独立性概念とキュムラントの一般化について

長谷部　高広 (北海道大学大学院理学研究院)

Franz Lehner (Graz University of Technology)

概要

Spreadability という一般的な独立性に関してキュムラントを定義する．この定義はこれまでに非可換確率論で知られているほぼ全てのキュムラントを網羅する．論文は現在執筆中である．本稿ではその主な内容について証明はなしで解説する．

1　研究に至る経緯

Voiculescu は自由群に対する群フォンノイマン環を解析するため, 非可換代数で展開される自由確率論という分野を考え出した [V85]. 自由確率論とは確率論で基本的な「独立性」の概念を「自由独立性」というもので置き換えることによって得られる理論である．非可換代数を考えると, 自由独立性の他にも独立性がいくつか知られていて, Bożejko[B86], Speicher, Woroudi[SW97] らによるブール独立性, 村木による単調独立性 [M01] がある．確率論での独立性はテンソル独立性と呼ばれる．他にも q-CCR に対する q-独立性というものも知られている [A01]．ここで q-CCR とは CCR の 1 パラメータ変形で, $a(f)a^*(g) - qa^*(g)a(f) = \langle f, g\rangle_H \mathrm{Id}$ $(f, g \in H)$ という交換関係のことである．H はあるヒルベルト空間で $a(f), a^*(g)$ は別のヒルベルト空間に作用する線型作用素である．$q = 1$ なら通常の CCR, $q = 0$ ならクンツ環の関係式 (の片方) になり, 自由確率論に対応する．$q = -1$ なら CAR になる．

ここでは自由独立性と単調独立性を通して, 独立性とはどのようなものなのかを見てみよう．以下では $(\mathcal{A}, \varphi)$ を非可換確率空間とする．つまり $\mathcal{A}$ は単位元を持つ $*$-代数で, φ は状態とする．

定義 1.1. (1) $1_{\mathcal{A}}$ を含む $*$-部分代数たち $\{\mathcal{A}_i\}_{i\geq 1}$ が自由独立とは, 以下が成り立つことである:

$$\text{もし } i_1 \neq i_2 \cdots \neq i_n{}^{*1},\ X_k \in \mathcal{A}_{i_k},\ \varphi(X_1) = \cdots = \varphi(X_n) = 0 \text{ ならば}, \varphi(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

(2) $(\mathcal{A}_i)_{i\geq 1}$ が単調独立とは, 以下の性質が成り立つことである:

$$X_k \in \mathcal{A}_{i_k}\ (1 \leq k \leq n) \text{ とする．もし自然数 } j \text{ が } i_{j-1} < i_j > i_{j+1} \text{を満たすなら},$$
$$\varphi(X_1 \cdots X_j \cdots X_n) = \varphi(X_j)\varphi(X_1 \cdots X_{j-1}X_{j+1} \cdots X_n).$$

---
*1 これは隣り合う数が異なるという記号で, $i_k \neq i_{k+1}$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ を意味する．

$j = 1, j = n$ の場合は, それぞれ $i_1 > i_2$, $i_{n-1} < i_n$ のみ満たしていればよい.

また確率変数列 $(X_i)_{i\geq 1}$ が自由独立とは, $1_{\mathcal{A}}$ と X_i から生成される多項式環 $\mathcal{A}_i := \mathbb{C}[X_i]$ が自由独立ということである. 単調独立性の場合も同様だが, こちらの場合は $1_{\mathcal{A}}$ を含まない多項式環を考える. なぜなら, もし $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ が単調独立かつ $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_1$ ならば, $X, Y \in \mathcal{A}_2$ に対して

$$\varphi(XY) = \varphi(X1_{\mathcal{A}}Y) = \varphi(X)\varphi(1_{\mathcal{A}})\varphi(Y) = \varphi(X)\varphi(Y)$$

となり, $\varphi|_{\mathcal{A}_2} : \mathcal{A}_2 \to \mathbb{C}$ は $*$-準同型になってしまう. よって非自明な単調独立性を定義するためには, どの $\mathcal{A}_i$ も $1_{\mathcal{A}}$ を含んでいない場合を考える必要がある.

以下で具体的な計算例を挙げる.

