非可換確率論における独立性と無限分解可能分布

長谷部高広

2017 年 2 月 25 日

1 非可換確率論

1.1 名前の由来

量子物理学では物理量を非可換な作用素として扱う数学モデルが導入され，今日に至るまで受け入れられている．例えば素粒子理論では，粒子 (あるいは量子場) が消滅したり，粒子同士が相互作用して別の粒子に変化したりと激しい変化が起こるが，このような変化を複数の作用素の積により記述する．よって作用素のなす代数 (作用素環) が必要になる．なぜ物理量を非可換な作用素にするのかという素朴な疑問もあるが，それはここでは措いておく．

Newton 力学のような古典物理学とは異なり，量子物理における物理量 (位置や運動量など) は非可換であることに加えて，本質的に確率変数として定義され，確率を回避することはできないというのが一般的な了解となっている．このように量子物理においては物理量は‘非可換’であることに加えて‘確率変数’であるという性質を持っている．このことから，物理量を非可換確率変数とも呼ぶ．量子物理の理論をなんとか非可換ではない古典確率論[*1]に帰着させようという試みもなされてきたが，ある自然な仮定のもとでは古典確率論に帰着できないことが実験によって確認されている [AGR81].

非可換確率論は量子確率論，代数的確率論とも呼ばれる．ひとまず確率論的な側面を強調した作用素環論だと理解しておけば良いと思う．

1.2 ランダム行列

積演算について非可換な確率変数として，分かりやすい例は成分が確率変数となっている行列である．これはランダム行列と呼ばれる．ランダム行列がなぜ研究されるのかというと，2 つの重要な由来がある．まず 1920 年代に Wishart によって推定理論への応用のためにランダム行列が用いられ，また 1950 年代に Wigner によって原子核の核子のエネルギー準位を記述するモデルとしてランダム行列が用いられた．その後の研究で様々な分野との関係が見つかっている．数学に関しては，可積分系 (Painlevé 方程式など)，表現論，素数の分布などとの関係が知られている [Meh04]．より応用的な分野になると膨大にあるが，最近では無線通信理論 [TV04]，学習理論 [WNKTN14] や量子情報理論 [CN16] にランダム行列が応用されている．これらのランダム行列の応用において一貫して重要になるのは，固有値が確率的にどのように分布しているかを調べることである．

[*1] 量子物理に対して，それ以前の物理を古典物理と呼ぶことがある．これに倣って非可換確率論以前の普通の確率論を古典確率論と呼ぶことがある．

1.3 自由確率論の出現

非可換確率論では，Voiculescu が 1980 年代に‘自由確率論’を提唱した時点から 1 つの新しい分流ができた [Voi85, Voi86]．‘自由確率論’というのは奇妙な用語に見えるが，群や代数の自由積と相性の良い (非可換) 確率論ということで，このように呼ばれている．生成元が n 個の自由群 $\mathbb{F}_n$ から作られる von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ というものがあり，例えば $n \neq m$ の時に $L(\mathbb{F}_n)$ と $L(\mathbb{F}_m)$ は非同型になるかという問題が古くからある．Voiculescu は $L(\mathbb{F}_n)$ の理解が進むことを期待して自由確率論を始めたと [VDN92] の序文に書いている．ちなみに上記の同型問題は現在でも未解決である．

古典的な確率論の文脈でも，群の自由積上でのランダムウォークの再帰性を議論する際に自由確率論が有効であることを Woess が発見している [Woe86] (この研究は自由確率論とは独立になされており，Woess は現在 Voiculescu 変換と呼ばれているものを Voiculescu と独立に発見している)．

自由確率論とは何かを一言で説明するならば，確率論における‘独立性’を‘自由独立性’で置き換えたらどうなるか，ということを調べる分野である (自由独立性は第 3 節で定義する)．古典独立性も自由独立性も，$\mathbb{E}[XYXY]$ のように X, Y が混ざった期待値 (混合モーメント) をいかにして $\mathbb{E}[X^m]$，$\mathbb{E}[Y^n]$ のみを用いて計算するかという計算規則である．例えば X, Y が古典独立 (特に可換) ならば $\mathbb{E}[XYXY] = \mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$ となる．自由独立ならばどうなるかというと，$\mathbb{E}[XYXY] = \mathbb{E}[X^2](\mathbb{E}[Y])^2 + (\mathbb{E}[X])^2\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X])^2(\mathbb{E}[Y])^2$ となる．

1.4 独立性とは何か

上記のように，古典独立性と自由独立性は互いに異なった‘混合モーメントの計算規則’と理解できるのだが，すると他にも独立性があるのではないかと疑問が湧いてくる．まず Speicher と Woroudi によってブール独立性というものが見つかった [SW97]．続いて Speicher はある仮定のもとでは非可換確率論における独立性は古典独立性 (可換独立やテンソル独立とも呼ぶ)，自由独立性，ブール独立性の 3 つに限るという定理を証明した [Spe97]．

この Speicher の仮定は自然なものだったが，その仮定を満たさない例として，村木が 2000 年ごろに単調独立性・反単調独立性を発見した [Mur00]．さらに村木は Speicher よりも弱い条件を導入し，それを満たす独立性は古典・自由・ブール・単調・反単調独立性の 5 つのみであることを示した [Mur02]．ちなみに反単調独立性というのは，単調独立性と本質的に同じものであるため，本質的には 4 つの独立性に分類されたことになる．

その後，Speicher や村木の独立性の定義をさらに弱めるなどして，様々な独立性が定義されている．かなり一般的な定義もされているが，しばらくすると他の誰かがその枠組みから外れるような例を考えたりして，今の所は全てを網羅するような独立性の定義は存在しないと思う．本稿では村木の分類 (5 種類ないし 4 種類) の独立性のみを扱う．独立性に関しては第 3 節で詳しく解説する．

1.5 確率論のアナロジーの探求

自由確率論は古典独立性が自由独立性に置き換わった非可換確率論であり，古典確率論の色々な概念のアナロジーを定義することができる．例えばフーリエ変換 (特性関数)，確率分布のたたみこみ，中心極限定理，Poisson の少数の法則，無限分解可能性，Lévy 過程，確率積分，エントロピーなどの自由確率論版が自然に定義される．理論と理論の間にあるアナロジーを考察するのは数学者の好むところであるから，確率論とのアナロジーの宝庫である自由確率論は格好の研究対象である．確率論の定理をそのまま自由確率論に焼き直すこ

とができるケースもかなりあるが，技術的な困難から証明されていないこともある．例えば，2 通りある自由エントロピーの定義が互いに一致するかどうかまだ分かっていないだとか，エントロピーの性質として自然に期待されるがまだ証明されていない性質もある．自由エントロピーについては日本語の論説 [Hia99, HU06] があり，また出版予定の Mingo と Speicher の本 [MS17] に詳しい．このように，期待される確率論のアナロジーの証明が自由確率論でより難しくなる場合もあるし，逆に簡単になる場合もある．

かなり確率論の諸定理の類似が成り立つが，証明手法は大きく異なることもよくあるのが不思議で面白い点である．本稿の第 6 節でも‘単峰性’をキーワードに，不思議なアナロジーを紹介する．

1.6 極限定理と無限分解可能分布

確率論のアナロジーとして Voiculescu は自由確率論の最初の論文で中心極限定理の自由版を考えた [Voi85]．確率変数 $X_1, X_2, \dots$ が自由独立で同分布を持つとし，さらに各 X_i は平均 0，分散 1 を持つとすると，$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$ の分布が $n \to \infty$ において Wigner の半円則

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

に弱収束することが示された．さらに Poisson の少数の法則の自由版もあり，極限には自由 Poisson 分布というものが現れる．これは Marchenko–Pastur 分布とも呼ばれる．

ところで確率論では中心極限定理や Poisson の少数の法則がかなり一般化できることが知られており，無限分解可能分布というクラスの確率分布が極限に現れることが知られている (Khintchine の定理，[GK54] を参照)．Bercovici と Pata [BP99] がその自由版を (やや弱い形で) 証明し，この業界における重要な結果の 1 つとなっている．さらに Bercovici と Pata の定理を拡張し，古典確率論の定理とまったく同じような形にしたのが Bercovici と Pata [BP00]，Chistyakov と Goetze [CG08a] である．極限定理と無限分解可能分布については本稿の 4–7 節で詳しく述べる．

1.7 ランダム行列と自由確率論

自由中心極限定理において Wigner の半円則が現れる．この分布は Wigner が 1950 年代にランダム行列の固有値分布においてすでに発見していた．おそらくこれだけの状況証拠から，Voiculescu は自由確率論とランダム行列の間に関係があるのではないかと推測し (たのだと筆者は推測している)，驚くべき定理を証明するに至った．各 $N = 1, 2, 3, \dots$ に対して 2 つの (3 つ以上でも話は同様である) N 次エルミートランダム行列 $X(N), Y(N)$ が与えられ，行列のサイズを大きくした極限 $N \to \infty$ で $X(N), Y(N)$ の経験固有値分布がそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の確率測度 μ, ν に確率収束するとする．このとき $N \to \infty$ の極限で $X(N), Y(N)$ が自由独立な非可換確率変数のようにふるまうならば，$X(N), Y(N)$ は漸近的自由であるという．[*2] Voiculescu は $X(N), Y(N)$ が互いに古典独立な GUE (Gaussian Unitary Ensemble) と呼ばれるランダム行列のときに，漸近的自由性を示した [Voi91]．現在では GUE より広いクラスのランダム行列に対して漸近的自由性が成り立つことが知られている．漸近的自由な $X(N), Y(N)$ に対しては，例えば和 $X(N) + Y(N)$ の経験固有値分布は μ と ν の自由たたみこみ $\mu \boxplus \nu$ (3.6 節を参照) に確率収束することが分かる．また Wigner が 1950 年代に証明した半円則は漸近的自由性と前節の自由中心極限定理から系として従うことも分かる．

このように，自由確率論はランダム行列の固有値解析に応用でき，その観点から多くの研究がある．ランダム行列と自由確率論については出版予定の Mingo と Speicher の本 [MS17] で詳しく解説される．最近の大きな進展としては，漸近的自由な複数のランダム行列の多項式の固有値分布を数値的に調べるアルゴリズムが考

*2 素粒子物理 (場の量子論) でも同じ「漸近的自由」という用語を用いるのでちょっと紛らわしいが，ここでは全く別の用語である．

案された [BTS]．他にも Collins，福田，Nechita，Belinschi らによって量子情報理論への応用が精力的に研究されている [CN16]．物理学から離れてほぼ純粋数学として発展した自由確率論がランダム行列を介して量子物理学に戻ってきた感がある．

それではブール独立性や単調独立性はランダム行列と関係あるのか，と気になってくる．長いこと何も知られていなかったが，最近になってブール独立や単調独立を漸近的に実現するランダム行列モデルが Lenczewski [Len14] によって構成された．

1.8 非可換確率論で用いる数学

作用素環論と確率論が基本的な知識になり，他に様々な道具を用いる．本稿の中心的な話題となる確率分布のたたみこみの研究を行う場合は複素関数論，特に Herglotz 関数あるいは Pick 関数と呼ばれる単位円板あるいは上半平面で定義された解析関数が重要になる．中でも深い結果としては，単位円板からそれ自身への解析写像は，一次分数変換でなければ，内部または境界上に吸引的な固定点をただ 1 つ持つという Denjoy–Wolff の定理が使われる [BB07]．最近では Loewner chain の理論を使った研究も出てきている [Sch, FH]．組合せ論からは Gian-Carlo Rota による poset 上でのメビウス関数とゼータ関数の理論を活用する．これは Voiculescu が定義した自由キュムラントという概念をさらに発展させるために Speicher が利用した [Spe94]．自由キュムラントは組合せ論的に深い対象で，Hopf 代数を使った研究などもある [MN10]．他にも Accardi と Bożejko [AB98] によって直交多項式の理論が非可換確率論に導入され，それが Fock 空間の一般化と結びついたことで，この分野が発展する大きなきっかけとなった (日本語の本 [AO03] にも詳しく載っている)．

