

自由確率論での無限分解可能性

長谷部 高広*

北海道大学大学院理学研究院

1 自由確率論について

1.1 導入

量子論では位置や運動量などの物理量を (自己共役) 作用素とみなすところが特徴である. 複数の作用素 (物理量) の積や交換子を計算するので, 作用素のなす代数 (作用素環) が必要になる. 例えば素粒子理論では, 粒子が消滅したり, 粒子同士が相互作用して別の粒子に変化したりと激しい変化が起こるが, このような変化を記述するために作用素の積を用いる. なぜ物理量を非可換な作用素にするのか, などといった素朴な問いが当然出てくるが, それに答えるのは筆者の力量では難しい. 作用素環論は量子論のために発展した分野である, ということを書いておきたかったので, 以上のような説明をした.

函数解析学でよく知られているスペクトル分解定理は量子論でとても重要である. それは「状態」という概念を介してスペクトル分解定理が「物理量の確率解釈」という物理的な意味を持つからである. このことによって作用素環論は確率論的な側面を持つ (次節を参照). 作用素環論の確率論的な側面を特に強調した理論のことを量子確率論や非可換確率論と呼んでいる. 非可換確率論はいくつかの方向に分かれており, 統計力学などの物理モデルの解析を行っているグループも数学的な研究を行っているグループもある. 本稿では, ランダム行列理論と関わりの深い非可換確率論として, 自由確率論の解説をする. 「自由確率論」とは奇妙な名前に聞こえるかもしれないが, 群や代数の自由積と相性の良い (非可換) 確率論ということで, このように呼ばれている. 例えば自由群上でランダムウォークを考えると, その再帰性を議論する際に自由確率論が有効である [W86] (実際には Woess の研究は自由確率論とは独立になされており, Woess は現在 Voiculescu 変換と呼ばれているものを Voiculescu と独立に発見している). 自由確率論はランダム行列の固有値解析に応用できることが知られており, その観点から多くの研究がある ([HP00, VDN92]などを参照). そもそもランダム行列がなぜ研究されるのかというと, もともと原子核の核子のエネルギー準位を記述するモデルとしてランダム行列モデルが用いられた. その後の研究で様々な分野との関係が見つかっており, 数学に関して述べると, 可積分系 (パルヴェ方程式など), リーマンゼータ関数, 表現論などへの応用が知られている [M04]. より応用的な分野になると膨大にありとても網羅しきれないが, 最近では無線通信理論や量子情報理論にランダム行列が応用されている. これらのランダム行列の応用において一貫して重要になるのは, 固有値が確率的にどのように分布しているかを調べることである.

*この研究は GCOE プログラム (京都大学) と European Commission, Marie Curie Actions IIF (328112 ICNCP) の援助を受けている. Email: thasebe@math.sci.hokudai.ac.jp

以下では自由確率論についての解説をしていく．最後に筆者の研究対象である自由無限分
解可能分布についてこれまで得られた結果のまとめを述べる．

1.2 代数的確率空間, 確率変数, 確率分布

ここで, 非可換確率論の基礎についてまとめておく． $\mathcal{A}$ を単位元 $1_{\mathcal{A}}$ を持つ $\mathbb{C}$ 上の ***-代数** とする．つまり $\mathbb{C}$ 上の代数であり, 反線形写像 $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ で $X^{**} = X$ ($X \in \mathcal{A}$) を満たすものがあるとする．基本的な例として, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{A} := \mathbb{B}(\mathcal{H})$ を有界線形作用素全体とすると, $*$ は以下で定義される通常の共役演算である: $\langle u, Xv \rangle = \langle X^*u, v \rangle$ ($X \in \mathbb{B}(\mathcal{H}), u, v \in \mathcal{H}$).

線形汎関数 $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ が $\mathcal{A}$ 上の**状態**であるとは, $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ と $\varphi(X^*X) \geq 0$, $X \in \mathcal{A}$ を満たすことを言う．組 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を**代数的確率空間**と言ひ, $X \in \mathcal{A}$ を**確率変数**と言う．

以降では $\mathcal{A}$ はあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の部分 *-代数とし, 強位相で閉じていると仮定する (つまり von Neumann 環であるとする)． $X = X^*$ の場合, そのスペクトル分解を E_X とすると, $\mu_X(B) := \varphi(E_X(B))$ (B は $\mathbb{R}$ の任意のボレル集合) で定まる確率測度 μ_X のことを X の**分布**と言う．

