. 有限次元では, n 次行列環 $M_n(\mathbb{C})$ は, \mathbb{C}^n 上の因子環である. \mathcal{H} が可分であれば任意の von Neumann 環は因子環の “直和” (正確には直積分) に分解される:

$$\mathfrak{M} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathfrak{M}(\omega) d\mu(\omega), \mathfrak{M}(\omega) \text{ は a.e. } \omega \text{ で因子環.}$$

因子環はその定性的性質から 3 タイプに分類される. これは射影の性質で語られる. \mathfrak{M} に属すユニタリ作用素全体を $U(\mathfrak{M})$, 射影作用素全体を $P(\mathfrak{M})$ と書く. $e, f \in P(\mathfrak{M})$ が Murray-von Neumann の意味で同値 ($e \sim f$) とは, 部分等距離作用素² $u \in \mathfrak{M}$

² u は $\ker(u)^{\perp}$ 上等距離のとき, 部分等距離作用素と呼ばれる.

があつて, $u^*u = e$, $uu^* = f$ となる事である. このとき, $e \in P(\mathfrak{M})$ が有限射影とは, $e' \in P(\mathfrak{M})$ が $e' \leq e$, $e' \sim e$ ならば $e' = e$ が成り立つ事を言う.³ 有限でない射影を無限射影という. $1_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{M}$ が有限のとき, \mathfrak{M} を有限 von Neumann 環という. $e \in P(\mathfrak{M})$ が可換射影であるとは, \mathfrak{M}_e ⁴ が可換環となる事を指す. 任意の $z (\neq 0) \in P(\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ が, 0 でない可換射影 e をカバー ($e \leq z$) するとき, \mathfrak{M} を **I 型** という. \mathfrak{M} が 0 でない可換射影を持たず, かつ任意の中心射影 $z \in P(\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ が, 0 でない有限射影をカバーするとき, \mathfrak{M} を **II 型** と言う. \mathfrak{M} が 0 でない有限射影を持たないとき, **III 型 (真無限型)** と言う. 有限 II 型環を II_1 型といい, 無限 II 型を II_{∞} 型という. 一般の von Neumann 環 \mathfrak{M} は, 中心射影 $z_I, z_{II}, z_{III} \in P(\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ によって,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{z_I} \oplus \mathfrak{M}_{z_{II}} \oplus \mathfrak{M}_{z_{III}}$$

と I, II, III 型 von Neumann 環に直和分解される. この直和分解において III 型成分がない $z_{III} = 0$ のとき, \mathfrak{M} を半有限という. 次にトレースについて述べる. \mathfrak{M} の正作用素⁵ 全体を \mathfrak{M}_+ で表すことにする. 写像 $\tau: \mathfrak{M}_+ \rightarrow [0, \infty]$ が次の条件を満たすとき, \mathfrak{M} 上のトレースという:

$$\begin{cases} \tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y), & x, y \in \mathfrak{M}_+. \\ \tau(\lambda x) = \lambda \tau(x), & \lambda \geq 0, x \in \mathfrak{M}_+. \\ \tau(x^*x) = \tau(xx^*), & x \in \mathfrak{M}_+. \end{cases}$$

τ が $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$ を満たすとき, 忠実といい, $\forall x (\neq 0) \in \mathfrak{M}_+$ に対して, $0 \leq y \leq x$ かつ $\tau(y) < \infty$ なる $y \in \mathfrak{M}_+$ が存在する時, 半有限という. τ は有界単調増大ネット $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{M}_+$ に対し, $\tau(x_i) \nearrow \tau(\sup x_i)$ を満たすとき正則という. 『 \mathfrak{M} が半有限型 $\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ 上に半有限忠実正則トレースが存在』であり, \mathfrak{M} が因子環ならこのような τ は定数倍を除

³これは e 自身の性質というよりも射影作用素のなす束 $P(\mathfrak{M})$ 内における e の相対的な位置関係に依存する.

⁴一般に射影 $e (\neq 0) \in P(\mathfrak{M})$ に対して, $x_e := ex|_{e\mathcal{H}}$ は $e\mathcal{H}$ 上の有界作用素であり, $\mathfrak{M}_e := \{x_e; x \in \mathfrak{M}\}$ は $e\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環である. これを \mathfrak{M} を e によって縮約して得られる von Neumann 環という.

⁵自己共役作用素 $a \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ で, スペクトルが $[0, \infty)$ に含まれるもの.

いて一意的である. τ が全ての $x \in \mathfrak{M}_+$ に対し有限値を取る時, 有限トレースといい, この時 τ を \mathfrak{M} 上に σ 弱連続に拡張することができる. 正則性とは単調収束定理のような性質だと思つて理解しやすい.

2.2 ユニタリ表現論と射影の同値性

射影の言葉はユニタリ表現論をイメージすると理解しやすくなる. π を位相群の \mathcal{H} 上への強連続ユニタリ表現, つまり群準同型 $G \rightarrow U(\mathcal{H})$ とする. $\mathfrak{M} := \{x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}); \pi(g)x = x\pi(g), \forall g\}$ は表現の生成する von Neumann 環 $\pi(G)''$ の交換団である. 一般に表現を研究するには, 基準となる表現を探して, π がそのような基準表現たちをどのような割合で含むかを調べることが多い. π の部分表現は \mathcal{H} の G -不変閉部分空間 E に対応する. そこで $e := P_E$ とおくと, G -不変性から $e\pi(g) = \pi(g)e$, $g \in G$, つまり $e \in \mathfrak{M}$ である. 逆に $e \in P(\mathfrak{M})$ ならば, $\text{Ran}(e) = e\mathcal{H}$ は G -不変閉部分空間. よつて \mathfrak{M} の射影 e と部分表現 $\pi^e = \pi|_{e\mathcal{H}}$ は 1-1 対応する. そこで $e_1, e_2 \in P(\mathfrak{M})$ が同値な部分表現であるとすると, これはちょうど $e_1\mathcal{H}$ と $e_2\mathcal{H}$ の間の, $\pi(G)$ と交換する等距離同型 $u_0: e_1\mathcal{H} \rightarrow e_2\mathcal{H}$ が存在する事と同値である. これは, \mathfrak{M} の部分等距離作用素 $u|_{e_1\mathcal{H}} = u_0$ があつて,

$$u^*u = e_1, uu^* = e_2$$

となる事を意味する. よつて部分表現 π^{e_1}, π^{e_2} の同値性は $e_1 \sim e_2$ と同値. このようにユニタリ表現論と von Neumann 環は密接に関係している. 中心射影 $P(\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ や I, II, III 型の意味なども明快になる. 例えば [8] に詳しい解説がある.

2.3 非有界作用素

作用素環論では主として有界作用素を扱うが, 定義域が \mathcal{H} 全体でなく, 稠密な部分空間であるような非有界作用素 (特に閉作用素) を考察することも重要である. (cf. [9]) T を Hilbert 空間 \mathcal{H} の稠密な部分空間 $\text{dom}(T)$ を定義域に持つ線形作用素とする. 別の

作用素 S が $\text{dom}(T) \subset \text{dom}(S)$ かつ $S\xi = T\xi, \forall \xi \in \text{dom}(T)$ を満たすとき, S を T の拡大といい, $T \subset S$ と書く. $\text{dom}(T)$ が稠密なので, 作用素 T^* が

$$\text{dom}(T^*) := \{\eta; \exists \zeta \langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle, \forall \xi \in \text{dom}(T)\}$$

を定義域とし, 上式中の η に対して, $T^*\eta := \zeta$ で定義される. T が閉作用素であるとは, $\{\xi_n\} \subset \text{dom}(T)$ がある $\xi \in \mathcal{H}$ に収束し, かつ $T\xi_n \rightarrow \eta$ となる $\eta \in \mathcal{H}$ が存在するならば, $\xi \in \text{dom}(T)$ かつ $T\xi = \eta$ となる事を言う.⁶ T が閉拡大を持つとき, 可閉という. 可閉性は $\text{dom}(T^*)$ の稠密性に同値. T が可閉のとき, T の最小閉拡大 \bar{T} が存在する. これを T の閉包という. T が任意の $\xi, \eta \in \text{dom}(T)$ に対して, $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle$ を満たすとき, 対称作用素であるという. これは $T \subset T^*$ に同値. 対称作用素は可閉である. $T = T^*$ (従って閉作用素) のとき T は自己共役という. 対称作用素 T の閉包が自己共役のとき, T を本質的に自己共役であるという.

2.4 $\overline{\mathfrak{M}}$ の*環構造. Murray-von Neumann 理論

\mathcal{H} 上稠密に定義された作用素 T が \mathfrak{M} に付属 (affiliate) するとは, $\forall u \in U(\mathfrak{M}), uTu^* = T$ が成り立つ事である. $T_\eta \mathfrak{M}$ とかく. $T_\eta \mathfrak{M}$ が可閉ならば $\bar{T}_\eta \mathfrak{M}$. \mathfrak{M} に付属する閉作用素全体を $\overline{\mathfrak{M}}$ で表す. Murray-von Neumann は論文 [1] で, \mathfrak{M} が有限 von Neumann 環のとき, $\overline{\mathfrak{M}}$ が自然な*環構造を持つ事を示した. この定理を理解する際, 完全⁷稠密性の概念が非常に重要である.

定義 2.1. \mathcal{H} の部分空間 \mathcal{D} が \mathfrak{M} において完全稠密とは, 次の条件を満たすことを言う:

閉部分空間の列 $\{M_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ が存在して,

(1) $P_{M_i} \in \mathfrak{M}$ (P_E は閉部分空間 E への直交射影)

(2) $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset \mathcal{D}$

(3) $\bigvee_{i=1}^\infty P_{M_i} = 1_{\mathcal{H}}$

⁶ ノルム連続だといっているわけではない

⁷ Murray-von Neumann では essentially dense と呼んでいたが, この呼称は誤解を招きやすく, 後の関連研究でも普及していないように見える. とりあえず完全稠密と呼ぶことにする.

完全稠密性は単なる稠密性よりもはるかに強い. 次が成り立つ.

命題 2.2 ([1]). \mathfrak{M} が有限 von Neumann 環のとき,

(1) $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ が \mathfrak{M} に対し完全稠密な部分空間の列ならば, その共通部分空間 $\bigcap_i D_i$ も完全稠密.

(2) \mathcal{D} が \mathfrak{M} に対し完全稠密のとき, $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ とすると, $\{\xi \in \text{dom}(X); X\xi \in \mathcal{D}\}$ も完全稠密. 特に $\mathcal{D} = \mathcal{H}$ ととれば, $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ に対して, $\text{dom}(X)$ は完全稠密.

この命題から, 非可換単項式に $\overline{\mathfrak{M}}$ の閉作用素を代入して得られる作用素 $Z_1 Z_2 \dots Z_n$ ($Z_i = X_i, X_i^*$) の定義域は \mathfrak{M} で完全稠密で, さらに非可換多項式に代入した作用素の定義域も完全稠密である. また $\overline{\mathfrak{M}}$ 内では非自明な閉拡大が存在しない事, 閉対称作用素は自己共役となる事⁸等がわかる. 彼らはさらに議論を進めて, $\overline{\mathfrak{M}}$ は有界でないにも関わらず自然な*環構造を持つという驚くべき定理を示した. これが本研究の出発点となる Murray-von Neumann 理論である.

3 $U(\mathfrak{M})$ 内での Lie 群-Lie 環対応

上述の Murray-von Neumann 理論から, $U(\mathfrak{M})$ 及びその閉部分群には適切な Lie 環が対応する事が期待できる. 実際にこれらは位相的に良い性質を持った完備位相 Lie 環を持つ事が証明できた. これを論ずるには二つの異なる位相を考察する必要がある.

3.1 レゾルベント族と SRT

我々は Lie 群-Lie 環の対応を調べたいので, Lie 環サイドで最も重要になる収束構造は強レゾルベント収束である. そこで, 閉作用素の中で自己共役作用素に「実部・虚部分解」可能なクラスを定め, このクラスに対して強レゾルベント位相 (SRT) なるものを定義する. Hilbert 空間が可分⁹ならばこの位相は距離付可能で, とくに第一可算公理を満たす.

⁸ 簡潔な別証明も得られた [10].

⁹ 以下, Hilbert 空間の可分性を常に仮定する. これは “簡単のため” ではなく, 本質的に必要となる.

定義 3.1. \mathcal{H} を可分 Hilbert 空間とする. \mathcal{H} 上の稠密に定義された閉作用素 A が, 次の条件を満たすとき, A をレゾルベント族に属すと言ひ, そのような作用素全体のなす集合を $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ で表す.

(RC.1) 自己共役作用素 X, Y が存在して, $\text{dom}(X) \cap \text{dom}(Y)$ は X, Y の共通の芯.

(RC.2) $A = \overline{X + iY}$ かつ $A^* = \overline{X - iY}$.

このとき, (RC.1) から $X \pm iY$ は可閉である事に注意する. よって $\overline{X \pm iY}$ は常に定義できる. かつ

$$\frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(\overline{X + iY + X - iY}) \supset X|_{\text{dom}(X) \cap \text{dom}(Y)}$$

なので, (RC.1) から,

$$\frac{1}{2}\overline{A + A^*} \supset X$$

となり, X は自己共役, $\overline{A + A^*}$ は対称作用素だったから, $X = \frac{1}{2}\overline{A + A^*}$. 従ってこの様な X は唯一つある. 同様に $Y = \frac{1}{2i}\overline{A - A^*}$. X を $\text{Re}(A)$, Y を $\text{Im}(A)$ と書く. そこで $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 上に強レゾルベント位相 (SRT) と呼ぶ位相を, 写像

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto (\text{Re}(A) - i)^{-1}, (\text{Im}(A) - i)^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

を連続とする最弱の位相として定義する. ($\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ には強位相を与える) SRT は, \mathcal{H} が可分のとき距離付可能である.

3.2 測度位相 (MT) と SRT

\mathfrak{M} が有限なので, $\overline{\mathfrak{M}}$ はレゾルベント族の作用素からなる [10] ので, SRT が入る. かつ, $\overline{\mathfrak{M}}$ は SRT 閉集合である. 既に述べたように SRT は線形位相である事を検証するのが難しい. 一方で, $\overline{\mathfrak{M}}$ 上には作用素環サイドから得られる測度位相と呼ばれる線形位相があり, これにより $\overline{\mathfrak{M}}$ は完備位相*環である事が知られている. (cf. [4])

τ を \mathfrak{M} の有限正則忠実トレースとする.¹⁰ $N(\varepsilon, \delta) := \{X \in \overline{\mathfrak{M}}; \exists p \in P(\mathfrak{M}), \|Xp\| < \varepsilon, \tau(p^\perp) < \delta\}$ と

¹⁰ \mathfrak{M} が可分有限 von Neumann 環なので, このような τ は存在し, かつ測度位相は τ の取り方によらない. これは半有限の場合には正しくなく, トレース τ 毎に異なる位相が生ずる.

する. $\{N(\varepsilon, \delta); \varepsilon > 0, \delta > 0\}$ を 0 の近傍系の準基とする位相 (τ 測度位相と呼ばれる) に関して $\overline{\mathfrak{M}}$ は完備位相*環になることが知られている ([3, 4]). 測度位相は環 $\overline{\mathfrak{M}}$ 自体を解析するには非常に有用だが, $\overline{\mathfrak{M}}, U(\overline{\mathfrak{M}})$ のつながりが見えにくい. 以下この位相を MT と呼ぶ (Measure Topology). 要約すると, MT, SRT のどちらも 1 長 1 短に見えるのである. これに関して, 次の定理を得た.

定理 3.2. (MT=SRT) \mathfrak{M} が可分有限 von Neumann 環ならば, $\overline{\mathfrak{M}}$ 上 SRT 位相と測度位相 (MT) は一致.

この定理は半有限の場合には反例がある.

3.3 主定理

以上の考察から, $U(\overline{\mathfrak{M}})$ の強閉部分群 G とその Lie 環 \mathfrak{g} を考察する事ができる.

定義 3.3. \mathfrak{M} を \mathcal{H} 上の有限 von Neumann 環とする. $U(\overline{\mathfrak{M}})$ の強閉部分群 G に対して

$$\mathfrak{g} := \{A; A \text{ は } \mathcal{H} \text{ 上の歪自己共役作用素, } e^{tA} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

を G の Lie 環と呼ぶ.

定理 3.4. \mathfrak{g} は $[X, Y] := \overline{XY - YX}$ によって, 実 Lie 環であり, その複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $\overline{\mathfrak{M}}$ の SRT 閉部分*環である. 特に完備位相 Lie*環である.

Lie 環である事は Trotter-Kato の定理及び Nelson の定理 [5] から従う. 位相的性質は前述の MT=SRT によって証明される.

定理 3.5.

(1) $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ を有限 von Neumann 環, $G_i \subset U(\mathfrak{M}_i)$ ($i = 1, 2$) を閉部分群とする. このとき, 強連続群準同型 $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$ は SRT 連続 Lie 環準同型 $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ を誘導する.

(2) $\overline{\mathfrak{M}}$ の任意の SRT 閉部分*環 \mathcal{R} は, \mathfrak{M} の部分有限 von Neumann 環 \mathfrak{N} によって, $\mathcal{R} = \overline{\mathfrak{N}}$ と一意的に表示される.