1.9 他分野へ与えた影響

非可換確率論の応用，または非可換確率論に動機付けられて始まった他分野での研究について触れておく．ランダム行列が最も重要な例であるが，これについてはすでに触れた．他には量子群の研究がある [BBC07]．また Biane [Bia97] が対称群と noncrossing partition に関する興味深い発見をしており，Coxeter 群の研究に波及している [Arm06]．同じく Biane が対称群の漸近表現論という分野 (Kerov，Vershik などが発展させた) において自由確率論の応用を発見した [Bia98]．また本稿の主題となる自由無限分解可能分布が現れるような Young 図形の漸近極限を考察している [Bia01]．この分野については洞による日本語の論説がある [Hor05]．Biane は古典確率論と表現論と非可換確率論の全てにおいて面白い研究成果をあげており，その研究スタイルに憧れている人は結構多いのではないかと思う (筆者もその 1 人である)．

自由確率論の研究に動機づけられて Barndorff-Nielsen と Thorbjørnsen [BT04] が古典無限分解可能分布に対する upsilon transform という概念を導入した．これはその後 Lévy 過程上の確率積分と関連して大きく発展し，現在も研究が続いている．初期の重要な論文としては，Barndorff-Nielsen，前島，佐藤による論文がある [BMS06]．

グラフ理論においては，2 つのグラフから新しいグラフを得る積演算 (グラフ積) が様々に知られている．いくつかのグラフ積については，その隣接行列を使って単調独立性やブール独立性が実現されることが発見され，Accardi や尾畑を中心として発展した [AO03, Oba16]．彼らは成長していくグラフの隣接行列のスペクトルを漸近的に解析するために非可換確率論の手法を用いている．尾畑による日本語の解説記事もある [Oba05]．

Noncommutative function theory という分野にも，自由確率論が影響を与えている．この分野では例えば素朴な疑問として $z_1, z_2, \dots, z_d$ が非可換な変数のときに，その関数 $f(z_1, \dots, z_d)$ の Taylor 展開とはどのようなものかと調べたりする．Vinnikov らが精力的に研究している [KVV14]．

最近の新展開として，Marcus らによる finite free probability がある [Mar, MSS]．彼らは多項式の根についての不等式評価を用いることによってある種の Ramanujan graph の存在を証明し [MSS15a]，さらに Kadison–Singer 予想を解いた [MSS15b]．彼らは多項式の根と自由確率論の驚くべき関係を発見し，finite free convolution という概念を導入した．まだ始まったばかりの分野で，今後さらに研究が進んでいくと思う．

1.10 論説の構成

第 2, 3 節では確率論をモーメントの言葉で定式化することから始め，次に非可換確率論と独立性，そして確率測度のたたみこみについて解説する．第 4 節で古典・非可換の場合の無限分解可能分布の基本を解説する．第 5 節で古典・非可換の極限定理と，そこから無限分解可能分布が現れることを見る．そして第 6, 7 節において古典と比較しつつ自由無限分解可能分布の例や性質を述べる．

2 古典確率論とモーメント

2.1 モーメント

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の $\boldsymbol{R}$ に値を取る確率変数 X に対して，その分布を μ_X と表す．つまり Borel 集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ に対して $\mu_X(A) = \mathbb{P}[X \in A]$ である．さらに X のモーメントが全て有限とする，つまり $\mathbb{E}[|X|^n] = \int_{\boldsymbol{R}} |x|^n \mathrm{d}\mu_X(x) < \infty, \forall n \in \boldsymbol{N}$ のとき，その n **次モーメント** (積率) を

$$m_n(\mu_X) = \int_{\boldsymbol{R}} x^n \mathrm{d}\mu_X(x) = \mathbb{E}[X^n] \tag{2.1}$$

と表す．しばしば確率変数 X は忘れて，$\boldsymbol{R}$ 上の確率測度 μ の n 次モーメント $m_n(\mu) = \int_{\boldsymbol{R}} x^n \mathrm{d}\mu(x)$ を考える．

確率分布 μ のモーメントが全て有限であるとする．このとき μ のモーメント列 $\{m_n(\mu)\}_{n\geq 0}$ が**決定的**であるとは，もし確率分布 ν が $\{m_n(\nu)\}_{n\geq 0} = \{m_n(\mu)\}_{n\geq 0}$ を満たすなら $\nu = \mu$ となることを言う [Akh65]．モーメント列が決定的であるための十分条件として Carleman の条件 [Akh65, p. 85] がある．これにより，コンパクト台を持つ分布や正規分布のモーメント列は決定的となる．もし μ のモーメント列が決定的ならば，μ の他に同じモーメント列を持つ確率分布は存在しないので，μ をモーメント列と同一視することができる．

2.2 古典独立性

確率変数 X, Y が**古典独立**であるとは，Borel 集合 $A, B \subset \boldsymbol{R}$ に対して

$$\mathbb{P}[X \in A, Y \in B] = \mathbb{P}[X \in A]\mathbb{P}[Y \in B] \tag{2.2}$$

が成り立つことであるが, よく知られた同値条件として，任意の有界連続関数 f, g に対して

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)] \tag{2.3}$$

が成り立つと言うこともできる．さらに確率変数 X, Y が決定的なモーメント列を持つならば，(2.3) は以下の条件とも同値になる:

$$\mathbb{E}[X^m Y^n] = \mathbb{E}[X^m]\mathbb{E}[Y^n], \qquad \forall m, n \in \boldsymbol{N}. \tag{2.4}$$

(2.3) から (2.4) はルベーグ収束定理の応用問題である．(2.4) から (2.3) の証明には，決定的なモーメントを持つ μ に対しては多項式の全体が $L^2(\boldsymbol{R}, \mu)$ において稠密であること [Akh65, Corollary 2.3.3] を用いる．これさえ認めれば，あとは Schwarz の不等式を用いるだけで簡単に証明できる．

2.3 古典たたみこみ

X, Y が古典独立な確率変数であるとき，$X+Y$ の確率分布を μ_X と μ_Y の**古典たたみこみ**といい，記号 $\mu_X * \mu_Y$ で表す．さらに X, Y は有限なモーメント列を持つとする．このとき $X+Y$ のモーメントは二項定理によって

$$\mathbb{E}[(X+Y)^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{E}[X^k Y^{n-k}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^{n-k}] \tag{2.5}$$

となる．特に，$X+Y$ のモーメントは X のモーメント $\mathbb{E}[X^m]$ と Y のモーメント $\mathbb{E}[Y^n]$ のみで計算される．ちなみに X, Y が決定的なモーメント列を持っていても，$X+Y$ のモーメント列は決定的とは限らない [Ber85].

古典確率論でよく知られているように，(指数的) **積率母関数** (moment generating function) を用いてたたみこみを特徴付けることができる．積率母関数とは

$$\mathcal{M}_X(z) = \int_{\boldsymbol{R}} e^{zx} \mathrm{d}\mu_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} z^n \tag{2.6}$$

で定義される関数であり，これを用いるとたたみこみが以下のように特徴付けられる:

$$\mathcal{M}_{X+Y}(z) = \mathcal{M}_X(z)\mathcal{M}_Y(z). \tag{2.7}$$

以上のように独立性やたたみこみはモーメントの言葉で書くことができる．モーメントが決定的であるかどうかについて微妙な問題があるが，だいたい確率分布とモーメントが同一視できると考えることにする．このように色々な概念をモーメントで理解しておくと，次節での非可換の場合を考えやすくなる．

3 非可換確率論

3.1 非可換確率空間 (多項式環の場合)

これまで X, Y は確率変数を表していたが，この節では積について (一般には) 非可換な元と考えてみる．つまり XY と YX は等しくないかもしれない．以下では $\boldsymbol{C}[X, Y]$ や $\boldsymbol{C}[X]$ によって複素係数の多項式全体を表す．同様に $\boldsymbol{C}[x, y]$ や $\boldsymbol{C}[x]$ なども用いるが，多項式環において小文字で x, y と書いたら，これらは関係式の無い非可換な (自由な) 単なる文字だと仮定する．また $\boldsymbol{C}_0[x, y], \boldsymbol{C}_0[x]$ などは単位元 (定数項) を含まない多項式の全体を表す．

また $\mathbb{E} \colon \boldsymbol{C}[X, Y] \to \boldsymbol{C}$ を線形写像とし，$\mathbb{E}[1] = 1$ を満たすとする．このような $\mathbb{E}$ を期待値と呼ぶ．組 $(\boldsymbol{C}[X, Y], \mathbb{E})$ のことを**非可換確率空間**と呼ぶ (一般には $\boldsymbol{C}[X, Y]$ に限らず，任意の単位元を持つ代数を考えるが，本稿ではそのような一般的な場合は考えない)．また期待値に正値性を仮定するのが一般的であるが，ここでは省略する．

非可換確率論の設定では，モーメント $\mathbb{E}[(X+Y)^n]$ は以下のように計算される:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y], \\
\mathbb{E}[(X+Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[YX] + \mathbb{E}[Y^2], \\
\mathbb{E}[(X+Y)^3] &= \mathbb{E}[X^3] + \mathbb{E}[X^2Y] + \mathbb{E}[XYX] + \mathbb{E}[YX^2] \\
&\quad + \mathbb{E}[XY^2] + \mathbb{E}[YXY] + \mathbb{E}[Y^2X] + \mathbb{E}[Y^3], \\
\mathbb{E}[(X+Y)^4] &= \mathbb{E}[X^4] + \mathbb{E}[X^3Y] + \mathbb{E}[X^2YX] + \cdots .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

これだけだと自明な非可換二項定理に $\mathbb{E}$ をかぶせただけなので，面白くない．ここに‘独立性’が加わると，俄然面白くなってくる．

3.2 古典・ブール・単調・反単調独立性

一般的には，混合モーメント $\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}]$ をこれ以上計算することはできない．そこで，混合モーメントを $\mathbb{E}[X^m], \mathbb{E}[Y^n]$ を用いて計算する規則を導入しよう．このような計算規則を**独立性**と呼ぶことにする．以下の例が代表的な独立性である．

定義 1. (1) X と Y が**古典独立**である ($X\perp\!\!\!\perp_C Y$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall q_1, p_2, \ldots, p_n \in \boldsymbol{N}, p_1, q_n \in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$,

$$\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}X^{p_2}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}] = \mathbb{E}[X^{p_1+\cdots+p_n}]\mathbb{E}[Y^{q_1+\cdots+q_n}].$$

(2) X と Y が**ブール独立**である ($X\perp\!\!\!\perp_B Y$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall q_1, p_2, \ldots, p_n \in \boldsymbol{N}, p_1, q_n \in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$,

$$\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}] = \mathbb{E}[X^{p_1}]\mathbb{E}[Y^{q_1}]\cdots\mathbb{E}[X^{p_n}]\mathbb{E}[Y^{q_n}].$$

(3) X と Y が**単調独立**である ($X\perp\!\!\!\perp_M Y$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall q_1, p_2, \ldots, p_n \in \boldsymbol{N}, p_1, q_n \in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$,

$$\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}] = \mathbb{E}[X^{p_1+\cdots+p_n}]\mathbb{E}[Y^{q_1}]\cdots\mathbb{E}[Y^{q_n}].$$

(4) X と Y が**反単調独立**である ($X\perp\!\!\!\perp_{AM} Y$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall q_1, p_2, \ldots, p_n \in \boldsymbol{N}, p_1, q_n \in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$,

$$\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}] = \mathbb{E}[X^{p_1}]\cdots\mathbb{E}[X^{p_n}]\mathbb{E}[Y^{q_1+\cdots+q_n}].$$

端のべき p_1, q_n のみ 0 も許しているのは，$XY\cdots YX$ や $YX\cdots YX$ なども考えたいからである．注意として，$\mathbb{E}$ の線型性によって単項式 X^{p_i}, Y^{q_i} を多項式に一般化しても同値な定義になる．例えば $X\perp\!\!\!\perp_M Y$ は以下の主張と同値になる: $\forall Q_1, P_2, \ldots, Q_{n-1}, P_n \in \boldsymbol{C}_0[x], \forall P_1, Q_n \in \boldsymbol{C}[x]$,

$$\mathbb{E}[P_1(X)Q_1(Y)\cdots P_n(X)Q_n(Y)] = \mathbb{E}[P_1(X)\cdots P_n(X)]\mathbb{E}[Q_1(Y)]\cdots\mathbb{E}[Q_n(Y)]. \tag{3.2}$$