非有界な自己共役作用素もある程度取り込むことができる． $\mathcal{H}$ 上の (有界とは限らない) 自己共役作用素 X について, そのスペクトル射影 $E_X(B)$ (B はボレル集合) が全て $\mathcal{A}$ に属するとき, X は $\mathcal{A}$ に**付随する**と言う．このときは X の分布 μ_X を同様に $\mu_X(B) := \varphi(E_X(B))$ によって定義できる．

例 1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, ランダム行列の集まりを $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes M_n(\mathbb{C})$ とする． $\mathcal{A}$ はヒルベルト空間 $L^2(\Omega, \mathbb{C}^n)$ に自然に作用している． $*$ は行列の共役演算で, φ は $E \otimes (\frac{1}{n} \text{Tr}_n)$ とする．つまりランダム行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ に対して $\varphi(X) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[X_{jj}]$ で定義する． $\mathcal{A}$ に付随する自己共役作用素全体の集合は $\{X \in \mathcal{A}; \text{エルミート}, \mathcal{F}\text{-可測}\}$ と一致する． X の確率分布 μ_X は X の平均の固有値分布 $\mu_X = E[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j}]$ と一致する．ここで λ_j はエルミート行列 X のランダムな固有値である．別の書き方をすれば, ボレル集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して, $\mu_X(B) = E[\frac{\#\{1 \leq j \leq n; \lambda_j \in B\}}{n}]$ となる． $n = 1$ のときは μ_X は $\mathbb{R}$ 値確率変数 X の確率分布になる．

1.3 テンソル独立性と自由独立性

独立性は確率論において基本的概念であるが, 非可換代数では独立性は1つに決まらず, 複数のものが存在する．ある観点からは, 独立性は4つに分類されることが知られている [M03] が, ここでは2種類のみを考える．以下では有界な確率変数についてのみ考える． $X \in \mathcal{A}$ に対して, $\mathbb{C}[X, 1_{\mathcal{A}}]$ を X と単位元 $1_{\mathcal{A}}$ から生成される多項式全体とする．

まず通常の独立性を非可換代数にそのまま拡張したものは, テンソル独立性と呼ばれる．

定義 1.2. $X \in \mathcal{A}$ と $Y \in \mathcal{A}$ が**テンソル独立**とは, 任意の $X_i \in \mathbb{C}[X, 1_{\mathcal{A}}]$, $Y_i \in \mathbb{C}[Y, 1_{\mathcal{A}}]$ の有限積について,

$$\varphi(\cdots X_1 Y_1 X_2 Y_2 X_3 Y_3 \cdots) = \varphi\left(\prod_i X_i\right) \varphi\left(\prod_i Y_i\right)$$

となることである．ここで積記号 $\prod_i X_i$ は, 順序を保つ積とする．

この定義は3つ以上の確率変数に対しても容易に拡張可能である。

テンソル独立性は可換な代数でも起こりうるが、以下に述べる自由独立性は非可換代数でのみ現れる独立性であり、可換代数では現れない。

定義 1.3 (Voiculescu [V85]). X と Y が**自由独立**とは、 $\varphi(X_i) = \varphi(Y_i) = 0$ を満たす任意の有限個の $X_i \in \mathbb{C}[X, 1_A]$, $Y_i \in \mathbb{C}[Y, 1_A]$ に対して、

$$\varphi(\cdots X_1 Y_1 X_2 Y_2 X_3 Y_3 \cdots) = 0$$

となることである。自由独立性も3変数以上の場合に拡張できるが、ここでは省略する。

例 1.4. X, Y を自由独立とすると、以下のことが成り立つ。

$$\begin{aligned}\varphi(XY) &= \varphi(X)\varphi(Y), \quad \varphi(XYX) = \varphi(X^2)\varphi(Y), \\ \varphi(XYXY) &= \varphi(X^2)\varphi(Y)^2 + \varphi(X)^2\varphi(Y^2) - \varphi(X)^2\varphi(Y)^2.\end{aligned}$$

最初の等式を証明してみる。まず $X_1 := X - \varphi(X)1_A \in \mathbb{C}[X, 1_A]$, $Y_1 := Y - \varphi(Y)1_A \in \mathbb{C}[Y, 1_A]$ と置く。これらは $\varphi(X_1) = \varphi(Y_1) = 0$ を満たすから、定義より $\varphi(X_1 Y_1) = 0$ が成り立つ。つまり $\varphi((X - \varphi(X)1_A)(Y - \varphi(Y)1_A)) = 0$ である。これを展開して整理すると、 $\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y)$ を得る。同様に他の等式も証明できる。

