超平面配置と ranking〜数学と社会科学とのひとつの接点〜

寺尾宏明（都立大・理・数学）

1　はじめに

ミクロ経済学に社会選択の理論 (social choice theory) があり、その中に ranking theory というものがあるそうである。経済統計学者の紙屋英彦と竹村彰通は 1997 年に ranking theory の 高次元 unfolding model に関する基本的定理を、超平面配置の理論を適用して証明した [KT]（紙屋はこの業績で統計学小川賞を受賞）。筆者はこの結果を知り興味を持ち、両氏との communication が始まったが、その際、social choice theory における最も重要な結果である Kenneth Arrow (1969 年ノーベル経済学賞受賞) の Impossibility Theorem について教えていただき、それが純粋に組合わせ数学の定理であることを学んだ。また、筆者の長年の共同研究者である P. Orlik を巻き込んで４人で ranking patterns の数について少しく結果を得た。

「代数学シンポジウム」で講演させていただいた折り、Arrow's Impossibility Theorem を紹介したが、何人かの方々が興味を持って下さり、「証明を知りたい」という声もあったので、前半に「数学者向け」の完全な証明をつけた。後半は、Kamiya-Takemura[KT] と４人の共同研究の紹介である。

2　Arrow の Impossibility Theorem

まずは Arrow の Impossibility Theorem の純粋に数学的な formulation と証明を与えた後、その社会科学的意味を筆者の理解する範囲で述べよう。

$\mathbb{S}_n$ を $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ から $[n]$ への全単射全体のなす集合とする。$\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ を２元体とする。各 ordered pair $i, j \in [n], i \neq j,$ に対して写像

$$\pi_{ij} : \mathbb{S}_n \longrightarrow \mathbb{F}_2,\ \pi_{ij}(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ if } \sigma(i) > \sigma(j), \\ 0 \text{ if } \sigma(i) < \sigma(j) \end{cases}$$

を定義する。m を自然数として、

$$\mathbb{S}_n^m := \mathbb{S}_n \times \cdots \times \mathbb{S}_n \ (m \text{ 回}),\quad \mathbb{F}_2^m := \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_2 \ (m \text{ 回}),$$

$$\pi_{ij}^m := (\pi_{ij}, \dots, \pi_{ij}) : \mathbb{S}_n^m \longrightarrow \mathbb{F}_2^m$$

とする。

定理. (Arrow's Impossibility Theorem (1963)) $n \geq 3$ とするとき、以下の２条件をみたす写像 $\varphi : \mathbb{S}_n^m \longrightarrow \mathbb{S}_n$ は、ある成分への射影に限る。

(1) 各 ordered pair $i, j \in [n], i \neq j,$ に対して、以下の図式を可換にする写像 $\overline{\varphi}_{ij}$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_n^m & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}_n \\ \pi_{ij}^m \downarrow & & \downarrow \pi_{ij} \\ \mathbb{F}_2^m & \xrightarrow{\overline{\varphi}_{ij}} & \mathbb{F}_2 \end{array}$$

(2) $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{F}_2^m$ とするとき、$\overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{1}) = 1.$

以下、ミクロ経済学の教科書 [M-CWG] に沿った証明をやや変形して紹介しよう。$\mathbb{F}_2^m$ を成分ごとの和と積で環とみなす。また $\mathbb{F}_2^m$ の元を $\mathbf{1}_S = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$ (ただし、$\epsilon_p = 1 \Leftrightarrow p \in S$) と表記する。

step 1. $\overline{\varphi}_{ij}$ は i, j によらない。

まず、$i, j, k \in [n]$ は相異なるとして、

$$\overline{\varphi}_{ij} = \overline{\varphi}_{ik},\ \overline{\varphi}_{ji} = \overline{\varphi}_{ki}$$

を示そう。$S \subseteq [m]$ として、$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{S}_n^m$ を

$$\begin{cases} \sigma_p(i) > \sigma_p(j) > \sigma_p(k) & \text{if } p \in S, \\ \sigma_p(j) > \sigma_p(k) > \sigma_p(i) & \text{if } p \notin S \end{cases}$$

となるように取っておく。すると、

$$\pi_{ij}^m(\sigma) = \pi_{ik}^m(\sigma) = \mathbf{1}_S,\ \pi_{jk}^m(\sigma) = \mathbf{1}$$