例 1.2. (1) $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を自由独立な $*$-部分代数とする. すると $b, b' \in \mathcal{B}$, $c, c' \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c), \quad \varphi(bcb') = \varphi(bb')\varphi(c), \quad \varphi(cbc') = \varphi(cc')\varphi(b), \\
&\varphi(bcb'c') = \varphi(bb')\varphi(c)\varphi(c') + \varphi(b)\varphi(b')\varphi(cc') - \varphi(b)\varphi(b')\varphi(c)\varphi(c'), \\
&\varphi(bcd) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(d), \quad \varphi(bcdc'b') = \varphi(bb')\varphi(cc')\varphi(d)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

などが成り立つ. 例えば $\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c)$ については以下のように示される. $b_0 := b - \varphi(b)1_{\mathcal{A}}, c_0 := c - \varphi(c)1_{\mathcal{A}}$ と中心化すると, $\varphi(b_0) = \varphi(c_0) = 0$, また隣り合う確率変数 b_0, c_0 は異なる部分代数 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ に属しているから, 自由独立性の定義より $\varphi(b_0c_0) = 0$. これを b, c を使って書くと, $\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c)$ となる. 文字が多くなると計算が困難になるが, 同様に中心化すれば他のモーメントも計算できる.

(2) $(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ を単調独立な $*$-部分代数列とする. すると $b, b' \in \mathcal{B}$, $c, c' \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c), \quad \varphi(bcb') = \varphi(bb')\varphi(c), \quad \varphi(cbc') = \varphi(c)\varphi(b)\varphi(c'), \\
&\varphi(bcb'c') = \varphi(bb')\varphi(c)\varphi(c'), \\
&\varphi(bcd) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(d), \quad \varphi(bcdc'b') = \varphi(bb')\varphi(cc')\varphi(d)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

などが成り立つ. 注意として, $\varphi(bcb')$ の計算結果で $\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ の役割を交換しても, $\varphi(cbc')$ の計算結果は得られない. これが単調独立性に特有の困難になる (3.1 節参照).

古典的な独立性に加えて自由, 単調と言った具合に複数の独立性が現れることが分かったので, それらを分類したり統一したくなる数学者が現れるのもごく自然な現象だろう. まず独立性を数学的にどう定義するかが問題になるが, 自由, 単調の例を見ると, 「独立性とはモーメントの計算ができるということ」と定義したくなる. この方向でも良いのだが, 実は q-独立性はこの性質を持たないことが知られている. そこでより一般的な定義として, Lehner は exchangeability system という概念を独立性と定義した [L04]. Lehner の定義なら q-独立性も取り込めて, 単調独立性を除くほとんどの独立性を統一することができる [L04].

さらに Lehner の理論はキュムラントを導入するのに適している. キュムラントとは, (混合) モーメント $\varphi(X_{i_1} \cdots X_{i_n})$ の積と和で書くことのできる量で, モーメントに比べて優れた性質を

持っている．それは確率変数が独立かどうかが，キュムラントが 0 になるかどうかで判定できるという性質である (3.1 節を参照).*2 非可換の場合でも，自由確率論では Speicher [S94] が導入した自由キュムラントがある．後にブール独立性に対するブールキュムラントも導入された．Lehner の理論ではこれらを包括的に扱うことができる．

しかし，村木による単調独立性は Lehner の理論に含まれない．これは単調独立性の特殊な性質のためで，例 1.2(2) で現れたように，「X と Y が単調独立であっても Y と X が単調独立であるとは限らない」という性質のためである．このために通常の意味での「単調キュムラント」は存在しないことが分かるのだが (後述する)，研究の結果，一般化された意味でのキュムラントが一意的に定義できることが分かった [HS11a, HS11b].

そこで Lehner の研究と西郷・長谷部の論文を統合してみたいと考えた．Spreadability system という概念を用いることでそれがうまくいったので，その結果を報告するのが本稿の目的であるが，まず (i) exchangeability と spreadability について，(ii) キュムラントに関する [HS11a, HS11b] の結果について，解説してから，最後に主結果を述べる．

2 Exchangeability と spreadability

Exchangeability, spreadability という概念は確率論で知られており，次のように定義される．

定義 2.1. (1) 実数値確率変数列 $(X_n)_{n\geq 1}$ が exchangeable であるとは，任意の置換 $\sigma \in S_\infty := \bigcup_{n\geq 1} S_n$ に対して

$$(X_1, X_2, \cdots) \overset{\mathrm{d}}{=} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \cdots) \tag{2.1}$$

となることである．つまり並び替えても同時分布が不変になるということである．

(2) $(X_n)_{n\geq 1}$ が spreadable であるとは，(2.1) が任意の (狭義) 単調増加関数 $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して成り立つことである．つまり部分列をとっても同時分布が不変ということである．

これらは時系列で得られたデータに対する自然な対称性と言えるだろう．実際，統計学で用いられているようである．もし $(X_n)_{n\geq 1}$ が (確率論の意味で) 独立同分布ならば，exchangeable になることは直ちに分かる．なぜならこの場合，モーメント $E(X_n^k)$ は n に依存せず，しかも独立性より混合モーメントは $E(X_1^2 X_2^4 X_6) = E(X_1^2)E(X_2^4)E(X_6)$ のように計算できてしまうからである.*3 実はこの逆は成り立たない．実際次の定理が成り立つことが知られている．