1.4 自由たたみこみ

$X, Y \in \mathcal{A}$ を自由独立な自己共役作用素とするとき、 μ_{X+Y} を μ_X と μ_Y の**自由たたみこみ**といい、 $\mu_X \boxplus \mu_Y$ で表す。さらに $X \geq 0$ (または $Y \geq 0$) のとき、 $\mu_{X^{1/2} Y X^{1/2}}$ (または $\mu_{Y^{1/2} X Y^{1/2}}$) を μ_X と μ_Y の**乗法的な自由たたみこみ**といい、 $\mu_X \boxtimes \mu_Y$ で表す。もし $X \geq 0, Y \geq 0$ がともに成り立っていれば、 $\mu_{X^{1/2} Y X^{1/2}} = \mu_{Y^{1/2} X Y^{1/2}}$ となることが知られている。 XY は自己共役にならないので、代わりに $X^{1/2} Y X^{1/2}$ や $Y^{1/2} X Y^{1/2}$ を考えている。乗法的な自由たたみこみはユニタリ作用素の場合にも考える事ができるが、本稿では省略する。

どのように確率測度の自由たたみこみ積を計算すればよいだろうか。確率論の場合はフーリエ変換を用いて計算することができるが、自由確率論の場合はスチルチェス変換を用いる。確率測度 μ に対して、そのスチルチェス変換を $G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mu(dx)$, その逆数を $F_\mu(z) := \frac{1}{G_\mu(z)}$ と定義する。さらに、適当な定義域で次を定義する (Voiculescu 変換):

$$\phi_\mu(z) := F_\mu^{-1}(z) - z.$$

定理 1.5 (Voiculescu-Bercovici [BV93]). $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ とする。 $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ, ν に対して次が成り立つ。

$$\phi_{\mu \boxplus \nu}(z) = \phi_\mu(z) + \phi_\nu(z).$$

定義域はある $\alpha, \beta > 0$ を用いて $\{z \in \mathbb{C}^+ : \text{Im } z > \beta, \alpha |\text{Re } z| \leq \text{Im } z\}$ の形で取れる。

乗法的自由たたみこみについても定理 1.5 のような特徴付けがあるが、本稿で用いないため省略する。興味のある方は文献 [VDN92] を参照していただきたい。乗法的自由たたみこみに関する研究はまだまだ少ないため、今後の発展が見込める研究対象である。

1.5 ランダム行列と自由確率論

自由たたみこみがなぜ研究されているのかというと、ランダム行列の固有値解析に使えるというのが大きな理由である。ここでは自由確率論において有名な定理を紹介する。 n 次エルミート行列 A に対して Eig_A を A の固有値分布、すなわち

$$\text{Eig}_A = \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k(A)}, \quad \lambda_k(A) \text{ は } A \text{ の固有値}$$

と置く。 Eig_A は $\mathbb{R}$ 上の確率測度になる。もし A がランダムなエルミート行列ならば、 Eig_A はランダムな確率測度となる。これを固有値の経験分布と呼ぶ。

定理 1.6 (Voiculescu [V91], Pastur-Vasilchuk [PV00], Benaych-Georges [BG05]). A_n, B_n を互いに (テンソル) 独立な n 次エルミートランダム行列とする ($n \geq 1$). さらに以下の条件を仮定する.

- (1) 任意の $n \geq 1$ に対して、 A_n の分布は回転不変、つまり任意の n 次ユニタリ行列 U に対して、 A_n と $U^* A_n U$ の $M_n(\mathbb{C})$ 上の確率分布は等しい。¹
- (2) $\text{Eig}_{A_n}, \text{Eig}_{B_n}$ は $n \rightarrow \infty$ においてそれぞれある確率分布 μ, ν に確率収束する。

このとき $\text{Eig}_{A_n+B_n}$ は $\mu \boxplus \nu$ に確率収束する ($n \rightarrow \infty$).

また乗法的自由たたみこみについても同様のランダム行列モデルが存在する。このように自由確率論を用いて大きなランダム行列の固有値の変化を記述することができる。こうして、自由確率論における主要目標の 1 つは たたみこみ $\boxplus$ を理解すること となる。次節では、 $\boxplus$ に関する極限定理について述べる。

2 無限分解可能分布

よく知られているように、中心極限定理を一般化することにより、無限分解可能分布の概念が導入される。

定義 2.1 (無限分解可能分布, [S99, SH03] を参照). $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が**無限分解可能 (ID)** とは、任意の $n \geq 1$ に対して $\mathbb{R}$ 値の独立同分布な n 個の確率変数 $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ が存在して、 $X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$ の分布が μ に弱収束することを言う。