である。$\pi_{jk} \circ \varphi(\sigma) = \overline{\varphi}_{jk} \circ \pi_{jk}^m(\sigma) = \overline{\varphi}_{jk}(\mathbf{1}) = 1$ より $\varphi(\sigma)(j) > \varphi(\sigma)(k)$ を得る。同様に $\pi_{ij} \circ \varphi(\sigma) = \overline{\varphi}_{ij} \circ \pi_{ij}^m(\sigma) = \overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{1}_S)$ より、

$$\overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{1}_S) = 1 \Leftrightarrow \varphi(\sigma)(i) > \varphi(\sigma)(j).$$

従って、

$$\overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{1}_S) = 1 \Rightarrow \varphi(\sigma)(i) > \varphi(\sigma)(k) \Leftrightarrow \overline{\varphi}_{ik}(\mathbf{1}_S) = 1.$$

これは、$\overline{\varphi}_{ij} = \overline{\varphi}_{ik}$ を示している。

次に、$T := [m] \setminus S$ とすると、$\pi^m_{ji}(\sigma) = \pi^m_{ki}(\sigma) = \mathbf{1}_T = \mathbf{1} + \mathbf{1}_S$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_{ji}(\mathbf{1}_T) = 1 &\Leftrightarrow \varphi(\sigma)(j) > \varphi(\sigma)(i) \Leftrightarrow \overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{1}_S) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{\varphi}_{ik}(\mathbf{1}_S) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\sigma)(k) > \varphi(\sigma)(i) \Leftrightarrow \overline{\varphi}_{ki}(\mathbf{1}_T) = 1.\end{aligned}$$

これは、$\overline{\varphi}_{ji} = \overline{\varphi}_{ki}$ を示している。

さて、$i, j, k, \ell \in [n],\ i \neq j, k \neq \ell$ とする。$n \geq 3$ なので、$p \in [n] \setminus \{i, k\}$ となる p をとって、

$$\overline{\varphi}_{ij} = \overline{\varphi}_{ip} = \overline{\varphi}_{kp} = \overline{\varphi}_{k\ell}.$$

よって、以下、$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_{ij}$ と表記する。

step 2. $\overline{\varphi}(\mathbf{1} + \mathbf{x}) = 1 + \overline{\varphi}(\mathbf{x})\ \ (\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^m)$.

$\mathbf{x} = \mathbf{1}_S$ とすれば、これは、step 1 の後半ですでに示されている。

step 3. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^m$ で $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = \overline{\varphi}(\mathbf{y}) = 1$ とすると、$\overline{\varphi}(\mathbf{xy}) = 1$.

$i, j, k \in [m]$ が相異なるとせよ。$\mathbf{x} = \mathbf{1}_S, \mathbf{y} = \mathbf{1}_T$ とする。$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in \mathbb{S}_n^m$ を

$$\begin{cases} \sigma_p(i) > \sigma_p(j) > \sigma_p(k) & \text{if } p \in S \cap T, \\ \sigma_p(k) > \sigma_p(i) > \sigma_p(j) & \text{if } p \in S \setminus T, \\ \sigma_p(j) > \sigma_p(k) > \sigma_p(i) & \text{if } p \in T \setminus S, \\ \sigma_p(k) > \sigma_p(j) > \sigma_p(i) & \text{if } p \notin S \cup T. \end{cases}$$

となるように取っておく。すると、

$$\pi^m_{ij}(\sigma) = \mathbf{1}_S,\ \pi^m_{jk}(\sigma) = \mathbf{1}_T,\ \pi^m_{ik}(\sigma) = \mathbf{1}_{S \cap T}$$

である。step 1 で見たように

$$\varphi(\sigma)(i) > \varphi(\sigma)(j) > \varphi(\sigma)(k)$$

であり、

$$\overline{\varphi}(\mathbf{xy}) = \overline{\varphi}(\mathbf{1}_{S \cap T}) = \overline{\varphi} \circ \pi^m_{ik}(\sigma) = \pi_{ik} \circ \varphi(\sigma) = 1.$$

step 4. ある $h \in [m]$ が存在して、

$$\mathbf{1}_{\{h\}} = \prod_{\mathbf{x} \in \overline{\varphi}^{-1}(1)} \mathbf{x}.$$

右辺を $\mathbf{1}_T$ と置くと、step 3 より、$\overline{\varphi}(\mathbf{1}_T) = 1$. もし、$\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 1$ ならば、$\mathbf{1}_T = \mathbf{x}\mathbf{1}_T$ であることに注意しておく。$\overline{\varphi}(0, 0, \ldots, 0) = \overline{\varphi}(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = 1+\overline{\varphi}(\mathbf{1}) = 0$ なので、T は空でない。よって $h \in T$ をとる。$(\mathbf{1}+\mathbf{1}_{\{h\}})\mathbf{1}_T = \mathbf{1}_T+\mathbf{1}_{\{h\}} \neq \mathbf{1}_T$ なので、$0 = \overline{\varphi}(\mathbf{1} + \mathbf{1}_{\{h\}}) = 1 + \overline{\varphi}(\mathbf{1}_{\{h\}})$. 従って、$\overline{\varphi}(\mathbf{1}_{\{h\}}) = 1$ であり、$\mathbf{1}_T = \mathbf{1}_{\{h\}}\mathbf{1}_T = \mathbf{1}_{\{h\}}$.

step 5. $\overline{\varphi} = \mathbf{proj}_h$ (h 番目の成分への射影).

