Edelman-Reiner 予想の解決について

寺尾宏明（都立大・理・数学）

1　はじめに

先ごろ (2003 年 6 月) **吉永正彦** (京大数理研院生) [Yo2] によって、Edelman-Reiner 予想が肯定的に解決された。喜ばしい一方で、予想をねらっていた者のひとりとしては、自分が解決できなかったことには若干の悔しさもあるが、Ziegler [Zi] による multiarrangement の自由性の概念を上手に用いた吉永の証明手法は、Solomon-Terao [ST] において「予感」されていたものであり、その意味では 1998 年の [ST] から 2002 年の [Te2] に向かうベクトルの延長線上にあるとも言えよう。

以下、まず Edelman-Reiner 予想とは何かを述べてから、吉永の与えた証明の概略と手法についての解説をあたえる。

2　Edelman-Reiner 予想とは何か？

Edelman-Reiner 予想は任意のルート系がある種の幾何学的/組合せ的性質をもつことを予想するものであり、1996 年に [ER] の中で提出された。予想の根拠は Shi [Sh1, Sh2], Stanley [Sta2], Athanasiadis [Ath1], Edelman-Reiner [ER] らによる extended Shi/Catalan arrangements の Poincaré 多項式の (case-by-case の) 具体的計算結果であった。

以下、Edelman-Reiner 予想を述べるのに必要な述語の準備をしよう。V を ℓ 次元の実ユークリッド空間、Φ をその中の既約ルート系とせよ。すなわち、Φ は以下のいずれかである。

$$A_\ell\ (\ell \geq 1), B_\ell\ (\ell \geq 2), C_\ell\ (\ell \geq 2), D_\ell\ (\ell \geq 3), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.$$

Φ^+ で正ルートの集合を表す。各 $\alpha \in \Phi^+$ に対して、α に関する鏡映の鏡映面 H_α が決まる。すなわち

$$H_\alpha := \{x \in V \mid (\alpha, x) = 0\}$$

である。このとき hyperplane arrangement

$$\mathcal{A}(\Phi) := \{H_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+\}$$

は鏡映面の集合であり、**Weyl arrangement** と呼ばれる。以下、Weyl arrangement に属する超平面を整数分だけ平行にずらしたアフィン超平面を考える。すなわち $\alpha \in \Phi^+, k \in \mathbb{Z}$ として、

$$H_{\alpha,k} := \{x \in V \mid (\alpha, x) = k\}$$

と定義する。この超平面を (やや記号の悪用だが) 単に $\{\alpha = k\}$ と表すこともある。$p, q \in \mathbb{Z}$ $(p < q)$ に対して

$$\mathcal{A}(\Phi)^{[p,q]} := \{H_{\alpha,k} \mid k \in \mathbb{Z},\ p \leq k \leq q,\ \alpha \in \Phi^+\}$$

という hyperplane arrangement を考える。このタイプの arrangements の内で特にふたつのタイプのものを考えて、以下のように定義する。

定義１. $\mathcal{A}(\Phi)^{[1-m,m]}$ $(m \geq 1)$ を **extended Shi arrangement** とよぶ。また $\mathcal{A}(\Phi)^{[-m,m]}$ $(m \geq 1)$ を **extended Catalan arrangement** とよぶ。

定義２. $\mathcal{A}$ を V 内の hyperplane arrangement とする。$\mathcal{A}$ に属する超平面のすべての可能な intersections を集めて $L(\mathcal{A})$ とおく。すなわち

$$L(\mathcal{A}) := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

(V も $L(\mathcal{A})$ に含まれるとみなす。) $X, Y \in L(\mathcal{A})$ に対して、$X \geq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ として半順序を定義すれば、$L(\mathcal{A})$ は半順序集合 (poset) になる。これを **intersection poset** とよぶ。この順序に関して V は最小元である。次に $\mathcal{A}$ の **Möbius function** $\mu_{\mathcal{A}}$ とは $L(\mathcal{A})$ 上の整数値関数であって、以下の２条件で特徴付けられるものである。