有名な例を 2 つ挙げる。

例 2.2. (1) $(X_i)_{i \geq 1}$ を独立同分布な確率変数列とし、 $\varphi(X_i) = 0$, $\varphi(X_i^2) = 1$ とする。このとき $X_i^{(n)} := \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ と定めると、中心極限定理の状況になる。すなわち、 $X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$ はガウス分布に弱収束する。よってガウス分布は ID である。

¹ n 次ランダム行列 A は $M_n(\mathbb{C})$ に値を取る確率変数と見ることができるので、ベクトル空間 $M_n(\mathbb{C})$ 上に確率分布を誘導する。

- (2) $\lambda > 0$ を定数とし, $n > \lambda$ とする. 確率変数 $X_i^{(n)}$ は確率 $1 - \frac{\lambda}{n}$ で 0, 確率 $\frac{\lambda}{n}$ で 1 の値を取るとし, n ごとに i について独立とする. このとき $X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$ の確率分布はポアソン分布 $p_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \delta_n$ に弱収束する (ポアソンの少数の法則). 以上のことをたたみこみを用いて言い換えると, $((1 - \frac{\lambda}{n}) \delta_0 + \frac{\lambda}{n} \delta_1)^{*n} \rightarrow p_\lambda$ ($n \rightarrow \infty$) である. よってポアソン分布は ID である.

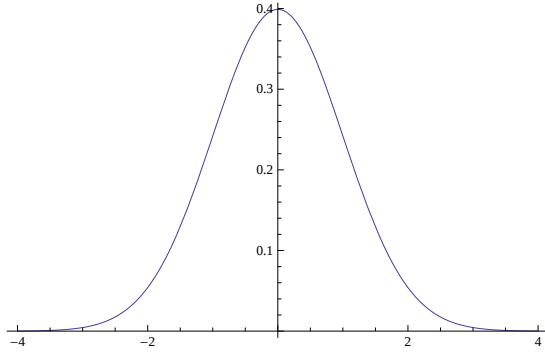


図 1: ガウス分布の確率密度関数

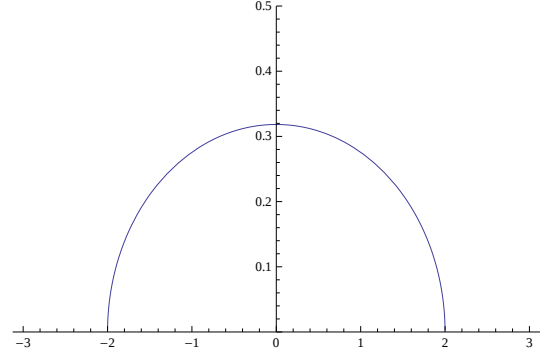


図 2: Wigner の半円分布の確率密度関数

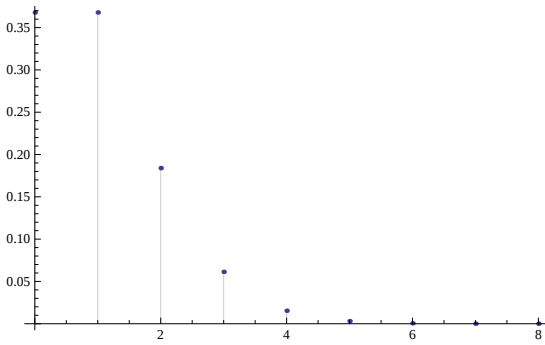


図 3: ポアソン分布 p_1

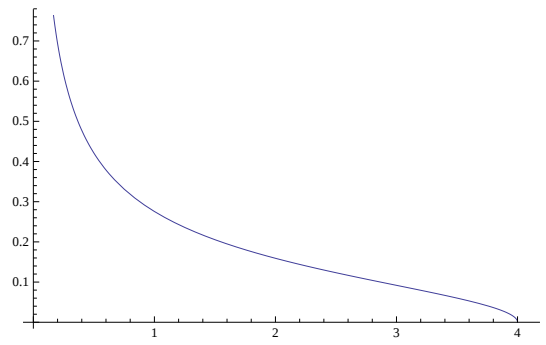


図 4: 自由ポアソン分布 π_1 の確率密度関数

では, 無限分解可能分布を「自由化」してみよう. 自由たたみこみ田を理解するという目的に照らしても, 次の概念は自然なものだろう.

定義 2.3 (自由無限分解可能分布 [BV93]). $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が**自由無限分解可能 (FID)** とは, 任意の $n \geq 1$ に対して自由独立同分布な n 個の確率変数 $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ が存在して, $X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$ の分布が μ に弱収束することを言う.