4 環 $\overline{\mathfrak{M}}$ たちのテンソル圏としての特徴付け

次に、非有界作用素のなす*環 \mathcal{R} が、いつ適当な有限 von Neumann 環 \mathfrak{M} に対して、 $\mathcal{R} = \overline{\mathfrak{M}}$ と書けるかを考えたい。この目的のために、2つの圏 \mathbf{fvN} 、 \mathbf{fRng} を考察する。

定義 4.1. 圏 \mathbf{fvN} は次の対象と射から成る:

- (1) 対象は可分 Hilbert 空間 \mathcal{H} と、その上の有限 von Neumann 環 \mathfrak{M} の対 $(\mathfrak{M}, \mathcal{H})$ からなる。
- (2) 射 $\varphi : (\mathfrak{M}_1, \mathcal{H}_1) \rightarrow (\mathfrak{M}_2, \mathcal{H}_2)$ とは、正則*準同型で unital なもの ($\varphi(1_{\mathcal{H}_1}) = 1_{\mathcal{H}_2}$) たちである。

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ を von Neumann 環とする。 $\{x_1 \otimes x_2; x_i \in \mathfrak{M}_i\}$ の 1 次結合 $\mathfrak{M}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{M}_2$ の生成する von Neumann 環を $\mathfrak{M}_1 \overline{\otimes} \mathfrak{M}_2$ と定義する。正則線形写像 $\varphi_1 : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{N}_1, \varphi_2 : \mathfrak{M}_2 \rightarrow \mathfrak{N}_2$ に対し、代数的テンソル積 $\mathfrak{M}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{M}_2$ から $\mathfrak{M}_2 \overline{\otimes} \mathfrak{N}_2$ への線形写像 $x \otimes y \mapsto \varphi_1(x) \otimes \varphi_2(y)$ は $\mathfrak{M}_1 \overline{\otimes} \mathfrak{M}_2$ 上の正則線形写像に一意に拡張される。この拡張を $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ と書く。これらの構造から圏 \mathbf{fvN} はテンソル圏¹¹の構造を与えられる。次に圏 \mathbf{fRng} を定義し、テンソル圏構造を導入する。

定義 4.2. 圏 \mathbf{fRng} の対象と射は次の様に定義される¹²

- (1) 対象は Hilbert 空間 \mathcal{H} とその上の稠密に定義された閉作用素の集合 \mathcal{R} で、次を満たすものとする。
 - (1a) \mathcal{R} はレゾルベント族の作用素からなる: $\mathcal{R} \subset \mathcal{RC}(\mathcal{H})$.
 - (1b) $X, Y \in \mathcal{R}$ ならば $X + Y, XY$ は稠密な定義域を持ち可閉で、 $\overline{X + Y}, \overline{XY}, X^*, \overline{kX} \in \mathcal{R}$.
 - (1c) \mathcal{R} は $1_{\mathcal{H}}$ を含む SRT 閉集合。
 - (1d) $X, Y \in \mathcal{R}$ が $\overline{XY} = 1_{\mathcal{H}}$ を満たせば、 $\overline{YX} = 1_{\mathcal{H}}$ が成立。
- (2) 射 $\Phi : (\mathcal{R}_1, \mathcal{H}_1) \rightarrow (\mathcal{R}_2, \mathcal{H}_2)$ は SRT 連続な unital “*準同型” である。

¹¹ Appendix 参照。

¹² 厳密にいうと、射の意味づけはこの後議論される

注 4.3. 上の定義では対象 \mathcal{R} 内で、非有界作用素に対する和や積などが結合律を満たす事を要求していないので、 \mathcal{R} が*環であると即断できない。¹³が、 \mathcal{R} が*環構造を持つ事がこの定義から証明できる。よって “*準同型” は意味を持つ。

補題 4.4. $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ を \mathbf{fRng} の対象とする。このとき、有限 von Neumann 環 \mathfrak{M} が存在して、 $\mathcal{R} = \overline{\mathfrak{M}}$ となる。このような \mathfrak{M} は唯一つである。

この補題から \mathcal{R} は*環構造を持つ。2つの対象 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ が与えられると、閉作用素のテンソル積¹⁴を考えて、 $\mathcal{R}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{R}_2 := \text{Lin}\{A_1 \otimes A_2; A_i \in \mathcal{R}_i\}$ は全て $\mathcal{RC}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ の作用素から成る。そこで $\mathcal{R}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{R}_2$ の SRT 閉方を $\mathcal{R}_1 \overline{\otimes} \mathcal{R}_2$ と定義する。

補題 4.5. $\mathcal{R}_i = \overline{\mathfrak{M}_i}$ ならば、 $\mathcal{R}_1 \overline{\otimes} \mathcal{R}_2 = \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2}$ 。

次の補題は、 \mathbf{fvN} の射が自然に \mathbf{fRng} に持ち上げる事を示す。ほとんどの von Neumann 環同士の写像は持ち上げる事ができないので、これは非自明である。実際、いかなる σ 弱連続な状態も $\overline{\mathfrak{M}}$ 上に持ち上げることはできない。

補題 4.6. \mathfrak{M}_i ($i = 1, 2$) が \mathcal{H}_i 上の有限 von Neumann 環であるとする。

- (1) 任意の正則 unital*準同型 $\varphi : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ は、SRT 連続 unital*準同型 $\hat{\varphi} : \overline{\mathfrak{M}_1} \rightarrow \overline{\mathfrak{M}_2}$ に一意に拡張される。この拡張を $\mathcal{E}(\varphi)$ と書く。この拡張写像はテンソル演算と可換。すなわち、 $\mathcal{E}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = \mathcal{E}(\varphi_1) \otimes \mathcal{E}(\varphi_2)$ 。
- (2) 逆に SRT 連続 unital*準同型 $\Phi : \overline{\mathfrak{M}_1} \rightarrow \overline{\mathfrak{M}_2}$ は、正則 unital*準同型 $\Phi|_{\mathfrak{M}_1} : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ を誘導する。

証明には σ 弱連続な*準同型に関する表現定理を用いる。これらを用いると、次が証明できる。

定理 4.7. \mathbf{fRng} はテンソル圏構造を持ち、かつテンソル圏として \mathbf{fvN} に同型である。

¹³ 例えば $X + Y + Z = \overline{X + Y + Z}$ が成り立つかどうか、定義を見ただけでは明らかではない。

¹⁴ 閉作用素の定義域の代数的テンソル積 $\text{dom}(A_1) \otimes_{\text{alg}} \text{dom}(A_2)$ 上作用素 $A_1 \otimes_0 A_2 : \xi \otimes \eta \mapsto A_1 \xi \otimes A_2 \eta$ が定義され、これは可閉である。その閉包を $A_1 \otimes A_2$ と定義する。

Appendix: テンソル圏

テンソル圏の公理について述べる. 圏論一般については [6], テンソル圏については例えば [6, 7] が参考になる.

定義 4.8. テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ とは, 圏 \mathcal{C} と次の 4 つ組から成る.

(1) テンソル積と呼ばれる双関手¹⁵ $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

(2) ユニットとよばれる対象 I .

(3) 結合律を意味する自然同型 $\alpha : \otimes(\otimes \times 1_{\mathcal{C}}) \rightarrow \otimes(1_{\mathcal{C}} \times \otimes)$.

(4) 左ユニット/右ユニット条件を示す自然同型 $\lambda : \otimes(I \times 1_{\mathcal{C}}) \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$, $\rho : \otimes(1_{\mathcal{C}} \times I) \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$

これらは次の五角形公理及び三角形公理を満たす. すなわち, 任意の対象 A, B, C, D , に対して, 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & & \\
 & \nearrow^{\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D} & & \searrow^{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & \\
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & \circ & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \alpha_{A \otimes B,C,D} \downarrow & & & & \downarrow 1_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\
 (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
 & & & & \\
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & & & A \otimes (I \otimes B) \\
 \rho_{A \otimes I} \searrow & & \circ & & \swarrow 1_A \otimes \lambda_B \\
 & & A \otimes B & &
 \end{array}$$

α が自然であるとは, 任意の \mathcal{C} の対象の 3 つ組たち (A, B, C) , (A', B', C') に対し, 同型射 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$ が存在し, 任意の射 $f : A \rightarrow A'$, $g : B \rightarrow B'$, $h : C \rightarrow C'$ に対して次の図式が可換となる事を言う:

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & A \otimes (B \otimes C) \\
 (f \otimes g) \otimes h \downarrow & \circ & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\
 (A' \otimes B') \otimes C' & \xrightarrow{\alpha_{A',B',C'}} & A' \otimes (B' \otimes C')
 \end{array}$$

λ が自然であるとは, 任意の対象 A に対し, 同型射 $\lambda_A : I \otimes A \rightarrow A$ があって, 任意の射 $f : A \rightarrow A'$ に対し, 次の図式が可換となる事を言う:

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes A & \xrightarrow{\lambda_A} & A \\
 1_I \otimes f \downarrow & \circ & \downarrow f \\
 I \otimes A' & \xrightarrow{\lambda_{A'}} & A'
 \end{array}$$

ρ の自然性も同様.

\mathbb{C} 上の Hilbert 空間とその間の連続線形写像の圏などが典型的なテンソル圏になっている. その場合, 例えば $\alpha_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3} : (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$ は自然な同型 $(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 \rightarrow x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$ であ

¹⁵特に $1_{V \otimes W} = 1_V \otimes 1_W$, $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ 等を満たす.

る. テンソル圏といっても, このような『いかにもテンソル』な圏から, テンソル圏であることが一目では分からないような圏まで, かなりバラエティがある. 今回は『いかにもテンソル』な圏しか扱わない.

定義 4.9. $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, $(\mathcal{C}', \otimes, I', \alpha', \lambda', \rho')$ をテンソル圏とする. 3つ組 (\mathcal{F}, h_1, h_2) が \mathcal{C} から \mathcal{C}' へのテンソル関手であるとは, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ は関手であり, h_1 は同型射 $I \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(I)$ で, h_2 は同型射の集まり $h_2(A, B) : \mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A \otimes B)$ で, (A, B) について自然であり, かつ次の図式を可換にすることを言う:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(B)) \otimes \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B), \mathcal{F}(C)}}} & \mathcal{F}(A) \otimes (\mathcal{F}(B) \otimes \mathcal{F}(C)) \\
 \downarrow h_2(A, B) \otimes 1_{\mathcal{F}(C)} & & \downarrow 1_{\mathcal{F}(A)} \otimes h_2(B, C) \\
 \mathcal{F}(A \otimes B) \otimes \mathcal{F}(C) & \circ & \mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(B \otimes C) \\
 \downarrow h_2(A \otimes B, C) & & \downarrow h_2(A, B \otimes C) \\
 \mathcal{F}((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\alpha_{A, B, C})} & \mathcal{F}(A \otimes (B \otimes C))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\lambda'_{\mathcal{F}(A)}} & \mathcal{F}(A) \\
 \downarrow h_1 \otimes 1_{\mathcal{F}(A)} & \circ & \uparrow \mathcal{F}(\lambda_A) \\
 \mathcal{F}(I) \otimes \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{h_2(I, A)} & \mathcal{F}(I \otimes A)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(A) \otimes I & \xrightarrow{\rho'_{\mathcal{F}(A)}} & \mathcal{F}(A) \\
 \downarrow 1_{\mathcal{F}(A)} \otimes h_1 & \circ & \uparrow \mathcal{F}(\rho_A) \\
 \mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(I) & \xrightarrow{h_2(A, I)} & \mathcal{F}(A \otimes I)
 \end{array}$$

$\forall (A, B, C)$ in $\text{Obj}(\mathcal{C})$.

参考文献

- [1] F. J. Murray, J. von Neumann: On Rings of Operators, Ann. math., vol **37**, No.1 (1937)
- [2] M. Takesaki : Theory of Operator algebra I., Springer (1979), II(2003), III(2003).
- [3] I. E. Segal : A non-commutative extension of abstract integration, Ann. math., vol **57**, No.3 (1953)
- [4] E. Nelson : Notes on non-commutative integration., Journ. Funct. Anal (1974)
- [5] E. Nelson : Topics in Dynamics I: Flows, Princeton University Press, Princeton, (1969).
- [6] S. MacLane : Categories for the Working Mathematician, Springer 2nd ed. (1998)
- [7] C. Kassel : Quantum Groups, Springer (1994)
- [8] G. W. Mackey : Theory of Unitary Group Representations, University of Chicago Press (1977)
- [9] M. Reed and B. Simon : Methods of Modern Mathematical Physics I, Academic Press (1972)
- [10] H. Ando, Y. Matsuzawa : Lie Group-Lie Algebra Correspondences of Unitary Groups in Finite von Neumann Algebras. (preprint)

Heterodimensional tangency and hyperbolic sets

首都大学東京 西澤 由輔 (Yusuke Nishizawa)

Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University

1 導入

この講演では、サドル型不動点 p と q に関するヘテロ次元サイクルを持つ 3 次元 C^1 微分同相写像 φ を扱う。ここで、このヘテロ次元サイクルはヘテロ次元接触 r を含み、 p は $\text{Index} = 2$, q は $\text{Index} = 1$ とする。このような φ を任意に C^1 近似する 3 次元 C^1 微分同相写像 ψ の双曲型不変集合について考える。

はじめにいくつかの先行研究について述べる。Li [7] は、2 次のホモクリニック接触 q を持つ 2 次元 C^2 微分同相写像に対して、 q のいくらでも近くに双曲型不変集合が存在することを示した。このとき Li が存在を示した双曲型不変集合は一様双曲的なものと非一様双曲的なものであった。[7] で Li は図 1.1 のようにホモクリニック接触の近くで Box B_n と B をとり、双曲型不変集合の存在を示している。

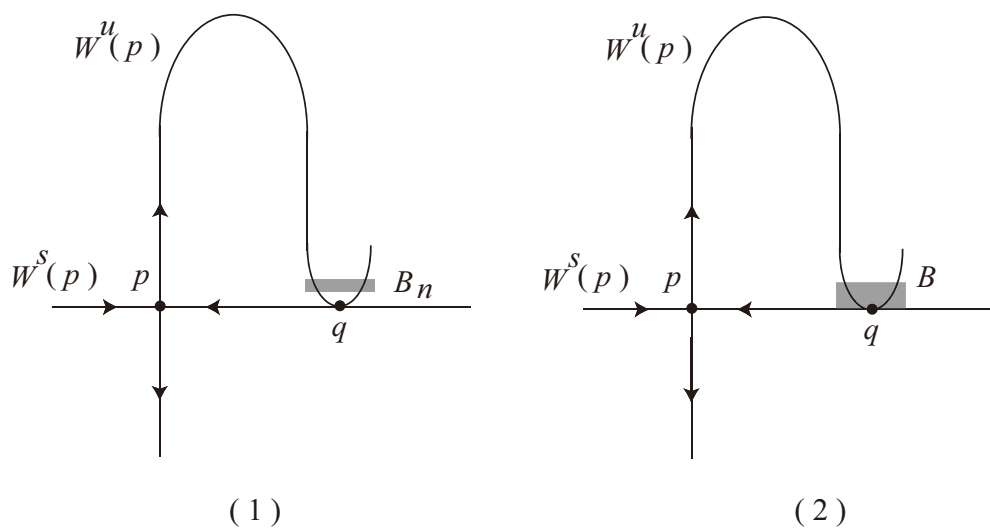


図 1.1: ホモクリニック接触 q と box B_n と box B .

また、Cao-Luzzatto-Rios [1] は、Li と同様に 2 次のホモクリニック接触 q を持つ 2 次元 C^2 微分同相写像に対して、 q のいくらでも近くに双曲型不変集合が存在することを示した。ただし Li とは異なり図 1.2 のような Box の中に R_i ($i = 1, \dots, 5$) をとり、それらを図 1.2 のように写す微分同相写像 Φ について考えている。[1] の論文で彼等は、Rios [9] の結果を用いて非一様な双曲型不変集合の存在を示し、さらに Oseledic [8] の Lyapunov exponents に関する結果を用いて一様な双曲型不変集合の存在を示している。つまり、双曲型不変集合上のすべての不変な確率測度に関するすべての Lyapunov exponents が 0 から一様な離れていることを示し、一様双曲性を示している。

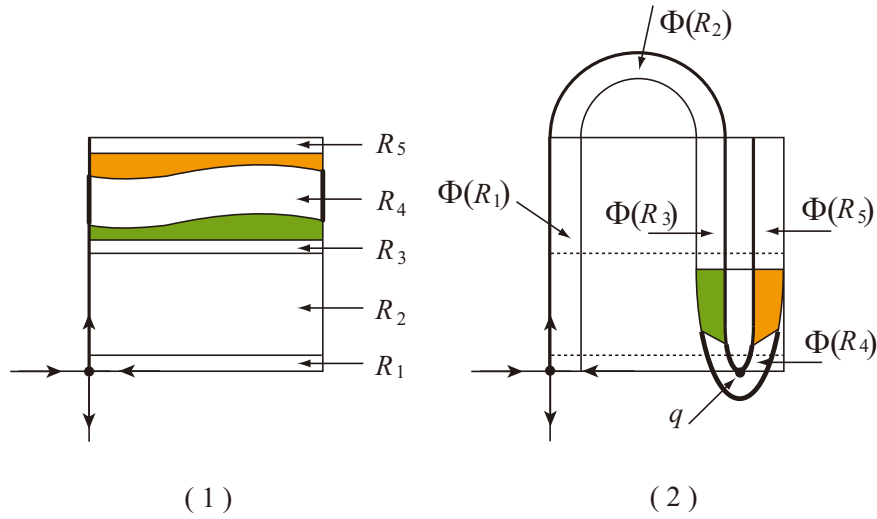


図 1.2: Cao-Luzzatto-Rios が用いたホモクリニック接触 q をもつ微分同相写像 Φ .

このようなホモクリニック接触と双曲型不変集合に関する研究として他に Gavrilov-Silnikov [2], [3] と Homburg-Weiss [4] の研究などがある. Homburg-Weiss は Katok [5], [6] の結果をもちいて非一様な双曲型不変集合の存在を示している.

これ等の先行研究はホモクリニック接触を持つ 2 次元微分同相写像についての結果である. 我々はヘテロ次元接触を持つ 3 次元微分同相写像について考える. 主定理は以下のようなものである.

定理 A. M を 3 次元多様体とし, φ を次の条件をみたす M 上の C^1 微分同相写像で, サドル型不動点 p と q に同伴するヘテロ次元サイクルを持つものとする.

- (1) $\text{Index}(p) = \text{Index}(q) + 1$,
- (2) σ_{ss} と σ_s と σ_u を $D\varphi(q)$ の固有値で $0 < \sigma_{ss} < \sigma_s < 1 < \sigma_u$ かつ $\sigma_{ss}\sigma_u < 1$ を満たすものとする.
- (3) λ_s と λ_u と λ_{uu} を $D\varphi(p)$ の固有値で $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u < \lambda_{uu}$ かつ $\lambda_{uu}\lambda_s > 1$ を満たすものとする.
- (4) φ は安定多様体 $W^s(q, \varphi)$ と不安定多様体 $W^u(p, \varphi)$ に関して, ヘテロ次元接触 $r \in W_{\text{loc}}^s(q, \varphi)$ をもつ.

このとき, φ に C^1 位相でいくらでも近い C^1 微分同相写像 ψ とある自然数 N と領域 $B_n \subset U(q)$ が存在して, 任意の自然数 $n \geq N$ に対して, $\Lambda_n = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \psi^{jn}(B_n)$ は一様な双曲型不変集合である.

定理 B. 定理 A と同様な仮定で, ある領域 B が存在し, Ψ を B 上の ψ の first return map としたときに, $\Lambda_B = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \Psi^j(B)$ は非一様な双曲型不変集合である.

2 準備

ここではいくつかの定義について述べる. M を $C^r (r \geq 1)$ 多様体とし, φ を M 上の $C^r (r \geq 1)$ 微分同相写像とする.

p を φ の双曲型不動点とする. このとき, **安定多様体** $W^s(p, \varphi) = \{x \in M : \varphi^n(x) \rightarrow p\}$ と **不安定多様体** $W^u(p, \varphi) = \{x \in M : \varphi^{-n}(x) \rightarrow p\}$ が定義される. さらに, $q \in W^s(p, \varphi) \cap W^u(p, \varphi) \setminus \{p\}$ が存在して $W^s(p, \varphi) \cap W^u(p, \varphi) \setminus \{p\} \neq \emptyset$ を満たすとき p の **ホモクリニック点** という. この q において, $T_q W^s(p, \varphi) \oplus T_q W^u(p, \varphi) = T_q M$ が成り立つとき q を p の **横断的ホモクリニック点** といい, そうでないとき q を p の **ホモクリニック接触** という.