ここでも両端の多項式には単位元 (定数項) を含めることができる．

3.3 自由独立性

非可換の場合に最も重要な独立性は自由独立性であるが，自由独立な確率変数の混合モーメントは古典・ブール・単調とは異なり簡潔な積表示を持たない．そのために定義を後回しにした．

定義 2. X と Y が**自由独立**である ($X\perp\!\!\!\perp_F Y$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} P_1(x), Q_1(x), \ldots, P_n(x), Q_n(x) \in \boldsymbol{C}[x]$ が $\mathbb{E}[P_i(X)] = \mathbb{E}[Q_i(Y)] = 0$ ($\forall 1 \le i \le n$) を満たすならば，

$$\mathbb{E}[P_1(X)Q_1(Y)\cdots P_n(X)Q_n(Y)] = 0.$$

この定義から以下の性質がすぐに従う:

$$X\perp\!\!\!\perp_F Y \implies \forall P(x), Q(x) \in \boldsymbol{C}[x], P(X)\perp\!\!\!\perp_F Q(Y). \tag{3.3}$$

自由独立性の定義は他と比べると特異だが，きちんと混合モーメントの計算ルールを与えている．

例 1. X, Y が自由独立だと仮定する．このとき平均値を引き去って $P(x) = x - \mathbb{E}[X], Q(y) = y - \mathbb{E}[Y]$ という多項式を取ってくると，$\mathbb{E}[P(X)] = \mathbb{E}[Q(Y)] = 0$ となる．自由独立性の定義から，$\mathbb{E}[P(X)Q(Y)] = 0$ となる．そこで左辺を展開してみると，$\mathbb{E}[P(X)Q(Y)] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ となる (期待値の線型性と $\mathbb{E}[1] = 1$ を用いた)．したがって

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \tag{3.4}$$

を得る．同様の計算を行うと，以下の結果を得ることができる．

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XYX] &= \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y],\\ \mathbb{E}[XYXY] &= \mathbb{E}[X^2](\mathbb{E}[Y])^2 + (\mathbb{E}[X])^2\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X])^2(\mathbb{E}[Y])^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

このように自由独立の場合には混合モーメントは和 (差) と積を用いて表される．

(3.2) や (3.3) を参考に，確率変数の族を 2 つ考えたときの独立性を定義することもできる．簡単のため $\{X,Y\}$ と $\{Z\}$ の場合を考える．

定義 3. 任意の多項式 $P(x,y) \in \boldsymbol{C}_0[x,y], Q(x) \in C_0[x]$ に対して $P(X,Y)$ と $Q(Z)$ が独立であるとき，$\{X,Y\}$ と $\{Z\}$ は独立であるといい，$\{X,Y\} \perp\!\!\!\perp \{Z\}$ のように表す．

3.4 単位的な独立性

自由独立性の定義においては，単位元を含まない多項式環 $\boldsymbol{C}_0[x]$ は使わなかった．この点がブール・単調・反単調の場合と大きく異なる点である．この違いを見るために，以下のように定義をする．

定義 4. 独立性 $\perp\!\!\!\perp$ が与えられたとする．(任意の非可換確率空間における) 任意の確率変数 X に対して $X \perp\!\!\!\perp 1$ かつ $1 \perp\!\!\!\perp X$ のとき，独立性 $\perp\!\!\!\perp$ は**単位的**であるという．

命題 1. 5 つの独立性のうち，単位的な独立性は古典と自由のみである．

古典独立性が単位的であることは確率論でよく知られた事実だが，別の言い方をすると，定義 1(1) において仮定されている条件 $q_1, p_2, \ldots, p_n \in \boldsymbol{N}$ は $q_1, p_2, \ldots, p_n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ でも同値な定義になるということである．ところがブール・単調・反単調だと 0 を含めることができない．

単位的な独立性の方が面白くなる傾向があるが，単位的でない独立性も様々な興味深い性質を持っている．例えば単調独立性の極限定理は非自明な面白い問題になってくる (第 5 節)．

3.5 独立性の分類

さて，混合モーメント $\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}]$ の計算規則を独立性と呼ぶのだった (より正確な独立性の定義は参考文献 [Spe97, Mur02] にある)．これだけだと幾らでも例が作れる．例えば

$$\mathbb{E}[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_n}Y^{q_n}] = \frac{1}{2}(\text{ブール独立の計算則}) + \frac{1}{2}(\text{単調独立の計算則})$$

などと人工的な独立性を定義することもできる．そこで，良い独立性であるための条件を考える．

- (**可換性**) $X \perp\!\!\!\perp Y \iff Y \perp\!\!\!\perp X$.
- (**結合律**) $X \perp\!\!\!\perp Y$ かつ $\{X,Y\} \perp\!\!\!\perp \{Z\} \iff \{X\} \perp\!\!\!\perp \{Y,Z\}$ かつ $Y \perp\!\!\!\perp Z$.

可換性というのは比較的分かりやすい．独立性 $X \perp\!\!\!\perp Y$ の定義において，X と Y の扱いが対等ということである．定義 1 を見ると，単調独立性と反単調独立性は可換でないが，古典とブールは可換である．また自由も可換である．それに対して結合律というのは少し分かりにくい．単調独立の例で説明してみる．まず $\{X,Y\} \perp\!\!\!\perp_M \{Z\}$ かつ $X \perp\!\!\!\perp_M Y$ とすると，単調独立性の定義から

$$\mathbb{E}[(Y^2)Z(X^3YXY)Z^2] = \mathbb{E}[Y^2X^3YXY]\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X^4]\mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Y]^2\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[Z^2]$$

となる．一方で $\{X\} \perp\!\!\!\perp_M \{Y,Z\}$ かつ $Y \perp\!\!\!\perp_M Z$ とすると，

$$\mathbb{E}[(Y^2Z)X^3(Y)X(YZ^2)] = \mathbb{E}[X^4]\mathbb{E}[Y^2Z]\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[YZ^2] = \mathbb{E}[X^4]\mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Y]^2\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[Z^2]$$

となり結果は同じになる．このように括弧の付け替えをしても計算結果が同じであるということが結合律の意味である．5 つの独立性は結合律を満たしていることを証明できる．混合モーメントの計算規則を何か人工的に作ってみると，たいてい結合律が破れる．これまで独立性は 2 つの確率変数に対して定義してきたが，結合律があれば $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の独立性も自然に定義できる．逆に結合律が破れていると‘X, Y, Z が独立’という 3 変数の独立性が一意的に定義できなくなるので，都合が悪い．古典と自由は単位的・可換・結合的という 3 つの条件を満たすので，特に良い性質を持っている．

実は結合律はかなり強い条件で，これだけで独立性は 5 つに絞られる．

定理 1. (1) [Spe97] 可換かつ結合的な独立性は古典・自由・ブールの 3 つのみである．
(2) [Mur02] 結合的な独立性は古典・自由・ブール・単調・反単調の 5 つのみである．

注意 1. 単調と反単調は可換でないので，村木の定理は Speicher の定理の拡張になっている．

3.6 たたみこみ (自由・ブール・単調の場合)

非可換の場合，等式 $\mathbb{E}[X^n] = \int_{\boldsymbol{R}} x^n \, \mathrm{d}\mu_X(x)$ を満たす $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ_X を**確率変数 X の分布**と定義する．$\mathbb{E}$ が正値で X が自己共役ならばこのような μ_X が存在するが，ここでは深く立ち入らない．話を簡単にするため，本稿では常に μ_X が存在することを仮定する．

独立性があれば，古典確率論のアナロジーとしてたたみこみが定義できる．例えば自由独立な確率変数 X, Y に対して，和 $X+Y$ の確率分布 μ_{X+Y} を μ_X と μ_Y の**自由たたみこみ**と呼び，$\mu_X \boxplus \mu_Y$ と書く．同様に**単調たたみこみ**，**ブールたたみこみ**を記号 $\mu_X \triangleright \mu_Y, \mu_X \uplus \mu_Y$ で表す．記号が表しているように，一般には $\mu \triangleright \nu \neq \nu \triangleright \mu$ である．なお反単調たたみこみは本質的に単調たたみこみと同じとみなせるため，今後は扱わないことにする．

どのようにたたみこみが計算できるだろうか．単調独立の場合を例にとってみよう．古典の場合と同様に，確率変数 X の分布をそのモーメント列とだいたい同一視することができる．よって $\mu_X = \{\mathbb{E}[X^n]\}_{n=0}^{\infty}$ とみなすことにする．すると問題は X, Y が単調独立なときに $\mu_X \triangleright \mu_Y = \mu_{X+Y} = \{\mathbb{E}[(X+Y)^n]\}_{n=0}^{\infty}$ を計算することになる．自明な非可換二項定理 (3.1) に単調独立性を適用すると，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2], \\
&\mathbb{E}[(X+Y)^3] = \mathbb{E}[X^3] + 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[X](\mathbb{E}[Y])^2 + \mathbb{E}[Y^3]
\end{aligned}$$

となり，X のモーメント，Y のモーメントのみで計算ができる．しかし，これだとモーメントの次数ごとに逐一計算しなければならないので大変だから，全ての n に対する計算を俯瞰できる公式があるとよい．そこで母関数を用いる．第 2 節で定義した積率母関数の代わりに，**Cauchy 変換**とその逆数

$$G_\mu(z) = \int_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{z-x} \mu(\mathrm{d}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(\mu)}{z^{n+1}}, \tag{3.6}$$

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)} = z - b_1(\mu) - \frac{b_2(\mu)}{z} - \frac{b_3(\mu)}{z^2} - \cdots \tag{3.7}$$

を導入する．ここで $b_n(\mu)$ は n 次以下のモーメント $m_1(\mu), \ldots, m_n(\mu)$ の多項式で表せ，ブールキュムラントと呼ばれている [SW97]．さらに F_μ の逆関数は

$$F_\mu^{-1}(z) = z + f_1(\mu) + \frac{f_2(\mu)}{z} + \frac{f_3(\mu)}{z^2} + \cdots \tag{3.8}$$

という形になり，$f_1(\mu), f_2(\mu), \ldots$ を自由キュムラントと呼ぶ [Voi85, Spe94]．また

$$K_\mu(z) = z - F_\mu(z), \tag{3.9}$$
$$\varphi_\mu(z) = F_\mu^{-1}(z) - z \tag{3.10}$$

をそれぞれ**エネルギー関数**，**Voiculescu 変換**と呼ぶ．これらによりたたみこみが特徴づけられる．

定理 2. (1) $\mathcal{M}_{\mu*\nu}(z) = \mathcal{M}_\mu(z)\mathcal{M}_\nu(z)$.　(すでに (2.7) にあるが，比較のため)
(2) [Voi86] $\varphi_{\mu\boxplus\nu}(z) = \varphi_\mu(z) + \varphi_\nu(z)$.
(3) [SW97] $K_{\mu\uplus\nu}(z) = K_\mu(z) + K_\nu(z)$.
(4) [Mur00] $F_{\mu\triangleright\nu}(z) = F_\mu(F_\nu(z))$.