定理 2.2. *(de Finetti の定理) 確率変数列 $(X_n)_{n\geq 1}$ に関して次の 3 条件は同値である．*

1. $(X_n)_{n\geq 1}$ は *exchangeable.*

*2 統計学で最も良く用いられるのは 2 次のキュムラント $K_2(X_1, X_2)$ で，それは共分散 $\varphi(X_1X_2) - \varphi(X_1)\varphi(X_2)$ と一致する．

*3 ここでは話を簡単にするため，モーメントが有限であることを仮定した．

2. $(X_n)_{n\geq 1}$ は *spreadable.*

3. $(X_n)_{n\geq 1}$ はある部分 σ-加法族への条件付き期待値に関して独立同分布になる.

ここで条件付き期待値に関して独立同分布とは, 部分 σ-加法族を $\mathcal{G}$ とすると, 次の 2 条件が成り立つことである.

$P[X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n \mid \mathcal{G}] = P[X_1 \in A_1 \mid \mathcal{G}] \cdots P[X_n \in A_n \mid \mathcal{G}], \quad n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$
$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を固定したとき, $P[X_i \in A \mid \mathcal{G}]$ は i に依らない.

さて, $(X_n)_n$ たちが非可換の状況でこの定理がどうなるかを考えてみる. モーメント $\varphi(X_{i_1} \cdots X_{i_n})$ たちが分布の役割を果たすと考えれば, exchangeable, spreadable といった概念は同様に定義できる. しかし非可換になると, 定理 2.2 は成り立たない. なぜなら, 複数の種類の独立性があり, 条件 3 においてどの独立性を考えるべきか一意的に決まらないからである.[*4] それを逆手に取って, **exchangeability を独立性の定義にしてしまう**というのが Lehner の発想である. しかし定義 2.1 をそのまま非可換に拡張すれば「独立同分布な確率変数列」の定義はできるが, 同分布でないものも含めて「独立性」を定義するには不十分である. そこで定義 2.1 を非可換化するだけでなく, さらに多変数にしてみる ($\mathcal{A}$ が多変数化の役割を果たしている).

定義 2.3. (1) ある非可換確率空間 $(\mathcal{U}, \widetilde{\varphi})$ と状態を保つような準同型 $I^{(i)} : \mathcal{A} \to \mathcal{U}, X \mapsto X^{(i)}$ を考える. このとき $(\mathcal{U}, (I^{(i)})_{i=1}^{\infty}, \widetilde{\varphi})$ が **exchangeability system** であるとは, 任意の $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 任意の $X_j \in \mathcal{A}$ と任意の無限置換 $\sigma \in S_\infty$ に対して

$$\widetilde{\varphi}(X_1^{(i_1)} X_2^{(i_2)} \cdots X_n^{(i_n)}) = \widetilde{\varphi}(X_1^{(\sigma(i_1))} X_2^{(\sigma(i_2))} \cdots X_n^{(\sigma(i_n))}) \tag{2.2}$$

が成り立つことである.

(2) (2.2) が任意の (狭義) 単調増加関数 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して成り立つとき, $(\mathcal{U}, (I^{(i)})_{i=1}^{\infty}, \widetilde{\varphi})$ を **spreadability system** という.

定義から, exchangeability system ならば spreadability system であるということが直ちに分かる. そこで以降では spreadability system $(\mathcal{U}, \widetilde{\varphi})$ が与えられたとき, その $*$-部分代数たち $\mathcal{A}^{(j)} := I^{(j)}(\mathcal{A})$ を「独立」と呼ぶことにする. つまり独立な部分代数とは, ある共通の代数 $\mathcal{A}$ からの準同型写像たちの像になっていて, (2.2) を満たすものたちのことである. このように準同型写像を用いることで, 同分布でない確率変数たちに対しても独立性を定義できる.

(非可換) 確率変数列 $(Y_n)_n \subset \mathcal{U}$ が与えられたとき, 定義 2.3(2) において $\mathcal{A} := \mathbb{C}[X]$(多項式環), $I^{(n)}(X) := Y_n$ と定義し, $I^{(n)}$ を $\mathbb{C}[X]$ に $*$-hom として拡張する. すると (2.2) は $(Y_n)_n$ が exchangeable だと言っていることになる. つまり独立同分布列の話が再現される.

ここで spreadability system と exchangeability system の例を紹介する.