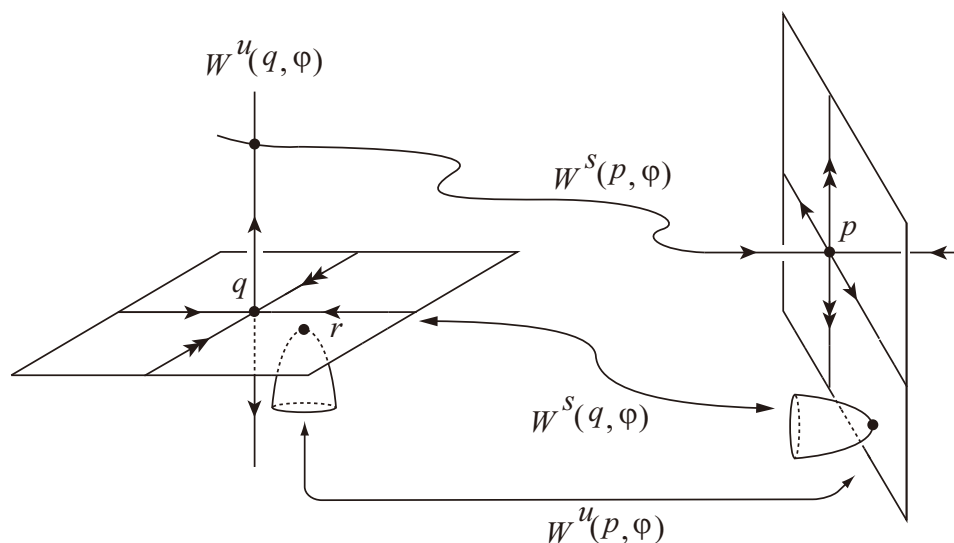


図 2.1: ヘテロ次元接触 r を含むヘテロ次元サイクル.

一方, φ が 2 つのサドル型不動点 p と q をもつとする. このとき, φ が p と q に関する **ヘテロクリニックサイクル** をもつとは,

$$W^s(p, \varphi) \cap W^u(q, \varphi) \neq \emptyset \text{ かつ } W^u(p, \varphi) \cap W^s(q, \varphi) \neq \emptyset$$

をみたすことをいう. このヘテロクリニックサイクルが $\text{Index}(p) \neq \text{Index}(q)$ をみたすとき, **ヘテロ次元サイクル** という. 特に, $\text{Index}(p) = \text{Index}(q) + 1$ をみたすとき **co-index one サイクル** という. また, ヘテロクリニック点 $r \in W^s(q, \varphi) \cap W^u(p, \varphi)$ が

$$T_r W^s(q, \varphi) + T_r W^u(p, \varphi) \neq T_r M \text{ かつ}$$

$$\dim(T_r W^s(q, \varphi)) + \dim(T_r W^u(p, \varphi)) > \dim(M)$$

をみたすとき, この r を $W^s(q, \varphi)$ と $W^u(p, \varphi)$ の **ヘテロ次元接触** という (図 2.1 を参照). ヘテロ次元サイクルはホモクリニック接触と同様に 1970 年代に Newhouse や Palis 等によって導入された概念であり, ホモクリニック接触とは異なる力学系である. これに関して, 近年では Bonatti や Diaz 達によって様々な結果が得られている.

双曲型不変集合が一様または非一様な双曲性をもつことは, 次の条件の $C > 0$ が定数であるか, または変数であるかによって区別をする.

φ の不変集合 Λ が**一様な双曲型不変集合**であるとは、定数 $C > 0$ と $\alpha > 1$ とノルム $\|\cdot\|$ が存在して、 $x \in \Lambda$ に対して、次を満たす部分空間 $\mathbb{E}^s(x), \mathbb{E}^u(x) \subset T_x M$ が存在するときである：

- (1) $T_x M = \mathbb{E}^s(x) \oplus \mathbb{E}^u(x)$,
- (2) $i = s, u$ に対して、 $D_x \varphi(\mathbb{E}^i(x)) = \mathbb{E}^i(\varphi(x))$,
- (3) $v \in \mathbb{E}^s(x)$ に対して、 $\|D_x \varphi^n(v)\| \leq C\alpha^{-n}\|v\|$,
- (4) $v \in \mathbb{E}^u(x)$ に対して、 $\|D_x \varphi^n(v)\| \geq C\alpha^n\|v\|$.

また、 φ の不変集合 Λ が**非一様な双曲型不変集合**であるとは上の不等式において、 $C > 0$ が x の関数 $C(x) > 0$ となるときである。一様または非一様について区別をしないときは、ただの双曲型不変集合という。

つぎに、双曲型不変集合 Λ と Lyapunov exponents の関係について述べる。**Lyapunov exponents** とは $v^i \in \mathbb{E}^i(x)$ ($i = s, u$) に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D\varphi_x^n v^i\|$$

の極限值（定数）である。定義より、一様な双曲型不変集合であれば 0 でない Lyapunov exponents の存在がわかる。この定義より双曲型不変集合の Lyapunov exponents は正であり、それが一様であるときの Lyapunov exponents は、0 から一様に離れていることがわかる。

測度論的なアプローチから微分同相写像の力学系に応用するものとして Oseledec の乗法エルゴート定理 [8] がある。Oseledec の結果は、 $\mathcal{M}(\varphi)$ を Λ 上の φ 不変なボレル確率測度 μ 全体の集合としたときに、任意の $\mu \in \mathcal{M}(\varphi)$ に対して、全測度をもつ φ -不変集合 B_φ が存在して、Lyapunov exponents が存在するというものである。Cao-Luzzatto-Rios [1] はこの結果をもちいて、一様な双曲型不変集合の存在を示している。

3 証明の概略

ここでは定理 A と定理 B の証明について、いくつかのステップに分けて概略を述べる。

ステップ 1. φ に C^1 位相でいくらでも近い C^1 微分同相写像で、馬蹄集合をもつものを構成する。

はじめに φ に C^1 位相でいくらでも近い C^1 微分同相写像の one-parameter 族 $\{\psi_\mu\}_{\mu \in [-\epsilon, \epsilon]}$ で次の条件を満たすものを考える。(図 3.1 を参照)

- (1) ψ_0 は φ にいくらでも C^1 位相で近く、 r の continuation であるヘテロ次元接触 $\tilde{r} = (0, y_Q, 0)$ を含むヘテロ次元サイクルをもつ。このヘテロ次元サイクルはサドル型不動点 p と q の continuation である P と Q に同伴するサイクルである。
- (2) P の近傍 $U(P)$ と Q の近傍 $U(Q)$ 上では次の条件を満たす：
 - (a) 任意の $(x, y, z) \in U(P)$ に対して、 $\psi_\mu(x, y, z) = (\lambda_s x, \lambda_u y, \lambda_{uu} z)$ 。

自然数 k を $U(\tilde{r})$ から $U(Y_Q)$ への C^1 微分同相写像 ψ_μ の反復の回数とし, 自然数 j を $U(Y_P)$ から $U(\psi_\mu^{-m}(\tilde{r}))$ への C^1 微分同相写像 ψ_μ の反復の回数とする. また, 図 3.2 のように, \tilde{r} の近くに Box

$$B_n = \left\{ (x, y, z) : -\bar{w} \leq x \leq \bar{w}, y_Q - w' \leq y \leq y_Q + w', \right. \\ \left. \frac{h}{\sigma_u^{k+1} \tau_u \lambda_{uu}^j} + \frac{\tilde{z}}{\sigma_u^{k+1}} \leq z \leq \frac{h}{\sigma_u^k \tau_u \lambda_{uu}^j} + \frac{\tilde{z}}{\sigma_u^k} \right\}$$

を考える. このとき任意の $(x, y, z) \in B_n$ に対して, $\mu = \lambda_u^{-j} y_P - \sigma_s^k y_Q$ とすると, C^1 微分同相写像

$$\psi_\mu^n(x, y, z) = (a \lambda_{uu}^j \tau_u (\sigma_u^k z - \tilde{z}), b (\lambda_u^j \sigma_s^k y - \lambda_u^j \sigma_s^k y_Q) + y_Q, \\ -c \lambda_s^j (\tilde{x} + \sigma_{ss}^k \tau_s x) + d \lambda_{uu}^{2j} \tau_u^2 (\sigma_u^k z - \tilde{z})^2).$$

が得られる (ただし, $n = k + l + j + m$). このとき, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ となる n に対して, 図 3.2 のように B_n と $\psi_\mu^n(B_n)$ の交差がおこる.

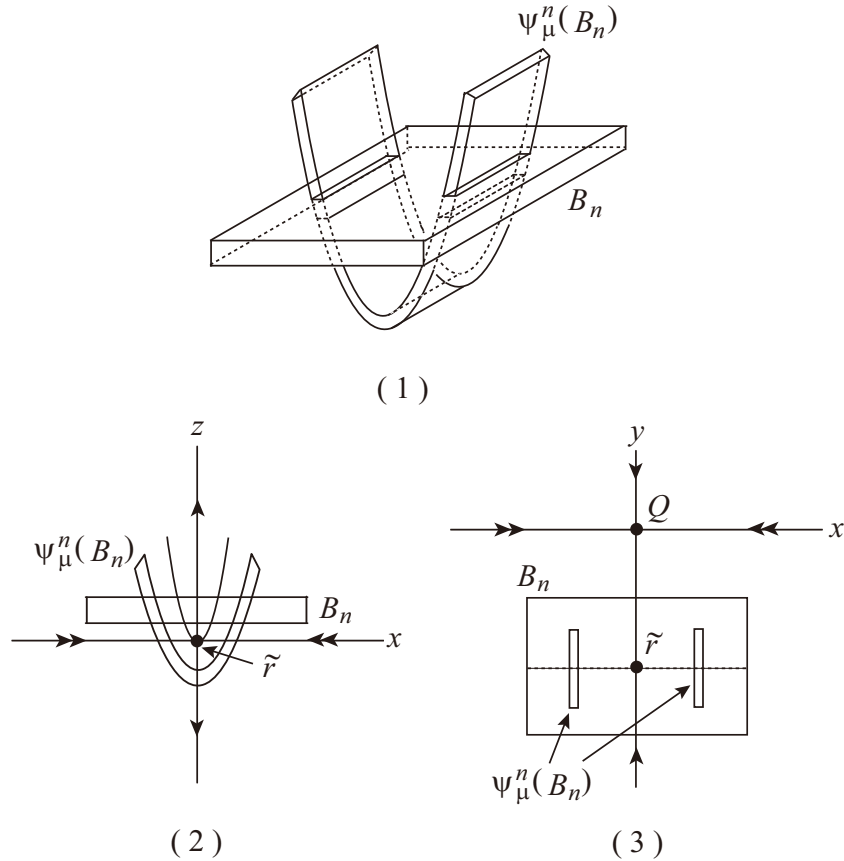


図 3.2: 定理 A の証明の概略.

馬蹄集合の存在を示すためにつぎのような錐を考える: $s \in \psi_\mu^{-n}(B_n) \cap B_n \cap \psi_\mu^n(B_n)$ に対して, 錐を

$$C^u(s) = \{(v_1, v_2, v_3) \in T_s M : \frac{|v_3|}{\|(v_1, v_2)\|} \geq \frac{1}{2} \xi(s)\}$$

とする。ただし $\xi(s) = |2dx/a^2|$ である。これが不安定錐であることと、その補集合が安定錐になることを証明することによって、 $\Lambda_n = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \psi^{jn}(B_n)$ は一様な馬蹄集合であることがわかる。

ステップ 3. 最後に定理 B の証明の概略を述べる。

ステップ 2 と同様に、 $U(\tilde{r})$ から $U(\tilde{r})$ への大域的な C^1 微分同相写像 ψ_μ の反復を考える。非一様な馬蹄集合の存在を示すために \tilde{r} の近くに Box

$$B = \left\{ (x, y, z) : -\bar{w} \leq x \leq \bar{w}, y_Q - w' \leq y \leq y_Q + w', 0 \leq z \leq \frac{h}{\sigma_u^K \tau_u \lambda_{uu}^J} + \frac{\tilde{z}}{\sigma_u^K} \right\},$$

をとる。ここで自然数 K は $U(\tilde{r})$ から $U(Y_Q)$ への C^1 微分同相写像 ψ_μ の反復の回数で、自然数 J は $U(\tilde{r})$ から $U(\psi_\mu^{-m}(\tilde{r}))$ への C^1 微分同相写像 ψ_μ の反復の回数で次の条件を満たすものとする：

- 自然数 N を定理 A を満たすものとする。これに対して、 K と J は $K+l+J+m \geq N$ を満たす最小の自然数である。

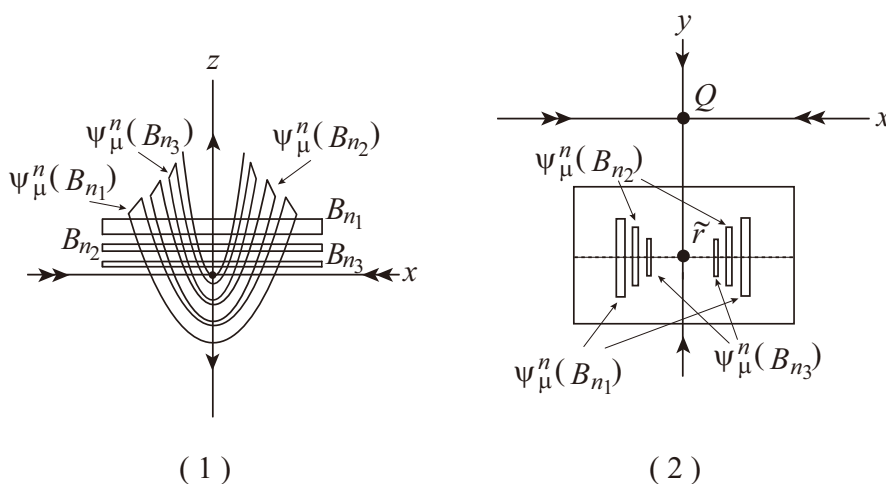


図 3.3: 定理 B の証明の概略。

そして図 3.3(1) のように、高さが異なる Box $B_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_3} \subset B$ を考える。異なる高さの Box を考えることによって、図 3.3(1) (2) のようにヘテロ次元接触 \tilde{r} のいくらでも近くに馬蹄集合を構成することができる。このようにして得られる馬蹄集合は、接点 \tilde{r} に近づくにつれて、双曲性が弱くなり、ヘテロ次元接触 \tilde{r} を閉方に含むことがわかる。よって、 Ψ を ψ_μ の B 上の first return map とすると写像の構成から不変集合 $\Lambda_B = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \Psi^j(B)$ が空でないことがわかり、任意の $s \in \Lambda_B$ に対して、ある自然数 $n(s)$ と $n'(s)$ が存在して、 $\Psi(s) = \psi_\mu^{n(s)}(s) \in B$ かつ $\Psi_\mu^{-1}(s) = \psi_\mu^{-n'(s)}(s) \in B$ を満たすことがわかる。ここで注意することは、 μ は Box B_{n_i} の高さに依存して変化することである。Step 2 と同様に錐を考えることによって不安定集合 $\mathbb{E}^u(x)$ と安定集合 $\mathbb{E}^s(x)$ が得られる。このとき、Step 2 とは異なり定数 $C > 0$, $\alpha > 1$ が点 $s \in \Lambda$ に依存するようにとれることに注意する。このようにして非一様な馬蹄集合を構成することができる。

参考文献

- [1] Y. Cao, S. Luzzatto and I. Rios, Some non-hyperbolic systems with strictly non-zero Lyapunov exponents for all invariant measures: horseshoes with internal tangencies, *Discrete Contin. Dynam. Syst.* **15** (2006), 61–72.
- [2] N. Gavrilov and L. Silnikov, On 3-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curves I, *Math. USSR Sb.* **88** (1972), 467–485.
- [3] N. Gavrilov and L. Silnikov, On 3-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curves II, *Math. USSR Sb.* **90** (1973), 139–156.
- [4] A. J. Homburg and H. Weiss, A geometric criterion for positive topological entropy II; homoclinic tangencies, *Commun. Math. Phys.* **208** (1999), 267–273.
- [5] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* **51** (1980), 137–173.
- [6] A. Katok, Nonuniform hyperbolicity and structure of smooth dynamical systems, *Proc. International Congress of Mathematicians Warszawa* **2** (1983), 1245–1254.
- [7] M.-C. Li, Nondegenerate homoclinic tangency and hyperbolic sets, *Nonlinear Analysis* **52** (2003), 1521–1533.
- [8] Y. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trudy Moskov Mat. Otc.* **19** (1968), 179–210.
- [9] I. Rios, Unfolding homoclinic tangencies inside horseshoes: hyperbolicity, fractal dimensions and persistent tangencies, *Nonlinearity* **14** (2001), 431–462.

支払備金に関する Mack の公式の一般化

齋藤新悟 (Shingo SAITO)
九州大学大学院数理学研究院

概要

損害保険会社において、既発生の事故に対する未払いの保険金に対応するために積み立てる金額を支払備金という。支払備金を区間推定する 1 つの方法として、Mack は自身のモデルに基づいて支払備金の推定量の平均 2 乗誤差を推定する公式を与えた。この講演では、Mack のモデルを一般化したモデルにおいて、支払備金を含む種々の値の推定量の平均 2 乗誤差を推定する公式を与える。

1 支払備金とチェーンラダー法

1.1 支払備金とは

損害保険業においては、事故が発生してから保険金支払いまでに損害調査などのプロセスが必要になることから、事故発生と保険金支払の間に時間差が生じることが多い。したがって、既発生の事故に対する未払いの保険金の額を推定し、将来支払うために積み立てておく必要がある。このような未払いの保険金の額を支払備金 (claims reserve) という：

$$(\text{支払備金}) = (\text{最終保険金}) - (\text{支払保険金}).$$

1.2 ランオフ三角形

支払備金の推定のためには次のようなデータが用いられる：

		経過年数 j				
		1	2	...	$n-1$	n
事故年度 i	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	$(C_{2,n})$

	$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$...	$(C_{n-1,n-1})$	$(C_{n-1,n})$
	n	$C_{n,1}$	$(C_{n,2})$...	$(C_{n,n-1})$	$(C_{n,n})$

ここで、 $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) は第 i 年度に発生した事故に対して、 j 年経過するまでに (すなわち第 $i+j-1$ 年度末までに) 支払った保険金の総額を表す。第 n 年度末の時点では $i+j \leq n+1$ なる $C_{i,j}$ が既知であり、カッコで囲まれた $i+j \geq n+2$ なる $C_{i,j}$ が未知である。既知のデータが左上の三角形部分であることから、このようにまとめられたデータをランオフ三角形 (run-off triangle) と呼ぶ。

以下簡単のため、各年度の事故は高々 n 年以内に保険金の支払が完了する、すなわち $i = 1, \dots, n$ に対して $C_{i,n}$ は事故年度 i の事故に対する最終保険金であると仮定する。このとき支払備金 R は

$$R = (C_{2,n} - C_{2,n-1}) + (C_{3,n} - C_{3,n-2}) + \cdots + (C_{n,n} - C_{n,1})$$

となる。

1.3 チェーンラダー法

支払備金 R を推定する方法として最も広く用いられているのがチェーンラダー法 (chain-ladder method) である。まず、 $i + j \geq n + 2$ に対する $C_{i,j}$ の推定量 $\hat{C}_{i,j}$ を求めれば、 R は

$$\hat{R} = (\hat{C}_{2,n} - C_{2,n-1}) + (\hat{C}_{3,n} - C_{3,n-2}) + \cdots + (\hat{C}_{n,n} - C_{n,1})$$

で推定できることに注意する。

チェーンラダー法においては、経過年数が j から $j + 1$ になる際に累積支払保険金は事故年度によらず定数 f_j 倍となると考える。すなわち理想的には $C_{i,j+1} = C_{i,j}f_j$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n - 1$) であり、両辺のずれは誤差に起因するとみなす。

各 $j = 1, \dots, n - 1$ に対して、 $C_{i,j+1}/C_{i,j}$ の値が既知であるのは $i = 1, \dots, n - j$ のときなので f_j を

$$\hat{f}_j = \frac{C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j+1}}{C_{1,j} + \cdots + C_{n-j,j}}$$