例 2.4. (1) (自由中心極限定理) $(X_i)_{i \geq 1}$ を自由独立同分布な確率変数列とし, $\varphi(X_i) = 0$, $\varphi(X_i^2) = 1$ とする. このとき $X_i^{(n)} := \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ と定めると. すなわち, $X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$ は Wigner の半円分布 $\mathbf{w}(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx$ に弱収束する. よって Wigner の半円分布は FID である. Wigner の半円分布はいわゆる GUE の固有値分布の極限で現れる. これは原子核中の核子のエネルギー準位を調べるため, Wigner が発見したものである. 最近 Tao たちを中心として, この Wigner の結果を精密にする研究が盛んに行われている [TV].

- (2) (自由ポアソンの少数の法則) 自由ポアソン分布と呼ぶべき FID 分布を以下の極限で定義する:

$$\pi_\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n} \right) \delta_0 + \frac{\lambda}{n} \delta_1 \right)^{\boxplus n}.$$

$\lambda = 1$ の時は, $\pi_1(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-x}{x}} dx$, $0 < x < 4$ と表せることが知られている.

また Benaych-Georges と Cabanal-Duvillard は任意の自由無限分解可能分布 μ に対してあるランダム行列の列を考え, その固有値の経験分布が与えられた μ に収束する事を証明している [BG05, C05]. このランダム行列モデルは μ が Wigner の半円則の場合には GUE と等しくなっており, この意味で彼らは GUE を一般化したモデルを導入した事になる.

自由無限分解可能性に関する基本的な結果は以下の通りである. 自由たたみこみ田を線型化する Voiculescu 変換 ϕ_μ が主役となる.

定理 2.5 (Bercovici-Voiculescu [BV93]). 以下は同値である.

- (1) μ は FID である.
- (2) $-\phi_\mu$ は $\mathbb{C}^+$ から $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ への複素解析的写像になる (このような関数を *Pick-Nevanlinna* 関数という).
- (3) 定数 $c \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ と非負測度 ν で $\nu(\{0\}) = 0$ と $\int_{\mathbb{R}} \min\{1, x^2\} \nu(dx) < \infty$ を満たすものが存在し, 次が成り立つ.

$$z\phi_\mu(z^{-1}) = cz + az^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-xz} - 1 - xz1_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx).$$

(3) の積分表示は確率論の Lévy-Khintchine 表現と完全に対応している. ν のことを自由 Lévy 測度という.

さて, どのような確率分布が FID になるだろうか? 確率論ではガウス分布, ポアソン分布, ガンマ分布を始めとし膨大な例が知られており, 応用上有用な確率分布の多くは ID である. 無限分解可能性のための十分条件もいくつか知られている. 例えば確率密度関数が存在する場合は, それが完全単調になる, あるいは対数凸になるならば, 無限分解可能である. ここで関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が完全単調であるとは, あるボレル測度 σ が存在して, $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sigma(dt)$ と表されることである. また確率密度関数が HCM という条件を満たせば無限分解可能である. 文献 [SH03] にこれまでの結果のまとめがある.

一方で, 自由確率論では FID な分布はそれほど多く知られていない. 使いやすい十分条件も知られていない. そこで, ひとまず具体例を増やしていこうというのが筆者の研究内容である.

3 研究結果: 自由無限分解可能分布の例

もし ϕ_μ が計算可能ならば, 定理 2.5 の条件 (2) を確かめれば μ が FID かどうか分かる. Wigner の半円分布 $\mathbf{w}$ の場合 $\phi_{\mathbf{w}}(z) = \frac{1}{z}$, また自由ポアソン分布の場合 $\phi_{\pi_\lambda}(z) = \frac{\lambda z}{z-1}$ が知られ

ているが、他にはあまり計算可能な例がない。しかし最近 [ABP10] において、次のような例が見つかった。パラメータ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ を持つ対称化されたベータ分布

$$\beta_s(dx) := \frac{1}{\pi\sqrt{s}}|x|^{-1/2}(\sqrt{s} - |x|)^{1/2}dx, \quad -\sqrt{s} \leq x \leq \sqrt{s}$$

を考えると、そのスチルチェス変換と Voiculescu 変換は次のようになる：

$$\begin{aligned} G_{\beta_s}(z) &= -2^{1/2} \left(\frac{1 - \left(1 - s \left(-\frac{1}{z}\right)^2\right)^{1/2}}{s} \right)^{1/2}, \\ \phi_{\beta_s}(z) &= - \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{s}{2} \left(-\frac{1}{z}\right)^2\right)^2}{s} \right)^{-1/2} - z. \end{aligned} \tag{3.1}$$