[*4] 非可換の場合に何が言えるかについては, 例えば Köstler の研究 [K10] を参照のこと

例 2.4. (1) 自由独立性. 確率空間 $(\mathcal{A},\varphi)$ に対して, $(\mathcal{A}^{(i)},\varphi^{(i)})$ をそのコピーとする. そして $(\mathcal{U},\widetilde{\varphi}) := *_{i\geq 1}(\mathcal{A}^{(i)},\varphi^{(i)})$ をその自由積とする. さらに $*$-hom $I^{(j)}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{(j)}$ を $I^{(j)}(X) := X$ で定義すれば, $(\mathcal{U},\widetilde{\varphi},(I^{(j)})_j)$ は exchangeability system になる. この場合, 任意の $X\in\mathcal{A}$ に対して, $(\mathcal{U},\widetilde{\varphi})$ の確率変数列 $(I^{(j)}(X))_{j\geq 1}$ は自由独立同分布な列となる.

(2) 単調独立性. 確率空間 $(\mathcal{A},\varphi)$ に対して, $(\mathcal{A}^{(i)},\varphi^{(i)})$ をそのコピーとする. そして $(\mathcal{U},\widetilde{\varphi}) := \triangleright_{i\geq 1}(\mathcal{A}^{(i)},\varphi^{(i)})$ をその単調積とする. 単調積とは何かというと, 代数 $\mathcal{U}$ はやはり自由積を考えるが, 状態 $\widetilde{\varphi}$ は $(\mathcal{A}^{(i)})_{i\geq 1}$ が $(\mathcal{U},\widetilde{\varphi})$ の中で単調独立になるように定める (これで一意的に定まる). やはり自由の場合と同様に $*$-hom $I^{(j)}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{(j)}$ を $I^{(j)}(X) := X$ で定義すると, 今度は $(\mathcal{U},\widetilde{\varphi},(I^{(j)})_j)$ は exchangeability system にならないが, spreadability system にはなる.

最後に本稿では扱わない話題だが, 非可換の場合に定理 2.2 を拡張するという研究の方向もある. [KS09] では, 非可換確率変数列 $(X_n)_{n\geq 1}$ の分布が「S_∞ の作用で不変」という条件を強めて, 「量子対称群の作用で不変」という条件にすると, それが条件付き自由独立同分布と同値になることが証明された. また [C11] では同様に「量子化された単調増加関数の作用で分布が不変」という条件が条件付き自由独立同分布を示している. 但し証明では $(X_n)_n$ が生成する vN 環が normal faithful state を持つということを仮定しており, 少なくとも normal faithful の仮定を外すと自由独立同分布でない例が作れてしまう. さらに他の量子群の作用で $(X_n)_n$ の分布が不変という条件から, 独立性のようなものが出てくるかという研究もある [BCS12].

3 キュムラントについて

3.1 自由キュムラントと単調キュムラント, その存在と一意性

確率論でも自由確率論でも, キュムラントと言えば以下の性質を満たす多重線型写像 $K_n : \mathcal{A}^n\to\mathbb{C}$ のことである.

(K1) 独立性のみに依存する定数 $c(\pi)$ (π は集合 $\{1,\cdots,n\}$ の分割, 後述) が存在して,

$$K_n(X_1,\cdots,X_n) = \varphi(X_1\cdots X_n) + \sum_{\pi\in P(n),\pi\neq 1_n} c(\pi)\varphi_{(\pi)}(X_1,\cdots,X_n).$$

ここで $\varphi_{(\pi)}$ は π に応じて定まる多重線型写像であり, その定義は次の例から推察できると思う: $n=5$, $\pi=\{\{1,3,4\},\{2,5\}\}$ ならば $\varphi_{(\pi)}(X_1,\cdots,X_5) = \varphi(X_1X_3X_4)\varphi(X_2X_5)$ である. 1_n とは自明な分割 $\{\{1,\cdots,n\}\}$ のことで, $\varphi_{(1_n)}(X_1,\cdots,X_n) = \varphi(X_1\cdots X_n)$ である.

(K2) $X_1,\cdots,X_n$ が 2 つの独立なグループに分かれるとする, つまり $\emptyset\neq I\subsetneq\{1,\cdots,n\}$ が存在して, $\{X_i\mid i\in I\}$ と $\{X_i\mid i\in I^c\}$ が独立になるならば, $K_n(X_1,\cdots,X_n)=0$.

この性質 (K2) がキュムラントが便利になる所以である．1 変数のキュムラント $K_n(X)$ を, $K_n(X) := K_n(X, \cdots, X)$ で定義しておくと, (K2) から次が従う:

$$X, Y \text{ が独立ならば, } K_n(X+Y) = K_n(X) + K_n(Y). \tag{3.1}$$

この意味での 1 変数自由キュムラントは, Speicher より前に Voiculescu が導入している [V85]. また Lehner は exchangeability system を独立性の定義にして, それに対してキュムラントを導入したが, その場合でも (K1), (K2) が成り立つことが知られている [L04].

