超平面配置入門〜特に、自由超平面配置について〜

寺尾宏明（北大・理・数学）

内容

1 まず歴史を少々‥

超平面配置 (arrangement of hyperplanes) の研究の歴史は長くて短い。

直線上の有限個の点が超平面配置の一例であることからもわかるように、超平面配置は身近で単純な対象なので、人間が超平面配置という存在を意識したのは有史以前であろう。また、有名な「植木算」が超平面配置に関する定理として捉えられる[1]ことでも推察できるように初等数学との関連も当然深い。

しかし、現代数学の一部として研究されるようになったのは、1975 年に T. Zaslavsky が学位論文をまとめた [Za75] 以降であろう。そして、1980 年に発表された P. Orlik と L. Solomon の２論文 [OS80a, OS80b] において、はっきりと超平面配置研究の「新生」が始まったといえよう。超平面配置の多岐に渡る歴史を詳述することは他の機会に譲るとして、ここでは自由超平面配置に限って、その揺籃期の頃に想い出を少しく述べる。主に、筆者が２０代の終わりの頃の話である。現在の若い研究者から見れば有史以前のような時代かも知れないので、歴史を語り継ぐ「語り部」の役割をしばし務めよう、と思う。

自由超平面配置 (free arrangement of hyperplanes) より以前に、自由因子 (free divisor) の概念が存在した。筆者が斎藤恭司氏に初めてお目にかかった 1974 年の暮れには、すでに自由因子の定義が与えられていただけでなく、「isolated singularity の semiuniversal deformation の discriminant が自由因子であるか？[2]」とか、「B. Grünbaum の３次元単体的実超平面配置のリス

[1]「１次元実超平面配置において、有界部屋 (bounded chamber) の数は (超平面の数)-1 で与えられる」というのが、植木算の原理である。このことは、一般次元の実超平面配置について、「有界部屋の数は $|\pi(\mathcal{A},-1)|$ に等しい」と一般化される。

[2]後に、斎藤氏自身によって証明された。

ト [G71] の内のどの超平面配置が自由因子を与えるか？[3]」などの具体的な問題が提示されていた、と記憶する。ただし、当時は、free divisor とか free arrangement とは呼ばずに、log free divisor とか log free arrangement と呼んでいた。Free arrangement という言葉が最初に文献に登場したのは 1980 年の [T80] においてであった。

[T80] は東大紀要に発表されたのだが、同じ号で [T80] の直前に掲載されていたのが、斎藤恭司氏の [S80] であった。今日でも、logarithmic forms と logarithmic vector fields に関する基本文献として引用されることが多い論文であり、有用な Saito's criterion はこの論文が初出である。

次節で述べる自由超平面配置のポアンカレ多項式の分解定理は [T81] で証明された。この結果への反応は海外で素早く、出版前に Séminaire Bourbaki で、P. Cartier [C81] によって紹介され、また、この結果に関して、P. Orlik 氏などからメール (電子メールでなくてエアメール) が届いた。

Free arrangements についての次の問題は [T83] で提出された。

Problem 1. Can the freeness of an arrangement be determined by the lattice $L(X)$*?*

これ以降、この問題への肯定的答は「予想」としてしばしば引用されることになった。

一方、斎藤氏は、1974 年の時点ですでに、「Coxeter 配置が自由配置である」という事実 (後述) を明確に認識しておられた。氏の Coxeter 群についてのさらに深い研究は、氏を flat generators の定義と構成へと導き、矢野環、関口次郎両氏との共著論文 [SYS80] が生まれた。この flat generators と primitive derivation の理論は、当時こそ、十分にその真価が理解されなかったが、十数年後、Frobenius manifold structure の理論 (e. g. [D96]) として大きく花開くことになる。しかし、次々節で触れるように、これが２０数年後に、多重自由超平面配置と見事に結びつくとは当時の筆者は知る由も無かった。

2　自由超平面配置に関する最重要結果を３つ選ぶと‥

主観的になるのを覚悟で、自由超平面配置に関する大切な３つの結果を選んでみようと思うが、その前に定義から始める。

V を ℓ 次元のベクトル空間、$\mathcal{A}$ を V 内の超平面配置とする。すなわち、$\mathcal{A}$ は、V の余次元１の部分ベクトル空間の有限族とする。$S = S(V^*)$ を V の双対空間 V^* の対称代数とせよ。すなわち S は V 上の多項式関数全体の

[3] 後に、筆者によって決定された。

なす $\mathbb{R}$-代数である。このとき、

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) := \{\theta \mid & \theta \text{ は } S \text{ から } S \text{ への } \mathbb{R}\text{-線型な微分であって} \\ & \theta(\alpha) \in \alpha S \text{ が } \ker\alpha \in \mathcal{A} \text{ なるすべての } \alpha \in V^* \text{ について成立 } \} \end{aligned}$$