で推定し、それを用いて $i + j \geq n + 2$ のとき

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{j-1}$$

で $C_{i,j}$ を推定する。

1.4 問題

以下では、次の2つの問題を考える：

- チェーンラダー法はどのような数学的モデルで正当化できるか？ 特に、 \hat{f}_j が類似の推定量

$$\hat{f}_j = \frac{1}{n-j} \left(\frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} + \cdots + \frac{C_{n-j,j+1}}{C_{n-j,j}} \right)$$

より優れていることを保証するモデルはどういったものか？

- 支払備金を区間推定するにはどうすればよいか？

ここで、区間推定 (interval estimation) とは「95%以上の確率で $90 < R < 110$ である」という形の推定であり、このとき区間 $(90, 110)$ を95%信頼区間 (confidence interval) と呼ぶ。それに対してチェーンラダー法のような「 R は100である」という形の推定を点推定 (point estimation) という。

次節では、これらの問題を考えるために必要な確率論の基礎事項を述べる。

2 確率変数と条件つき期待値

2.1 確率変数

2.1.1 連続型確率変数

確率変数 (random variable) は確率論においては確率空間上の可測関数として定義されるが、本講演では「定まった確率でランダムな値を取る変数」という理解で十分である。 \mathbb{R}^n の値を取る確率変数を n 次元確率変数 (n -dimensional random variable) といい、以下では単に確率変数といえば1次元確率変数を表すものとする。 n 次元確率変数 X は n 個の確率変数 X_1, \dots, X_n を並べたものとみなせる： $X = (X_1, \dots, X_n)$ 。

簡単のため、本講演で扱う確率変数はすべて連続型であるとする。ここで、確率変数 X が連続型 (continuous) であるとは、

- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

を満たす関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、 $a < b$ なる任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

が成立することをいう。この f を X の確率密度関数 (probability density function) と呼ぶ。

2.1.2 期待値・分散

連続型確率変数 X の期待値 (expectation) $E[X]$ を

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

で定義する。ただし f は X の確率密度関数であり、右辺が定義されるときに $E[X]$ は定義される。

X の分散 (variance) $V(X)$ を

$$V(X) = E[(X - E[X])^2]$$

で定義する (右辺が定義されるときに $V(X)$ は定義される)。

2.2 確率変数の関係

2.2.1 同時確率密度関数・周辺確率密度関数

2次元確率変数 (X, Y) が連続型 (continuous) であるとは、

- 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x, y) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

を満たす関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、 $a < b, c < d$ なる任意の $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

が成立することをいう。この f を (X, Y) の確率密度関数 (probability density function) と呼ぶ。以下 2.2.3 節まで、 (X, Y) を連続型 2 次元確率変数とし、 f をその確率密度関数とする。

このとき $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ で定義すると

- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $g(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy) dx = 1$

であり、 $a < b$ なる任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} P(a < X < b, c < Y < d) = \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

が成立するので、 g は X の確率密度関数である。

同様に、 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ で定義すると、 h は Y の確率密度関数である。 f を同時確率密度関数 (joint probability density function)、 g, h を周辺確率密度関数 (marginal probability density function) と呼ぶ。

2.2.2 条件つき確率

$h(y) > 0$ であるような $y \in \mathbb{R}$ に対して、 $g(\cdot|y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$

で定義すると

- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $g(x|y) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y) dx = (\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx) / h(y) = 1$

となるので $g(\cdot|y)$ は確率密度関数の条件を満たす。 $g(\cdot|y)$ を $Y = y$ の下での X の条件つき確率密度関数 (conditional probability density function) と呼ぶ。この確率密度関数における期待値

$$\int_{-\infty}^{\infty} x g(x|y) dx$$

を $E[X | Y = y]$ と書き、 $Y = y$ の下での X の条件つき期待値 (conditional expectation) と呼ぶ。この積分に $y = Y$ を代入して得られる確率変数 $\int_{-\infty}^{\infty} x g(x|Y) dx$ を $E[X|Y]$ と書き、 Y に関する X の条件つき期待値 (conditional expectation) と呼ぶ。ここで、 $h(y) = 0$ となる $y \in \mathbb{R}$ に対しては $E[X | Y = y]$ は定義されていないが、

$$P(h(Y) = 0) = \int_{\{y \in \mathbb{R} | h(y) = 0\}} h(y) dy = 0$$

より $E[X|Y]$ は確率 1 で定義されるので問題ない。

条件つき期待値を用いて、 Y に関する X の条件つき分散 (conditional variance) $V(X|Y)$ を

$$V(X|Y) = E[(X - E[X|Y])^2|Y]$$

で定義する。

なお、期待値 $E[X]$ 、分散 $V(X)$ は実数であるが、条件つき期待値 $E[X|Y]$ 、条件つき分散 $V(X|Y)$ は確率変数であることに注意。

2.2.3 独立性

X, Y が独立 (independent) であるとは、任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

が成立することをいう。これは、 $h(y) \neq 0$ なる任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $g(\cdot|y) = g(\cdot)$ が成立することと同値である。

2.2.4 多次元確率変数の関係

今までは2つの1次元確率変数の関係を見てきたが、いくつかの多次元確率変数の関係も同様である。例えば、 m 次元確率変数 X と n 次元確率変数 Y に対して m 次元確率変数 $E[X|Y]$ が定義される。また、連続型 $n_1 + \dots + n_m$ 次元確率変数 X を n_1 次元確率変数 X_1, \dots, n_m 次元確率変数 X_m の組と見たとき、確率密度関数をそれぞれ f, g_1, \dots, g_m とすると、 X_1, \dots, X_m が独立であるとは任意の $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \dots, x_m \in \mathbb{R}^{n_m}$ に対して

$$f(x_1, \dots, x_m) = g_1(x_1) \cdots g_m(x_m)$$

が成立することをいう。

3 Mackの公式とその拡張

3.1 Mackモデル

1.4節で述べた2つの問題を考察するためにMackが考案したモデルについて考える。このモデルでは $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) を確率変数と考え、次の3つを仮定する：

- (1) n 個の n 次元確率変数 $(C_{1,1}, \dots, C_{1,n}), \dots, (C_{n,1}, \dots, C_{n,n})$ は独立である。
- (2) 各 $j = 1, \dots, n-1$ に対してある正の定数 f_j が存在して、 $i = 1, \dots, n$ に対して次が成立する：

$$E[C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j}f_j.$$

(3) 各 $j = 1, \dots, n-1$ に対してある正の定数 v_j が存在して, $i = 1, \dots, n$ に対して次が成立する:

$$V(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j}v_j.$$

ここで, $E[C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}]$ は $E[C_{i,j+1}|(C_{i,1}, \dots, C_{i,j})]$ (j 次元確率変数 $(C_{i,1}, \dots, C_{i,j})$ に関する確率変数 $C_{i,j+1}$ の条件つき期待値) の略記であり, 条件つき分散についても同様である.

このような確率モデルにおいて, パラメータ f_j は定数であるが, その推定量

$$\hat{f}_j = \frac{C_{1,j+1} + \dots + C_{n-j,j+1}}{C_{1,j} + \dots + C_{n-j,j}}$$

は確率変数であることに注意.

仮定 (1), (2) を用いると $\hat{f}_j = (C_{1,j+1} + \dots + C_{n-j,j+1}) / (C_{1,j} + \dots + C_{n-j,j})$ が f_j の不偏推定量 (unbiased estimator) である, すなわち $E[\hat{f}_j] = f_j$ が成立することが分かる. これは \hat{f}_j を推定量として使うことが妥当であることを示しているが, 別の推定量

$$\hat{f}'_j = \frac{1}{n-j} \left(\frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} + \dots + \frac{C_{n-j,j+1}}{C_{n-j,j}} \right)$$

も不偏推定量であることが証明できるので, \hat{f}_j を使う積極的な理由としては不十分である. そこで仮定 (3) も合わせて考えると, $V(\hat{f}_j) \leq V(\hat{f}'_j)$ であることが分かり, さらにある種の推定量の族の中で \hat{f}_j は分散を最小にすることが示される. 不偏推定量の分散が小さいということは, 推定量と真の値とのブレが小さいということなので, よい推定量であることを意味する. したがって \hat{f}_j は Mack モデルにおいて最良の推定量であると考えられる.

3.2 支払備金の区間推定

連続型確率変数 X の確率密度関数 f は期待値 $\mu = E[X]$ と分散 $v = V(X)$ だけでは定まらないが,

$$\begin{aligned} P(\mu - \sqrt{20v} < X < \mu + \sqrt{20v}) &= \int_{\mu - \sqrt{20v}}^{\mu + \sqrt{20v}} f(x) dx \\ &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{\mu + \sqrt{20v}} + \int_{\mu - \sqrt{20v}}^{\infty} \right) f(x) dx \\ &\geq 1 - \frac{1}{20v} \left(\int_{-\infty}^{\mu + \sqrt{20v}} + \int_{\mu - \sqrt{20v}}^{\infty} \right) (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &\geq 1 - \frac{1}{20v} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= 1 - \frac{1}{20} = 0.95 \end{aligned}$$

が成立し (Chebyshev の不等式), さらに多くの場合に

$$P(\mu - 3\sqrt{v} < X < \mu + 3\sqrt{v}) \geq 0.95$$

が成立することが知られている。

今の状況では、 R の平均・分散の代わりに \hat{R} , $E[(\hat{R} - R)^2]$ を考えるのが自然であるように思えるが、 $C_{i,j}$ ($i+j \leq n+1$)が既知であることを考慮すると条件つき期待値 $E[(\hat{R} - R)^2 | C_{\text{known}}]$ (ただし $C_{\text{known}} = (C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$ は $n(n+1)/2$ 次元確率変数) を考える方がよいことが分かる。この条件つき期待値を \hat{R} の平均2乗誤差 (mean squared error) といい、 $\text{mse } \hat{R}$ と書く。これを用いて例えば

$$(\hat{R} - 3(\text{mse } \hat{R})^{1/2}, \hat{R} + 3(\text{mse } \hat{R})^{1/2})$$

を R_{total} の95%信頼区間とみなすことができる。

Mack は $\text{mse } \hat{R}$ の推定量として次を提示した：

$$\sum_{i=2}^n \left(\hat{C}_{i,n}^2 \sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{v}_l}{\hat{f}_l^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}} \right) \right) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{i'=i+1}^n \hat{C}_{i',n} \right) \left(\sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{v}_l}{\hat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}} \right).$$

ただし

$$\hat{v}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

は v_j の不偏推定量である。この $\text{mse } \hat{R}$ の推定量を **Mack** の公式と呼ぶ。

3.3 Mack の公式の拡張

この節では本講演の主結果を述べる。この結果は Mack の公式を2つの観点から拡張した公式を与えるものである。

まず Mack モデルを拡張したモデルを考える。Mack モデルには3つの仮定があったが、仮定 (3) は2次の量である $V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})$ が $C_{i,j}$ に比例するという仮定である。これはチェーンラダー法を正当化するために不可欠なものであったが、他の仮定に比べて必ずしも自然であるとはいえない。そこで α を任意の固定された実数とし、仮定 (3) を次の仮定 (3') で置き換える：

(3') 各 $j = 1, \dots, n-1$ に対してある正の定数 v_j が存在して、 $i = 1, \dots, n$ に対して次が成立する：

$$V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j}^\alpha v_j.$$

Mack モデルは $\alpha = 1$ の場合である。このモデルにおいては、Mack モデルの下での推定量 \hat{f}_j , \hat{v}_j を使うことはできず、次の推定量を用いる必要がある：

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^{1-\alpha} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^{2-\alpha}}, \quad \hat{v}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^{2-\alpha} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

次に、平均2乗誤差を考える対象を支払備金以外にも広げる。これは例えば次年度支払保険金 $\sum_{i=2}^n (C_{i,n+2-i} - C_{i,n+1-i})$ を区間推定するという実務的要請に応えるものである。各 $i = 1, \dots, n$

に対して自然数 j_i, k_i は $n+1-i \leq j_i \leq k_i \leq n$ を満たすとし,

$$S = \sum_{i=1}^n (C_{i,k_i} - C_{i,j_i})$$

と定義する. S は $\hat{S} = \sum_{i=1}^n (\hat{C}_{i,k_i} - \hat{C}_{i,j_i})$ で点推定でき, この推定量の平均 2 乗誤差 $\text{mse } \hat{S} = E[(\hat{S} - S)^2 | C_{\text{known}}]$ を次で推定する:

$$\sum_{i,l=1}^n \hat{\varphi}_{i,l}^2 \hat{A}_{i,l} + 2 \sum_{1 \leq i < i' \leq n} \sum_{l=1}^n \hat{\varphi}_{i,l} \hat{\varphi}_{i',l} \hat{B}_l.$$

ただし, $i, l = 1, \dots, n$ に対して

$$\hat{A}_{i,l} = \frac{\hat{v}_l}{\hat{f}_l^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,l}^{2-\alpha}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}^{2-\alpha}} \right), \quad \hat{B}_l = \frac{\hat{v}_l}{\hat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}^{2-\alpha}},$$

$$\hat{\varphi}_{i,l} = \begin{cases} \hat{C}_{i,k_i} - \hat{C}_{i,j_i} & (n+1-i \leq l < j_i), \\ \hat{C}_{i,k_i} & (j_i \leq l < k_i), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である. この推定量の公式が本講演の主結果である.

参考文献

- [1] T. Mack, *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin, **23** (1993) no. 2, 213–225. <http://www.casact.org/library/astin/vol23no2/213.pdf> からダウンロード可能.
- [2] T. Mack, *Measuring the variability of chain ladder reserve estimates*, Casualty Actuarial Society Forum (1994) Spring, vol. 1, 101–182. <http://www.casact.org/pubs/forum/94spforum/94spf101.pdf> からダウンロード可能.
- [3] S. Saito, *Generalisation of Mack's formula for claims reserving with arbitrary exponents for the variance assumption*, Journal of Math-for-industry, **1** (2009A), 7–15. http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inner/id:4/cid:9 からダウンロード可能.
- [4] 斎藤新悟『Mackの公式：支払備金の区間推定』. 谷口説男編, プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」—日新火災・九州大学共同研究 2008 年 11 月研究会—, MI レクチャーノート, **13** (2009). http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inner/id:2/cid:10 からダウンロード可能.

[1], [2] が Mack の原論文であり, Mack の公式の導出も含めその内容は [4] で解説されている. 主結果については [3] を参照.

カンドルと結び目不変量

大城 佳奈子 (Kanakano Oshiro)

(広島大学大学院理学研究科・博士課程後期2年)

概要

カンドルとは1982年に D. Joyce[8] と S. Matveev[10] によって独立に導入された代数的構造であり、結び目理論の研究において多く利用されている。例えば、結び目カンドルやカンドルコサイクル不変量などが結び目の研究において有効的である。また、新しいカンドル不変量として、対称カンドルを使った研究も行われており、これは向き付け不可能な曲面絡み目の研究に応用されている。

1 結び目

μ 個の円周の直和 $S^1 \amalg \dots \amalg S^1$ から3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内への埋め込み、またはその像のことを μ 成分の (一次元) 絡み目という。特に、1成分の絡み目を結び目という。2つの絡み目が同値であるとは、連続的な変形によって一方を他方に重ね合わせることが出来るときをいう。

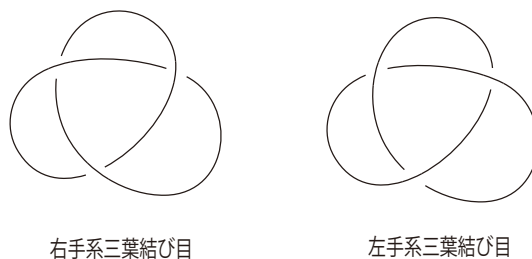


図 1: 結び目

絡み目の射影図とは、平面へ射影した像に射影における上下の情報を付随させたものをいう。次の定理が知られている。

定理 1.1 (ライデマイスター) 2つの絡み目の射影図が、同値な結び目や絡み目を表すことの必要十分条件は、一方が他方に有限個のライデマイスター変形、または平面の連続変形によって同値になることである。

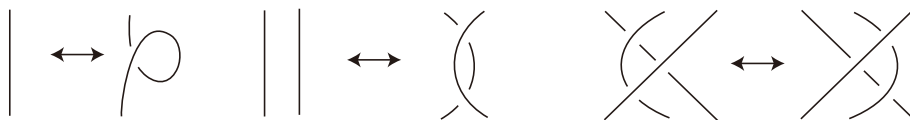


図 2: ライデマイスター変形

絡み目の定義は、4次元空間内に埋め込まれた曲面絡み目など、高次元の場合にも拡張される。曲面絡み目とは、4次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内に埋め込まれた μ 個の閉曲面のことであり、連続的な変形に移り合う2つの曲面絡み目は同値であると見なす。特に、1成分の曲面絡み目を曲面結び目という。曲面絡み目の射影図においては1次元絡み目の射影図におけるライデマイスター変形に対応する変形（ローズマン変形 [13]) が存在する。([4] も参照せよ。)

結び目理論とは、2つの結び目（絡み目）が同値であるか（または、そうでないか）を数学的に表現したり、結び目（絡み目）の様々な性質について研究する学問で、結び目不変量（または絡み目不変量）の発見やその研究が重要な役割を果たしている。

2 カンドル

カンドル X [5, 8, 10] とは次の性質を満たす2項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ を持つ集合である:

$$(Q1) \quad \forall a \in X, a * a = a,$$

$$(Q2) \quad \forall a, b \in X, \exists! c \in X \text{ s.t. } c * b = a \quad (c = a * b^{-1}),$$

$$(Q3) \quad \forall a, b, c \in X, (a * b) * c = (a * c) * (b * c).$$

例 2.1 S を任意の集合とする。 S の持つ2項演算を $a * a = a$ と定義するとカンドルになる。これを S 上の**自明カンドル**という。

例 2.2 集合 $R_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の持つ2項演算を $a * b = 2b - a \pmod{n}$ と定義するとカンドルになる。これを位数 n の**二面体カンドル**という。

例 2.3 G を群とし、 G の持つ 2 項演算を $a * b = b^{-1}ab$ と定義するとカンドルになる。これを群 G の共役カンドルという。

例 2.4 K を結び目（絡み目）とする。 K の結び目カンドルとは、 K のメリディアン円板 D と D の境界からある基点までの K の補空間内の道 a の組のホモトピー類からなる集合 $Q(K) = \{[(D, a)]\}$ であり、演算 $(D, a) * (D', b) = (D, a \cdot b^{-1} \cdot \partial D' \cdot b)$ を持つ (図 3)。これは結び目の（弱い意味の同値関係で分類した場合の）完全不変量である。すなわち、 $Q(K) \cong Q(K')$ であれば K と K' は弱同値（補空間 $\mathbb{R}^3 - K$ と $\mathbb{R}^3 - K'$ は同相）である。図 1 の右手系三葉結び目と左手系三葉結び目は同じ結び目カンドルを持ち弱同値であることが分かる。しかし、これらは同値ではない。

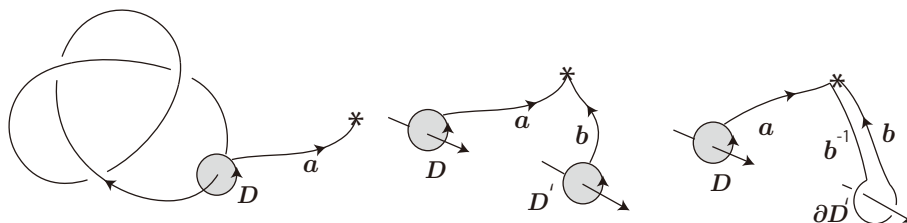


図 3: 結び目カンドル

3 カンドル彩色

D を向き付けられた絡み目の射影図とする。カンドル X による D の X -彩色とは、 D の各辺に対する X の元の割り当てのことである。ただし各交差点において彩色の条件を満たす (図 4 左)。 $\text{Col}_X(D)$ を D の X -彩色全体の集合とする。

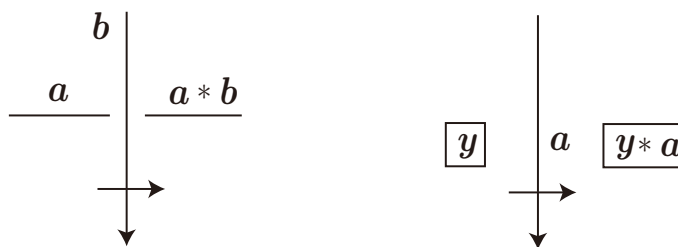


図 4: 彩色条件

D' を D から 1 回のライデマイスター変形によって得られる射影図とする. このとき $\text{Col}_X(D)$ と $\text{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. このことより $\text{Col}_X(D)$ の濃度 $\sharp\text{Col}_X(D)$ は絡み目の不変量であることが言える.

