

# Hugo Duminil-Copin 氏の業績\*

仲間との徹底的な議論を楽しむ博識家

坂井 哲

2023年2月17日

## 1 はじめに

2022年フィールズ賞受賞者の一人は、嬉しいことに、またもや確率論・統計力学の分野から選出された。しかも、そのトピックは、複雑に絡み合う多体系の協力現象が顕在化する「相転移・臨界現象」である。2006年のWendelin Werner, 2010年のStanislav Smirnovも同じトピックで受賞<sup>1</sup>しており、筆者のドストライクゾーンでもある。ただし、この二人の専門は2次元であり、筆者のそれは高次元（後述のパーコレーションでは $d > 6$ , 強磁性 Ising 模型や  $\phi_d^4$  模型では  $d > 4$ ）である。その間の次元、とくに3次元の解析は非常に難しく、物理的にも未解決問題が多い領域である。今回受賞した Hugo Duminil-Copin の受賞理由は、

For solving longstanding problems in the probabilistic theory of phase transitions in statistical physics, especially in dimensions three and four（とくに3次元と4次元の統計物理に登場する相転移の確率論的研究における長年の問題を解決したことに対して）

であり、たくさんの重要な業績の中でも、とくに

- (a) 4次元強磁性 Ising 模型の臨界点近傍におけるスケーリング極限（や  $\phi_4^4$  模型の連続極限）は一般化されたガウス系であり、したがって“trivial”であることを証明 [5],
- (b) 3次元強磁性 Ising 模型の自発磁化が臨界点直上で消失し、したがって全ての次元  $d \geq 2$  で臨界点における Gibbs 測度は唯一つだけであり、とくに空間の平行移動で不変なものに限られることを証明 [4],

が考慮されたのだろう。どちらも長きに亘って専門家を悩ませ続けた問題を解決した論文である。(a)については、我が師が分かり易い解説と思いの丈を [25] で綴っておられるので、本紹介記事では (b) を中心に、筆者の個人的な経験と共に解説を展開したい。

\*この文章は、数学 76, No.1 (2024) に掲載されたものの著者版です。

<sup>1</sup>2014年の受賞者である Martin Hairer は「正則性構造」の研究で受賞したが、その応用として、特異な確率微分方程式の意味付けに「繰り込み」のアイデアが滲んでいて、場の理論や臨界現象とも関係深い。

まず第2節では、相転移というトピックについて、直感的にも分かり易い「パーコレーション」で紹介する。筆者がとくに感銘を受けた「臨界点の一意性」に関する論文 [17] とその周辺についての解説である。

つづく第3節では、いよいよ Ising 模型の相転移について紹介する。Ising 模型には様々な表現方法があるのだが、その中の一つに、高温展開を精密化した「ランダムカレント表示」がある。これを用いることにより、Ising 模型の自発磁化などがパーコレーションの「連結関数」のように解釈できることを第3.1節で述べる。これにより、Ising 模型でも「臨界点の一意性」が簡単に証明できることを第3.2節で解説する。そして最後に、今回の受賞理由の一つとなった「Ising 模型の自発磁化の連続性」について、第3.3節で解説する。

## 2 パーコレーションの相転移

簡単のために、今後は  $d$  次元立方格子  $\mathbb{Z}^d := \{x = (x_1, \dots, x_d) : \forall j, x_j \in \mathbb{Z}\}$  上の最近接モデルを考えよう。すなわち、ボンド (= 辺) 集合を  $\mathbb{Z}^d$  上の隣り合う点同士のペアの集まりとする：

$$\mathbb{B}^d = \left\{ \{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1 \right\}.$$

パーコレーションの問題において、各ボンドは互いに独立に「開」か「閉」の2状態を取る。ボンド集合  $\mathbb{B}^d$  上の直積測度を  $\mathbb{P}_p$  と表し、任意のボンド  $\{x, y\}$  が開である確率を  $p \in [0, 1]$  と定める：

$$\mathbb{P}_p(\{x, y\} \text{ が開}) = 1 - \mathbb{P}_p(\{x, y\} \text{ が閉}) = p.$$