単調独立性に対しては, (K2) は期待できない．なぜなら, もし (K2) が成り立ってしまうと 1 変数キュムラントの加法性 (3.1) も成り立つ．しかし単調独立性については (X, Y) が独立性な場合と (Y, X) が独立な場合とで $X+Y$ のモーメントの計算結果が異なる．キュムラントの加法性はこの事実に矛盾する．

そこで 1 変数の場合に次の性質に注目したのが [HS11a] の仕事である．

$$X^{(1)}, \cdots, X^{(N)} \text{ が i.i.d. のとき, } K_n(X^{(1)} + \cdots + X^{(N)}) = NK_n(X^{(1)}).$$

これは明らかに (3.1) の一般化になっている．多変数のキュムラントの場合, (K2) を次のように一般化できることも分かった [HS11b]．まず単調独立性から作られた spreadability system $(\mathcal{U}, (I^{(i)})_{i=1}^{\infty}, \widetilde{\varphi})$ を取る (例 2.4(2) を参照). ただし簡単のため $\widetilde{\varphi}$ も φ と書くことにする．$X \in \mathcal{A}$ に対して, 記号 $N.X$ によって i.i.d. 確率変数の和 $X^{(1)} + \cdots + X^{(N)}$ を表すことにして, 以下の条件を考える:

(K2') $K_n(N.X_1, \cdots, N.X_n) = NK_n(X_1, \cdots, X_n)$.

これは (K2) の一般化になっている．実際, 多重線形性より

$$K_n(N.X_1, \cdots, N.X_n) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{N} K_n(X_1^{(i_1)}, \cdots, X_n^{(i_n)})$$

となるが, もし (K2) が成り立っていれば $i_1, \cdots, i_n$ が全て等しい場合を除いて $K_n(X_1^{(i_1)}, \cdots, X_n^{(i_n)}) = 0$ となる．したがって N 項のみ残り, また $\varphi(X_1 \cdots X_n) = \varphi(X_1^{(i)} \cdots X_n^{(i)})$ だったから ($X \mapsto X^{(i)}$ は状態を保つ!), (K2') を得る．

(K1), (K2') を満たす自由キュムラント, 単調キュムラントなどは一意的に存在する．つまり (K2) よりも弱い条件である (K2') があればキュムラントの一意性も成り立つ．このことから (K2') という条件は適切な一般化だということができる．

3.2 集合の (順序付き) 分割とモーメント・キュムラント公式

まず $\pi = \{V_1, \cdots, V_k\}$ が**集合の分割**であるとは, $V_1, \cdots, V_k$ が $\{1, \cdots, n\}$ の空でない disjoint な部分集合で, $\{1, \cdots, n\} = \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i$ を満たすことをいう．また k を $|\pi|$ と書き, $V \in \pi$ のことを**ブロック**と呼ぶことにする．集合 $\{1, , \cdots, n\}$ の分割全体を $\mathcal{P}(n)$ と書く．

分割 π が non-crossing であるとは, 任意の 2 つのブロック $V, W \in \pi$ が**交わらない**ことを言い, non-crossing な分割全体を $\mathcal{NC}(n)$ と書く. 「交わらない」ことの定義は付録 1 を参考にしていただきたい.

$\mathcal{P}(n)$ には半順序が定義できる. $\pi \leq \sigma$ とはどの π のブロックも σ のあるブロックに含まれていることである. この順序では, 自明な分割 1_n が全ての分割の中で最も大きい.

集合 $\{1, \cdots, n\}$ の**順序付き分割**とは, 集合の分割を考えるときに, ブロック V_i の順序を区別したもののことである. つまり部分集合の有限列 $\pi = (V_1, \cdots, V_k)$ で $V_i \neq \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset (i \neq j)$, $\{1, \cdots, n\} = \bigsqcup_{i=1}^k V_i$ を満たすもののことである. $\mathcal{LP}(n)$ を順序付き分割全体とする.

また $\mathcal{LP}(n)$ にも半順序が入る. この場合はブロックだけではなくて, 順序も考慮する. すなわち, $\pi = (V_1, V_2, \cdots) \leq \sigma = (W_1, W_2, \cdots)$ とは, 以下の 2 条件を満たすことである:

(1) 任意の i に対してある $p(i)$ が存在して $V_i \subset W_{p(i)}$ (このような p は一意である).
(2) (1) で定まる関数 $p(i)$ は, 非減少関数である. つまり $i \leq j$ ならば $p(i) \leq p(j)$.