という graded S-module を考える。(幾何学的には、これは $\mathcal{A}$ に沿った多項式ベクトル場の集合である。) $\mathcal{A}$ が **自由超平面配置 (free arrangement)** であるとは、$D(\mathcal{A})$ が free S-module であることをいう。$\mathcal{A}$ が 自由超平面配置であるとき、

$$D(\mathcal{A}) \simeq S(-d_1) \oplus S(-d_2) \oplus \cdots \oplus S(-d_\ell) \quad (S\text{-graded modules として同型})$$

なる非負整数 $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ を $\mathcal{A}$ の **指数 (exponents)** とよぶ。

まず、最初の大切な結果は、

定理 2.1 (斎藤恭司 [S75]) V に実鏡映群として作用する有限コクセター群 G の鏡映面の集合を**コクセター配置 (Coxeter arrangement)** と呼び、$\mathcal{A}(G)$ で表すとき、$\mathcal{A}(G)$ は、自由超平面配置であり、その指数は G の通常の意味での指数に等しい。

この結果に類する結果は、V. I. Arnol'd などにもあるが、この形で定式化したのは、[S75] が最初である。この定理は、基本不変式から具体的な $D(\mathcal{A}(G))$ の同次基底を構成することによって非常に具体的に証明される。構成したものが実際に基底であることを示すには、いわゆる Saito's criterion を用いるのが一般的である。この結果によって、重要な自由超平面配置の系統的な実例が得られたことの意味は大きい。

$\mathcal{A}$ に属する超平面のすべての可能な intersections を集めて $L(\mathcal{A})$ とおく。すなわち

$$L(\mathcal{A}) := \{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

(V も $L(\mathcal{A})$ に含まれるとみなす。) $X, Y \in L(\mathcal{A})$ に対して、$X \geq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ として半順序を定義すれば、$L(\mathcal{A})$ は半順序集合 (poset) になる。これを**交叉半順序集合 (intersection poset)** とよぶ。この順序に関して V は最小元である。次に $\mathcal{A}$ の**メビウス関数 (Möbius function)** $\mu_{\mathcal{A}}$ とは $L(\mathcal{A})$ 上の整数値関数であって、以下の 2 条件で特徴付けられるものである。

$$\mu_{\mathcal{A}}(V) = 1, \quad \sum_{\substack{Z \in L(\mathcal{A}) \\ V \leq Z \leq X}} \mu_{\mathcal{A}}(Z) = 0 \ (X \neq V).$$

このとき $\mathcal{A}$ の**ポアンカレ多項式 (Poincaré polynomial)** $\pi(\mathcal{A},t) \in \mathbb{Z}[t]$ は

$$\pi(\mathcal{A},t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu_{\mathcal{A}}(X)(-t)^{\operatorname{codim} X}$$

と定義される。

次の結果は自由超平面配置が著しい組合せ的性質を持つことを示している。

定理 2.2．([T81]) $\mathcal{A}$ が自由超平面配置でその指数が $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ ならば、

$$\pi(\mathcal{A},t) = \prod_{i=1}^{\ell}(1 + d_i t).$$

さて、３つ目の選択はなかなか難しいが、ここでは、S. Yuzvinsky により証明された次の結果を選ぼう。

定理 2.3．([Yu93]) 交叉半順序集合を固定した超平面配置のモデュライ空間の中で、自由超平面配置全体のなす部分集合はザリスキ開集合（空かも知れない）である。

このことは、超平面配置の自由性が、「ほとんど」交叉半順序集合によって決定されることを意味している。この意味で、前節の「予想」(=Problem 1) は、「ほとんど」正しい。とは言え、「ほとんど正しい」と「いつも正しい」の間のギャップが大きい（どのくらいの大きさかはまだわからないが）ことは言うまでもない。ただ、この定理の証明の議論の意味するところはまだ完全に汲み尽くされていないようにも思われる。

3　自由多重超平面配置に関する最重要結果を３つ選ぶと ‥

まず Ziegler [Zi89] に始まる自由多重超平面配置の理論について述べる。**多重超平面配置 (Multiarrangement of hyperplanes)** $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, m)$ とは、超平面配置 $\mathcal{A}$ と、重複度写像 $\mathbf{m} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ の対のことである。各超平面 $H \in \mathcal{A}$ に対して、$\mathbf{m}(H) \in \mathbb{Z}_{>0}$ を H の重複度と呼ぶ。通常の超平面配置 $\mathcal{A}$