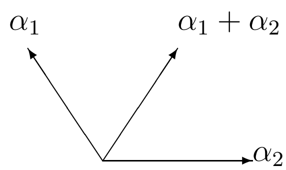
$$\mu_{\mathcal{A}}(V) = 1, \quad \sum_{\substack{Z \in L(\mathcal{A}) \\ V \leq Z \leq X}} \mu_{\mathcal{A}}(Z) = 0 \ (X \neq V).$$

このとき $\mathcal{A}$ の **Poincaré 多項式** $\pi(\mathcal{A}, t) \in \mathbb{Z}[t]$ は

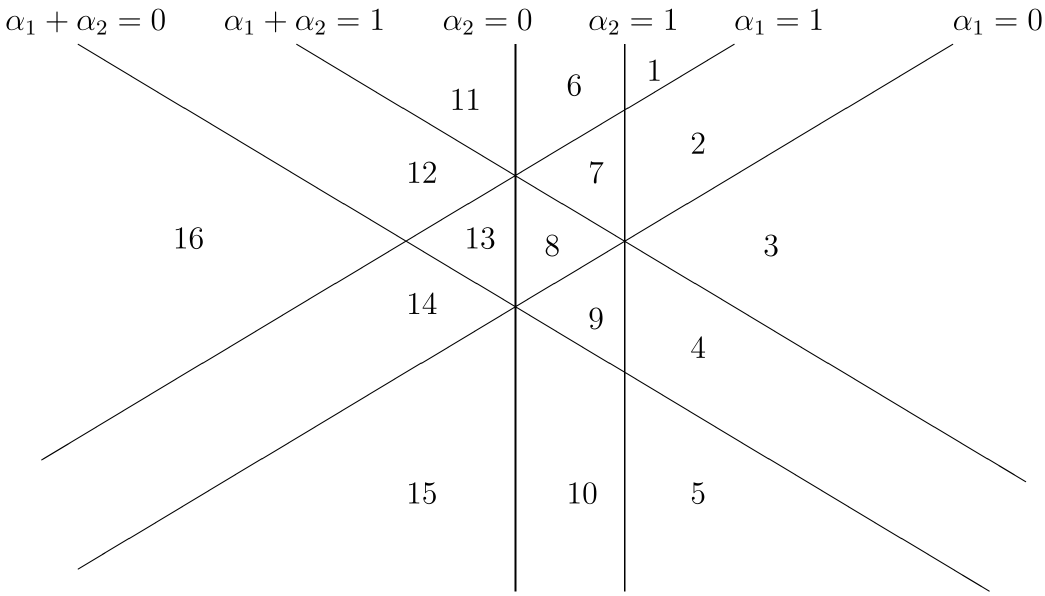
$$\pi(\mathcal{A}, t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu_{\mathcal{A}}(X)(-t)^{\operatorname{codim} X}$$

と定義される。

Shi [Sh1, Sh2] は、Φ が A_ℓ 型ルート系の場合に $\mathcal{A}(A_\ell)^{[0,1]}$(これが元来の **Shi arrangement**) を詳しく調べた。例として、Φ が A_2 型ルート系の場合の A_2^+ と Shi arrangement $\mathcal{A}(A_2)^{[0,1]}$ の図を次頁に画いておこう。



A_2 型の正ルート A_2^+



A_2 型の Shi arrangement $\mathcal{A}(A_2)^{[0,1]}$ は
$(\ell + 2)^2 = (2 + 2)^2 = 16$ の部屋をもつ

定理１．(Shi 1986/87 [Sh1, Sh2]) Φ が A_ℓ 型ルート系の場合の Shi arrangement $\mathcal{A}(A_\ell)^{[0,1]}$ は、$(\ell+2)^\ell$ 個の部屋 (chambers) をもつ。