これまでは確率分布とモーメントを同一視してきた．実はモーメントを持たない場合の処方箋も知られており，たたみこみは一般の確率分布に対して定義され，定理 2 は一般の確率分布に対しても成立する (一般の場合の自由たたみこみは [BV93] で扱われた)．この場合，Cauchy 変換 G_μ は (3.6) の積分表示により上半平面 $\boldsymbol{C}^+ = \{z \in \boldsymbol{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ において定義され，下半平面 $\boldsymbol{C}^-$ に値をとる解析関数である．またその逆数 F_μ とエネルギー関数 K_μ も上半平面 $\boldsymbol{C}^+$ において定義される．Voiculescu 変換 φ_μ は上半平面の適当な領域 (無限遠における Stolz 角領域) で定義される．

4 無限分解可能分布

たたみこみ $\star \in \{*, \boxplus, \uplus, \triangleright\}$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ が **$\star$-無限分解可能**であるとは任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ_n が存在して，

$$\mu = \underbrace{\mu_n \star \mu_n \star \cdots \star \mu_n}_{n\ 個} \ (= \mu_n^{\star n}\ と表す)$$

となることを言う．このような確率分布の集合を $\mathcal{ID}(\star)$ と表す．この定義に出てくる μ_n というのは μ の ‘n 乗根’ であり，無限分解可能分布 μ に対しては一意的であることが知られている．よって $\mu_n = \mu^{\star 1/n}$ と書くこともできる．さらに，$t = m/n$ $(m, n \in \boldsymbol{N})$ の場合に $\mu^{\star t} := \mu_n^{\star m}$ と定義し，連続性から実数 $t \geq 0$ に対しても $\mu^{\star t}$ を定義することができる．こうして定義された $\{\mu^{\star t}\}_{t\geq 0}$ は

$$\mu^{\star(s+t)} = \mu^{\star s} \star \mu^{\star t}, \quad s, t \geq 0, \qquad \mu^{\star 1} = \mu, \mu^{\star 0} = \delta_0 \tag{4.1}$$

を満たし **$\star$-たたみこみ半群**と呼ばれる．逆に $\star$-たたみこみ半群に埋め込まれる確率分布 μ は明らかに $\star$-無限分解可能である．

例えば $\mu = N(0,1)$ (正規分布) を考えると，$\mu^{*t} = N(0,t)$ となる．すなわち $*$-たたみこみ半群は熱核の一般化となっている．熱核にはブラウン運動が対応するように，一般の $*$-たたみこみ半群に対しても確率過程が対応し，Lévy 過程と呼ばれる．これは連続時間ランダムウォークと見なすことができる．Lévy 過程については佐藤による名著 [Sat13] に詳しい．

古典の無限分解可能分布は，以下の特徴づけが知られている [GK54]．

定理 3 (Lévy–Khintchine 表現)**.** $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ が $\mathcal{ID}(*)$ が属するならばある $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ の組 (γ, ρ) が一意的に存在して

$$\mathcal{M}_\mu(z) = \exp\left(\gamma z + \int_{\boldsymbol{R}} \left(e^{zx} - 1 - \frac{zx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, \rho(\mathrm{d}x)\right), \qquad z \in \mathrm{i}\boldsymbol{R} \tag{4.2}$$

となる．逆に任意の $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ に対して (4.2) の式によって $*$-無限分解可能分布 μ が定まる．すなわち $\{(\gamma, \rho) : \gamma \in \boldsymbol{R}, \rho は\ \boldsymbol{R}\ 上の有限測度\}$ と $\mathcal{ID}(*)$ の間に全単射が与えられたことになる．組 (γ, ρ) 対

応する $\mu \in \mathcal{ID}(*)$ を $\mu_*^{\gamma,\rho}$ と表す．また，$\mu \in \mathcal{ID}(*)$ が (γ,ρ) で特徴づけられる時，たたみこみ半群 μ^{*t} は $(t\gamma, t\rho)$ で特徴づけられる．

注意 2. 近年では上記の形 (4.2) での Lévy–Khintchine 表現はあまり用いられず，後述のガウス成分を分離した形 (6.1) の方が標準的である．それぞれメリット・デメリットがあり，近年の標準形 (6.1) は Lévy 過程の観点から明快な意味を持っている ([Sat13] を参照)．一方で確率分布の弱収束を議論する場合には (6.1) よりも (4.2) が便利である ([GK54] を参照)．例えば後述の定理 7(2) においては，(6.1) を用いると主張がやや複雑になってしまう．

例 2. (1) [正規分布] $\gamma \in \boldsymbol{R}$，$\rho = v\delta_0, v > 0$ とする．このとき

$$\mathcal{M}_{\mu_*^{\gamma,v\delta_0}}(z) = e^{\gamma z + \frac{1}{2}vz^2}$$

である．すなわち $\mu_*^{\gamma,v\delta_0}$ は正規分布 $N(\gamma,v)$ である．正規分布の一般化で安定分布というクラスもある [GK54, Sat13]．第 5.1 節の最後で安定分布と極限定理について少し触れる．

(2) [Poisson 分布] $\gamma = \lambda/2 > 0$，$\rho = (\lambda/2)\delta_1$ とすると，

$$\mathcal{M}_{\mu_*^{\lambda/2,(\lambda/2)\delta_1}}(z) = e^{\lambda(e^z-1)}$$

となる．すなわち $\mu_*^{\lambda/2,(\lambda/2)\delta_1}$ はパラメータ λ の Poisson 分布である．

Lévy–Khintchine 表現のアナロジーが自由，ブール，単調たたみこみに対しても知られている．

定理 4 (Bercovici & Voiculescu [BV93])**.** $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ に対して，以下は同値である．

(1) $\mu \in \mathcal{ID}(\boxplus)$.
(2) $-\varphi_\mu$ は **Pick 関数** (解析関数 $\boldsymbol{C}^+ \to \boldsymbol{C}^+ \cup \boldsymbol{R}$) に解析接続される．
(3) ある $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ が存在して

$$\varphi_\mu(z) = \gamma + \int_{\boldsymbol{R}} \frac{1+zx}{z-x}\rho(\mathrm{d}x), \qquad z \in \boldsymbol{C}^+. \tag{4.3}$$

逆に任意の $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ に対して (4.3) の式によって $\boxplus$-無限分解可能分布 μ が定まる．また (γ,ρ) は一意である．この (γ,ρ) に対応する $\boxplus$-無限分解可能分布 μ を $\mu_\boxplus^{\gamma,\rho}$ と表す．

なおこの定理に至る前に，Voiculescu [Voi86] (μ がコンパクト台を持つ場合)，Maassen [Maa92] (μ が有限の分散を持つ場合) による部分的な結果がある．

定理 5 (Muraki [Mur00]，Belinschi [Bel05])**.** $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ が $\mathcal{ID}(\triangleright)$ に属するならば，ある解析関数 $A\colon \boldsymbol{C}^+ \to \boldsymbol{C}^+ \cup \boldsymbol{R}$ が存在して，微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t(z) = A(F_t(z)), \qquad F_0(z) = z \tag{4.4}$$

の解として得られる流れ $\{F_t\}_{t\ge 0}$ が $F_1 = F_\mu$ を満たす．さらに $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ が存在して

$$-A(z) = \gamma + \int_{\boldsymbol{R}} \frac{1+zx}{z-x}\rho(\mathrm{d}x), \qquad z \in \boldsymbol{C}^+ \tag{4.5}$$

と表される．逆に任意の $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ に対して (4.5) によって A を定め，(4.4) の解の時刻 1 での写像を F_1 とすると，$F_1 = F_\mu$ によって $\triangleright$-無限分解可能分布 μ が定まる．またこのとき (γ,ρ) は一意である．以上によって $\mathcal{ID}(\triangleright)$ と $\{(\gamma,\rho) : \gamma \in \boldsymbol{R}, \rho$は $\boldsymbol{R}$ 上の有限測度 $\}$ の間に全単射が存在する．組 (γ,ρ) に対応する $\triangleright$-無限分解可能分布を $\mu_\triangleright^{\gamma,\rho}$ と表す．

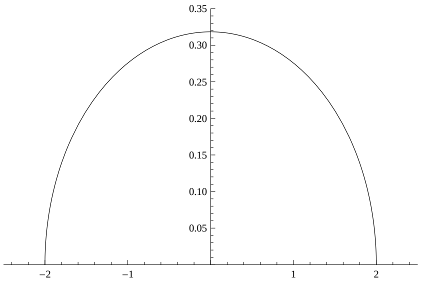

図 1　Wigner の半円分布 ($\gamma = 0, v = 1$)

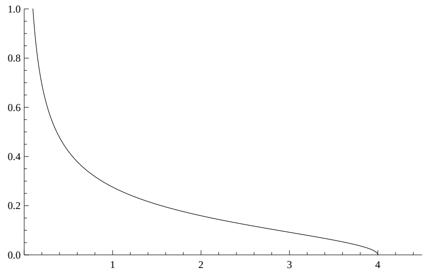

図 2　自由 Poisson 分布 ($\lambda = 1$)

この定理はまず村木により μ が有限の分散を持つ場合に証明され，Belinschi により一般の場合が示された．Belinschi は証明において Cowen [Cow81] による複素関数論の定理を用いている．その定理は Riemann 面の一意化定理を用いて証明され，興味深い．

定理 6 (Speicher & Woroudi [SW97])**.** (1) $\boldsymbol{R}$ 上の任意の確率分布は $\uplus$-無限分解可能である．
(2) $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ に対してある $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ が存在して

$$K_\mu(z) = \gamma + \int_{\boldsymbol{R}} \frac{1+zx}{z-x}\rho(\mathrm{d}x), \qquad z \in \boldsymbol{C}^+. \tag{4.6}$$

逆に任意の $\gamma \in \boldsymbol{R}$ と有限測度 ρ に対して (4.6) 式によって $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ が定まる．また (γ, ρ) は一意である．この (γ, ρ) に対応する確率分布 μ を $\mu_{\uplus}^{\gamma,\rho}$ と表す．

この定理の証明はほぼ Pick 関数 (あるいは Herglotz 関数) の積分表示をそのまま使うだけで，比較的やさしい．ちなみに 4 つの特徴づけの中で，単調の場合 (定理 5) の証明が圧倒的に難しい．

驚くべきことに，4 種類全ての特徴づけにおいて同じパラメータ (γ, ρ) が現れている．この偶然とも思える一致の持つ深い意味は極限定理 (第 5 節) においてより明確になる．

例 3. (1) [Wigner の半円分布，図 1] $\gamma \in \boldsymbol{R}$, $\rho = v\delta_0, v > 0$ とする．このとき

$$\varphi_{\mu_{\boxplus}^{\gamma, v\delta_0}}(z) = \gamma + \frac{v}{z}, \qquad z \in \boldsymbol{C}^+$$

である．このとき $F_\mu^{-1}(z) = z + \varphi_\mu(z)$ から F_μ^{-1} を計算し，さらに F_μ を計算し，$G_\mu(z) = 1/F_\mu(z)$ を計算すると

$$G_{\mu_{\boxplus}^{\gamma, v\delta_0}}(z) = \frac{-z + \gamma + \sqrt{(z-\gamma)^2 - 4v}}{2v}, \qquad z \in \boldsymbol{C}^+$$

となる．Stieltjes の逆変換公式 $\mu(\mathrm{d}x) = -(1/\pi)\lim_{y \downarrow 0} G_\mu(x + \mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x$ を用いると，

$$\mu_{\boxplus}^{\gamma, v\delta_0}(\mathrm{d}x) = \frac{\sqrt{4v - (x-\gamma)^2}}{2\pi v}\,\mathbf{1}_{[\gamma - \sqrt{4v}, \gamma + \sqrt{4v}]}(x)\,\mathrm{d}x$$

となる．この確率分布を **Wigner の半円分布**と呼ぶ．GUE ランダム行列 (より一般に Wigner 行列) の固有値分布として現れる．また Wigner の半円分布を含む自由安定分布というクラスがあり，古典安定分布のアナロジーになっている [BP99].