カンドル彩色と結び目カンドルの間に次の関係が成り立つ.

定理 3.1 [5, 8, 10] D を絡み目 K のダイアグラムとする. 結び目カンドル $Q(K)$ から X への準同型全体の集合と $\text{Col}_X(D)$ との間に全単射が存在する.

4 カンドルホモロジー群

$\text{As}(X)$ を X の全ての元から生成され、関係式 $a * b = b^{-1}ab (\forall a, b \in X)$ を持つ群とする:

$$\text{As}(X) = \langle a \in X \mid a * b = b^{-1}ab (a, b \in X) \rangle.$$

これはカンドル X の付随群と呼ばれる. Y をカンドル X の付随群が作用する集合とする. (X -集合と呼ぶ.) カンドル X と X -集合 Y に対して次のようにホモロジー群を定める.

$C_n(X)_Y (n \geq 0)$ を集合 $Y \times X^n$ の元によって生成される自由アーベル群, $C_n(X)_Y = 0 (n < 0)$ とする. 準同型写像 $\partial_n : C_n(X)_Y \rightarrow C_{n-1}(X)_Y$ を次で定める:

$$\partial_n(y, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left\{ (y, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - (y, x_i, x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\}.$$

$C_*(X)_Y = \{C_n(X)_Y, \partial_n\}$ は鎖複体になる.

$D_n(X)_Y$ をある $i \in \{1, \dots, n-1\}$ で $x_i = x_{i+1}$ を満たす元 $(y, x_1, \dots, x_n) \in Y \times X^n$ から生成される $C_n(X)_Y$ の部分群とする. $D_*(X)_Y = \{D_n(X)_Y, \partial_n\}$ は $C_*(X)_Y$ の部分鎖複体になる. 商群 $C_n^Q(X)_Y = C_n(X)_Y / D_n(X)_Y$ に対して鎖複体 $C_*^Q(X)_Y = \{C_n^Q(X)_Y, \partial_n\}$ が得られる.

$C_*^Q(X)_Y$ によって定まるホモロジー群をカンドルホモロジー群という.

A をある可換群とする. 双対加群 $C_Q^n(X)_Y = \text{Hom}(C_n^Q(X)_Y, A)$ と準同型写像 $\delta^n : C_Q^n(X)_Y \rightarrow C_Q^{n+1}(X)_Y, \delta^n(\theta) = \theta \circ \partial_{n+1}$ によってコホモロジー群が定まる. 詳しくは [1, 2] を参照せよ.

5 カンドルコサイクル不変量

D を絡み目の射影図とし、カンドル X と X -集合 Y による (X, Y) -彩色を次のように与える: (1) D に X -彩色を与える. (2) D の各補領域に対して Y の元を割

り当てる. ただし領域に対する彩色条件を満たすとする (図 4 右).

$\text{Col}_{(X,Y)}(D)$ を D の (X,Y) -彩色全体の集合とすると、ライデマイスター変形によって得られる 2 つの射影図におけるこれらの集合の間には全単射が存在する.

D に (X,Y) -彩色 C が与えられているとする. $\theta : C_2^Q(X)_Y \rightarrow A$ をアーベル群 A に値を持つカンドル 2 コサイクルとする. 各交差点においてウェイトを $\epsilon(y, a, b)$ で与える. ただし, y, a, b は交差点の周りのある補領域と辺に与えられた Y または X の元である (図 5). $c_{(D,C)}$ を全ての交差点でのウェイトの和とする. 次の multi-set

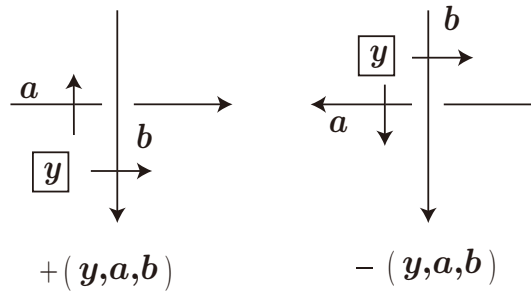


図 5: ウェイト

を与える.

$$\Phi_\theta(D) = \{c_{(D,C)} \in A \mid C : D \text{ の } (X,Y)\text{-彩色}\}$$

定理 5.1 [1, 2] $\Phi_\theta(D)$ は絡み目の不変量である.

この不変量をカンドルコサイクル不変量といい, D の表す絡み目 L によって, $\Phi_\theta(L)$ とも表す.

例 5.2 K を右手系三葉結び目, K' を左手系三葉結び目とする (図 1). 位数 3 の二面体カンドル R_3 における 2 コサイクルを次で与える.

$$\theta : C_2^Q(R_3)_{R_3} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \theta(x, y, z) = (x - y)(y - z)^2 z.$$

そのとき,

$$\Phi_\theta(K) = \{\underbrace{1, \dots, 1}_{18}, \underbrace{0, \dots, 0}_9\},$$

$$\Phi_\theta(K') = \{\underbrace{2, \dots, 2}_{18}, \underbrace{0, \dots, 0}_9\}.$$

ゆえに, K と K' は同値でないことが分かる.

カンドルコサイクル不変量は曲面絡み目に対しても同様の手順で定義される。カンドル3コサイクルを使い、各三重点においてウェイトが定まる。(詳しくは [1, 2] を参照せよ)

6 カンドルコサイクル不変量とその応用

カンドルコサイクル不変量は一次元絡み目や曲面絡み目の研究などに利用される。ここでは、これまでの応用例を幾つか挙げる。

- 一次元絡み目の絡み数の研究、曲面絡み目の三重点絡み数の研究 (cf. [1, 2])
- Amphicheirality に関する研究 (例 5.2)
- 曲面結び目の可逆性に関する研究 [1]
- 曲面絡み目の三重点数の研究 [6, 15]
- Triple point cancelling number の研究 [7]

カンドルコサイクル不変量は向き付けられた絡み目に関する不変量であった。従って上で挙げた例は全て向き付け可能な絡み目に関する研究である。

7 向き付け不可能な曲面絡み目の研究

カンドルコサイクル不変量は向き付けられた(一次元、曲面)絡み目に対する不変量であり、特に向き付け可能な曲面絡み目の研究において広く利用されている。しかし、向き付け不可能な曲面絡み目においては、この不変量を利用することは出来ない。そこで、カンドルを使った新しい絡み目不変量として、対称カンドルコサイクル不変量が導入された [9]。これは、全ての一次元絡み目や曲面絡み目において定義された不変量であり、向き付け不可能な曲面絡み目の性質を調べるためにも利用される [3, 9, 11, 12]:

- (向き付け可能または不可能な) 曲面絡み目の三重点絡み数の研究 [11](cf. [14])
- 向き付け不可能な曲面絡み目の三重点数の研究 [3, 9, 12]

対称カンドルとはある条件を満たす対合を持ったカンドルである (カンドル X と対合 ρ の組で (X, ρ) と表す). カンドル不変量の時と同様に、対称カンドルを使って対称カンドルホモロジー群を定義できる. それは一般的にはカンドルホモロジー群とは全く別のものである. しかし、カンドル X に対してある対称カンドル (Y, ρ) でそのホモロジー群が一致するものが存在し、その性質を用いることによって対称カンドルからカンドルコサイクル不変量と同様の不変量を作ることが可能である. つまり、対称カンドルコサイクル不変量はカンドルコサイクル不変量の一般化であると見なすことが出来る. 従って、カンドルコサイクル不変量による応用例は全て対称カンドルを用いて出来るものである.

参考文献

- [1] J. S. Carter; D. Jelsovsky; S. Kamada; L. Langford; M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989
- [2] J. S. Carter; S. Kamada; M. Saito, *Surfaces in 4-space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **142**, Springer Verlag (2004).
- [3] J. S. Carter; K. Oshiro; M. Saito, *Symmetric extensions of dihedral quandles and triple points of non-orientable surfaces*, to appear in Topology Appl.
- [4] J. S. Carter; M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, Surveys and monographs **55** A.M.S. (1998).
- [5] R. Fenn; C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 343–406.
- [6] E. Hatakenaka, *An estimate of the triple point numbers of surface-knots by quandle cocycle invariants*, Topology Appl. **139** (2004), 129–144.
- [7] M. Iwakiri, *Triple point cancelling numbers of surface links and quandle cocycle invariants*, Topology Appl. **153** (2006), 2815–2822.
- [8] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Alg. **23** (1982), 37–65.

- [9] S. Kamada; K. Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc. arXiv:0902.4277v1.
- [10] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory (Russian)*, Math. USSR-Sbornik **47** (1982), 73–83.
- [11] K. Oshiro, *Homology groups of trivial quandles with good involutions and triple linking numbers of surface-links*, to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [12] K. Oshiro, *Triple point numbers of surface-links and symmetric quandle cocycle invariants*, preprint.
- [13] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space*, Knot theory (Warsaw, 1995), 347–380, Banach Center Publ., **42**, Polish Acad. Sci., Warsaw (1998).
- [14] S. Satoh, *Triple point invariants of non-orientable surface-links*, Topology Appl. **121** (2002), 207–218.
- [15] S. Satoh; A. Shima, *Triple point numbers and quandle cocycle invariants of knotted surfaces in 4-space*, New Zealand J. Math. **34** (2005), 71–79.

2-進算術幾何平均と楕円曲線 (2-ADIC ARITHMETIC-GEOMETRIC MEAN AND ELLIPTIC CURVES)

宮坂 有憲

東北大学大学院理学研究科

E-mail: sa7m27@math.tohoku.ac.jp

ABSTRACT. 算術幾何平均とは Gauss によってよく研究された数列のことで、二つの正の実数を足して2で割ったものと掛けて2乗根をとったものを取り、この操作を繰り返す事によって得られる二つの数列を指す. Gauss はこの数列の極限を使って実数体上定義された楕円曲線の周期と呼ばれるものが計算できる事を発見した. 本稿では, Gauss の考察の p -進体上における類似, 及び2-進体上でこの数列と楕円曲線との関係を観察し, そこにある種の力学系が見て取れることを紹介する. 本研究は東北大学大学院の金城謙作氏との共同研究である.

1. はじめに

本稿において紹介する研究は, 東北大学の金城謙作氏との共同研究に基づいている. まず実数体上の Gauss の算術幾何平均について解説する. a, b を正の実数とし, 算術幾何平均列 $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} (> 0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

これらの数列は同一極限に収束する. 実際, $b \geq a > 0$ としたとき各 $n \geq 0$ に対し,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{|a_n - b_n|}{2}$$

が成り立つことが簡単に確かめられる. Gauss はこの数列の極限が, 初等関数では表す事ができない楕円積分の値と結びついている事を発見した¹. このことは, 楕円曲線と呼ばれる曲線の周期が算術幾何平均列の極限を用いて表す事ができるということを意味している. ここで(実数体上の)楕円曲線とは, 方程式

$$E: y^2 = x(x-1)(x-\mu^2) \quad \mu \in (0, 1) \subset \mathbb{R} \tag{1.2}$$

によって定義される曲線である. 楕円曲線 E の \mathbb{C} 上の有理点全体を $E(\mathbb{C})$ と書くと, $E(\mathbb{C})$ には群演算が入り, さらにある $\omega_1 \in i\mathbb{R}, \omega_2 \in \mathbb{R}$ が存在して, Abel 群としての同型

$$E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) \tag{1.3}$$

¹Gauss はレムニスケート曲線「 $r^2 = \cos \theta$ 」の長さを計算する為に算術幾何平均列の極限を用いた. その曲線の長さは $l := 2 \int_0^1 (1-z^4)^{-1/2} dz$ で与えられるが, この値は初等関数を用いて計算する事ができない. しかし Gauss は π/l が, 1 と $\sqrt{2}$ による算術幾何平均列の極限と一致することを証明したのだった ([1]).

が成り立つことが知られている. この ω_1, ω_2 を楕円曲線 E の周期と呼ぶ. 周期は \mathbb{C} の格子を定めているが, 逆に \mathbb{C} の格子を一つとってくると, それに対応する楕円曲線が定まる. 従って, 周期を知る事は楕円曲線を調べる上で非常に重要な要素であると言える. 一方で楕円曲線の周期は楕円積分を用いて表されるため, 初等関数だけでは記述することができない. しかし Gauss の結果を用いると, それぞれの周期は

$$\omega_1 = \frac{2\pi i}{M(1, \mu)}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{M(1, \sqrt{1-\mu^2})} \quad (1.4)$$

と書ける. ここで $M(a, b)$ は a, b による算術幾何平均列の極限を表す. このように簡単に定義された数列 (1.1) が楕円曲線と非常に深く結びついている. 楕円曲線と数列 (1.1) がこうした関係を持つ本質的な理由は次に述べる事実に依る: 楕円曲線 $E_0 := E$ を (1.2) で定義したものとし, 数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ を次のように定義する:

$$\mu_0 := \mu, \quad \mu_{n+1} := \frac{\mu_n + 1}{2\sqrt{\mu_n}}. \quad (1.5)$$

これは 1 と μ を初期値に持つ算術幾何平均列の比が満たす漸化式である. また各番号 $n \geq 0$ に対して楕円曲線 E_n を

$$E_n : y^2 = x(x-1)(x-\mu_n^2) \quad (1.6)$$

と定義する. このとき次の楕円曲線の間と同種写像²が存在する:

$$g_n : E_n \rightarrow E_{n+1}, \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{(x + \mu_n)^2}{4\mu_n x}, \frac{y(x^2 - \mu_n^2)}{8(\sqrt{\mu_n})^3 x^2} \right). \quad (1.7)$$

このように互いに同種な楕円曲線の列が, 算術幾何平均列を用いて表されるのである. この事実と, 算術幾何平均列の収束性を使う事で楕円曲線 E の周期を調べる事ができるのである.

さて, ここまでは実数体上の算術幾何平均と楕円曲線について見てきたが, 本稿では, p -進体上において (特に $p = 2$ の場合において) 算術幾何平均と楕円曲線がどのように結びついているのかを解説していきたい.

2. p -進体上の算術幾何平均と楕円曲線

p を素数とし, K を p -進数体 \mathbb{Q}_p の有限次拡大体, v を K 上の加法付値とする. 次の補題を用いて p -進体での平方根の取り方を定める.

Lemma 2.1. $\xi \in K$ が条件

$$p = 2 \text{ のとき } v(\xi - 1) > v(8), \quad p \text{ が奇素数のとき } v(\xi - 1) \geq 0 \quad (*)$$

を満たすとする. このとき唯一つの $\eta \in K$ が存在して, $\eta^2 = \xi$ かつ η は条件 (*) を満たす. ξ に対し, $\sqrt{\xi} := \eta$ と定義する.

²楕円曲線の間写像 $\phi : E \rightarrow E'$ が群演算を保つ写像のとき, ϕ を同種写像といい, E と E' は同種であるという.

Definition 2.2. $a, b \in K$ に対し, a/b が条件 (*) を満たすとする. このとき K 上の数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &:= b_n \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}. \end{aligned}$$

ここで平方根は補題で定めた通り取るものとする. このようにして定義される数列を p -進算術幾何平均列³ と呼ぶ.

各番号で a_n/b_n が条件 (*) を満たしていることから, この定義は well-defined である. また, この定義は (1.1) の p -進類似であると言える. 収束に関しては次の事が言える.

Proposition 2.3. p -進算術幾何平均列 $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 0}$ が同一極限に収束する為の必要十分条件は,

$$\begin{cases} v((a_0/b_0) - 1) > 0 & (p > 2) \\ v((a_0/b_0) - 1) > v(8) & (p = 2). \end{cases}$$

である (この条件は p が 2 でも奇素数でも $v((a_0/b_0) - 1) > v(8)$ とかける). p -進算術幾何平均列が収束する場合, その極限値を $M_p(a, b)$ と表す.

この命題において注目すべきことは, $p = 2$ のときに限り, 収束しない p -進算術幾何平均列を考察する事ができるということである (初期値が条件 $v(a_0/b_0 - 1) = v(8)$ を満たす). 本稿の一番の目的は, この収束しない 2-進算術幾何平均列と楕円曲線との関係を調べていく事にある. ここでは一先ず収束しない場合は置いておいて, 収束する p -進算術幾何平均と楕円曲線の関係についてみていく事にする.

$a, b \in K$ は $v((a/b) - 1) > v(8)$ を満たすとする. Proposition 2.3 より, a, b を初期値に持つ算術幾何平均列 $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 0}$ は同一極限 $M_p(a, b)$ に収束する. また K 上定義された楕円曲線 E_0 を

$$E_0 : y^2 = x(x-1)(x - (a/b)^2)$$

と定義する. このとき E_0 は K 上乗法的還元を持つ⁴.

Theorem 2.4 (Tate[7]). K 上の楕円曲線 E が乗法的還元を持つとき, ある $q \in K$ ($v(q) > 0$) が存在して, $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -加群の同型

$$\phi_0 : E(\bar{K}) \xrightarrow{\sim} \bar{K}^\times / q^{\mathbb{Z}} \tag{2.1}$$

が成り立つ. ここで \bar{K} は K の代数的閉包であり, $q^{\mathbb{Z}} := \{q^n | n \in \mathbb{Z}\}$ である.

³Henniart-Mestre によって [3] において定義された.

⁴楕円曲線の「還元」とは, 雑に言うとも剰余体上でその曲線を見ることである. K 上の楕円曲線 E が「乗法的還元を持つ」とは, K の剰余体 \mathbb{F} 上で見た曲線 \tilde{E} が特異点をもつ事を指す. 今 K の剰余体を \mathbb{F} とすると, E_0 を \mathbb{F} 上で見た曲線 \tilde{E}_0 は, a, b の定義から \mathbb{F} 上の方程式 $y^2 = x(x-1)^2$ で定義される. これは $(1, 0)$ に特異点を持った曲線である.

この Tate の定理は, §1 で見た実数体上における楕円曲線の性質 (1.3) の p -進類似であると言える. 次で見ていくように, この定理を使って p -進算術幾何平均と楕円曲線 E_0 の Hodge-Tate 周期と呼ばれるものが結びつけられる.