もし、$\overline{\varphi}(\mathbf{1}_S) = 1$ ならば $\mathbf{1}_{\{h\}} = \mathbf{1}_S\mathbf{1}_{\{h\}}$ なので、$h \in S$. この対偶として $h \notin S \Rightarrow \overline{\varphi}(\mathbf{1}_S) = 0$ を得る。もし、$h \in S$ ならば、$1+\overline{\varphi}(\mathbf{1}_S) = \overline{\varphi}(\mathbf{1}+\mathbf{1}_S) = 0$ なので、$\overline{\varphi}(\mathbf{1}_S) = 1$.

step 6. $\varphi = \mathbf{proj}_h$ (h 番目の成分への射影).

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in \mathbb{S}_n^m, i, j \in [n], i \neq j,$ とするとき、

$$\begin{aligned}&\varphi(\sigma)(i) > \varphi(\sigma)(j)\\ &\qquad \Leftrightarrow \pi_{ij}(\sigma_h) = \mathbf{proj}_h \circ \pi_{ij}^m(\sigma) = \pi_{ij} \circ \varphi(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma_h(i) > \sigma_h(j).\end{aligned}$$

よって、$\varphi(\sigma) = \sigma_h$. これで証明が終わった。

この定理の社会科学的な解釈は次のとおりである。m 人からなる社会を考える。$1, 2, \ldots, n$ の n 個の (政策)optionsがあり、各人が n 個の options について好みの ranking 表を持っているとする。各 ranking 表は $\mathbb{S}_n$ の要素を定めるので、各人の ranking 表の総体は、$\mathbb{S}_n^m$ の要素をひとつ定めていると思える。さて、各人の ranking 表から、社会としての ranking 表を決定する方法とは、写像 $\varphi : \mathbb{S}_n^m \longrightarrow \mathbb{S}_n$ のことなので、写像 φ が政策決定の方法、あるいは、政治体制そのものであるとも言えよう。φ は **social welfare functional** と呼ばれる。さて、Impossibility Theorem の中で写像 φ について課せられた２条件は、

(1) ふたつの options i, j に対して、社会として、どちらの option を上位に置くかは、社会の構成員の中で誰が option i を option j よりも上に置いているか、ということのみに依存する。(**the pairwise independence condition**)

(2) 社会の構成員全員が option i を option j よりも上位に置いているならば、社会全体としても、option i を option j よりも上位に置く。(**the Paretian condition**)

ということに他ならない。いずれも社会的に合理的な制約と言えよう。しかるに定理の帰結は、社会の中に特別な人（独裁者）h が存在して、h の個人的な ranking 表をそのまま社会としての ranking 表として採用するということに他ならない。すなわち、上記２条件を満たす政治体制は**独裁制**である、というショッキングな帰結を得る。

Impossibility Theorem の中の $n \geq 3$ という条件は本質的である。「賛成」と「反対」のように、option が２つしかない場合 ($n = 2$)、賛否同数の際には、「議長」に "tiebreaker" の権利を与えておけば、多数決原理は機能して、条件 (1)(2) をともに満足する。よって、$n = 2$ の場合は、多数決原理によって独裁性が回避される。しかし、option が３つになる ($n = 3$) と、社会の構成員が３人 A, B, C の場合でさえも、

A の ranking 表: 123
B の ranking 表: 231
C の ranking 表: 312

という状況では「３すくみ」となり、多数決原理は社会としての ranking 表を決定できない。このことは、すでに 18 世紀に Condorcet 侯爵 (1743-1794) によって指摘され、Condorcet's paradox として知られている。Arrow's Impossibility Theorem は Condorcet's paradox の延長線上にある。