(2) [自由 Poisson 分布，図 2] $\lambda > 0$ に対して，古典 Poisson 分布と同じ組 (γ, ρ) を取ると，

$$\varphi_{\mu_{\boxplus}^{\lambda/2, (\lambda/2)\delta_1}}(z) = \frac{\lambda z}{z-1}, \qquad z \in \boldsymbol{C}^+$$

となる．ここから Cauchy 変換を計算して，Stieltjes の逆変換公式を適用すると，分布は

$$\max\{1-\lambda, 0\}\delta_0 + \frac{\sqrt{((1+\sqrt{\lambda})^2 - x)(x - (1-\sqrt{\lambda})^2)}}{2\pi x}\,\mathbf{1}_{((1-\sqrt{\lambda})^2, (1+\sqrt{\lambda})^2)}(x)\,\mathrm{d}x$$

であることが分かる．この分布を**自由 Poisson 分布**または Marchenko–Pastur 分布という．これは Wishart 行列というランダム行列の固有値分布として現れる．

(3) Wigner の半円分布と自由 Poisson 分布を含む分布の族として自由 Meixner 分布 [BB06, SY01] がある．

例 4. この論説では主に自由の場合について解説していくが，単調・ブールの例を少し挙げておく．

(1) [逆正弦則] 単調たたみこみに関して，正規分布 $N(0,v)$ に対応するのは逆正弦則である:

$$\mu_{\triangleright}^{0,v\delta_0}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2v-x^2}}\mathbf{1}_{[-\sqrt{2v},\sqrt{2v}]}(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) [Bernoulli 分布] ブールの場合，正規分布 $N(0,v)$ に対応するものは Bernoulli 分布である:

$$\mu_{\uplus}^{0,v\delta_0}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}(\delta_{-\sqrt{v}} + \delta_{\sqrt{v}}).$$

5 極限定理と無限分解可能分布

5.1 古典確率論における極限定理

無限分解可能分布が研究されてきた大きな理由のうち，1 つはそれが Lévy 過程の分布として特徴づけられること，もう 1 つは極限定理の極限分布として特徴づけられることである．ここでは Lévy，Khintchine, Gnedenko らによって 1930 年代から 40 年代に発展した古典的な極限定理について紹介する．5.1 節の内容は Gnedenko と Kolmogorov の本 [GK54] に基づいている．

まずよく知られている極限定理として中心極限定理がある．確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ が独立同分布でそれぞれ平均 m と分散 $v>0$ を持つとき，

$$\frac{X_1+\cdots+X_n-mn}{\sqrt{vn}} \text{ の分布} \to N(0,1) \quad (\text{弱収束}) \tag{5.1}$$

という主張である．ここで左辺を

$$\frac{X_1}{\sqrt{vn}}+\cdots+\frac{X_n}{\sqrt{vn}}-\frac{\sqrt{n}m}{\sqrt{v}}$$

と書き直してみると，n が大きくなるとき，1 つ 1 つの項 $X_i/\sqrt{vn}$ は小さくなっていく．つまり中心極限定理は‘独立な微小量を多く足し合わせ，さらに適当に定数を引いたとき，うまくそれらのバランスが取れていれば有限な極限に収束する’と見ることができる．他に有名な極限定理として Poisson の少数の法則がある．これもやはり‘独立な微小量をたくさん足す’タイプの定理で，極限が Poisson 分布になるという主張である．

これらの定理を可能な限り一般化してみる．同分布の仮定もはずすことにする．各 $n \in \boldsymbol{N}$ ごとに独立な確率変数列 $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ と実数 a_n が与えられたとする．さらに $k_n \uparrow \infty$ と仮定し，n が大きい時に X_{nk} たちが一様に小さいという条件

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to\infty}\sup_{1\le k\le k_n}\mathbb{P}[|X_{nk}|\ge\varepsilon]=0 \tag{5.2}$$

を仮定する．このとき和

$$X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nk_n}+a_n \tag{5.3}$$

の分布の弱収束を考えることにする．この問題を分布の言葉で書き換えておく．確率変数 X_{nk} の分布を μ_{nk} とすると，条件 (5.2) は

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to\infty}\sup_{1\le k\le k_n}\mu_{nk}((-\varepsilon,\varepsilon)^c)=0 \tag{5.4}$$

となり，確率変数 (5.3) の分布は

$$\mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n} * \delta_{a_n} \tag{5.5}$$

になる．上記のように $k_n \uparrow \infty$ となり，(5.4) を満たす確率分布の族のことを**無限小配列**と呼ぶ．

ここで無限小配列に関する基本的な極限定理を述べる．有限測度の弱収束を記号 $\xrightarrow{\mathrm{w}}$ で表す．

定理 7. 確率分布の無限小配列 $\{\mu_{nk}\}_{1\le k\le k_n, 1\le n}$ と実数列 $a_1, a_2, \ldots$ を考える．

(1) [Khintchine] $\mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n} * \delta_{a_n}$ がある確率分布 μ に弱収束すれば，$\mu \in \mathcal{ID}(*)$ である．
(2) [Gnedenko (?)] 実数 γ と有限測度 ρ に対して，以下は同値である．

- $\mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n} * \delta_{a_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_*^{\gamma,\rho}$.
- 実数 $a_{nk} = \int_{|x|<1} x\,\mu_{nk}(\mathrm{d}x)$ によって μ_{nk} の平行移動 $\mathring{\mu}_{nk}(B) := \mu(B + a_{nk})$ (B は Borel 集合) を定義したとき，以下の 2 条件が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathring{\mu}_{nk}(\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathrm{w}} \rho, \qquad a_n + \sum_{k=1}^{k_n}\left(a_{nk} + \int_{\boldsymbol{R}} \frac{x}{1+x^2}\,\mathring{\mu}_{nk}(\mathrm{d}x)\right) \to \gamma. \tag{5.6}$$

証明は [GK54, Chapter 4] を参照されたい．この本には明示的に書かれていないが，(2) は Gnedenko によるものだと思う．文献を調べてみたら，Gnedenko の 1939 年のロシア語の論文 [Gne39, Theorem 5] にそれらしい定理が書いてあった (筆者はロシア語は読めないので，翻訳ソフトの助けを借りた)．少し自信がないので (?) を付けておく．

和 (5.3) の特別な場合を考えると中心極限定理になるが，もう少し一般化したバージョンもある．独立同分布列 $\{X_i\}_{i\ge1}$ と実数列 $a_i \in \boldsymbol{R}, b_i > 0$ に対して確率変数

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} + a_n \tag{5.7}$$

の分布が弱収束した場合，極限は**安定分布**と呼ばれる．もし X_i が有限な分散を持っていれば $b_n = \sqrt{n}$ と取れて極限は正規分布になるが，そうでない場合は b_n は典型的には $n^{1/\alpha}$ という形になり $(0 < \alpha < 2)$，極限は正規分布ではなくなる．また $\{X_i\}$ が独立だが同分布でない場合，(5.7) の極限分布は**自己分解可能**というクラスになる (定義は 6 節を参照)．これらの結果は [GK54, Chapters 6, 7] に載っている．

5.2 非可換確率論における極限定理

Voiculescu は和 (5.1) において確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ を自由独立と仮定し，中心極限定理の自由版を考察し，極限分布が Wigner の半円分布になることを示した．そこで定理 7 のアナロジーも考えてみたくなる．この問題を同分布な確率変数 (すなわち $\mu_{n1} = \mu_{n2} = \cdots = \mu_{nk_n}$) でかつシフトが無い $(a_n = 0)$ 場合に限って考察したのが Bercovici と Pata であり，非常に有名な定理である．彼らはブールの場合も証明している．さらに Anshelevich と Williams が単調の場合に証明を与えた (単調の場合の証明は他と比べてかなり難しい)．

定理 8 (Bercovici & Pata [BP99]，Anshelevich & Williams [AW14])**.** 確率分布の列 $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ 自然数列 $k_1 < k_2 < \cdots,$ 実数 γ と有限測度 ρ に対して，以下の主張は同値である．

(1) $\mu_n^{*k_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_*^{\gamma,\rho}$;
(2) $\mu_n^{\boxplus k_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_{\boxplus}^{\gamma,\rho}$;
(3) $\mu_n^{\uplus k_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_{\uplus}^{\gamma,\rho}$;
(4) $\mu_n^{\triangleright k_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_{\triangleright}^{\gamma,\rho}$;

(5) 以下の 2 条件が成り立つ:

$$k_n \frac{x^2}{1+x^2}\,\mu_n(\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathrm{w}} \rho, \qquad k_n \int_{\boldsymbol{R}} \frac{x}{1+x^2}\,\mu_n(\mathrm{d}x) \to \gamma.$$

注意 3. (a) 同分布かつシフト 0 の場合は，$\mu_n^{*k_n}$ が無限分解可能分布に弱収束することから $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \delta_0$ が示される ($*$ だけでなく $\boxplus, \uplus, \triangleright$ でも同様)．したがって無限小条件 (5.4) は仮定しなくてよい．

(b) (5) の条件は Gnedenko の条件 (5.6) と異なるように見えるが，同分布 ($\mu_{n1} = \cdots = \mu_{nk_n}$) でシフト 0 の場合は同値であることが示される．

(c) 単調の場合は Pick 関数の反復合成に対する極限定理を与えており (定理 2(4) を参照)，複素関数論の観点からも興味深い．

この驚くべき定理から，同分布の場合には古典・自由・ブール・単調の (弱収束) 極限定理はどれも等価であり，またこれによって無限分解可能分布の特徴づけに現れる同じパラメータ (γ, ρ) の意味が明確になったと言える．一般の同分布とは限らない無限小配列については解析がさらに複雑になる．まず Khintchine の定理の自由版が Bercovici と Pata によって示された．

定理 9 (Bercovici & Pata [BP00])**.** $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布の無限小配列 $\{\mu_{nk}\}_{1\le k\le k_n, 1\le n}$ と実数の列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ を考える．$n \to \infty$ としたとき $\mu_{n1} \boxplus \cdots \boxplus \mu_{nk_n} \boxplus \delta_{a_n}$ がある確率分布 μ に弱収束するならば，$\mu \in \mathcal{ID}(\boxplus)$ である．

この定理 9 と定理 4 によって，収束極限が存在すれば，それは $\mu_{\boxplus}^{\gamma,\rho}$ の形になる．この結果を用いて，Chistyakov と Goetze は定理 8 の古典と自由の同値性 (1)⇔(2) を同分布とは限らない一般の場合に拡張した．またブールの場合には Wang が拡張した．

定理 10 (Chistyakov & Goetze [CG08a], Wang [Wan08])**.** $\boldsymbol{R}$ 上の確率分布の無限小配列 $\{\mu_{nk}\}_{1\le k\le k_n, 1\le n}$，実数の列 $\{a_n\}_{n\ge1}$，実数 γ と有限測度 ρ に対して以下の主張は同値である．

(1) $\mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n} * \delta_{a_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_*^{\gamma,\rho}$;

(2) $\mu_{n1} \boxplus \cdots \boxplus \mu_{nk_n} \boxplus \delta_{a_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_{\boxplus}^{\gamma,\rho}$;

(3) $\mu_{n1} \uplus \cdots \uplus \mu_{nk_n} \uplus \delta_{a_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_{\uplus}^{\gamma,\rho}$.

これらの条件はもちろん Gnedenko の条件 (5.6) と同値である．この定理から，無限小配列に対する極限定理は古典，自由，ブールの間で同等であるという見事なアナロジーが示された．ところで，単調たたみこみは定理 10 で言及されていない．別に書き忘れたわけではない．実は単調たたみこみの場合は定理 10 の同値性は成り立たないことが知られている [FH]．面白いことに，単調の極限定理では同分布とそうでない場合の間に大きな違いがある．

この節では述べなかったが，独立な確率変数の積に関する極限定理も研究されている [CG08b]．和の場合とは異なり，積の場合は古典と自由の極限定理は同等ではない．なぜ和と積で違いが出てくるのか，理由はあまり明らかになっていない．

6　無限分解可能分布の性質

無限分解可能分布はどのような性質を持っているだろうか．以下では古典と自由の場合を中心にいくらかの性質を紹介する．無限分解可能分布の性質を見る場合には，Lévy-Khintchine 表現 (4.2) を書き換えた方がよ

いことが多い．以下の同値な表現を用いることにする:

$$\mathcal{M}_\mu(z) = \exp\left(\eta z + \frac{1}{2}az^2 + \int_{\boldsymbol{R}} \left(e^{zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right)\nu(\mathrm{d}x)\right), \qquad z \in \mathrm{i}\boldsymbol{R}. \tag{6.1}$$

ここで $\eta \in \boldsymbol{R}, a \geq 0$ であり，ν は $\nu(\{0\}) = 0$ と $\int_{\boldsymbol{R}} \min\{1, x^2\}\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ を満たす $\boldsymbol{R}$ 上の測度で，**Lévy 測度**と呼ばれる．これらは (γ, ρ) を用いて表すことができる (具体的な公式は [BT02, p. 327] にある)．また (6.1) に対応する $\boxplus$-無限分解可能分布の表現もある．Voiculescu 変換の亜種である R **変換**を

$$R_\mu(z) = z\varphi_\mu(1/z)$$

と定義する．すると表現 (4.3) は以下のようになる:

$$R_\mu(z) = \eta z + az^2 + \int_{\boldsymbol{R}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right)\nu(\mathrm{d}x), \qquad z \in \boldsymbol{C}^-. \tag{6.2}$$