本当は $\sqrt{\cdot}$ の枝をきちんと定義しないといけないが、ここでは省略する。 β_s は FID 分布であることが定理 2.5 より分かる。

(3.1) には多くのベキが現れていることに着目して、次のようにパラメータを入れてみる。

定義 3.1. パラメータ $0 < \alpha \leq 2$, $r > 0$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を持つ関数 $G_{s,r}^\alpha$ を以下で定義する：

$$G_{s,r}^\alpha(z) = -r^{1/\alpha} \left(\frac{1 - \left(1 - s \left(-\frac{1}{z}\right)^\alpha\right)^{1/r}}{s} \right)^{1/\alpha}.$$

また $F_{s,r}^\alpha(z) := \frac{1}{G_{s,r}^\alpha(z)}$ と定義する。すぐに分かるように、 $F_{s,1}^\alpha(z) = z$ である。

なぜこのような変形を考えるのか、その理由があつて、実は次の性質が成り立つように変形を考えているのである。

定理 3.2 (Arizmendi-Hasebe [AH13]). (1) $r, u > 0$, $2 \geq \alpha > 0$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とすると、

$$F_{s,r}^\alpha \circ F_{us,u}^\alpha = F_{us,ur}^\alpha$$

が成り立つ。特に $(F_{s,r}^\alpha)^{-1} = F_{s/r,1/r}^\alpha$ が成り立つ。

(2) $1 \leq r < \infty$, $0 < \alpha \leq 2$ とする。さらに以下の 2 条件のうちどちらかが成り立つとする：

- (i) $0 < \alpha \leq 1$, $(1 - \alpha)\pi \leq \arg s \leq \pi$;
- (ii) $1 < \alpha \leq 2$, $0 \leq \arg s \leq (2 - \alpha)\pi$.

このとき $G_{s,r}^\alpha$ はある確率測度 $\mu_{s,r}^\alpha$ のスチルチェス変換になる。

FID 分布の研究で基本になる Voiculescu 変換 ϕ_μ は $F_\mu^{-1}(z) - z$ によって定義されていた。したがって、 $(F_{s,r}^\alpha)^{-1} = F_{s/r,1/r}^\alpha$ はとてもありがたい性質である。このようによく知られた関数で G_μ, ϕ_μ が書けるような確率測度 μ はまれである。

$\mu_{s,r}^\alpha$ はいくつかよく知られた確率分布を含んでいる. $(\alpha, s, r) = (2, s, 2)$ の場合は対称化されたベータ分布 β_s になり, また $(\alpha, s, r) = (1, -1, \frac{1}{a})$ の場合はベータ分布

$$\frac{\sin(\pi a)}{\pi a} x^{-a} (1-x)^a dx, \quad 0 < x < 1$$

になる. さらに $a = \frac{1}{2}$ の場合は自由ポアソン分布 π_1 と (スケール変換を除いて) 等しい. Voiculescu 変換 $\phi_{\mu_{s,r}^\alpha}$ の具体的表示と定理 2.5 を用いると, 次のことが示せる.

定理 3.3. (α, s, r) は定理 3.2(2) の条件を満たすとする.

- (1) $\mu_{s,2}^\alpha$ は FID である.
- (2) $0 < \alpha \leq 1, 1 \leq r \leq 2$ ならば $\mu_{s,r}^\alpha$ は FID である.
- (3) $1 \leq \alpha \leq 2, 1 \leq r \leq \frac{2}{\alpha}$ ならば $\mu_{s,r}^\alpha$ は FID である.
- (4) s が純虚数の場合に, かつその場合に限り $\mu_{s,3}^1$ は FID である.
- (5) $\alpha > 1$ ならば, ある $r_0 = r_0(\alpha, s) > 1$ が存在して $r > r_0$ に対しては $\mu_{s,r}^\alpha$ は FID でない.

以上では, Voiculescu 変換が具体的に求められる分布の話をした. では Voiculescu 変換が分からない場合に確率分布が FID であるかどうか知ることは可能だろうか. この問題に関する最初の大きな発展は, Belinschi, Bożejko, Speicher, Lehner によるガウス分布 (正規分布) が FID であるという結果である [BBL11]. これは微分方程式と複素関数論をうまく活用することによって示された. その証明方法をさらに発展・改良することによって, 最近になって多くの確率分布が FID であることが証明されたので, 以下に述べる. これらのほとんどに対して, Voiculescu 変換 ϕ_μ は具体的には計算できない.

定理 3.4. (1) (Belinschi et al. [BBL11]) 正規分布は FID である.