3 超平面配置の ranking への応用

さて、Arrow's Impossibility Theorem の否定的帰結（独裁制）を回避する方法は色々提案されているようだが、ここでは、写像 φ の定義域 $\mathbb{S}_n^m$ を小さくする、という考え方を紹介する。つまり、個々人の選好（ranking 表）はすべての順列が可能なわけではなくて、あるパターンのものしか現れない、という考え方である。ひとつの例として、個人の選好が１次元的パラメータで決定されている場合を考える。具体的には、価格のみで購入を決める場合などが考えられる。また、政治的立場が「右寄り」とか「左寄り」とか表現されるときは１次元パラメータで決定されている、ということができる。

心理統計学者の C. H. Coombs [C1, C2] は次のような１次元 unfolding model を提唱した。すなわち n 個の options $1, 2, \ldots, n$ の１次元パラメータ $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ が実数直線上に置かれ、個人 Y の理想の option もまた y として同一直線上に置かれる。この model では、距離 $|y - x_i|$ が個人 Y の理想と現実の option i との（心理的）距離を表している。すなわち、$|y - x_i| < |y - x_j|$ のとき、個人 Y の ranking 表では、option i が option j よりも上位に置かれている。たとえば、$n = 3$ の場合を考えると、options $1, 2, 3$ のパラメータ $x_1 < x_2 < x_3$ が generic に与えられているとき、個人の ideal point y の位置による ranking 表の変化は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} y < (x_1+x_2)/2 &\quad \text{のとき：}\quad 123 \\ (x_1+x_2)/2 < y < (x_1+x_3)/2 &\quad \text{のとき：}\quad 213 \\ (x_1+x_3)/2 < y < (x_2+x_3)/2 &\quad \text{のとき：}\quad 231 \\ (x_2+x_3)/2 < y &\quad \text{のとき：}\quad 321 \end{aligned}$$

よって、可能な ranking 表は４通りだけであって、$\mathbb{S}_3$ の元がすべて登場するわけではない。このように social welfare functional φ の定義域を小さくしておくと、「多数決原理」が、the pairwise independent condition と the Paretian condition の２条件を満たすことがわかる。特に、この model では Condorcet's paradox は回避されている。

１次元 unfolding model を自然に高次元に拡張した model は以下のように与えられる。n 個の options $1,2,\ldots,n$ のもつ d 個のパラメータを用いて、$\mathbb{R}^d$ 内に、n 点 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ を plot する。個人 Y の ideal point $\mathbf{y}$ も $\mathbb{R}^d$ 内に置く。１次元 unfolding model と同様に $\mathbf{y}$ と $\mathbf{x}_i$ とのユークリッド距離を用いて Y の ranking 表を作成することができる。このとき、可能な ranking 表の数について以下の基本的定理がある。

定理. (H. Kamiya-A. Takemura[KT]) $n \geq d$ とする。n 個の options をもつ d 次元 unfolding model において可能な ranking 表の数は

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_d$$

に等しい。ただし

$$\sum_{i=0}^{n} c_i t^i = \prod_{j=1}^{n-1}(1+jt).$$

この定理は超平面配置の理論の見事な応用である。証明の概略を紹介しよう。 $i,j \in [n], i<j,$ に対して、超平面

$$H_{ij} := \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\},\ M_{ij} := \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d \mid |\mathbf{x}-\mathbf{x}_i| = |\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|\}$$

を定義する。超平面配置

$$\mathcal{B}_n := \{H_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

は**組紐超平面配置 (braid arrangement)** と呼ばれる。このとき、超平面配置

$$\mathcal{A}_n^d := \{M_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

が (組合せ的に) $\mathcal{B}_n$ を generic な d 次元平面で切った切り口 (d-dimensional truncation) になっていることが証明される。従って、$\mathcal{A}_n^d$ の Poincaré 多項式 [OT] $\pi(\mathcal{A}_n^d, t)$ は、$\mathcal{B}_n$ の Poincaré 多項式 $\pi(\mathcal{B}_n, t)$ の $(d+1)$ 次以上の項を切り落としたものになっている。組紐超平面配置については

$$\pi(\mathcal{B}_n, t) = \prod_{j=1}^{n-1}(1+jt).$$

であることが古典的に知られている (e.g., [OT]) ので、

$$\pi(\mathcal{A}_n^d, t) = \sum_{i=0}^{d} c_i t^i$$

一方、[Z] から、部屋の数は Poincaré 多項式に $t=1$ を代入したものであるので、定理を得る。

さて、n 個の options をもつ d 次元 unfolding model における可能な ranking 表全体の集合を **ranking pattern** と呼ぶ。ranking pattern P は $\mathbb{S}_n$ の部分集合であり、上記の Kamiya-Takemura の定理から、$|P|$ は一定である。しかし、何通りの ranking patterns が可能であるか、という問題は、1 次元の場合ですらも未解決であるようだ。以下、$d = 1$ とする。たとえば、$n = 3, x_1 < x_2 < x_3,$ のときは、ranking pattern は

$$\{123,\ 213,\ 231,\ 321\}$$

のただひとつだが、$n = 4$ になると

$$\begin{aligned} P_1 &= \{1234,\ 2134,\ 2314,\ 3214,\ 3241,\ 3421,\ 4321\}, \\ P_2 &= \{1234,\ 2134,\ 2314,\ 2341,\ 3241,\ 3421,\ 4321\} \end{aligned}$$