ここで現れるパラメータは (6.1) と全く同じ条件を満たす．また ν は**自由 Lévy 測度**と呼ばれる．

6.1 単峰性

$\boldsymbol{R}$ 上の測度 τ が**単峰 (unimodal)** であるというのは，ある $c \in \boldsymbol{R}$ と関数 $f\colon \boldsymbol{R} \to [0,\infty)$ が存在して，f は $(-\infty, c)$ において単調非減少，(c, ∞) において単調非増加であり，

$$\tau(\mathrm{d}x) = \tau(\{c\})\delta_c(\mathrm{d}x) + f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

となることを言う．ここで c のことをモードという (モードは一意的とは限らない．一様分布なども単峰分布に含めているからである)．大雑把に言えば確率分布 (の密度関数) を図示したときのグラフの形として，山が 1 つしか存在しないということである．例えば正規分布 $N(\gamma, v)$ は単峰で，モードは平均値の γ となる．また Wigner の半円分布も単峰である (図 1)．自由 Poisson 分布は $\lambda \geq 1$ ならば単峰だが (図 2 から $\lambda = 1$ ならばモード 0)，$0 < \lambda < 1$ の時は原点に原子を持つために，単峰ではない．単峰性に関する有名な定理として，以下で紹介する山里の定理がある．

6.2 山里の定理

確率分布が **$*$-自己分解可能**であるとは，任意の $c \in (0,1)$ に対し，ある確率分布 μ_c が存在して

$$\mu = (\mathbf{D}_c\mu) * \mu_c. \tag{6.4}$$

となることを言う．ここで $\mathbf{D}_c$ は c 倍のスケール変換 ($(\mathbf{D}_c\mu)(B) = \mu(c^{-1}B)$，$B$ はボレル集合) である．$c \uparrow 1$ のとき $\mathbf{D}_c\mu \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu$ であり，さらに $\mu_c \xrightarrow{\mathrm{w}} \delta_0$ となることが証明できる．ここで (6.4) をもう一度用いると $\mu = (\mathbf{D}_{c^2}\mu) * (\mathbf{D}_c\mu_c) * \mu_c$ となり，さらに繰り返し用いると

$$\mu = (\mathbf{D}_{c^n}\mu) * (\mathbf{D}_{c^{n-1}}\mu_c) * \cdots * (\mathbf{D}_c\mu_c) * \mu_c$$

となる．例えば $c = 1 - 1/\sqrt{n}$ と取れば $c \uparrow 1$ かつ $c^n \downarrow 0$ となり，従って μ は無限小配列の極限として表される．Khintchine の定理 (定理 7) より $\mu \in \mathcal{ID}(*)$ である (詳細は [GK54, §29] を参照)．

実は確率分布 μ が $*$-自己分解可能であることは次の条件と同値である: $\mu \in \mathcal{ID}(*)$ であり，その Lévy 測度を ν としたとき $|x|\nu(\mathrm{d}x)$ がモード 0 の単峰測度になる，つまり $(-\infty, 0)$ 上で単調非減少，$(0,\infty)$ 上で単調非増加となる関数 $k\colon \boldsymbol{R} \to [0,\infty)$ によって

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{k(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

と表される (Lévy 測度の性質 $\nu(\{0\}) = 0$ に注意しておく)．証明は [GK54, §30，Theorem 1] にある．例えば正規分布は $\nu = 0$ なので $*$-自己分解可能となる．

以下の定理が知られている．

定理 11 (山里 [Yam78])**.** 全ての $*$-自己分解可能分布は単峰である．

この定理は何人もの数学者が誤った証明を与えたことで有名であり，Gnedenko と Kolmogorov の本 [GK54] のロシア語原著にも誤った証明が載っていたそうである (英訳本では定理は撤回されており，巻末で事情が説明されている)．山里の論文に証明されるまでの経緯が書かれている．

さて，自由確率論においても単峰性を考えてみたい．明らかに Wigner の半円分布は単峰である．さらに Biane が論文 [BP99] の付録において自由安定分布が単峰であることを示した．その後，Haagerup と Thorbjørnsen [HT14] が自由ガンマ分布と呼ばれる分布に対して単峰性を示した．これらを一般化した山里の定理の自由版も成り立つことが最近になって示された．

定理 12 (長谷部 & Thorbjørnsen [HT16])**.** 全ての $\boxplus$-自己分解可能分布は単峰である．

注意 4. $\boxplus$-自己分解可能分布の定義は (6.4) において $*$ を $\boxplus$ で置き換えればよい [BT02]．自由 Lévy 測度による特徴づけも全く同じ条件 (6.5) になる．例えば Wigner の半円分布，(あまり解説していないが) 自由安定分布や自由ガンマ分布は $\boxplus$-自己分解可能である [HST]．

このように単峰性については見事なアナロジーが古典確率論と自由確率論の間に存在する．なぜアナロジーがあるのか説明があると良いが，今のところよく分かっていない．別個のアイデアで証明されているのみである．単峰性については，他にも対称な無限分解可能分布について古典と自由の間の見事な対応が発見されている [HS] が，やはりなぜうまくいくのか理由はよく分からない．

最後に単調とブールの場合についても少し触れておく．これらの場合は正規分布に相当する分布が逆正弦則とベルヌーイ分布であり (例 4 を参照)，ともに単峰ではない．従って山里の定理の類似は成り立たないことになる．安定分布の場合には密度関数が具体的に分かり，それを用いて単峰性の完全な分類がなされている．その結果，安定分布の中には単峰なものとそうでないものがあることが分かっている [HS15]．例えば Lévy 測度がどのような条件を満たせば単峰になるかという問題も考えられるが，何も知られていない．

6.3 単峰性に関するアナロジーの破れ

さて，自由と古典ではまるっきり異なる結果も存在する．まず古典の場合は以下の結果がある．

定理 13 (Wolfe [Wol78])**.** μ を $*$-無限分解可能分布とし，(6.1) における 3 つ組を (η, a, ν) とする．また $a = 0$ とし，Lévy 測度 ν は平均 $m \neq 0$ と分散 $\mathrm{Var}(\nu) < \infty$ を持つ確率測度とする．このとき $t > 3\mathrm{Var}(\nu)/m^2$ ならば μ^{*t} は単峰ではない．

これに対して，自由の場合にはほぼ反対の結果がある．

定理 14 (長谷部 & 佐久間 [HS])**.** $\boldsymbol{R}$ 上のコンパクト台を持つ $\boxplus$-無限分解可能分布を μ とする．また $M > 0$ を μ の自由 Lévy 測度の台が $[-M, M]$ に含まれるような最小の数とする (ただし自由 Lévy 測度が 0 の時は $M = 0$ と定義する)．このとき $t \geq 4M^2/\mathrm{Var}(\mu)$ ならば $\mu^{\boxplus t}$ は単峰である．

注意 5. 自由確率論では μ がコンパクト台を持つことと，その自由 Lévy 測度がコンパクト台を持つまたは 0 となることが同値である．したがって $M < \infty$ が成り立つ．

これに関して色々な未解決問題がある．例えば，

問題 1. 定理 14 において，コンパクト台を持つという仮定は緩められるだろうか？

他にもこの定理に関する問題や予想が [HS] にある．古典の場合には他にも単峰性に関する色々な結果がある．例えば佐藤 [Sat13]，渡部 [Wat01] を参照されたい．

6.4 分布の正則性 (古典)

$\boldsymbol{R}$ 上の確率分布 μ は $\mu = \mu^{\mathrm{d}} + \mu^{\mathrm{ac}} + \mu^{\mathrm{sc}}$ と離散 + ルベーグ絶対連続 + 特異連続の 3 つに分解できることを思い出そう．正則性というのは，確率分布がルベーグ絶対連続であるかどうか，もし絶対連続ならば密度関数は滑らかかどうか，といった性質の総称である．例えば基本的な問題として，$*$-無限分解可能分布の 3 つ組 (η, a, ν) がいかなる条件を満たしていれば μ はルベーグ絶対連続になるかという問題を考えることができる．まず古典の場合に成り立つ定理を挙げておく．

定理 15. (1) μ を $\boldsymbol{R}$ 上の $*$-無限分解可能分布で，式 (6.1) における 3 つ組を (η, a, ν) とする．μ が discrete ($\mu = \mu^{\mathrm{d}}$) となるための必要十分条件は，$a = 0$，$\nu(\boldsymbol{R}) < \infty$ かつ ν が discrete となることである [Sat13, Corollary 27.5].

(2) デルタ測度ではない $*$-自己分解可能分布はルベーグ絶対連続である [Sat13, Theorem 27.13].

また (2) については，密度関数の滑らかさに関する精密な結果もある [Sat13, Theorem 28.4].

6.5 分布の正則性 (自由)

自由の場合はかなり強い正則性が知られている．

定理 16 (Belinschi & Bercovici [BB04])**.** μ を $\boxplus$-無限分解可能とする．

(1) μ は特異連続部分を持たない．つまり $\mu^{\mathrm{sc}} = 0$ である．
(2) μ の持つ原子の数は高々 1 つである．つまり μ^{d} の台は高々 1 点である．
(3) μ^{ac} の密度関数は台の内点において実解析的である．つまり開集合 $U \subset \boldsymbol{R}$ が存在して $\mu^{\mathrm{ac}}(\boldsymbol{R} \setminus U) = 0$ を満たし，$\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}/\mathrm{d}x$ は U 上で実解析的である．

注意 6. $\boxplus$-無限分解可能分布に限らず，単に 2 つの確率分布の自由たたみこみを取るだけで，強い正則性が成り立つことが知られている [Bel08].

$\boxplus$-無限分解可能分布に対して $\mu^{\mathrm{sc}} = 0$ が分かったので，次の問題として μ の持つ原子の数 (0 or 1) を求めたい．また $\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}/\mathrm{d}x$ は台の内点では実解析的だが，台の境界においてはどのように振る舞うだろうか．自由 Lévy–Khintchine 表現 (6.2) の観点からは以下の結果が知られている．

定理 17 (長谷部 & 佐久間 [HS])**.** 3 つ組 (η, a, ν) を持つ $\boldsymbol{R}$ 上の $\boxplus$-無限分解可能分布 μ に対して，以下が成り立つ．

(1) $a > 0$，または $a = 0$ かつ $\nu(\boldsymbol{R}) \in (1, \infty]$ ならば μ はルベーグ絶対連続であり，さらに μ の確率密度関数は $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数に拡張できる．
(2) $a = 0$ かつ $\nu(\boldsymbol{R}) = 1$ ならば μ はルベーグ絶対連続である．
(3) $a = 0$ かつ $\nu(\boldsymbol{R}) \in [0, 1)$ ならば，実極限 $c := \varphi_\mu(+\mathrm{i}0)$ が存在して $\mu(\{c\}) = 1 - \nu(\boldsymbol{R})$ となる．

$\boxplus$-自己分解可能分布はデルタ測度を除いてケース (1) に該当する．定理 16 と合わせると以下が成り立つ．結果が古典の場合と似ているのが面白い (定理 15 を参照)．

系 1． デルタ測度ではない $\boxplus$-自己分解可能分布はルベーグ絶対連続であり，その密度関数は台の内点で実解析的であり，さらに $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数に拡張できる．

定理 17 において (3) の場合は，絶対連続部分 μ^{ac} の密度関数は $\boldsymbol{R}$ 上で連続であることも，そうでないこともある．しかし (2) の場合の $\mu = \mu^{\mathrm{ac}}$ の密度関数は連続になるような例が知られていない．例えばパラメータ $\lambda = 1$ の自由 Poisson 分布は (2) の場合で，密度関数は $\sqrt{(4-x)/x}\,\mathbf{1}_{(0,4)}(x)$ となり，$x = 0$ において無限大に発散している．他にも例があり，以下のことが成り立つのではないかと予想している．