は $\mathbf{m}(H)=1\ (\forall H\in\mathcal{A})$ であると考えられる。$D(\mathcal{A})$ の定義にならって

$$\begin{aligned}D(\mathcal{B}) := \{\theta \mid &\theta \text{ は } S \text{ から } S \text{ への } \mathbb{R}\text{-線型な微分であって}\\ &\theta(\alpha)\in\alpha^{\mathbf{m}(\ker\alpha)}S \text{ が } \ker\alpha\in\mathcal{A} \text{ なるすべての } \alpha\in V^* \text{ について成立}\,\}\end{aligned}$$

と定義する。$\mathcal{B}$ が **自由多重超平面配置 (Free multiarrangement)** であるとは、$D(\mathcal{B})$ が自由 S-加群であることをいう。$\mathcal{B}$ が自由多重超平面配置であるとき、$\mathcal{B}$ の **指数 (exponents)** も自由超平面配置の場合と同様に定義される。

定理 3.1([T02]) 定理 2.1 の状況で考える。m を正整数とする。多重コクセター配置 $\mathcal{B}=(\mathcal{A}(G),\mathbf{m})$ を、$\mathbf{m}(H)=m$ (H によらない一定の重複度) で定義するとき、$\mathcal{B}$ は以下の指数をもつ自由多重超平面配置である：

(i) $m=2k$ (偶数) ならば, $(kh,kh,\ldots,kh)$ (ℓ 回),
(ii) $m=2k+1$ (奇数) ならば, $(kh+m_1,kh+m_2,\ldots,kh+m_\ell)$.

ただし、ここで、h は、コクセター群 G のコクセター数、$m_1,m_2,\ldots,m_\ell$ は、G の指数を意味する。

定理 3.1 の original な証明はかなり複雑で強引な計算で具体的に基底を構成するのであるが、[T05, Yo02] に、原始微分 (primitive integral) の Levi-Civita 接続を用いる別証明がある。筆者はこの論文を書いて初めて、30 年近く前の斎藤恭司氏による flat generator system の仕事の持つ意味の一端を理解した（と思っている）。

一般論から、２次元の多重超平面（直線）配置は、重複度によらずに必ず自由になることが知られている。しかし、その指数や、基底の具体的構成法はほとんど知られていないのが実情である。その難しさの主たる理由は、以下のような例が存在して、指数が必ずしも重複度と直線の本数だけによって組み合わせ的に決まらないという事情による。

例. 4 直線

$$\begin{aligned}&H_1=\{x=0\},\quad H_2=\{y=0\},\\ &\qquad\qquad H_3=\{x-y=0\},\quad H_4=\{x+cy=0\}\ (c\notin\{0,-1\})\end{aligned}$$

からなる超平面配置 $\mathcal{A}$ について重複度 $\mathbf{m}$ を

$$\mathbf{m}(H_1)=3,\ \mathbf{m}(H_2)=3,\ \mathbf{m}(H_3)=1,\ \mathbf{m}(H_4)=1$$

とするとき、自由多重超平面配置 $(\mathcal{A}, \mathbf{m})$ の指数は、

$$c = 1 \text{ ならば } (3,5),$$
$$c \neq 1 \text{ ならば } (4,4)$$

で与えられる。

このことは、自由多重超平面配置の指数が、射影直線上で 4 直線に対応する 4 点の非調和比の影響を受けることを表している。

このような難しさもあって、2 次元の多重超平面（直線）配置の指数や、基底の具体的構成法に関する (今日までの) 最も具体的な結果は、(非調和比をもたない) 3 本の直線に関する若神子篤史の以下の結果であろう。

定理 3.2 ([W06]) $\mathbb{C}^2$ 内の 3 本の超平面（直線）配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3\}$ とその重複度 $\mathbf{m}$ が与えられれば、$D(\mathcal{A}, \mathbf{m})$ の基底の具体的構成方法が存在する。また、

$$m_i := \mathbf{m}(H_i) \ (i = 1, 2, 3), \ M := \max\{m_1, m_2, m_3\}, \ |\mathbf{m}| = m_1 + m_2 + m_3$$

とするとき、指数は、

$M \geq |\mathbf{m}|/2$ ならば、$(M, |m| - M)$

$M < |\mathbf{m}|/2$ 、かつ、$|\mathbf{m}|$ が偶数ならば、$(|\mathbf{m}|/2, |\mathbf{m}|/2)$

$M < |\mathbf{m}|/2$ 、かつ、$|\mathbf{m}|$ が奇数ならば、$((|\mathbf{m}| - 1)/2, (|\mathbf{m}| + 1)/2)$

で与えられる。(基底の具体的構成には、Schur 関数の特殊値が登場するのだが、詳細は、本講究録の若神子氏による論文を参照されたい。)