- (2) (Arizmendi-Hasebe-Sakuma [AHS13]) X を平均 0 を持つ Wigner の半円分布に従う確率変数とする. このとき X^4 も FID である. X^2 が自由ポアソン分布に従うことはよく知られているので, X^2 も FID である.
- (3) (Arizmendi-Hasebe [AH14]) $(0, \infty)$ 上の確率分布 $\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha+2}(\cos \alpha \pi)x^\alpha+1} dx$ が FID になるための必要十分条件は $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ である. なおこの確率分布はブール独立性という独立性に由来する.
- (4) (Arizmendi-Hasebe [AH13], Hasebe [H14]) $p, q > 0$ をパラメータに持つ $[0, 1]$ 上のベータ分布 $\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ は $(p, q) \in D$ の場合に FID となる. 領域 D は図 5 に示してある. 論文 [AH13] では特別な場合にこの結果を証明している.
- (5) (Arizmendi-Belinschi [AB13], Hasebe [H14]) $p > -\frac{1}{2}$ をパラメータにもつ Ultraspherical 分布 $\frac{1}{4^p B(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2})} (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}} 1_{[-1,1]}(x) dx$ は FID になるための必要十分条件は $p \geq 1$ である. 論文 [AB13] ではこの結果を特別な場合に証明した.
- (6) (Hasebe [H14]) $p, q > 0$ をパラメータに持つ第二種ベータ分布 $\frac{1}{B(p,q)} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$ ($0 < x < \infty$) は $(p, q) \in D'$ の場合に FID となる. 但し D' は図 6 に示した.

(7) (Hasebe [H14]) $q > \frac{1}{2}$ をパラメータに持つ $\mathbb{R}$ 上の t 分布 $\frac{1}{B(\frac{1}{2}, q - \frac{1}{2})}(1 + x^2)^{-q} dx$ は以下の場合に FID となる: $q \in (\frac{1}{2}, 2] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n + \frac{1}{4}, 2n + 2]$.

(8) (Hasebe [H14]) $(0, \infty)$ 上のガンマ分布 $\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} dx$ は $p \in (0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$ のとき FID である. $p = 1/2$ の場合はカイ二乗分布と呼ばれ, Arizmendi-Hasebe-Sakuma [AHS13] によって FID である事が示された.

(9) (Hasebe [H14]) $(0, \infty)$ 上の逆ガンマ分布 $\frac{1}{\Gamma(p)} x^{-p-1} e^{-1/x} dx$ は全ての $p > 0$ に対して FID である.

この他にも [ABBL10, AH, BH13] 等で例が知られている.

ベータ分布, 第二種ベータ分布, t 分布のスチルチェス変換は全てガウスの超幾何級数で書くことができ, その性質をうまく使って FID であることを証明する. 領域 D, D' の外側 (白い部分) には FID でない領域が存在することが分かっているが, まだ FID とも FID でないとも分かっていない領域もある. ガンマ分布と逆ガンマ分布はベータ分布または第二種ベータ分布の極限として得られるので, それらが FID であることは (4) と (6) から直ちに従う.

上で提示した確率分布は (2), (4), (5) を除いて全て ID にもなっている (例えば Bondesson の本に証明が載っている [B92]). Bondesson の本では GGC (generalized gamma convolution) というクラスの ID 分布が詳しく議論されているが, そこで用いる手法は Pick-Nevanlinna 関数であり, 自由確率論の研究で用いる道具と同じである. このことから確率論と自由確率論の間に何か関連が見つかるのではないかと考えており, 今後の課題として研究していきたい.