順序付き分割 $\pi = (V_1, V_2, V_3, \cdots)$ が**単調である**とは, $\{V_1, V_2, V_3, \cdots\} \in \mathcal{NC}(n)$ であり, かつ「もし V_i が V_j を**覆っている**ならば $i \leq j$」という条件を満たす場合をいう. 「覆っている」ことの定義は付録の 2 を参考にしていただきたい. $\mathcal{M}(n)$ によって単調な順序付き分割全体を表す.

集合の (順序付き) 分割を用いると, 確率変数のモーメントはキュムラントを用いて具体的に書けてしまう.

定理 3.1. *(*モーメント・キュムラント公式*) (1)* K_n を自由キュムラントとすると,

$$\varphi(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} K_{(\pi)}(X_1, \cdots, X_n). \tag{3.2}$$

ここで $K_{(\pi)}$ の定義は *3.1* 節の *(K1)* のところで述べた $\varphi_{(\pi)}$ の定義とだいたい同じであるが, 1 つ例を挙げておく*:* $n = 5$, $\pi = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}\}$ ならば $K_{(\pi)}(X_1, \cdots, X_5) := K_3(X_1, X_2, X_5) K_2(X_3, X_4)$ である.

(2) K_n を単調キュムラントとすると,

$$\varphi(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{M}(n)} \frac{1}{|\pi|!} K_{(\pi)}(X_1, \cdots, X_n). \tag{3.3}$$

ここでの $K_{(\pi)}$ は, π のブロックの順序を気にせずに, *(1)* の場合と同様に定義する.

ここで $\frac{1}{|\pi|!}$ という項がくっついているのが単調キュムラントの場合の特徴であるが, $|\pi|!$ とはブロックを並び替えることを考えたときの, その並び替えの総数に他ならない.

また $\pi \in \mathcal{M}(n)$ のブロックを並び替えて別の σ を作っても $\sigma \in \mathcal{M}(n)$ となることがある. このとき $K_\pi = K_\sigma$ となる. これを考慮して (3.3) を順序付き分割を用いずに

$$\varphi(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \frac{c_\pi}{|\pi|!} K_{(\pi)}(X_1, \cdots, X_n)$$

と書くこともできるが (c_π はある非負整数), (3.3) の形は spreadability まで一般化すると重要な意味を持つようになるので, (3.3) のまま残しておいた方がよいだろう.

最後に, 自由独立性の場合は逆にキュムラントをモーメントで書くこともできるが (反転公式, [NS06] 参照), 単調の場合はそのような公式は知られていなかった. 今回の研究では単調独立性にも適用できる一般的な反転公式を得た (定理 4.3).

4 Spreadability system に対するキュムラント

ここでも φ と $\widetilde{\varphi}$ の記号を区別しないことにする. $(\mathcal{U}, (I^{(i)})_{i=1}^{\infty}, \varphi)$ を spreadability system としたとき, $(X^{(i)})_{i\geq 1}$ は「独立同分布」(i.i.d.) な確率変数列と呼ぶべきものになる. 前節での単調キュムラントの定義に倣って, i.i.d. 列の和 $N.X := X^{(1)} + \cdots + X^{(N)}$ を考える.

Spreadability system は集合の順序付き分割と密接に関係していることを述べる. まず**自然数列** $(i_1, \cdots, i_n)$ **に付随する順序付き分割**を定義する. $i_1, \cdots, i_n$ の中で最も小さい値を j_1 とし, $V_1 := \{k : i_k = j_1\}$ とする. 次に二番目に小さい値を j_2 とし, 同様に V_2 を定める. この定義を繰り返していくと順序付き分割 $\pi = (V_1, V_2, \cdots) \in \mathcal{LP}(n)$ が定まる. 付録 3 に具体例が挙げてある. 大事なのは, spreadability system の定義から, $\varphi(X_1^{(i_1)} X_2^{(i_2)} \cdots X_n^{(i_n)})$ の値は $(i_1, \cdots, i_n)$ から定まる $\pi \in \mathcal{LP}(n)$ のみで決まるということである.

二つの元 $\pi = (V_1, \cdots, V_p), \sigma = (W_1, \cdots, W_q) \in \mathcal{LP}(n)$ の積を $\pi \curlywedge \sigma = (V_1 \cap W_1, V_1 \cap W_2, \cdots, V_1 \cap W_q, V_2 \cap W_1, \cdots, V_p \cap W_q)$ で定義する. 但し, 空集合が現れたらそれは取り除くことにする.

以上の準備のもとで, spreadability system に付随するキュムラントを次のように定義する.