とふたつの ranking patterns が可能であり、どちらが起こっているかは、与えられた 1 次元データの分布によって決まっている。$r(n)$ を n 個の options をもつ 1 次元 unfolding model の ranking patterns の個数とする。$r(n)$ の一般項は知られていない、と思われるが、対称群の表現で著名な hook formula の発見者の一人である R. M. Thrall (1952) が、ある Young tableaux の個数を数えることによって与えた上界がある:

$$r(n) \leq \frac{\binom{n}{2}!(n-2)!(n-3)!\dots(3!)(2!)}{(2n-3)!(2n-5)!\dots(5!)(3!)}.$$

以下、$r(n)$ をある超平面配置の部屋の数として解釈しよう。まず、

$$H_{pqrs} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_p + x_q = x_r + x_s\}$$

と定義する。ただし、$1 \leq p < q \leq n,\ p < r < s \leq n$ とし、p, q, r, s は相異なるとする。**中面超平面配置 (mid-hyperplane arrangement)** を

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{B}_n \cup \{H_{pqrs} \mid (p, q, r, s) \text{ は上記の範囲を動く }\}$$

として定義する。そのとき、

定理.(Kamiya-Orlik-Takemura-Terao) $r(n)$ は、$\mathcal{A}_n$ の部屋数を $n!$ で割ったものに等しい。

従って、$r(n)$ を求めるためには $\mathcal{A}_n$ の部屋数を求めればよいが、そのためのひとつの有力な方法は、以下に解説する**有限体帰着法**である。

定理. ([CR], [T, (4.10)]) $\mathbb{F}_q$ を q 元体とせよ。$\mathcal{A}$ が、$\mathbb{F}_q^n$ 内の超平面配置とするとき $q^n\pi(\mathcal{A}, q^{-1})$ は、$\mathbb{F}_q^n$ の点の内 $\mathcal{A}$ のどの超平面にも乗っていない点の個数に等しい。

q を素数とし、中面超平面配置 $\mathcal{A}_n$ と同じ方程式で $\mathbb{F}_q^n$ 内で定義された超平面の集合を中面超平面配置 $\mathcal{A}_n$ の q**-reduction** と呼び、$\mathcal{A}_{n,q}$ と表す。すると一般論より、q が「ある程度大きい」素数ならば、 $\mathcal{A}_n$ とその q-reduction は組合せ的には同一な超平面配置であるので、

$$q^n\pi(\mathcal{A}_n, q^{-1}) = q^n\pi(\mathcal{A}_{n,q}, q^{-1})$$

となる。従って、何個かの「ある程度大きい」素数 $q_1, q_2, \ldots$ に対して $\mathbb{F}_{q_i}^n$ の点の内、$\mathcal{A}_{n,q_i}$ のどの超平面にも乗っていない点の個数を数えることによって $\mathcal{A}_n$ の Poincaré 多項式 $\pi(\mathcal{A}_n, t)$ が決定され、そこに $t = 1$ を代入し $n!$ で割ることによって $r(n)$ が求まる。

References

[C1] Coombs, C. H.: Psychological scaling without a unit measurement, *Psychological Review* **57**, (1950) 145–158

[C2] Coombs, C. H.: *A Theory of Data,* New York: Wiley; republished in 1976 by Ann Arbor, MI: Mathesis Press. 1964

[CR] Crapo, H. and Rota. G.-C.: *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries,* preliminary edition, M.I.T. press, Cambridge, MA, 1970

[KT] H. Kamiya, A. Takemura, On rankings generated by pairwise linear discriminant analysis of m populations, *J. Multivariate Analysis* **61** (1997), 1–28.

[M-CWG] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green: Microeconomic Theory, Oxford UP, 1995

[OT] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992

[T] Terao, H.: The Jacobians and the discriminants of finite reflection groups, *Tohoku Math. J.* **41** (1989), 237-247

[Z] T. Zaslavsky, Facing yp to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Memoirs Amer. Math. Soc., **154**, 1975.