予想 1． 定理 17(2) の場合，$\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$ は点 $\varphi_\mu(+\mathrm{i}0)$ ($\in \boldsymbol{R}$ である) において無限大に発散する．

単調とブールの場合には正則性に関する研究はほとんどないが，筆者の知る限り唯一，以下の結果が知られている [Has10, Theorem 3.5]: $\rhd$-無限分解可能分布 μ が $a \in \boldsymbol{R}$ において孤立した原子を持っているならば (すなわち $\mu(\{a\}) = \mu(U) > 0$ となる a の開近傍 U が存在する)，$\boldsymbol{R} \setminus \{a\}$ において μ はルベーグ絶対連続になる．従って，例えばベルヌーイ分布のような 2 点以上の台を持つ離散分布は $\rhd$-無限分解可能とはならない．

7 非自明な自由無限分解可能分布の例 — 古典確率論で有名な分布から

7.1 正規分布

どのような確率分布が $\boxplus$-無限分解可能 (以下 FID，Freely Infinitely Divisible) になるかを知りたい．Wigner の半円分布や自由 Poisson 分布のように自由確率論で重要な分布の多くは FID となり，$\boxplus$-たたみこみ半群 (4.1) も具体的に分かることが多い．たたみこみ半群が具体的に分からなくても，Voiculescu 変換の形が具体的に分かっていれば，FID であるかどうか判定するのは易しい (定理 4(2) が便利である)．そうでない場合は FID かどうかは難しい問題になる．例えば正規分布が FID かどうかという問題を考えてみると，すぐにお手上げになってしまう．まず Cauchy 変換は

$$G_{N(0,1)}(z) = \int_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{z-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

となるが，これ以上計算できそうにないし，また逆関数 $G_{N(0,1)}^{-1}$ あるいは $F_{N(0,1)}^{-1}$ も計算できそうにない．ところがこの問題については肯定的な答えが知られている．鍵となるのは定理 4(2) であるが，さらに便利なのは次の補題である [AH13]．

補題 1． ある領域 $\boldsymbol{C}^+ \subset \Omega \subset \boldsymbol{C}$ が存在して，Cauchy 変換 $G_\mu\colon \boldsymbol{C}^+ \to \boldsymbol{C}^-$ が解析的全単射 $\Omega \to \boldsymbol{C}^-$ に解析接続されるならば，μ は FID である．

この補題の証明はそれほど困難ではない．難しいのは正規分布に対して Ω をどうやって構成するかである．論文 [BBLS11] では (7.1) を部分積分することにより導かれる一階の常微分方程式

$$G'_{N(0,1)}(z) = 1 - zG_{N(0,1)}(z) \tag{7.2}$$

を解析することで，Ω の存在が示され，以下の定理が示された．

定理 18 (Belinschi & Bożejko & Lehner & Speicher [BBLS11])**．** 正規分布は FID である．

正規分布は古典確率論における重要な分布であることと，初めて非自明な (つまり Voiculescu 変換が具体的に書けない) 確率分布に対して FID が示されたという意味で注目された結果である．この定理が何かに応

用を持つかどうかは分かっていないが，組合せ論などいくつかの背景があることが [BBLS11] で議論されている．ちなみに定理 18 の別証明が知られているが [ABBL10, AB13, Has14]，最も簡単な証明は [Has14] の Remark 6.5 にある証明だと思う．

最近，Belinschi et al. の定理をさらに強くすることに成功したので報告する．

定理 19 (長谷部 & 佐久間 & Thorbjørnsen [HST])．正規分布は $\boxplus$-自己分解可能である．

この定理の証明においては，以下の特徴づけがカギになる．

補題 2. μ を補題 1 の仮定を満たす確率分布とし，Cauchy 変換の解析接続である全単射写像を同じ記号 $G_\mu\colon \Omega \to \boldsymbol{C}^-$ によって表す．このとき μ が $\boxplus$-自己分解可能であることは以下と同値である:

$$\mathrm{Im}\left(\omega + \frac{G_\mu(\omega)}{G'_\mu(\omega)}\right) \leq 0, \qquad \omega \in \Omega. \tag{7.3}$$

たいてい領域 Ω の形は具体的に書けないのだが，正規分布の場合には微分方程式 (7.2) を用いると Ω の形が分からないまま補題 2 の条件 (7.3) を示すことができて，定理 19 が従う．

したがって正規分布の自由 Lévy 測度は (6.5) の形をしている．また定理 19 と定理 12 によって，たたみこみ半群 $N(0,1)^{\boxplus t}, t > 0$ の分布はすべて単峰であることが分かる．しかし正規分布に関する疑問はまだまだ残っている．

問題 2. 正規分布に対応する $\boxplus$-たたみこみ半群はどのようなものだろうか？　確率密度関数を特殊関数を用いて表示できるだろうか？　ちなみに $0 < t \neq 1$ ならば $N(0,1)^{\boxplus t} \neq N(0,t)$ である．

7.2　ベータ分布，第二種ベータ分布，ガンマ分布，逆ガンマ分布，t 分布

正規分布が FID であることが 2011 年に示されてから，その手法を発展させたり別の手法を考案することで，筆者を含む何人かの研究者は多くの古典確率論で有名な分布が FID であることを見出してきた．以下の例では，特別なパラメータを除いて Voiculescu 変換 φ_μ を具体的に求めることができないので，証明は非自明である．以下の例は (4) の一部を除き，全て補題 1 を用いて証明される．

定理 20. (1) [Has14, Has16] $p, q > 0$ をパラメータに持つ $(0,1)$ 上のベータ分布

$$\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

は以下の場合に FID となる (図 3): (i) $p, q \geq 3/2$; (ii) $p \leq 1/2, q \geq 3/2$; (iii) $p \geq 3/2, q \leq 1/2$．ベータ分布は (平行移動した)Wigner の半円分布と自由 Poisson 分布 ($\lambda = 1$) を含むことに注意しておく．なお論文 [AH13, AB13] では特別なパラメータの場合にこの結果を証明している．

(2) [Has14] $p, q > 0$ をパラメータに持つ第二種ベータ分布

$$\frac{1}{B(p,q)} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x$$

は $p \in (0,1/2] \cup [3/2,\infty)$ ならば FID となる (図 4)．

(3) [Has14] $p > 0$ をパラメータにもつ ultraspherical 分布

$$\frac{1}{2^{2p-1}B(p,p)}(1-x^2)^{p-1}\,\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

が FID になるための必要十分条件は $p \geq 3/2$ である．なお Arizmendi と Belinschi が論文 [AB13] において特別なパラメータの場合に証明している．

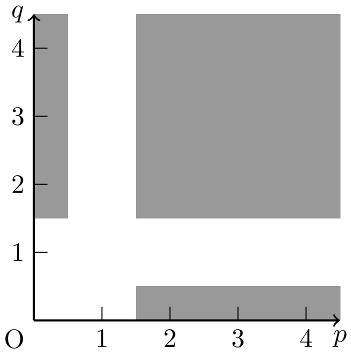

図 3　ベータ分布

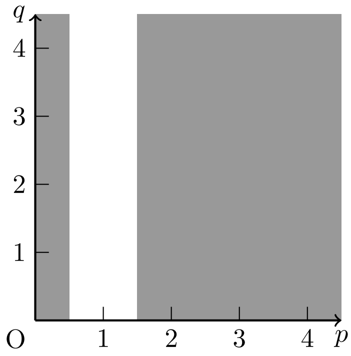

図 4　第二種ベータ分布

(4) [Has14] $q > 0$ をパラメータに持つ $\boldsymbol{R}$ 上の t 分布

$$\frac{1}{B(1/2, q)}(1+x^2)^{-q-1/2}\,\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}}(x)\,\mathrm{d}x$$

は以下の場合に FID となる: $q \in (0, 3/2] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n - 1/4, 2n + 3/2]$. なお $q = 1/2$ (Cauchy 分布) と $q = 3/2$ の場合は Voiculescu 変換が具体的に計算できる.

(5) [Has14] $p > 0$ に対して定義されるガンマ分布

$$\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x$$

は $p \in (0, 1/2] \cup [3/2, \infty)$ のとき FID である．なお $p = 1/2$ の場合はカイ二乗分布であり，この場合は Arizmendi–長谷部–佐久間 [AHS13] によって FID である事が示された.

(6) [Has14] 逆ガンマ分布

$$\frac{1}{\Gamma(p)} x^{-p-1} e^{-1/x}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x$$

は全ての $p > 0$ に対して FID である．なお $p = 1/2$ の場合は古典 1/2-安定分布である.

(7) この他にも [AH13, AH16, BH13, Has16] 等で例が知られている.

証明に関して少し触れると，ベータ分布，第二種ベータ分布，t 分布の Cauchy 変換は全て Gauss の超幾何級数で書くことができて，それが満たす微分方程式を解析し，補題 1 の Ω を構成することで定理が証明された．ガンマ分布と逆ガンマ分布は，それぞれスケールを変えたベータ分布と第二種ベータ分布の極限として得られるので，それらが FID であることは (1) と (2) から直ちに従う (FID のクラスは弱収束に関して閉集合である)．Ultrasherical 分布はベータ分布の $p = q$ の場合の一次変換から得られる．この場合には FID であるための必要十分条件が得られている.

図 3 と図 4 の白い領域については，FID でない部分が存在することが分かっているが，まだ FID とも FID でないとも分かっていない部分もある．例えば図 3 で $0 < p, q \leq 1$ の時は FID でないことが分かっている．ガンマ分布についても，FID ではないことが分かっている $p \in (1/2, 3/2)$ もあるし，まだ分かっていないものもある．詳細については [Has14] を参照されたい．未解決のパラメータ領域については以下の予想を立てている.

予想 2. (1) ベータ分布は図 3 の白い領域においては FID ではない.

(2) 第二種ベータ分布は図 4 の白い領域 $(1/2 < p < 3/2)$ においては FID ではない.

(3) ガンマ分布は $1/2 < p < 3/2$ の場合には FID ではない.

(4) t 分布はすべての $q > 0$ に対して FID である.

7.3 古典かつ自由無限分解可能な分布

古典の場合は $*$-無限分解可能分布 (以下 ID 分布) の研究がかなりあり，様々な面白いクラスが知られている．例えば GGC (Generalized Gamma Convolution) や Goldie–Steutel–Bondesson[*3] というクラス [Bon92] は，特徴づけに Pick 関数 ($\boldsymbol{C}^+$ から $\boldsymbol{C}^+ \cup \boldsymbol{R}$ への解析関数) を用いる点で，自由確率論 (定理 4) と共通している．そこで現れる公式なども自由確率論の場合とよく似ており，何か関係があるのではないかと思わされる．また定理 20 で提示した確率分布は (1) と (3) を除いてパラメータの制限なしで ID にもなっている (例えば Bondesson の本に証明が載っている [Bon92])．ID かつ FID であるような例は他にも [AH16, BH13, Has16] で見つかっており，ID 分布と FID 分布の共通部分はなかなか広いクラスのように思われる．これは偶然だろうか．

問題 3. (1) 古典的な安定分布は FID であるかどうかを調べよ．正規分布 (定理 18)，Cauchy 分布 (自由安定分布でもある) と正の 1/2-安定分布 (定理 20(6) の $p = 1/2$) の場合には肯定的な答えが知られている．安定分布についての参考文献として [Sat13, GK54] がある．

(2) 古典確率論で HCM という分布のクラスがある [Bon92]．これは $\mathcal{ID}(*)$ の部分集合で，確率変数のベキ乗や，独立な確率変数の積について閉じている．このような性質を持つクラスを自由確率論の場合に見出せ．ちなみに積やベキ乗に関するいくつかの結果が [AHS13, Has16] にある．

(3) $\mathcal{ID}(*)$ と $\mathcal{ID}(\boxplus)$ の共通部分に何らかの理論を構築せよ．(エルミート行列値確率変数として) ID 分布を持つランダム行列で，その固有値分布が FID 分布に収束するようなモデルが知られている [BG05, CD05]．このモデルを用いて何か言えないだろうか？

7 節では主に自由の場合の話をしてきたが，では単調の場合の非自明な無限分解可能分布の例はあるかというと，全く知られていない．難しくて手が出ないというのが筆者の印象である．例えば正規分布が $\triangleright$-無限分解可能かどうかは知られておらず，自由の場合よりもずっと難しい問題だと思う．

謝辞

著者の研究は科研費若手研究 (B)15K17549 による援助を受けています．論説の一部は 2016 年 10 月東北大学で開催された 12th Sendai Workshop on Non-commutative Stochastic Analysis and Applications で話した講演内容に基づいており，招待してくださった尾畑伸明先生に感謝します．

参考文献

[AB98] L. Accardi M. and Bożejko, Interacting Fock space and Gaussianization of probability measures, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1 (1998), no. 4, 663–670.