主張を述べる前にいくつか記号の準備をする. \mathcal{O} を E_0 の群演算における単位元とし,

$$E_0[p^n](\bar{K}) := \{P \in E_0(\bar{K}) \mid p^n P = \mathcal{O}\} \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$T_p(E_0) := \varprojlim_n E_0[p^n](\bar{K}) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

とおく. また $T_p(E_0)$ の基底の一つ $e_{E_0} \in T_p(E_0)$ を次で定義する: 各 $n \geq 0$ に対し $\varepsilon_n \in \{x \in \bar{K} : x^{p^n} = 1\}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 \neq 1, \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n.$$

そこで $\varepsilon := (\varepsilon_n)_{n \geq 0} \in T_p(\bar{K}^\times/q^\mathbb{Z})$ に対し, $e_{E_0} := \phi_{0*}(\varepsilon)$ として定義する (ここで $\phi_{0*} : T_p(\bar{K}/q^\mathbb{Z}) \rightarrow T_p(E_0)$ は (2.1) の写像 ϕ_0 が誘導する写像である).

Theorem 2.5 ([4]). E_0, e_{E_0} を上述の通りとし, $\omega := dx/y \in H^0(E_0, \Omega_{E_0}^1)$ を E_0 の不変微分形式とする. また

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p(E_0) \times H^0(E_0, \Omega_{E_0}^1) \rightarrow \hat{K}(1) \quad (2.2)$$

を Fontaine が [2] において定義したペアリングとする (ただし $\hat{K}(1)$ は \bar{K} の完備化の一回 Tate 捻りとする). このとき

$$\langle e_{E_0}, \omega \rangle = \frac{\varpi}{M_p(a/b, 1)}$$

が符号の差を除き成立する. 但し $\varpi := \langle \varepsilon, dt/t \rangle$ は乗法群スキームの周期とする.

ϖ は, 複素数 $2\pi i$ の p -進類似とも見れるものである. よって (1.4) と比較すると, この定理は実数体上の楕円曲線の複素周期の p -進類似を与えていると言える (証明方法もほとんど同じである). 残念ながら現在のところ p -進算術幾何平均による実周期との類似を与えることはできていない.

3. 2-進体上のお話

この節では 2-進体上の算術幾何平均と楕円曲線について考察する. この節を通して体 K は 2-進数体 \mathbb{Q}_2 の有限次拡大体, v を K 上の加法付値, K の剰余体 \mathbb{F} の \mathbb{F}_2 上の拡大次数を d とする. $a, b \in K$ が $v((a/b) - 1) = v(8)$ を満たすとき, Proposition 2.3 により, a, b を初期値にもつ 2-進算術幾何平均列 $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 0}$ は収束しない. ここでこの数列の比のなす数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ をとる. すなわち

$$\mu_0 := a/b, \quad \mu_{n+1} := \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\mu_n + 1}{2\sqrt{\mu_n}} \quad (3.1)$$

とおく. また各 $n \geq 0$ に対し K 上の楕円曲線 E_n を

$$E_n : y^2 = x(x-1)(x-\mu_n^2)$$

と定義する. 主結果は次の通りである.

Theorem 3.1 ([4]). 記号は上述の通りとする. このとき各整数 $0 \leq i < d, n \geq 0$ に対して,

1. 楕円曲線 E_n は K 上良い通常還元を持つ⁵.
2. 部分列 $\{\mu_{dn+i}\}_{n \geq 0}$ は $K \setminus \{0, 1\}$ 内に収束する.
3. $\mu_i^\uparrow := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{dn+i}$ とおく. このとき楕円曲線 $E_i^\uparrow : y^2 = x(x-1)(x-\mu_i^\uparrow)$ は, E_i の還元 \tilde{E}_i の標準的持ち上げとなる.

Remark 3.2. 標準的持ち上げとは, 次の Serre-Tate の定理によって定義される楕円曲線である.

Theorem 3.3 (Serre-Tate[5]). p を素数とし, F を \mathbb{Q}_p 上の d 次不分岐拡大体とする. このとき F の剰余体 \mathbb{F}_{p^d} 上定義された任意の通常楕円曲線 \tilde{E} に対し, 次の条件を満たす F 上定義された楕円曲線 E^\uparrow が F -同型の差を除き唯一つ存在する:

- (1) E^\uparrow の還元と \tilde{E} は \mathbb{F}_{p^d} 上同型であり,
- (2) $\text{End}(\tilde{E}) \cong \text{End}(E^\uparrow)$ が成り立つ.

E^\uparrow を \tilde{E} の標準的持ち上げという.

Remark 3.4. 1. 有限体上の楕円曲線 \tilde{E} の持ち上げによって得られる楕円曲線の自己準同型環は, ほとんどの場合 $\text{End}(\tilde{E})$ よりも小さくなる. それは $\text{End}(\tilde{E})$ には整数倍写像の他に, p -冪 Frobenius 写像 $(x, y) \mapsto (x^{p^d}, y^{p^d})$ という特殊な自己準同型が含まれていて, この写像は一般には持ち上がらない. それが Serre-Tate によれば, p -冪 Frobenius 写像が持ち上がるような \tilde{E} の持ち上げが, 同型の差を除いてただ一つ存在するのである.

2. Serre-Tate により, 標準的持ち上げは \mathbb{Q}_2 上の不分岐拡大体上で定義される. 従って Theorem 3.1 の μ_i^\uparrow は K の中の \mathbb{Q}_2 上不分岐拡大体 (F とおく) の元となる. 各 μ_i^\uparrow は $\text{Gal}(F/\mathbb{Q}_2)$ の生成元により写り合う関係にある.

3. Theorem 3.1 の体 K が \mathbb{Q}_2 上有限次不分岐拡大のときは Gaudry, Mestre, Satoh 等により成立することが示唆されていた ([6] 参照).

この節の残りで, 2-進算術幾何平均列と標準的持ち上げがどのような関係を持っているのかを, Theorem 3.1 の 1 及び 2 を認めた上で解説していきたい.

Lemma 3.5. 記号はすべて定理 3.1 と同様とする. また \tilde{E}_n を E_n の還元とする (つまり \tilde{E}_n は \mathbb{F} 上の通常楕円曲線).

- (1) 各 $n \geq 0$ に対し, \tilde{E}_{n+1} は \tilde{E}_n の Frobenius 捻り $\tilde{E}_n^{(2)}$ (\tilde{E}_n の定義方程式の各係数を 2 乗したもの) と \mathbb{F} 上同型となる.
- (2) \tilde{E}_{n+1} と $\tilde{E}_n^{(2)}$ を (1) の同型により同一視すると, 次の図式は可換となる:

$$\begin{array}{ccc}
 E_n(\bar{K}) & \xrightarrow{g_n} & E_{n+1}(\bar{K}) \\
 \text{red} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{red} \\
 \tilde{E}_n(\bar{\mathbb{F}}) & \xrightarrow{\text{Frob.}} & \tilde{E}_n^{(2)}(\bar{\mathbb{F}}).
 \end{array} \tag{3.2}$$

⁵ K 上の楕円曲線 E が「良い還元を持つ」とは, E の還元 \tilde{E} が剰余体 \mathbb{F} 上で特異点を持たない事を指す (すなわち \tilde{E} は \mathbb{F} 上楕円曲線となる). さらにそれが「通常」であるとは, $\tilde{E}[p](\bar{\mathbb{F}}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ となる事を意味する.

但し $\bar{K}, \bar{\mathbb{F}}$ はそれぞれ K, \mathbb{F} の代数閉包であり, g_n は (1.7) と同様に定義される K 上の同種写像である. また図式の縦の写像は還元写像, 下の横の写像は 2 乗写像 ($\text{Frob.} : (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$) である.

今, 各 $n \geq 0$ に対して \tilde{E}_n は体 \mathbb{F} 上定義されていて, さらに \mathbb{F} は \mathbb{F}_2 上の拡大次数が d の有限体だったので,

$$\tilde{E}_n^{(2^d)} = \tilde{E}_n$$

が成り立つ. これを踏まえて, 各番号について図式 (3.2) を合成することで次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} E_0(\bar{K}) & \longrightarrow & E_1(\bar{K}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_{d-1}(\bar{K}) & \longrightarrow & E_d(\bar{K}) & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \tilde{E}_0(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \tilde{E}_0^{(2)}(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{E}_0^{(2^{d-1})}(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \tilde{E}_0(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

図式下の写像の合成によって得られる \tilde{E}_0 上の自己準同型が 2-冪 Frobenius 自己準同型になっている. 今, 数列 $\{\mu_{dn+i}\}_{n \geq 0}$ の収束を認めると, Lemma 3.5 は μ_i を μ_i^\uparrow と取り換えても成立し, 従って上述の可換図式も μ_i を μ_i^\uparrow と取り替えても成立する. また $\mu_d^\uparrow = \mu_0^\uparrow$ であるから, $E_d^\uparrow = E_0^\uparrow$ を得る. 以上をまとめると, 次の可換図式が得られた事になる:

$$\begin{array}{ccccccc} E_0^\uparrow(\bar{K}) & \longrightarrow & E_1^\uparrow(\bar{K}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_{d-1}^\uparrow(\bar{K}) & \longrightarrow & E_0^\uparrow(\bar{K}) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}_0(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \tilde{E}_0^{(2)}(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{E}_0^{(2^{d-1})}(\bar{\mathbb{F}}) & \longrightarrow & \tilde{E}_0(\bar{\mathbb{F}}) \end{array}$$

従って図式下の \tilde{E}_0 の 2-冪 Frobenius 自己準同型が, E_0^\uparrow の自己準同型に持ち上がり, Theorem 3.3 から E_0^\uparrow は \tilde{E}_0 の標準的持ち上げとなる.

4. 2-進体上の楕円曲線の j -不変量が成す力学系

最後に 2-進体上定義された楕円曲線の同型類の, 2-進算術幾何平均列を通してみた挙動について解説する. この節で得られるある種の力学系は, Theorem 3.1 が \mathbb{Q}_2 上の任意の有限次拡大体において成立する事から分かる現象である.

考察に入る前に, まず楕円曲線の同型類を定める j -不変量を定義する. k を標数 0 の代数閉体とする. k 上の任意の楕円曲線 E に対し, ある $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ が存在して, E は楕円曲線

$$E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

と k 上同型になることが知られている. 今, 与えられた楕円曲線 E に対し $E \cong E_\lambda$ なる $\lambda \in k$ をとり,

$$j(E) := 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \in k$$

とおく. このとき j は次の全単射な対応を与える:

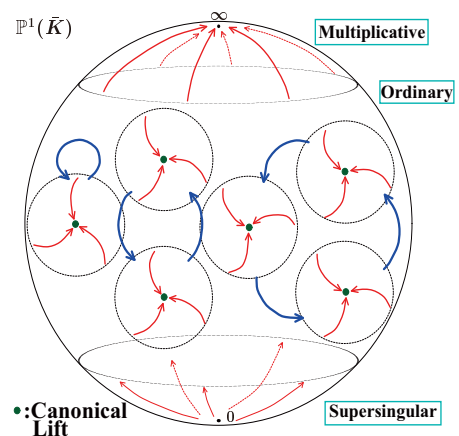
$$j : \{k \text{ 上の楕円曲線} \} / \text{同型} \rightarrow k.$$

Definition 4.1. 楕円曲線 E に対し, $j(E)$ を E の j -不変量と言う.

K を \mathbb{Q}_2 の有限次拡大体, v を K 上の加法付値, E を K 上の楕円曲線とする. また, $\mu \in K$ が $v(\mu - 1) \geq v(8)$ を満たすとき, 数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ を (3.1) のように定義する ((3.1) で $a = \mu, b = 1$ として定義される列). K 上の楕円曲線は次の 3 つの分類に帰着される.

- Case 1. E が K 上で乗法的還元を持つとき, $v(\mu - 1) > v(8)$ を満たす $\mu \in K$ が存在して $E \cong E_{\mu^2}$ となる. そこでこの μ に対して数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ をとる. このとき 2-進算術幾何平均列が同一極限に収束するため, 数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ は 1 に収束する. 従って $E_{\mu_n^2}$ の j -不変量 $j(E_{\mu_n^2})$ の付値は $-\infty$ に発散する.
- Case 2. E が K 上で良い通常還元を持つとする. このとき $v(\mu - 1) = v(8)$ を満たす $\mu \in K$ が存在して, $E \cong E_{\mu^2}$ となる. この μ に対し数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ をとると, Theorem 3.1 により数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ は周期的に収束することがわかる. 更に $j(E_{\mu_n^2})$ は標準的持ち上げの j -不変量に周期的に収束する.
- Case 3. E が K 上で超特異還元を持つとする (つまり E が K 上良い還元を持ち, さらに還元 \tilde{E} が p -等分点を持たない). このとき $0 < v(\mu - 1) < v(8)$ または $v(\mu) = v(\mu - 1) = 0$ をみたす $\mu \in K$ が存在して, $E \cong E_{\mu^2}$ となる. この場合 μ の平方根の標準的な選び方が存在しないため, 2-進算術幾何平均列を関連付けることは出来ない. 各段階で平方根の選び方を固定することで数列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ を (3.1) のように強引に定義すると, 列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ および $\{j(E_{\mu_n^2})\}_{n \geq 0}$ は収束しないが, $\{v(j(E_{\mu_n^2}))\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する.

右図は, 楕円曲線の同型類を j -不変量を介して $\mathbb{P}^1(\bar{K})$ の点と見做した時の上述の様子を視覚化したものである (赤い矢印が算術幾何平均による j -不変量の挙動を表している). ここで無限遠点 ∞ は特異曲線と対応しているとしていて, ordinary 中の各小円は, 同じ還元を持つ楕円曲線の同型類の集合を表している (図は $d = 1, 2, 3$ の部分を表している). 図からも分かるように, 2-進体上の楕円曲線の j -不変量は, 2-進算術幾何平均によってある種の力学系を定めていて, 無限遠点, 及び標準的持ち上げの j -不変量は周期的吸引点のように振る舞っている.



REFERENCES

- [1] David A. Cox, *The arithmetic-geometric mean of Gauss*, Enseign. Math. (2) **30** (1984), no. 3-4, 275–330.
- [2] Jean-Marc Fontaine, *Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux*, Invent. Math. **65** (1981/82), no. 3, 379–409.
- [3] Guy Henniart and Jean-François Mestre, *Moyenne arithmético-géométrique p -adique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **308** (1989), no. 13, 391–395.
- [4] Kensaku Kinjo and Yuken Miyasaka, *2-adic arithmetic-geometric mean and elliptic curves*, to appear.
- [5] William Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

- [6] Takakazu Satoh, *The canonical lift of an ordinary elliptic curve over a finite field and its point counting*, J. Ramanujan Math. Soc. **15** (2000), no. 4, 247–270.
- [7] John Tate, *A review of non-Archimedean elliptic functions*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem (Hong Kong, 1993), 1995, pp. 162–184.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, SENDAI 980-8578, JAPAN

E-mail address: sa7m27@math.tohoku.ac.jp

Rigorous numerics for semilinear parabolic PDEs via the Conley-Rybakowski index

Kaname Matsue *

Abstract

We show an idea to prove the existence of steady-state solutions for differential equations defined on bounded domains with several boundary conditions by using the Conley-Rybakowski index. As an application, we prove the existence of some type of solutions for parabolic PDEs with rigorous numerics.

1 From differential equations to dynamics

In this section, we review the basic approach to generate the dynamics.

Definition 1.1. A *local dynamical system* (or *local semidynamical system*) on a complete topological space X is a map π such that

- $\pi : D \rightarrow X$ is a continuous mapping, D being an open subset of $\mathbb{R}^+ \times X$. (We write $x\pi t$ for $\pi(t, x)$.)
- For every $x \in X$ there is an ω_x , $0 < \omega_x \leq \infty$, such that $(t, x) \in D$ if and only if $0 \leq t < \omega_x$.
- $x\pi 0 = x$ for $x \in X$.
- If $(t, x) \in D$ and $(s, x\pi t) \in D$, then $(t + s, x) \in D$ and $x\pi(t + s) = (x\pi t)\pi s$.

Remark 1.2. If $\omega_x = \infty$ for all $x \in X$, then π is called a (*global semiflow on X*).

Here we consider the following differential equation:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Au + f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \quad (1)$$

where A is a linear operator (possibly depending on a differential operator $\partial/\partial x$, and so on) on a Banach space X and f is a function defined on an open subset U in a suitable Banach space. Such a problem with a condition $u(t_0) = u_0$ is called an *initial value problem of the evolutionary equation*. ODEs or PDEs are considered as kinds of evolutionary equations. When we consider the above problem, the first step is to consider the following property:

- The existence of solutions (locally on time variable t).
- The uniqueness of solutions (depending on the initial value u_0)
- The continuous dependence of solutions on initial value and variables (t, \dots) .
- The regularity (= smoothness) of solutions.

*Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan (k-matsue@math.kyoto-u.ac.jp).

If all the above properties are satisfied, we say the initial value problem (1) is *locally well-posed*. If the initial value problem is locally well-posed, we can define the local semiflow on a suitable Banach space. In fact, we define a map $T : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow Y$ (as long as this can be defined) as

$$T(t)u_0 := u(t).$$

Then $T(t)$ defines a local semiflow by the locally well-posedness. In that case, we say that *the evolutionary equation (1) generates a local semiflow*.

There are several cases that the initial value problem may be solved *backward* in time. In that case, we call such a semiflow a *flow* or a *dynamical system*. In other words, a flow on a complete metric space X is the group action of the Lie group \mathbb{R} with addition “+” to X .

An approach to understand the dynamical system is to study sets of solutions which exist globally in \mathbb{R} and are bounded. Such sets are called *invariant sets*. In this paper, we show an idea to study global solutions of PDEs as an invariant set of dynamics by topological tools and rigorous numerics.

Throughout this paper, we consider the dynamics generated by the following equation:

$$\begin{cases} u_t = -Au + f(u), & (t, x) \in [0, T) \times I, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in [0, T) \times \partial I, \end{cases} \quad (2)$$

where $Au := -u_{xx}$, $D(A) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ is a compact interval. Our method can be extended when A is strongly elliptic, more general, “*sectorial*” (see [5]) and A has compact resolvent.

2 Decomposition of dynamics

Here we restrict the above problem adding the following assumptions.

Assumption 2.1. [4]

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} f(u)/u \leq 0, \quad f(0) = 0. \quad (3)$$

Such an assumption corresponds to the dissipativeness of the system. Moreover, solutions of steady-state problem corresponding to (2) have the appropriate regularity. Namely, the property $f \in H^m(I)$ implies that $u \in H^{2+m}(I)$ for some integer m .

These assumptions are essential to our verification. The first step of our verification is to divide the above problem into finite dimensional and infinite dimensional ones, that is,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_h u) = P_h(u_{xx} + f(u)) \\ \frac{d}{dt}((I_\alpha - P_h)u) = (I_\alpha - P_h)(u_{xx} + f(u)) \end{cases} \quad (4)$$

where P_h is the orthogonal projection onto a finite dimensional subspace X_h of an appropriate subspace $X^\alpha (= D(A^\alpha)$, the fractional power space of X , $0 \leq \alpha < 1$) of $X = L^2(I)$ and I_α is the identity on X^α . We have to choose the above space X and the projection P_h so that the above decomposition is valid not only for theoretical aspect of dynamical systems but also numerical aspect of solving differential equations. Here we would like to choose $X = H_0^1(I)$ in order to apply *finite element method*.