以下の結果はすでに古典的である。

定理２．(Zaslavsky 1975 [Za]) V 内の hyperplane arrangement $\mathcal{A}$ は $\pi(\mathcal{A},1)$ 個の部屋をもつ。

ここで、extended Shi arrangements と extended Catalan arrangements についての組合せ的予想を述べる。(後述するように、吉永が証明した Edelman-Reiner 予想はこの予想よりさらに強い予想であるので、この予想はすでに肯定的に解決されている。)

予想１. 既約ルート系 Φ の exponents を $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ とし、h を Coxeter number とせよ。このとき

(i) (extended Shi arrangements)

$$\pi(\mathcal{A}(\Phi)^{[1-m,m]}, t) = (t+mh)^\ell,$$

(ii) (extended Catalan arrangements)

$$\pi(\mathcal{A}(\Phi)^{[-m,m]}, t) = \prod_{i=1}^{\ell}(t+mh+d_i).$$

この予想と定理２より、$\mathcal{A}(\Phi)^{[1-m,m]}$ は $(1+mh)^\ell$ 個の部屋をもち、$\mathcal{A}(\Phi)^{[-m,m]}$ は $\prod_{i=1}^{\ell}(1+mh+d_i)$ 個の部屋をもつことがわかるので、特に、定理１が従う。この予想１は Headley [He], Postnikov-Stanley [PoSt], Athanasiadis [Ath2, Ath3] などによって部分的には解決されていたが、吉永が証明を与えるまで一般的な証明はえられていなかった。さて、Edelman-Reiner 予想を述べよう。

Edelman-Reiner 予想.

(1) 任意の extended Shi arrangement $\mathcal{A}(\Phi)^{[1-m,m]}$ の coning* は free** arrangement であって、その exponents は $(1, mh, mh, \ldots, mh)$ (mh は ℓ 回現れる) である。

(2) 任意の extended Catalan arrangement $\mathcal{A}(\Phi)^{[-m,m]}$ の coning* は free** arrangement であってその exponents は $(1, mh+d_1, mh+d_2, \ldots, mh+d_\ell)$ である。

この文中の２つの述語については解説が必要であろう。

*) (coning) $V=\mathbb{R}^\ell$ を１次元高い空間 $W=\mathbb{R}^{\ell+1}$ (座標を $(x_0,x_1,\ldots,x_\ell)$ とする) の中の ℓ 次元 affine subspace $\{x_0=1\}$ として埋め込んでおく。H が V 内の affine hyperplane とするとき、H の $\mathbf{0}$ (W の原点) 上の cone を $\mathbf{c}H$ で表す。$\mathcal{A}$ が V 内の affine hyperplane arrangement とするとき、

$$\mathbf{c}\mathcal{A}:=\{\{x_0=0\}\}\cup\{\mathbf{c}H\mid H\in\mathcal{A}\}$$

を $\mathcal{A}$ の **coning** とよぶ。$\mathbf{c}\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ より１枚多くの hyperplanes を含む W 内の hyperplane arrangement であり、$\mathbf{c}\mathcal{A}$ のすべての hyperplanes は W の原点 $\mathbf{0}$ を通る。また、$\pi(\mathbf{c}\mathcal{A},t)=(1+t)\pi(\mathcal{A},t)$ なる関係式は容易に見て取れる。

**) (free arrangement) $\mathcal{A}$ が V 内の hyperplane arrangement で、$\mathcal{A}$ に属する hyperplane はすべて V の原点を通るとせよ。$S=S(V^*)$ を V の双対空間 V^* の対称代数とせよ。すなわち S は V 上の多項式関数全体のなす $\mathbb{R}$-代数である。このとき、

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}):=\{\theta\mid\ &\theta\text{ は }S\text{ から }S\text{ への }\mathbb{R}\text{-線型な微分であって}\\ &\theta(\alpha)\in\alpha S\text{ が }\ker\alpha\in\mathcal{A}\text{ なるすべての }\alpha\in V^*\text{ について成立}\}\end{aligned}$$