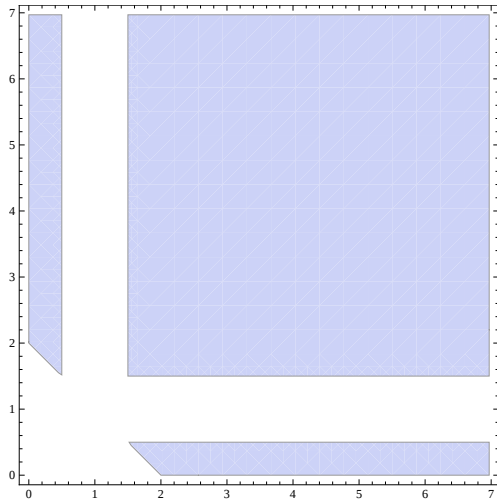


図 5: 領域 D

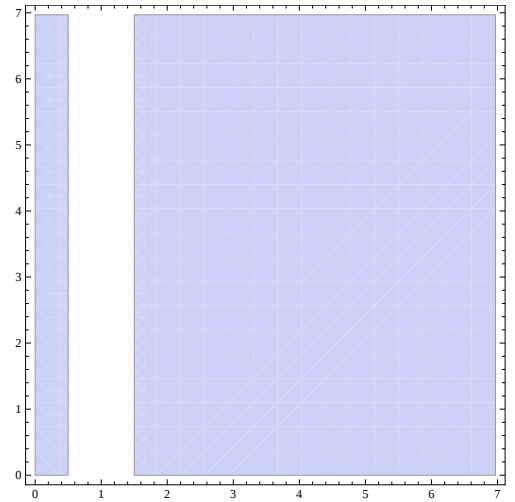


図 6: 領域 D'

参考文献

- [ABBL10] M. Anshelevich, S.T. Belinschi, M. Bożejko and F. Lehner, Free infinite divisibility for Q-Gaussians, Math. Res. Lett. **17** (2010), 905–916.
- [ABP10] O. Arizmendi, O.E. Barndorff-Nielsen and V. Pérez-Abreu, On free and classical type G distributions, Braz. J. Probab. Stat. **24**, No. 2 (2010), 106–127.

- [AB13] O. Arizmendi and S.T. Belinschi, Free infinite divisibility for ultrasphericals, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **16** (2013), 1350001 (11 pages).
- [AH13] O. Arizmendi and T. Hasebe, On a class of explicit Cauchy-Stieltjes transforms related to monotone stable and free Poisson laws, *Bernoulli* **19**(5B) (2013), 2750–2767.
- [AH14] O. Arizmendi and T. Hasebe, Classical and free infinite divisibility for Boolean stable laws, *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), 1621–1632.
- [AH] O. Arizmendi and T. Hasebe, Classical scale mixtures of Boolean stable laws, to be published from *Trans. Amer. Math. Soc.* arXiv:1405.2162
- [AHS13] O. Arizmendi, T. Hasebe and N. Sakuma, On the law of free subordinators, *ALEA, Lat. Amer. J. Probab. Math. Stat.* **10**, No. 2 (2013), 271–291.
- [BBL11] S.T. Belinschi, M. Bożejko, F. Lehner and R. Speicher, The normal distribution is $\boxplus$ -infinitely divisible, *Adv. Math.* **226**, No. 4 (2011), 3677–3698.
- [BG05] F. Benaych-Georges, Classical and free infinitely divisible distributions and random matrices, *Ann. Probab.* **33**, No. 3 (2005), 1134–1170.
- [BV93] H. Bercovici and D. Voiculescu, Free convolution of measures with unbounded support, *Indiana Univ. Math. J.* **42**, No. 3 (1993), 733–773.
- [B92] L. Bondesson, Generalized gamma convolutions and related classes of distributions and densities, *Lecture Notes in Stat.* **76**, Springer, New York, 1992.
- [BH13] M. Bożejko and T. Hasebe, On free infinite divisibility for classical Meixner distributions, *Probab. Math. Stat.* **33**, Fasc. 2 (2013), 363–375. arXiv:1302.4885
- [C05] T. Cabanal-Duvillard, A matrix representation of the Bercovici-Pata bijection, *Elect. J. Probab.* **10** (2005), 632–661.
- [H14] T. Hasebe, Free infinite divisibility for beta distributions and related ones, *Electron. J. Probab.* **19** (2014), No. 81, 1–33.
- [HP00] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*. Mathematical Surveys and Monographs Vol. 77, Amer. Math. Soc., 2000.
- [M04] M.L. Mehta, *Random matrices*, Amsterdam, Elsevier/Academic Press, 2004.
- [M03] N. Muraki, The five independences as natural products, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **6**, No. 3 (2003), 337–371.
- [PV00] L. Pastur and V. Vasilchuk, On the law of addition of random matrices. *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 249–286.
- [S99] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [SH03] F.W. Steutel and K. Van Harn, *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line*. Marcel-Dekker, New York, 2003.
- [TV] T. Tao and V. Vu, Random matrices: The universality phenomenon for Wigner ensembles. arXiv:1202.0068
- [V85] D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C^* algebras, *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory*, *Lect. Notes in Math.* **1132**, Springer, Berlin (1985), 556–588.
- [V91] D. Voiculescu, Limit laws for random matrices and free products, *Invent. Math.* **104**, No. 1 (1991), 201–220.
- [VDN92] D. Voiculescu, K.J. Dykema and A.M. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Series, Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [W86] W. Woess, Nearest neighbour random walks on free products of discrete groups, *Bollettino Unione Mat. Italiana* 5-B (1986), 691–982.