(i) π を $(i_1, \cdots, i_n)$ に付随する順序付き分割として, $\varphi_\pi(X_1, \cdots, X_n) := \varphi(X_1^{(i_1)} \cdots X_n^{(i_n)})$ と置く. これは $(i_1, \cdots, i_n)$ の取り方に依らない. さらに $(j_1, \cdots, j_n)$ に付随する順序付き分割を σ として $\varphi_\pi(X_1^{(j_1)}, \cdots, X_n^{(j_n)})$ を $\varphi_{\pi \curlywedge \sigma}(X_1, \cdots, X_n)$ で定義する. 気持ちとしては, 既に独立性 π が与えられた上に, さらに σ という独立性も仮定してモーメントを計算したものが $\varphi_\pi(X_1^{(j_1)}, \cdots, X_n^{(j_n)})$ である.

(ii) 次のことを証明する: $\varphi_\pi(N.X_1, \cdots, N.X_n)$ は N に関する多項式である.

(iii) π に付随するキュムラント K_π を「$K_\pi(X_1, \cdots, X_n) :=$ (ii) における $N^{|\pi|}$ の係数」によって定義する.

注意 4.1. (i), (iii) で現れる φ_π, K_π の定義は, 定理 3.1 や 3.1 節の (K1) で用いた $\varphi_{(\pi)}, K_{(\pi)}$ と同じではないので, 注意が必要である. 但し, 特別な π に対しては $\varphi_\pi = \varphi_{(\pi)}$ などと一致することも大切な性質である. 実際, 以下の事実が成り立つ.

1. 自由独立性から spreadability system を作った場合, $\pi \in \mathcal{NC}(n)$ ならば $\varphi_\pi = \varphi_{(\pi)}$.
2. 単調独立性から spreadability system を作った場合, $\pi \in \mathcal{M}(n)$ ならば $\varphi_\pi = \varphi_{(\pi)}$.

これらの性質と, 後に出てくる命題 4.5 を合わせると, $K_\pi, K_{(\pi)}$ についても同様の結論を得ることができる.

(ii) に関して, 問題は「$\pi \geq \sigma$ を固定したときに, $\varphi_\pi(X_1^{(k_1)}, \cdots, X_n^{(k_n)}) = \varphi_\sigma(X_1, \cdots, X_n)$ となる $(k_1, \cdots, k_n) \in \{1, \cdots, N\}^n$ の組の個数」を数えることになる. これは実行可能で, 次の結果を得る.

命題 4.2. $\sigma \leq \pi \in \mathcal{LP}(n)$ とする. $V \in \pi$ に対して, σ_V によって V に含まれる σ のブロック全体を表す. このとき

$$\varphi_\pi(N.X_1, \cdots, N.X_n) = \sum_{\sigma \leq \pi} \left(\prod_{V \in \pi} \binom{N}{|\sigma_V|} \right) \varphi_\sigma(X_1, \cdots, X_n).$$

特に $\varphi_\pi(N.X_1, \cdots, N.X_n)$ は N の多項式になる.

この N の多項式について, $N^{|\pi|}$ の係数は具体的に書けるので次の結果を得る.

定理 4.3. *(モーメント・キュムラント反転公式)* $\sigma \leq \pi$ とする. $|\pi : \sigma|$ によって $|\sigma_V|$ の積 $\prod_{V \in \pi} |\sigma_V|$ を表すことにすると, 次が成り立つ.

$$K_\pi(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{\sigma \leq \pi} \frac{(-1)^{|\pi| - |\sigma|}}{|\pi : \sigma|} \varphi_\sigma(X_1, \cdots, X_n).$$

なんとこのアプローチでは反転公式の方が先に求められてしまった. 元のモーメントキュムラント公式を証明するのは易しくないのだが, 期待通りの次の結果を得る.

定理 4.4. *(モーメント・キュムラント公式)* $\sigma \leq \pi \in \mathcal{LP}(n)$ とする. $[\pi : \sigma]!$ によって $\prod_{V \in \pi} |\sigma_V|!$ を表すことにすると, 次が成り立つ:

$$\varphi_\pi(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{\sigma \leq \pi} \frac{1}{[\pi : \sigma]!} K_\sigma(X_1, \cdots, X_n).$$

この公式は, 自由キュムラントに対する公式 (3.2), 単調キュムラントに対する公式 (3.3) などを一般化したものになっている. 但し, ここで現れる和は全ての順序付き分割に渡っているので, $\mathcal{NC}(n)$ とか $\mathcal{M}(n)$ はどこから現れるのかという疑問が出てくるが, 実は次のことが分かる.

命題 4.5. *(1)* 自由独立性から *spreadability system* を作った場合, $\pi \notin \mathcal{NC}(n)$ に対して $K_\pi = 0$.
(2) 単調独立性から *spreadability system* を作った場合は, $\pi \notin \mathcal{M}(n)$ に対して $K_\pi = 0$.