という graded S-module を考える。(幾何学的には、これは $\mathcal{A}$ に沿った多項式ベクトル場の集合である。) $\mathcal{A}$ が **free arrangement** であるとは、$D(\mathcal{A})$ が free S-module であることをいう。$\mathcal{A}$ が free arrangement であるとき、

$$D(\mathcal{A})\simeq S(-d_1)\oplus S(-d_2)\oplus\cdots\oplus S(-d_\ell)\quad (S\text{-graded modules として同型})$$

なる非負整数 $d_1,d_2,\ldots,d_\ell$ を $\mathcal{A}$ の **exponents** とよぶ。K. Saito [Sa2] により、Weyl arrangement $\mathcal{A}(\Phi)$ は free arrangement であり、その exponents は Φ の通常の意味での exponents に等しいことが知られている。次の結果は free arrangement が著しい組合せ的性質を持つことを示している。

定理３．(Factorization Theorem [Te1]) $\mathcal{A}$ が free arrangement でその exponents が $(d_1,d_2,\ldots,d_\ell)$ ならば、

$$\pi(\mathcal{A},t)=\prod_{i=1}^{\ell}(t+d_i).$$

したがって、もし、Edelman-Reiner 予想が正しければ定理３より予想１が従う。

3 Edelman-Reiner 予想の証明の概略

まず Ziegler [Zi] に始まる free multiarrangement の理論について述べる。Multiarrangement $\mathcal{B}$ とは、各 hyperplane $H \in \mathcal{B}$ に multiplicity $m(H) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が与えられているものである。通常の hyperplane arrangement $\mathcal{A}$ は $m(H) = 1$ $(\forall H \in \mathcal{A})$ であると考えられる。$D(\mathcal{A})$ の定義にならって

$$\begin{aligned} D(\mathcal{B}) := \{\theta \mid \theta & \text{は} S \text{から} S \text{への} \mathbb{R}\text{-線型な微分であって} \\ & \theta(\alpha) \in \alpha^{m(\ker\alpha)} S \text{が} \ker\alpha \in \mathcal{A} \text{なるすべての} \alpha \in V^* \text{について成立}\} \end{aligned}$$

と定義する。(幾何学的には、これは $\mathcal{B}$ の各 hyperplane H に $m(H)$ 重に沿った多項式ベクトル場の集合である。) $\mathcal{B}$ が **free multiarrangement** であるとは、$D(\mathcal{B})$ が free S-module であることをいう。$\mathcal{B}$ が free multiarrangement であるとき、$\mathcal{B}$ の **exponents** も通常の hyperplane arrangement の場合と同様に定義される。

もっとも自然に multiarrangement が登場するのは hyperplane arrangement の**制限 (restriction)** である。$\mathcal{A}$ を $W = \mathbb{R}^{\ell+1}$ の通常の hyperplane arrangement とせよ。$H_0 \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathcal{A}^{H_0} := \{K \cap H_0 \mid K \in \mathcal{A} \setminus \{H_0\}\}$$

は $H_0 \simeq \mathbb{R}^\ell$ 内の hyperplane arrangement であるが、$Y \in \mathcal{A}^{H_0}$ の multiplicity $m(Y)$ を

$$m(Y) := \#\{K \in \mathcal{A} \mid K \cap H_0 = Y\}$$

と定義すれば $\mathcal{A}^{H_0}$ は multiarrangement とみなせる。

一方、$H_0 = \ker(\alpha_0)$ となる $\alpha_0 \in V^*$ をとって

$$D_0(\mathcal{A}) := \{\theta \in D(\mathcal{A}) \mid \theta(\alpha_0) = 0\}$$

と定義すると

$$D(\mathcal{A}) = S\,\theta_E \oplus D_0(\mathcal{A})$$

となっている。ここで θ_E は **Euler 微分**とよばれ

$$\theta_E = \sum_{i=0}^{\ell} x_i(\partial/\partial x_i)$$

と座標表示される。自然な制限写像

$$\rho : D_0(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A}^{H_0})$$

を考える。(ただし $\mathcal{A}^{H_0}$ は multiarrangement とみなしている。)