さて、最後に、自由超平面配置と多重自由超平面配置とを結びつける吉永正彦の優れた結果を紹介しよう。

定理 3.3. ([Yo04]) $\ell \geq 4$ とせよ。超平面配置 $\mathcal{A}$ が指数 $(1, d_1, \cdots, d_\ell)$ の自由超平面配置であるための必要十分条件は $H_0 \in \mathcal{A}$ で以下の 2 条件を満たすものが存在することである。

1) 自然に定義される制限多重超平面配置 $\mathcal{A}^{H_0}$ が指数 $(d_1, \cdots, d_\ell)$ をもつ自由多重超平面配置であり、かつ、

2) $\mathcal{A}$ が H_0 に沿って、局所的自由である、すなわち、$\mathcal{A}_x := \{H \in \mathcal{A} \mid x \in H\}$ が、すべての $x \in H_0 \setminus \{0\}$ に対して自由超平面配置である。

従って、$\mathcal{A}$ $(\ell \geq 4)$ の自由性は、ひとつの超平面 $H_0 \in \mathcal{A}$ に関して、$H_0 \setminus \{0\}$ のある近傍 U への $\mathcal{A}$ の制限 $\mathcal{A}|_U$ によって決定されていることになる。この結果の系のひとつとして、いわゆる Edelman-Reiner 予想 [ER96] が肯定的に解かれた。

4　最後に今後の展望 (希望) を少々 ••

自由超平面配置については、未だ十分に理解されているとは言い難いものの、1970 年代半ばの導入の時から見れば、大きな進歩があった。それにひきかえ、自由多重超平面配置については、1980 年代の導入時と比べても、若神子の (3 本の直線の) 結果が最新結果のひとつであることからもわかるように、まだまだ幼稚園歩きの段階であると言えよう。前節の例が示すように多重自由超平面配置は、自由超平面配置よりも遥かに sensitive な対象であり、扱いが難しい。

しかし、吉永の結果を見れば、自由超平面配置のさらなる深い研究は、自由多重超平面配置の研究を避けて通れないことも確かであろう。いつの日か、現在の若手研究者が、自由多重超平面配置についての大きな進歩をもたらし、１節で述べた「予想」(=Problem 1) が何らかの形で解決される日が来ることを期待している。

References

[C81] Cartier, P.: Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géometrie combinatoire. In: Séminaire Bourbaki 1980/81. Lecture Notes in Math. **901**, Springer Verlag, 1981, pp. 1-22.

[D96] Dubrovin, B.: Geometry of 2D topological field theories. Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 120–348, Lecture Notes in Math., 1620, Springer, Berlin, 1996.

[ER96] Edelman, P. H., Reiner, V.: Free arrangements and rhombic tilings. Discrete Comput. Geom. **15** (1996), no. 3, 307–340.

[G71] Grünbaum, B.: Arrangements of hyperplanes. In: Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics and Graph Theory. Baton Rouge 1971, pp. 41-106

[OS80a] Orlik, P., Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Invent. Math. 56 (1980), 167–189.

[OS80b] Orlik, P., Solomon, L.: Unitary reflection groups and cohomology. Invent. Math. 59 (1980), 77–94.

[S75] Saito, K.: On the uniformization of complements of discriminantal loci. in *Seminar Notes*, Amer. Math. Soc. Summer Institute, Williamstown, MA, 1975.

[S80] Saito, K.: Theory of logarithmic formas and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27**, 265-291 (1980).

[SYS80] Saito, K., Yano, T., Sekiguchi, J.: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group. Comm. Algebra, **8** (1980), no. 4, 373–408.

[T80] Terao, H.: Arrangements of hyperplanes and their freeness I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27**, 293-312 (1980).

[T81] Terao, H.: Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. Inventiones math. 63, no.1, 159-179 (1981).

[T83] Terao, H.: The exponents of a free hypersurface. Proc. Symp. Pure Math. 40, *Singularities*, part 2, 561-566 (1983).

[T02] Terao, H.: Multiderivations of Coxeter arrangements. Invent. Math. **148** (2002), no. 3, 659–674.

[T05] Terao, H.: The Hodge filtration and the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Manuscripta Math. 118 (2005), no. 1, 1–9.

[W06] Wakamiko, A.: On the exponents of 2-multiarrangements. to appear in Tokyo J. Math.

[Yo02] Yoshinaga, M.: The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 78 (2002), no. 7, 116–119.

[Yo04] Yoshinaga, M.: Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. Invent. math. (2004).

[Yu93] Yuzvinsky, S.: Free and locally free arrangements with a given intersection lattice. Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), no. 3, 745–752.

[Za75] Zaslavsky, T.: Facing yp to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Memoirs Amer. Math. Soc., **154**, 1975.

[Zi89] Ziegler G. M.: Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.