最後に一意性について述べる.

命題 4.6. *Spreadability system* に対して定義されたキュムラント K_π は次の性質を満たす.

(1) 定数 $c(\pi;\sigma)$ が存在して，

$$K_\pi = \varphi_\pi + \sum_{\sigma<\pi} c(\pi;\sigma)\varphi_\sigma.$$

(2) $K_\pi(N.X_1,\cdots,N.X_n) = N^{|\pi|}K_\pi(X_1,\cdots,X_n)$.

(1), (2) を満たすキュムラントは一意的である．つまり別の $\widetilde{K}_\pi$ が *(1), (2)* を満たしているとすれば *(ただし定数* $c(\pi;\sigma)$ *は異なっているとしても良い)*, $K_\pi = \widetilde{K}_\pi$.

参考文献

[A01] M. Anshelevich, Partition-dependent stochastic measures and q-deformed cumulants, Doc. Math. **6** (2001), 343–384.

[BCS12] T. Banica, S. Curran and R. Speicher, De Finetti theorems for easy quantum groups, Ann. of Probab. **40**, No. 1 (2012), 401–435.

[B86] M. Bożejko, Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product, Bull. Un. Mat. Ital. (6) **5-A** (1986), 13–21.

[C11] S. Curran, A characterization of freeness by invariance under quantum spreading, J. Reine Angew. Math. **659** (2011), 43–65.

[HS11a] T. Hasebe and H. Saigo, The monotone cumulants, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. Vol. 47, No. 4 (2011), 1160–1170.

[HS11b] T. Hasebe and H. Saigo, Joint cumulants for natural independence, Elect. Commun. Probab. Vol. 16 (2011), 491–506.

[K10] C. Köstler, A noncommutative extended de Finetti theorem, Journal of Functional Analysis **258** (2010), 1073–1120.

[KS09] C. Köstler and R. Speicher, A noncommutative de Finetti theorem: invariance under quantum permutations is equivalent to freeness with amalgamation, Comm. Math. Phys. **291** (2009), 473–490.

[L04] F. Lehner, Cumulants in noncommutative probability theory I, Math. Z. **248** (2004), 67-100.

[M01] N. Muraki, Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Topics **4** (2001), 39–58.

[NS06] A. Nica and R. Speicher. *Lectures on the Combinatorics of Free Probability.* LMS Lect. Notes Ser., **335**, Cambridge University Press (2006).

[S94] R. Speicher, Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution, Math. Ann. **298** (1994), 611-628.

[SW97] R. Speicher and R. Woroudi, Boolean convolution, in Free Probability Theory, Ed. D. Voiculescu, Fields Inst. Commun. **12** (Amer. Math. Soc., 1997), 267–280.

[V85] D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product algebras, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Lect. Notes in Math. **1132**, Springer (1985), 556–588.

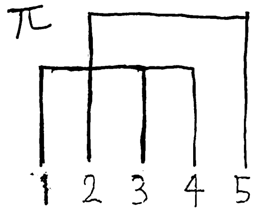
付録：集合の分割

1. Crossing と non-crossing

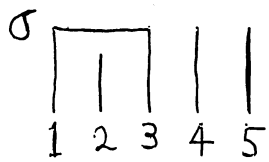
$\pi = \{\{1,3,4\},\{2,5\}\}$

$\sigma = \{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$

この場合　$\sigma \leq \pi$



交わる



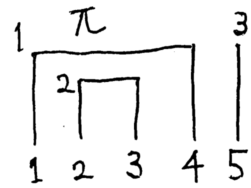
交わらない

2. 単調な分割

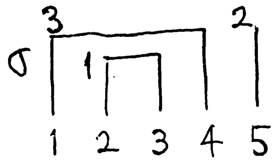
$$\pi = (\underset{\uparrow\,\text{1st}}{\{1,4\}}, \underset{\uparrow\,\text{2nd}}{\{2,3\}}, \underset{\uparrow\,\text{3rd}}{\{5\}})$$

$$\sigma = (\underset{\uparrow\,\text{1st}}{\{2,3\}}, \underset{\uparrow\,\text{2nd}}{\{5\}}, \underset{\uparrow\,\text{3rd}}{\{1,4\}})$$

$\{1,4\}$ は $\{2,3\}$ を覆っている.



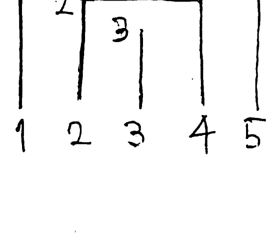
単調



単調でない

3. 自然数列から定まる順序付き分割

$(1, 2, 3, 2, 1)$



$(5, 5, 4, 8, 5, 8)$