[AO03] 明出伊類似, 尾畑伸明, 量子確率論の基礎, 牧野書店, 2003.

[Akh65] N.I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[ABBL10] M. Anshelevich, S. Belinschi, M. Bożejko and F. Lehner, Free infinite divisibility for Q-Gaussians, Math. Res. Lett. 17 (2010), 905–916.

[AW14] M. Anshelevich and J. D. Williams, Limit theorems for monotonic convolution and the Chernoff product formula, Int. Math. Res. Notices 11 (2014), 2990–3021.

[AB13] O. Arizmendi and S. Belinschi, Free infinite divisibility for ultrasphericals, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 16 (2013), 1350001.

[*3] この呼び方は [BMS06] による．Bondesson の本 [Bon92] では GCMED あるいは $\mathcal{T}_2$ と呼ばれている．

[AH13] O. Arizmendi and T. Hasebe, On a class of explicit Cauchy–Stieltjes transforms related to monotone stable and free Poisson laws, Bernoulli 19 (2013), no. 5B, 2750–2767.

[AH16] O. Arizmendi and T. Hasebe, Classical scale mixtures of boolean stable laws, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 4873–4905.

[AHS13] O. Arizmendi, T. Hasebe and N. Sakuma, On the law of free subordinators, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 10 (2013), no. 1, 271–291.

[Arm06] D. Armstrong, Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups, Mem. Amer. Math. Soc. 202 (2009), No. 949.

[AGR81] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem, Phys. Rev. Lett. 47 (1982), 460–463.

[BBC07] T. Banica, J. Bichon and B. Collins, Quantum permutation groups: a survey, Banach Center Publ. 78 (2007), 13–34.

[BMS06] O. Barndorff-Nielsen, M. Maejima and K. Sato, Some classes of multivariate infinitely divisible distributions admitting stochastic integral representations, Bernoulli 12 (2006), no. 1, 1–33.

[BT02] O. Barndorff-Nielsen and S. Thorbjørnsen, Self-decomposability and Lévy processes in free probability, Bernoulli 8(3) (2002), 323–366.

[BT04] O. Barndorff-Nielsen and S. Thorbjørnsen, A connection between free and classical infinite divisibility, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 7 (2004), No. 4, 573–590.

[Bel05] S. Belinschi, Complex analysis methods in noncommutative probability, PhD thesis, Indiana University, 2005. arXiv:math/0602343

[Bel08] S. Belinschi, The Lebesgue decomposition of the free additive convolution of two probability distributions, Probab. Theory Relat. Fields 142 (2008), 125–150.

[BB04] S. Belinschi and H. Bercovici, Atoms and regularity for measures in a partially defined free convolution semigroup, Math. Z. 248 (2004), no. 4, 665–674.

[BB07] S. Belinschi and H. Bercovici, A new approach to subordination results in free probability, J. Analyse Math. 101 (2007), 357–365.

[BBLS11] S. Belinschi, M. Bożejko, F. Lehner and R. Speicher, The normal distribution is $\boxplus$-infinitely divisible, Adv. Math. 226, No. 4 (2011), 3677–3698.

[BTS] S. Belinschi M. Tobias and R. Speicher, Analytic subordination theory of operator-valued free additive convolution and the solution of a general random matrix problem, J. reine angew. Math., to appear.

[BG05] F. Benaych-Georges, Classical and free infinitely divisible distributions and random matrices, Ann. Probab. 33, No. 3 (2005), 1134–1170.

[Bia97] P. Biane, Some properties of crossings and partitions, Discrete Math. 175 (1997), 41–53.

[Bia98] P. Biane, Representations of symmetric groups and free probability, Adv. Math. 138 (1998), no. 1, 126–181.

[Bia01] P. Biane, Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups, Int. Math. Res. Notices (2001), no. 4, 179–192.

[BP99] H. Bercovici and V. Pata, Stable laws and domains of attraction in free probability theory (with an appendix by Philippe Biane), Ann. of Math. (2) 149 (1999), no. 3, 1023–1060.

[BP00] H. Bercovici and V. Pata, A free analogue of Hinčin's characterization of infinite divisibility, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 4, 1011–1015.

[BV93] H. Bercovici and D. Voiculescu, Free convolution of measures with unbounded support, Indiana Univ. Math. J. 42, no. 3 (1993), 733–773.

[Ber85] C. Berg, On the preservation of determinacy under convolution, Proc. Amer. Math. Soc. 93, No. 2 (1985), 351–357.

[Bon92] L. Bondesson, Generalized gamma convolutions and related classes of distributions and densities, Lecture Notes in Stat. 76, Springer, New York, 1992.

[BB06] M. Bożejko and W. Bryc, On a class of free Lévy laws related to a regression problem, J. Funct. Anal. 236 (2006), no. 1, 59–77.

[BH13] M. Bożejko and T. Hasebe, On free infinite divisibility for classical Meixner distributions, Probab. Math. Stat. 33, Fasc. 2 (2013), 363–375.

[CD05] T. Cabanal-Duvilliard, A matrix representation of the Bercovici–Pata bijection, Elect. J. Probab. 10 (2005), 632–661.

[CG08a] G.P. Chistyakov and F. Götze, Limit theorems in free probability theory. I, Ann. Probab. 36, no. 1 (2008), 54–90.

[CG08b] G.P. Chistyakov and F. Götze, Limit theorems in free probability theory II, Cent. Eur. J. Math. 6 (2008), no. 1, 87–117.

[CN16] B. Collins and I. Nechita, Random matrix techniques in quantum information theory, J. Math. Phys. 57 (2016), 015215.

[Cow81] C.C. Cowen, Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), no. 1, 69–95.

[FH] U. Franz and T. Hasebe, in preparation.

[Gne39] B. Gnedenko, To the theory of limiting theorems for sums of independent random variables, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 3 (1939), No. 2, 181–232.

[GK54] B. Gnedenko and A. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1954.

[HT14] U. Haagerup and S. Thorbjørnsen, On the free gamma distributions, Indiana Univ. Math. J. 63 (2014), no. 4, 1159–1194.

[Has10] T. Hasebe, Monotone convolution and monotone infinite divisibility from complex analytic viewpoint, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 13, No. 1 (2010), 111–131.

[Has14] T. Hasebe, Free infinite divisibility for beta distributions and related ones, Electron. J. Probab. 19 (2014), no. 81, 1–33.

[Has16] T. Hasebe, Free infinite divisibility for powers of random variables, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 13 (2016), no. 1, 309–336.

[HS15] T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality of Boolean and monotone stable distributions, Demonstr. Math. 48 (2015), no. 3, 424–439.

[HS] T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality for free Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., to appear.

[HST] T. Hasebe, N. Sakuma and S. Thorbjørnsen, The normal distribution is freely selfdecomposable. arXiv:1701.00409

[HT16] T. Hasebe and S. Thorbjørnsen, Unimodality of the freely selfdecomposable probability laws, J. Theoret. Probab. 29 (2016), Issue 3, 922–940.

[Hia99] 日合文雄, 作用素環の自由積と自由確率論, 数学, 51(1999), 377–394.

[HU06] 日合文雄, 植田好道, ランダム行列と自由確率論, 遊星社, 数理物理への誘い 6, 小嶋泉 (編), 2006.

[Hor05] 洞彰人, 対称群の表現と漸近的組合せ論, 数学 57 (2005), 242–254.

[KVV14] D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, *Foundations of free noncommutative function theory.* Mathematical Surveys and Monographs, 199. AMS, Providence, RI, 2014.

[Len14] R. Lenczewski, Limit distributions of random matrices. Adv. Math. 263 (2014), 253–320.

[Maa92] H. Maassen, Addition of free independent random variables, J. Funct. Anal. 106 (1992), 409–438.

[Mar] A. Marcus, Polynomial convolutions and (finite) free probability, preprint available at https://web.math.princeton.edu/~amarcus/

[MSS] A. Marcus, D.A. Spielman and N. Srivastava, Finite free convolutions of polynomials, arXiv:1504.00350

[MSS15a] A. Marcus, D.A. Spielman and N. Srivastava, Interlacing families I: Bipartite Ramanujan graphs of all degrees, Ann. of Math. 182 (2015), 307–325.

[MSS15b] A. Marcus, D.A. Spielman and N. Srivastava, Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem, Ann. of Math. 182 (2015), 327–350.

[MN10] M. Mastnak and A. Nica, Hopf algebras and the logarithm of the S-transform in free probability, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 3705–3743.

[Meh04] M.L. Mehta, *Random matrices*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2004.

[MS17] J.A. Mingo and R. Speicher, *Free Probability and Random Matrices*, Springer-Verlag, New York, 2017, to appear.

[Mur00] N. Muraki, Monotonic convolution and monotonic Lévy-Hinčin formula, preprint, 2000.

[Mur02] N. Muraki, The five independences as quasi-universal products, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 5 (2002), no. 1, 113–134.

[Oba05] 尾畑伸明, 量子確率論における独立性とグラフのスペクトル解析, 数学 57 (2005), 1–20.

[Oba16] N. Obata, Quantum probability aspects to lexicographic and strong products of graphs, Interdiscip. Inform. Sci. 22, No. 1 (2016), 143–146.

[SY01] N. Saitoh and H. Yoshida, The infinite divisibility and orthogonal polynomials with a constant recursion formula in free probability theory, Probab. Math. Stat. 21 (2001), no. 1, 159–170.

[Sat13] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, corrected paperback edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[Sch] S. Schleissinger, The chordal Loewner equation and monotone probability theory, arXiv:1605.06689

[Spe94] R. Speicher, Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution, Math. Ann. 298 (1994), 611–628.

[Spe97] R. Speicher, On universal products, Free Probability Theory, ed. D. Voiculescu, Fields Inst. Comm. 12, AMS, 1997, 257–266.

[SW97] R. Speicher and R. Woroudi, Boolean convolution, Free Probability Theory, ed. D. Voiculescu, Fields Inst. Comm. 12, AMS, 1997, 267–280.

[TV04] A.M. Tulino and S. Verdú, *Random Matrix Theory and Wireless Communications*, Found. Trends Comm. Inf. Theory 1 (2004), No. 1, 1–182.

[Wan08] J.-C. Wang, Limit laws for boolean convolutions, Pac. J. Math. 237 (2008), no. 2, 349–371.

[Wat01] T. Watanabe, Temporal change in distributional properties of Lévy processes, in: Lévy Processes, Theory and Applications, eds. O. Barndorff-Nielsen, S. Resnick and T. Mikosch, 89–107, Birkhäuser, Basel, 2001.

[WNKTN14] 渡辺澄夫，永尾太郎，樺島祥介，田中利幸，中島伸一，ランダム行列の数理と科学，森北出版，2014.

[Woe86] W. Woess, Nearest neighbour random walks on free products of discrete groups, Bol. Un. Mat. Ital. 5-B (1986), 691–982.

[Wol78] S.J. Wolfe, On the unimodality of infinitely divisible distribution functions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 45 (1978), 329–335.

[Yam78] M. Yamazato, Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L, Ann. Probab. 6 (1978), 523–531.

[Voi85] D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C^*-algebras, Lect. Notes Math. 1132, 556–588, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1985.

[Voi86] D. Voiculescu, Addition of certain non-commutative random variables, J. Funct. Anal. 66 (1986), 323–346.

[Voi91] D. Voiculescu, Limit laws for random matrices and free products, Invent. Math. 104 (1991), no. 1, 201–220.

[VDN92] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica, *Free random variables*, CRM Monograph Series 1, AMS, Providence, RI, 1992.