Definition 2.2. We say a (semi)dynamics π on X is *gradient-like* if there exists a continuous function $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\frac{dV}{dt}(x\pi t) |_{t=0} < 0$ for $x \in X$ unless x is an equilibrium, that is, $x\pi t = x$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Theorem 2.3. [3][4][5] (2) generates a gradient-like global semiflow (we define later) on $H_0^1(I) = X^{1/2}$. Moreover, $f(u) \in H_0^1(I)$ and $u_{xx} \in L^2(0, T, H_0^1(I))$.

Remark 2.4. The above theorem implies that, if P_h is the orthogonal projection onto the finite-element subspace X_h of $H_0^1(I)$, the decomposition (4) “in $H_0^1(I)$ ” is valid.

3 The main idea

We have decomposed the original system into the finite dimensional (main) term and the infinite dimensional (tail) term in $H_0^1(I)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_h u) = P_h(u_{xx} + f(u)) \\ \frac{d}{dt}((I_\alpha - P_h)u) = (I_\alpha - P_h)(u_{xx} + f(u)) \end{cases} \quad (5)$$

Here we explain our strategy briefly.

1. In general, we can calculate finitely many times on the computer. Therefore we would like to make a mathematical assumption to the tail term which we can compute directly in order to obtain results for original systems from those for the finite dimensional approximation. Of course, such an assumption depends on mathematical tools we use. Here we use the Conley-type index defined in the next section. In general, many types of fixed point theorems are suitable for rigorous numerics.
2. We study the main (approximated) term directly to obtain what we desire.
3. We combine appropriate results in the main term and the tail term. The result we have obtained is the rigorous result in our original problem.
4. Throughout our computations, we use *rigorous numerics* to obtain mathematically rigorous results.

4 The Conley-Rybakowski index ([8])

In this section, we review a topological concept we shall use, the Conley index. This is the algebraic-topological invariant which is defined for invariant sets with special property, called isolated invariant sets. Let π be a *local semiflow* on a topological space X .

Let $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ be an interval and $\sigma : \mathcal{J} \rightarrow X$ be a mapping. σ is called a *solution (of π)* if for all $t \in \mathcal{J}$, $s \in \mathbb{R}^+$ for which $t + s \in \mathcal{J}$, it follows that $\sigma(t)\pi s$ is defined and $\sigma(t)\pi s = \sigma(t + s)$. If $0 \in \mathcal{J}$ and $\sigma(0) = x$ then we may say σ is a solution through x . If $\mathcal{J} = \mathbb{R}$, then σ is called a global (or full) solution.

Definition 4.1. Let Y be a subset of X . We define the *invariant part* of Y as

$$\text{Inv}(Y) := \{x \in X \mid \exists \text{ a solution } \sigma : (-\infty, \omega_x] \rightarrow X \text{ through } x \text{ with } \sigma(-\infty, \omega_x] \subset Y\}.$$

This set is the maximal invariant set contained in Y .

Definition 4.2. If K is a closed invariant set and there is a neighborhood U of K such that K is the largest invariant set in U , then K is called an *isolated invariant set*. On the other hand, if N is a closed subset of X and N is a neighborhood of $K = \text{Inv}(N)$, i.e., if the largest invariant set in N is actually contained in the interior of N , then N is called an *isolating neighborhood of K* .

To define the Conley-type index, we define an isolating neighborhood with the property that the flow is transversal to boundaries.

Definition 4.3. Let N be an isolating neighborhood.

- $x \in \partial N$ is called an *exit point* ($x \in N^+$) if there are $\epsilon_x > 0$ and a solution σ through x such that $x\pi t \notin N$ and $\sigma(-t) \notin \partial N$ for $t \in (0, \epsilon_x)$.
- $x \in \partial N$ is called an *entrance point* ($x \in N^i$) if there are $\epsilon_x > 0$ and a solution σ through x such that $\sigma(-t) \notin N$ and $x\pi t \in \text{int}(N)$ for $t \in (0, \epsilon_x)$.
- N is called an *isolating block* if $\partial N = N^+ \cup N^i$ holds and if N^+ is closed in ∂N .

Remark 4.4. If N is an isolating block for K , then the pair (N, N^+) is regarded as the special case of *index pairs* in N . We will not show the general definition of index pairs. For more details, see [8].

The Conley index was originally introduced by Conley ([2]) to study the dynamics of *ODEs*. In case of ODEs, the index is defined for a *compact* isolated invariant set S such that all solutions in S exist *globally*. Rybakowski extended Conley's original theory ([8]) in order to be applied to many problems for infinite dimensional dynamics. He has succeeded to extend the index theory for isolated invariant sets which has the same property as finite dimensional cases, that is, for compact ones such that all solutions in them exist globally. We shall say such a property *strongly admissible* (This property is defined for arbitrary closed sets).

Definition 4.5. Let K be an isolated π -invariant set with strongly π -admissible isolating neighborhood N . Then *the Conley-Rybakowski (CR) index* is defined by

$$CH_*(K, \pi) := H_*(N_1/N_2, [N_2]),$$

where (N_1, N_2) is an index pair of K in N .

Theorem 4.6. *Let K be an isolated π -invariant set. If $K = \emptyset$, then $CH_*(K, \pi) = 0$. As a consequence, if $CH_*(K, \pi) \neq \bar{0}$, then $K \neq \emptyset$. In particular, if π is gradient-like and $CH_*(K, \pi) \neq 0$, then K contains a fixed point.*

Theorem 4.7. *Let S_1 and S_2 be mutually disjoint isolated invariant sets for a semiflow π . Then*

$$CH_*(S_1 \cup S_2, \pi) = CH_*(S_1, \pi) \oplus CH_*(S_2, \pi).$$

5 The verification method

The idea is based on the “lifting” of the problem in finite dimensions to that in infinite dimensions originally by [7] and [9].

Let $X = L^2(I)$ and π be the local semiflow generated by (2), X_h be a finite dimensional subspace of $X^{1/2} = H_0^1(I)$, $P_h : X^{1/2} \rightarrow X^{1/2}$ be the projection onto X_h , $N = N_1 \times N_2$ be a bounded closed set in $X^{1/2}$ such that $N_1 \subset X_h = P_h X^{1/2}$ and that $N_2 \subset (I_{1/2} - P_h)X^{1/2}$. In applications, we can choose X_h as a finite element subspace. Also let π_{1,u_2} be the local semiflow generated by the following equation:

$$\dot{u}_1 = P_h F(u) = P_h F(u_1, u_2), \quad u_i \in N_i.$$

In this case, we realize u_2 as a parameter variable. To be simplified we restrict the figure of N_2 as follows:

$$N_2 = \{q \in (I_{1/2} - P_h)X^{1/2} \mid \|q\|_{H_0^1} \leq M\}$$

for some $M > 0$.

Theorem 5.1. *We assume*

$$\frac{d}{dt} \|(I_{1/2} - P_h)u\|_{H_0^1} < 0 \text{ for } u \in N \text{ such that } \|(I_{1/2} - P_h)u\|_{H_0^1} = M. \quad (6)$$

- (a) *If $I \subset N_1$ is an isolating neighborhood for π_{1,u_2} for all $u_2 \in N_2$, then so is $I \times N_2 \subset N$ for π .*
- (b) *If (I_1, I_2) is an index pair (in N_1) for π_{1,u_2} for all $u_2 \in N_2$, then so is $(\hat{I}_1, \hat{I}_2) := (I_1 \times N_2, I_2 \times N_2)$ (in N) for π .*
- (c) *The CR-index of $\text{Inv}(N)$ for π coincides that of $\text{Inv}(N_1)$ for π_{1,u_2} for all $u_2 \in N_2$.*

The above theorem enables us to compute infinite dimensional objects from those of finite-dimensional projections automatically.

Theorem 5.2. *If there exists an isolating block $B_1 \subset N_1$ for π_{1,u_2} , $u_2 \in N_2$, such that*

$$\begin{cases} CH_*(\text{Inv}(B), \pi_{1,u_2}) \neq 0 \\ \text{condition (6)} \end{cases} \quad (7)$$

holds for all $u_2 \in N_2$, then there exists a global solution of (2) in N . Especially, there exists a steady-state solution of (2) in N (because our semiflow is gradient-like).

Remark 5.3. *In our problem, we can write the entrance condition (6) explicitly. Namely, (6) holds if the following inequality holds:*

$$Ch \sup_{u \in N} \|(I_{1/2} - P_h)f(u)\|_{L^2} < M,$$

where $C > 0$ is the constant which depends on the finite dimensional subspace X_h and $h > 0$ is the grid size.

Now we represent a basic idea to construct an isolating block B_1 . The main idea is to transform the original system to a perturbed diagonalized system around the approximation u_h . A solution u of the boundary value problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u) \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{on } \partial I$$

also satisfies the following:

$$(u_t, \varphi) = -(u_x, \varphi_x) + (f(u), \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(I).$$

Here we consider the finite dimensional projection of this problem:

$$(u_t, \varphi_h) = -(u_x, (\varphi_h)_x) + (f(u), \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

If we set $w := u - u_h$, w must satisfy

$$(w_t, \varphi_h) = -(w_x, (\varphi_h)_x) + (f(u) - f(u_h), \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

We rewrite the right hand side to the product of a matrix and a vector:

$$\begin{aligned} ((P_h w)_t, \varphi_h) &= -((P_h w)_x, (\varphi_h)_x) + (P_h(f(u) - f(u_h)), \varphi_h) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^n w_i \varphi'_i, \varphi'_h\right) + (P_h(Df(u_h)w + e(w)), \varphi_h) \\ &=: GW_h + (\epsilon_1(w), \dots, \epsilon_n(w))^T, \end{aligned}$$

where $w = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_i + (I - P_h)w$, $n = \dim X_h$, $w_i \in \mathbb{R}$, $X_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$,

$$G = [G_{ij}]_{i,j} := [-(\varphi'_i, \varphi'_j) + (P_h(\sum_{k=1}^n Df(u_h)_{ik} \varphi_k), \varphi_j)]_{i,j},$$

$$W_h := (w_1, \dots, w_n)^T \text{ and } (\epsilon_1(w), \dots, \epsilon_n(w)) := ((P_h e(w), \varphi_1), \dots, (P_h e(w), \varphi_n)).$$

Next we rewrite the left hand side in the same way as the right hand side:

$$\begin{aligned} ((w_h)_t, \varphi_h) &= \left(\sum_{i=1}^n \dot{w}_i \varphi_i, \varphi_h\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (\varphi_i, \varphi_1) \dot{w}_i, \sum_{i=1}^n (\varphi_i, \varphi_2) \dot{w}_i, \dots, \sum_{i=1}^n (\varphi_i, \varphi_n) \dot{w}_i\right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{2,2} & \dots & \varphi_{n,1} \\ \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \dots & \varphi_{n,2} \\ & \dots & \dots & \\ \varphi_{1,n} & \varphi_{2,n} & \dots & \varphi_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dots \\ \dot{w}_n \end{pmatrix} \\ &=: \Phi \dot{W}_h, \end{aligned}$$

where $(\cdot)^T$ is the transpose of a vector or matrix and $\varphi_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$. Therefore we obtain the finite dimensional linear system

$$\Phi \dot{W}_h = GW + (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T.$$

If Φ is nonsingular, we obtain $\dot{W}_h = \Phi^{-1} (GW_h + (\epsilon_1(w), \dots, \epsilon_n(w))^T)$. Diagonalizing $\Phi^{-1}G$ by a matrix Q , we obtain the following perturbed diagonalized system:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_h &= \Lambda Y_h + Q^{-1} \Phi^{-1} (\epsilon_1(w), \dots, \epsilon_n(w))^T, \\ \dot{y}_i &= \lambda_i y_i + \tilde{\epsilon}_i(\tilde{y}), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

where $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ and $\tilde{\epsilon}_i(\tilde{y})$ is the i -th entry in an interval vector $Q^{-1} \Phi^{-1} (\epsilon_1(w), \dots, \epsilon_n(w))^T$. We remark that we can write the above system in the similar way if Λ has complex eigenvalues.

Suppose that the error term $\tilde{\epsilon}_i(\tilde{y})$ has a bound $[\delta_i^-, \delta_i^+]$. Then \dot{y}_i must satisfy the following relation:

$$\lambda_i \left(y_i + \frac{\delta_i^-}{\lambda_i} \right) < \dot{y}_i < \lambda_i \left(y_i + \frac{\delta_i^+}{\lambda_i} \right).$$

Here we set the candidate of our isolating block \tilde{B}_1 is as $\tilde{B}_1 := \prod_{i=1}^{\dim X_h} \tilde{W}_i$,

$$\begin{cases} \tilde{W}_i^{(k)} := \left[-\frac{\delta_i^+}{\lambda_i}, -\frac{\delta_i^-}{\lambda_i} \right], & \text{if } \lambda_i > 0, \\ \tilde{W}_i^{(k)} := \left[-\frac{\delta_i^-}{\lambda_i}, -\frac{\delta_i^+}{\lambda_i} \right], & \text{if } \lambda_i < 0. \end{cases} \quad (8)$$

\tilde{B}_1 is the candidate of our isolating block around 0 corresponding u_h . Finally, we set $B_1 := Q\tilde{B}_1 + \{u_h\}$ and if $B_1 \subset N_1$ holds, then B_1 is what we have desired. To compute the Conley index, what we have to do is just to count the number of λ_i with positive real parts.

6 Globally time-dependent solutions

Finally we show an idea to prove the existence of globally time-dependent solutions. Let π be a semiflow on a Banach space X . Suppose that we have already known the following result:

- There exists mutually disjoint isolated invariant sets S_0^\pm and S_1 such that

$$CH_n(S_0^+) \cong CH_n(S_0^-) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, \quad CH_n(S_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}.$$

These information are essential for our approach.

Next, we also assume that we have obtained an isolating neighborhood N which contains S_0^\pm and S_1 , such that

$$CH_n(\text{Inv}(N)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}.$$

Then we know the following result.

Theorem 6.1. *Under the above assumptions, we have a Morse decomposition $\{S_0^+, S_0^-, R\}$ of $\text{Inv}(N)$ (i.e. the decomposition such that the semiflow in $\text{Inv}(N)$ is gradient-like off the union $S_0^+ \cup S_0^- \cup R$). R contains S_1 and its index is*

$$CH_n(R) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}.$$

As a consequence, there exist connecting orbits from R to S_0^+ and S_0^- . If π is a semiflow generated by a PDE, such orbits correspond to globally time-dependent solutions of the PDE.

The proof of this theorem is based on the homotopy and homology theory and the sum formula of the Conley-Rybakowski index. In particular, we do not use rigorous numerical result in the proof. We use rigorous numerics here to check all our assumptions.

A Interval Arithmetic

Here we show an idea of rigorous numerics, interval arithmetic. Let $[a, b]$ and $[c, d]$ are intervals in \mathbb{R} . Then the basic interval arithmetic \circ is defined as follows:

Definition A.1.

$$[a, b] \circ [c, d] := \{x \circ y \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

where $\circ \in \{+, -, \times, /\}$.

In practice, we use the following formula and hence we need finite many times of calculations.

Proposition A.2. *The following equations hold.*

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$.
- $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$.
- $[a, b] * [c, d] = [A, B]$, where $A = \min\{ac, ad, bc, bd\}$, $B = \max\{ac, ad, bc, bd\}$.
- $[a, b]/[c, d] = [a, b] * [\frac{1}{d}, \frac{1}{c}]$, $0 \notin [c, d]$.

We remark that the above relations hold *just in the mathematical sense*. When we calculate on the computer, we have to deal with *the floating numbers* \mathbb{F} . For example, we assume that we want to calculate the value of π . We cannot calculate the exact value of π on the computer because π is irrational and all computers have finite many memories. Therefore, if we calculate the value of $\pi = 3.14159265358979323846\dots$, computers should return the value 3.141592653589793 or 3.1415926535897934 (in double precision).

Such a fact induces the *rounding error*.

Definition A.3. Let $a \in \mathbb{R}$ be an arbitrary real number. We define the floating number Δa as

$$\Delta a := \min\{b \mid b \in \mathbb{F}, b \geq a\}.$$

Such a number is called the *round upward of a*. Similarly, we define the floating number ∇a as

$$\nabla a := \max\{b \mid b \in \mathbb{F}, b \leq a\}.$$

Such a number is called the *rounding downward of a*. An error between a and Δa or ∇a is called the *rounding error of a* in general.

Remark A.4. *There are another type of roundings, but we will not show here. Moreover, such roundings depend on the standard of floating numbers.*

In many applications, we usually use the interval arithmetic for $[\nabla a, \Delta b]$, the rounding of an interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, instead of $[a, b]$ on the computer.

Next, we show an example of another type of errors, the *truncation error*. We assume that we want to calculate the exact value of the following sum:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

We cannot compute the exact value of the above sum on the computer unless we know a mathematical formula and use it to compute the sum. In general, we just compute the approximation of the sum, for example,

$$S_M := \sum_{n=1}^M a_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad M \in \mathbb{N}.$$

Therefore there is an error $err(M) = \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n$ between S and S_M . Such an error is called the *truncation error*. However, we can easily estimate such an error by mathematical theory and interval arithmetics. For example, we make an additional assumption:

$$a_n \in \left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right] \text{ for } n > M.$$

Then we can obtain the bound of $err(M)$ by the following integration:

$$\sum_{n>M} \frac{1}{n^2} \leq \int_M^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{M}.$$

and hence

$$err(M) \subset \left[-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right].$$

Finally we obtain the following bound of S .

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = S_M + err(M) \subset \sum_{n=1}^M a_n + \frac{1}{M} \cdot [-1, 1].$$

We have obtained an idea of rigorous numerics. When we study problems on computers rigorously, we use the idea of *self-validation*, namely, the interval arithmetic taking the above roundings and bounds of truncation errors into account.

We end this section introducing the library for interval arithmetic which the author has used.

- **CAPD**. This is a C++ library for studying the dynamical systems (made mainly by P.Pilarczyk, T.Kapela, D.Wilczak, P.Zgliczyński and other researchers in Jagiellonian University, Poland), like Poincaré maps, computation of time- t maps for ODEs, h -sets and so on. The author uses this library for his whole computations. See [1] for details.

References

- [1] CAPD - Computer Assisted Proofs in Dynamics group, a C++ package for rigorous numerics, <http://capd.wsb-nlu.edu.pl/>.
- [2] C.Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Reg. Con. Ser. Math., Vol.38, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1978.
- [3] A.Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prent. Hall, 1964.
- [4] J.K.Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **25**. AMS, Providence, 1988.
- [5] D.Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, 1981.
- [6] K.Matsue, Rigorous numerics for semilinear parabolic PDEs via the Conley-Rybakowski index -1-dimensional case-, in preparation.
- [7] M.T.Nakao and N.Yamamoto, *Self-Validated Computations*, Nihon Hyo-ron Sha, 1994 (in Japanese).
- [8] K.P.Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1987.
- [9] P.Zgliczyński and K.Mischaikow, Rigorous numerics for partial differential equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* **1**(2001), 255–288.

巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の挙動と基礎環の構造について

大関 一秀 (明治大学先端数理科学インスティテュート)

1. はじめに

可換環論は、与えられた代数方程式を具体的に解くという問題から発生した学問体系であって、現代では組み合わせ論や代数幾何学、特異点論、数論などと密接に関連した、非常に大きな複合分野となっている。代数多様体上の各点の局所環の環構造は、対応する特異点の幾何学的な性質を如実に反映し、局所環 (A, \mathfrak{m}) の構造は、そこに含まれる \mathfrak{m} -準素イデアルに関するヒルベルト関数の可能性や挙動、重複度解析、随伴次数環や Rees 代数の環構造により分類され、推測される。本報告の目的は、ヒルベルト関数の挙動を指標に、与えられた局所環内にどのような \mathfrak{m} -準素イデアルがいかにか多様に含まれているかを解析しながら、局所環すなわち特異点の可換環論を展開するものである。

以下、 A を (可換な) Noether 局所環とし、その極大イデアルを \mathfrak{m} と表し次元を $d = \dim A > 0$ とする。環 A 内の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対して、整数 $\{e_I^i(A)\}_{0 \leq i \leq d}$ たちが存在し、十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して、イデアル I のヒルベルト関数 $l_A(A/I^{n+1})$ が

$$l_A(A/I^{n+1}) = e_I^0(A) \binom{n+d}{d} - e_I^1(A) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_I^d(A)$$

という形の多項式で表わされることがよく知られている。但し、 $l_A(*)$ は A -加群としての長さを表す。これを、イデアル I のヒルベルト多項式と呼び、各係数 $e_I^i(A)$ たちをイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ。特に、先頭項の係数 $e_I^0(A) (> 0)$ はイデアル I の重複度と呼ばれる。このヒルベルト関数の挙動には、イデアル I の構造のみならず基礎環 A の構造もかなり忠実に反映されていると考えられる。

次数付代数のヒルベルト関数の研究は D. Hilbert の不変式論の研究にまで遡るが、局所環のヒルベルト関数の研究も P. Samuel や A. Grothendieck によって 1950 年代までには基礎理論が整備され、その後、D. Northcott, S. Abhyankar, E. Matlis, J. Sally たちにより、blow-up 代数の環構造研究との関わりの中で深い研究が行われた。

本報告の目的は、Noether 局所環内の巴系イデアルを取り出し、そのヒルベルト関数の挙動から基礎環の構造を分類することにある。

本報告の内容は、L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, T. T. Phuong, W. V. Vasconcelos との共同研究 [GhGHOPV] 及び、後藤四郎教授との共同研究 [GO] に基づいて構成されたものである。

ここで、本報告の構成について述べたい。第2節では、環構造を分類する上で重要となる幾つかの環の定義とその性質について述べる。特に、巴系イデアルの重複度による特徴付けの視点から、これまでに知られている結果を紹介する。第3節では、巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の消滅性と基礎環のCohen-Macaulay性について述べる。また、 $e_Q^0(A) = 0$ を満たす巴系イデアル Q を持つ環の特徴付けについても紹介する。第4節は、巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の値が一定であるようなNoether局所環の環構造を解析する。

2. 巴系イデアルのヒルベルト係数について

本節では、環構造を分類する上で必要となる幾つかの環の定義について、巴系イデアル Q の重複度 $e_Q^0(A)$ の特徴付けによる視点から紹介する。

まず、一般Noether局所環 A 内の巴系イデアル Q に対して、不等式

$$l_A(A/Q) \geq e_Q^0(A)$$

がいつも成り立つことを述べておきたい。

本報告で重要となる、Cohen-Macaulay環、Buchsbaum環、そしてFLCを持つ環は、巴系イデアルの重複度 $e_Q^0(A)$ を用いて次のように定義することができる。

定義 2.1. $d > 0$ とする。

- (1) 環 A 内のある巴系イデアル Q について、等式 $l_A(A/Q) = e_Q^0(A)$ が成り立つとき、 A をCohen-Macaulay環であると定義する。
- (2) 環 A 内の全ての巴系イデアル Q について、 $l_A(A/Q) - e_Q^0(A)$ の値が一定であり、巴系イデアルの取り方に依らないとき、 A をBuchsbaum環であると定義する。
- (3) $\sup_L \{l_A(A/Q) - e_Q^0(A)\}$ が有限であるとき、 A はFLCを持つ環であると定義する。但し、集合 $L = \{Q \mid Q \text{ は } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$ とする。

これら3つの局所環の関係について述べると、Cohen-Macaulay環の一般化がBuchsbaum環であり、さらにBuchsbaum環の一般化がFLCを持つ環となっている。

これらは、環 A の極大イデアル \mathfrak{m} による局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ ($i \in \mathbb{Z}$) を用いて特徴付けることができる。Cohen-Macaulay環の場合は次の通りである。

命題 2.2. $d > 0$ とする。次の3条件は互いに同値である。

- (1) A はCohen-Macaulay環である。
- (2) 環 A 内の全ての巴系イデアル Q について、等式 $l_A(A/Q) = e_Q^0(A)$ が成り立つ。
- (3) 任意の整数 $i \neq d$ に対して、 $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ である。

この命題 2.2 の (2) から, Cohen-Macaulay 環 A 内の全ての巴系イデアル Q に対して等式 $\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A) = 0$ が成り立つ. このことから, Buchsbaum 環は Cohen-Macaulay 環の一般化であることが分かる.

Buchsbaum 環については次の通りに特徴付けられる.

命題 2.3. $d > 0$ とする. 次の 2 条件は互いに同値である.

- (1) A は Buchsbaum 環である.
- (2) 任意の整数 $i \neq d$ に対して, $\mathfrak{m} \cdot H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ である.

従って, このとき, 局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ ($i \neq d$) たちは剰余体 A/\mathfrak{m} 上の有限次元ベクトル空間をなす.

最後に, FLC を持つ環は次の通りである.

命題 2.4. $d > 0$ とする. 次の 2 条件は互いに同値である.

- (1) A は FLC を持つ環である.
- (2) 任意の整数 $i \neq d$ に対して, $\ell_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A)) < \infty$ である.

このとき, 等式

$$\sup_L \{ \ell_A(A/Q) - e_Q^0(A) \} = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A))$$

が成り立つ. 但し, 集合 $L = \{Q \mid Q \text{ は } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$ とする.

ここで述べられている FLC とは, finitely local cohomology modules の略である. 命題 2.4 の (2) が示す通り, FLC を持つ環とはまさに局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ ($i \neq d$) たちが有限生成であるような環のことである.

さらに, 環 A が FLC を持つ場合に, A 内の巴系イデアル Q が等式

$$\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A))$$

を満たすとき, Q は標準的な巴系イデアルであるという ([STC]). 環 A が FLC を持つならば, 十分大きい整数 l に対して, 極大イデアルの冪 \mathfrak{m}^l に含まれる巴系イデアルは全て標準的であることが知られている (cf. [Sch, STC]). そして, Buchsbaum 環とは, FLC を持っていてかつ, 任意の巴系イデアルが標準的であるような環であると言える. 以上のような, 巴系イデアル Q の重複度 $e_Q^0(A)$ を用いた各種の局所環の特徴付けは非常に良く知られている.

これに対して, 本報告では, 巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ の挙動に注目し, 基礎環 A の環構造の分類を行う.

3. 第1ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ の消滅性と基礎環の COHEN-MACAULAY 性について

本節では巴系イデアル Q の第1ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ の消滅性と基礎環の Cohen-Macaulay 性に関する次の Vasconcelos の予想への解答を与えることを目標とする. この予想については, [GhHV, MV] に於いても部分的な解答が与えられていることを述べておきたい. 但し, 環 A が unmixed であるとは, 環 A の m -進完備化 \hat{A} について, 任意の $P \in \text{Ass}\hat{A}$ に対して, 等式 $\dim\hat{A}/P = d$ が成り立つことである.

予想 3.1 ([GhHV, V]). 環 A を unmixed とする. このとき, A 内のある巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) = 0$ ならば, A は Cohen-Macaulay 環である.

もし A が Cohen-Macaulay 環ならば, A 内の全ての巴系イデアル Q について, 任意の整数 $1 \leq i \leq d$ に対して, $e_Q^i(A) = 0$ が成り立つことが, Cohen-Macaulay 環の基本構造から従う. そしてこの Vasconcelos の予想は, その逆問題に対応するものである.

本報告の主結果の一つは次の通りである.

定理 3.2. 環 A を unmixed とし, $d > 0$ とする. このとき, 次の4条件は互いに同値である.

- (1) A は Cohen-Macaulay 環である.
- (2) 環 A 内の全ての m -準素イデアル I に対して, $e_I^1(A) \geq 0$ である.
- (3) 環 A 内のある巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) \geq 0$ である.
- (4) 環 A 内のある巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) = 0$ である.

この定理 3.2 により, 予想 3.1 への完全な解答が与えられている. 証明の概要を述べると, (1) \Rightarrow (4) は, 先ほど述べた, Cohen-Macaulay 環の基本構造から, 任意の巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) = 0$ が成り立つことに従う. (1) \Rightarrow (2) は成田の定理 ([Na]) から従う. (2) \Rightarrow (3) 及び, (4) \Rightarrow (3) は自明である. 従って, (3) \Rightarrow (1) がこの定理の本質的な部分である.

この定理 3.2 から次の系が直ちに導かれる.

系 3.3 ([MV]). 環 A 内の任意の巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) \leq 0$ が成り立つ.

定理 3.2 を考察するに, $e_Q^1(A) = 0$ を満たす巴系イデアル Q を含む局所環は特殊なものであることが期待できる. そして, 本節ではそのような環構造の特徴付けも行いたい. その為に, Vasconcelos 環という概念を次のように定義する.

定義 3.4. A を Noether 局所環とする. このとき, $d = 0$ であるか, または, $d > 0$ であって, ある巴系イデアル Q が存在して $e_Q^1(A) = 0$ を満たすとき, A を Vasconcelos 環であると定義する.

この Vasconcelos 環は次のように特徴付けることができる.

定理 3.5. $d > 0$ とする. このとき, 次の 4 条件は互いに同値である.

- (1) A は Vasconcelos 環である.
- (2) 環 A 内の全ての巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) = 0$ である.
- (3) \hat{A}/U は Cohen-Macaulay 環であって, $\dim_{\hat{A}} U \leq d - 2$ である. 但し, $U = U_{\hat{A}}(0)$ は環 A の \mathfrak{m} -進完備化 \hat{A} 内の (0) の非混合部分を表す.
- (4) 環 A の \mathfrak{m} -進完備化 \hat{A} について, あるイデアル $I \neq \hat{A}$ が存在して, \hat{A}/I が Cohen-Macaulay 環であって, $\dim_{\hat{A}} I \leq d - 2$ を満たす.

このとき, \hat{A} も Vasconcelos 環をなし, $H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A) = (0)$ であって, \hat{A} の正準加群 $K_{\hat{A}}$ は Cohen-Macaulay \hat{A} -加群である.

この定理 3.5 の (3) は, 巴系イデアルの取り方に依らない条件である. それにより, (1) \Rightarrow (2), 即ち, ある巴系イデアル Q について等式 $e_Q^1(A) = 0$ が一度成り立てば, 全ての巴系イデアル Q について等式 $e_Q^1(A) = 0$ が成り立つということが導かれる. これこそが, この定理 3.5 の最も特徴的な部分である.

本節の残りの部分にて, この特徴付けの応用を幾つか紹介したい. 次の系では, 環 A が unmixed を仮定していない.

系 3.6. $d > 0$ とする. Q を環 A 内の巴系イデアルとする. このとき, 任意の整数 $1 \leq i \leq d$ について, $e_Q^i(A) = 0$ ならば, A は Cohen-Macaulay 環である.

以下, 巴系イデアル Q に対して,

$$R = R(Q) = A[Qt], \quad G = G(Q) = R/QR \cong \bigoplus_{n \geq 0} Q^n/Q^{n+1},$$

と定め, それぞれを, イデアル Q の Rees 代数, 随伴次数環と呼ぶ. 但し, t は環 A 上の不定元とする. また, $M = \mathfrak{m}R + R_+$ を Rees 代数 R の次数付き極大イデアルとする.

これらの条件の下で, 次の結果が得られた.

系 3.7. $d > 0$ とする. このとき, 次が正しい.

- (1) R_M が Vasconcelos 環であるということと, A が Vasconcelos 環であるということが同値条件である.
- (2) 環 A が Cohen-Macaulay 環の準同型像であるとする. このとき, A が Vasconcelos 環であれば, G_M も Vasconcelos 環である.

本節にて紹介したもの以外にも, [GhGHOPV] にて多くの Vasconcelos 環の特徴付けがなされている. このことから, Vasconcelos 環は非常に興味深い研究対象であると言える.

4. 第1ヒルベルト係数の定常性と基礎環のBUCHSBAUM性について

第3節では、巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の消滅性と基礎環のCohen-Macaulay性に関する結果を紹介してきた。これに対して、本節では、巴系イデアル Q の第1ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ の定常性と基礎環 A のBuchsbaum性について述べたい。

以下、集合

$$\Lambda = \Lambda(A) = \{e_Q^1(A) \mid Q \text{ は環 } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$$

を定める。

ここで、次の2つの問いが考えられる。

問題 4.1. A を Noether 局所環とし、 $d \geq 2$ とする。

- (1) いつ Λ が有限集合をなすか？
- (2) いつ Λ が一点集合をなすか？

前節のVasconcelos環の特徴付けによると、次の同値条件が従う。

注意 4.2. $0 \in \Lambda \Leftrightarrow \Lambda = \{0\}$.

問題4.1に取り組むにあたって、これまでに知られている結果を紹介したい。その際に、 $d = 1$ のときにはいつも等式 $e_Q^1(A) = -h^0(A)$ が成り立つことから、 $d \geq 2$ の場合について考える必要がある。

以下、 $h^i(A) = \ell_A(H_m^i(A))$ は環 A の局所コホモロジー加群の長さを表す。

命題 4.3. 環 A がFLCを持つとし、 $d \geq 2$ とする。 Q を環 A 内の巴系イデアルとする。このとき、次が正しい。

- (1) ([GN]) 不等式 $e_Q^1(A) \geq -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つ。
- (2) ([Sch]) Q が標準的ならば、等式 $e_Q^1(A) = -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つ。

系3.3によると、巴系イデアル Q の第1ヒルベルト係数について不等式 $e_Q^1(A) \leq 0$ が一般Noether局所環内に於いて成り立つ。これに対して、環 A がFLCを持つとき、命題4.3の(1)より、不等式

$$0 \geq e_Q^1(A) \geq -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が成り立つ。このことから、環 A がFLCを持つならば、 Λ は有限集合をなすことが得られる。また、巴系イデアル Q が標準的ならば命題4.3の(2)により、等式

$$e_Q^1(A) = -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が従う. よって, A が Buchsbaum 環ならば, A 内の全ての巴系イデアル Q は標準的であることから,

$$\Lambda = \left\{ - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A) \right\}$$

となり, Λ は一点集合をなすことが分かる. そして, これらは全て逆の主張も正しいのではないかという自然な問が与えられる.

Λ が有限集合である場合について, 次の結果が得られた.

定理 4.4. 環 A を *unmixed* とし, $d \geq 2$ とする. Λ を有限集合と仮定し, 整数 $\ell = -\min \Lambda$ と定める. このとき, 任意の整数 $i \neq d$ に対して, $\mathfrak{m}^\ell \cdot H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ が成り立つ. 従って, このとき $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ ($i \neq d$) は有限生成であり, A は *FLC* を持つ.

本節の主結果は次の通りである.

定理 4.5. 環 A を *unmixed* とし, $d \geq 2$ とする. このとき, 次の 2 条件は互いに同値である.

- (1) A は Buchsbaum 環である.
- (2) 巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ は一定値をとり, Q の取り方に依らない.

この同値条件のどちらかが成り立つとき, A の任意の巴系イデアル Q に対して, 等式

$$e_Q^1(A) = - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が成り立つ.

この定理 4.5 について, (1) \Rightarrow (2) 及び最後の条件は前述の議論から従う. よって, 本報告では (2) \Rightarrow (1) の証明を紹介したい. その上で, 次の命題が鍵となる.

命題 4.6. 環 A は *FLC* を持つとし, $d \geq 2$, $\text{depth} A > 0$ とする. Q は環 A 内の巴系イデアルとする. このとき, 等式 $e_Q^1(A) = - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つならば, Q は標準的な巴系イデアルをなす.

それでは, 定理 4.5 の証明の概略を紹介したい.

定理 4.5 の証明 (2) \Rightarrow (1). Λ が一点集合であることから, 定理 4.4 より, 環 A は *FLC* を持つ. 環 A が *FLC* を持つならば, A 内に標準的な巴系イデアルは必ず含まれるので, $-\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A) \in \Lambda$ が従う. そして, ここでも Λ が一点集合であることから, $\Lambda = \left\{ - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A) \right\}$ が成り立つ. 従って, 命題 4.6 により, A 内の全ての巴系イデアル Q が標準的であることが導かれる. 以上より, A は Buchsbaum 環をなす. \square

このように、巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ により、Buchsbaum 環を特徴付けることができた。これは Buchsbaum 環の新しい特徴付けである。また、この定理 4.5 は環 A が unmixed でない場合には成り立たない。そのような例を紹介する。

例 4.7. B を正則局所環とし、 $d = \dim B \geq 3$ とする。環 B の正則巴系を X_1, X_2, \dots, X_d とする。Noether 局所環 $A = B \times B/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1})$ を B 上の剰余環 $B/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1})$ によるイデアル化と定める。このとき、次が正しい。

- (1) $\dim A = d$ であって、 $\text{depth } A = 1$ である。
- (2) 任意の A 内の巴系イデアル Q に対して、 $e_Q^1(A) = 0$ である。
- (3) A は FLC を持たない。特に、 $H_m^1(A)$ は有限生成ではない。

本報告の最後に、 Λ が一点集合であるような Noether 局所環の特徴付けを紹介したい。

定理 4.8. $d \geq 2$ とする。このとき、次の条件は互いに同値である。

- (1) Λ は一点集合である。
- (2) 環 A の \mathfrak{m} -進完備化 \hat{A} 内の (0) の非混合要素を $U = U_{\hat{A}}(0)$ を定める。このとき、 $\dim \hat{A}/U \leq d - 2$ であって、 \hat{A}/U は Buchsbaum 環である。

この同値条件のどちらかが成り立つとき、 A 内の任意の巴系イデアル Q に対して、等式

$$e_Q^1(A) = - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(\hat{A}/U)$$

が成り立つ。

REFERENCES

- [GhGHOPV] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, J. London Math. Sci., to appear.
- [GhHV] L. Ghezzi, J. Hong and W. V. Vasconcelos, *The signature of the Chern coefficients of local rings*, Math. Research Letters, **16** (2009), 279–289.
- [GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra **181** (2003), 61–74.
- [GO] S. Goto and K. Ozeki, *Buchsbaumness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters*, Nagoya Math. J., to appear.
- [MV] M. Mandal and J. K. Verma, *On the Chern number of an ideal*, Preprint 2008.
- [Na] M. Narita, *A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **59**, 1963, 269–275
- [Sch] P. Schenzel, *Multiplizitäten in verallgemeinerten Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr. **88** (1979), 295–306.
- [STC] P. Schenzel, N. V. Trung, and N. T. Cuong, *Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr., **85** (1978), 57–73.
- [V] W. V. Vasconcelos, *The Chern coefficients of local rings*, Michigan Math. J. **57** (2008), 725–743.