定理4．(Ziegler [Zi]) $\mathcal{A}$ が $W = \mathbb{R}^{\ell+1}$ 内の hyperplane arrangement として、$H_0 \in \mathcal{A}$ とし、$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{H_0}$ とするとき、$\mathcal{A}$ が free arrangement で exponents が $(1, d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ であるための必要十分条件は

1) 自然な制限写像 $\rho : D_0(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ が全射であり、かつ、

2) $\mathcal{B}$ は free multiarrangement で exponents が $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ であることである。

証明は Saito's criterion [Sa1] とその multiarrangement version を用いることによってえられる。

以上で multiarrangement についての準備を終えて Edelman-Reiner 予想の証明に入る。Φ を既約ルート系、$[p, q]$ を $[1-m, m]$ と $[-m, m]$ のいずれかとする。次の記号を用いる。

$$\mathcal{A} = \mathbf{c}\left(\mathcal{A}(\Phi)^{[p,q]}\right),\ H_0 = \{x_0 = 0\},\ \mathcal{B} = \mathcal{A}^{H_0}\ (\text{multiarrangement})$$

とする。Φ の rank に関する帰納法で示す。まず $\operatorname{rank}\Phi \leq 2$ のときは A_2, B_2, G_2 の場合に分けて直接に check される。以下、$r = \operatorname{rank}\Phi > 2$ とせよ。一般に

$$\mathcal{A}_x := \{H \in \mathcal{A} \mid x \in H\}\ (\mathcal{A}\text{ の } x \text{ での局所化})$$

という記法を用いる。$\mathbf{0} \neq x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \in H_0$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ とするとき、

$$\mathcal{A}_x = \left(\mathbf{c}\left(\mathcal{A}(\Phi)^{[p,q]}\right)\right)_x = \mathbf{c}\left(\left(\mathcal{A}(\Phi)_{x'}\right)^{[p,q]}\right)$$

は容易にわかる。ルート系の性質から $\mathcal{A}(\Phi)_{x'}$ は rank r 未満のいくつかの既約ルート系の直和として表せるので、帰納法の仮定から $\mathcal{A}_x$ は free arrangement としてよい。すると定理4より、$x \in H_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ならば、自然な制限写像の x での局所化

$$\rho_x : D_0(\mathcal{A})_x \longrightarrow D(\mathcal{B})_x$$

は全射である。よって、$S = S(W^*)$-graded modules の完全列

$$0 \longrightarrow D_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{x_0 \cdot} D_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\rho} D(\mathcal{B})$$

の ℓ 次元射影空間 $\mathbb{P}^\ell$ 上の層化は層の短完全列

$$0 \longrightarrow \widetilde{D_0(\mathcal{A})} \xrightarrow{x_0 \cdot} \widetilde{D_0(\mathcal{A})} \xrightarrow{\rho} \widetilde{D(\mathcal{B})} \longrightarrow 0$$

を与える。($\widetilde{D(\mathcal{B})}$ は H_0 上に support をもつことに注意)
　ここで次の結果を用いる。

　定理５．([Te2]) k を正の整数とする。Weyl arrangement $\mathcal{A}(\Phi)$ の各 hyperplane H に対してその multiplicity $m(H) = k$ としてえられる multiarrangement は free arrangement であり、次の exponents をもつ。
　(i) $k = 2m$ のときは $(mh, mh, \ldots, mh)$ (mh は ℓ 回現れる),
　(ii) $k = 2m+1$ のときは $(mh+d_1, mh+d_2, \ldots, mh+d_\ell)$.

　定理５の original な証明はかなり複雑な計算で具体的に基底を構成するのであるが、[Te3, Yo1] に、原始微分 (primitive integral) の Levi-Civita 接続を用いる別証明がある。
　容易にわかるように $\mathcal{B} = \left(\mathbf{c}\left(\mathcal{A}(\Phi)^{[p,q]}\right)\right)^{H_0}$ は、Weyl arrangement $\mathcal{A}(\Phi)$ の各 hyperplane H に対してその multiplicity $m(H) = q - p + 1$ としてえられる multiarrangement に他ならないので定理５を適用すれば free multiarrangement であって、予想される exponents をもつことがわかる。従って定理４の条件 2) は成立していることがわかる。あとは定理４の条件 1) が確かめられれば、Edelman-Reiner 予想の証明が完了するが、それは、この頁の上にある層の完全列から決まる long exact sequence に標準的な cohomology vanishing の議論を適用することによって確認できる。したがって帰納法が進み Edelman-Reiner 予想の証明が完了する。
　帰納法を含めた証明の流れを図示すると以下のようになる。

• rank 2 の Edelman-Reiner 予想 (個別に check)

• rank $r-1$ の Edelman-Reiner 予想 (rank $r-1$ の global freeness)
　$\Longrightarrow$ H_0 の近くでの rank r の local freeness
　$\Longrightarrow$ ρ_x は全射 ($x \in H_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$)
　$\Longrightarrow$ ρ は全射 (by cohomology vanishing argument)
　　　　一方、$\mathcal{B}$ は multifree arrangement (by [Te2])
　$\Longrightarrow$ rank r の Edelman-Reiner 予想 (by [Zi])

References

[Ath1] C. A. Athanasiadis, On free deformations of the braid arrangement. *European J. Combin.* **19** (1998), no. 1, 7–18.

[Ath2] C. A. Athanasiadis, Deformations of Coxeter hyperplane arrangements and their characteristic polynomials, in *Arrangements - Tokyo 1998*, pp.1-26, Advanced Studies in Pure Mathematics **27**, Kinokuniya, Tokyo, 2000.

[Ath3] C. A. Athanasiadis, Generalized Catalan numbers, Weyl groups and arrangements of hyperplanes. Preprint

[ER] P. H. Edelman, V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings. Discrete Comput. Geom. **15** (1996), no. 3, 307–340.

[He] P. Headley, On a family of hyperplane arrangements related to the affine Weyl groups. J. Algebraic Combin. **6** (1997), no. 4, 331–338.

[PoSt] A. Postnikov, R. P. Stanley, Deformations of Coxeter hyperplane arrangements. J. Combin. Theory Ser. A **91** (2000), no. 1-2, 544–597.

[Sa1] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.***27** (1980), no. 2, 265–291

[Sa2] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminantal loci. in *Seminar Notes*, Amer. Math. Soc. Summer Institute, Williamstown, MA, 1975

[Sh1] J.-Y. Shi, The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups. Lecture Notes in Math., **1179**, Springer Verlag, 1986

[Sh2] J.-Y. Shi, Sign types corresponding to an affine Weyl group. J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), no. 1, 56–74.

[ST] Solomon, L., Terao, H.: The double Coxeter arrangement. Comment. Math. Helv. **73** (1998) 237–258

[Sta2] R. P. Stanley, Hyperplane arrangements, interval orders, and trees. Proc. Nat. Acad. Sci. **93** (1996) 2620–2625.

[Te1] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula. Invent. Math. **63** (1981), no. 1, 159–179

[Te2] H. Terao, Multiderivations of Coxeter arrangements. Invent. Math. **148** (2002), no. 3, 659–674.

[Te3] H. Terao, The Hodge filtration and the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. preprint, 2002 (arXiv:math.CO/0205058)

[Yo1] M. Yoshinaga, The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **78**, no. 7, 116–119.

[Yo2] M. Yoshinaga, Some characterizations of freeness of hyperplane arrangement. (preprint version: mathCO/0306228)

[Za] T. Zaslavsky, Facing yp to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Memoirs Amer. Math. Soc., **154**, 1975.

[Zi] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.