$\mathbb{Z}^d$  上の2点  $x, y$  が一致しているか、或いは開ボンドから成る経路で結ばれるとき、 $x \longleftrightarrow y$  と表す。このとき、原点  $o \in \mathbb{Z}^d$  を含むランダムな開クラスター  $\mathcal{C}(o) := \{x \in \mathbb{Z}^d : o \longleftrightarrow x\}$  が ( $p$  に応じて) どのくらい大きいかが興味の対象である。

1次元の場合は  $\mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow x) = p^{|x|}$  なので、 $p < 1$  である限り、無限遠方まで開クラスターがおよぶ確率はゼロである。ところが、2次元以上では、或る非自明な (つまり、0にも1にも退化しない) 臨界点  $p_H$  が存在し、 $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}$ ,  $\Lambda_n^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n$  とすると、

$$\theta_{p,n} := \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \Lambda_n^c) \underset{n \uparrow \infty}{\searrow} \theta_p := \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & [p < p_H] \\ > 0 & [p > p_H] \end{cases} \quad (1)$$

である<sup>2</sup>ことが知られている。このように、各ボンドの開閉を決める局所的なパラメータを動かすだけで、マクロな描像や解析性がガラッと変わってしまう現象を「相転移」という。パーコレーション確率  $\theta_p$  は、相転移を論じるための「秩序変数」となり得るわけだ。

ちなみに、(1) には  $p = p_H$  直上の様子が含まれていないが、2次元や高次元  $d \gg 6$  などの特殊な場合<sup>3</sup>に  $\theta_{p_H} = 0$  であることが知られているものの、やはり中間層、とくに3次元の場合は未解決である。この問題の Ising 版を解決したのが、Hugo たちの業績 [4] なのである。

他方、原点  $o$  を含む開クラスターの大きさの期待値

$$\chi_p := \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}(o)|] = \mathbb{E}_p \left[ \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{o \longleftrightarrow x\}} \right] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow x)$$

を秩序変数として相転移を論じることだって可能だろう。これらの秩序変数が「同時に」相転移を示すのかどうかを問うのが、「臨界点の一意性」の問題である。

<sup>2</sup> $\theta_{p,n}$  は有限個のボンドの状態だけで決まっているので、 $p$  の多項式 (したがって連続、しかも単調増加) である。その単調減少極限が  $\theta_p$  なので、 $\theta_p$  の右連続性も明らか。

<sup>3</sup> $\mathbb{P}_p(\{x, y\} \text{ が開}) = p \mathbb{1}_{\{0 < \|x - y\|_\infty \leq L\}}$  で定義されるモデルを含む「広範囲モデル (spread-out model) のクラス」では、 $d > 6$  でありさえすれば、十分大きい (でも有限な)  $L$  に対して  $\theta_{p_H} = 0$  が成り立つことが知られている [26]。

この問題に決着がついたのは、Broadbent と Hammersley[10] がパーコレーションを考案した 1957 年から 30 年ほど経った、1980 年代半ばである。まず Menshikov[30] が登場したが、それとは独立に、しかし全く異なる方法で、もっと広いクラスのグラフを扱える Aizenman-Barsky[2] が登場したのだ。これにて一件落着としたいところだったが、どちらの証明もなかなか歯応えがあり、諳んじて他人に教えられるような代物ではなかった。

そこから 30 年後、Hugo と Vincent Tassion によるエレガントな別証明 [17] が登場したのだ。Hugo は常に「物事を可能な限りシンプルにしたい」と考えており、一度決着した問題でも再度深く掘り返し、大勢の研究者が見逃していた本質に迫ることができる特性を持っている。もちろん、多くの数学者も可能な限りシンプルにしたいと願っているが、なかなか叶わない。(それが 30 年も専門家を悩ませ続けた難問ともなると、もういいんじゃないか…とも思えてくる。) Hairer も [24] で、“he has a knack for finding just the right way of looking at a problem that had hitherto been overlooked. ..., but in some cases it results in surprisingly simple but ingenious proofs” と述べている。全く同感だ。

本紹介記事の副題が気になった方もおられるかと思う。その切っ掛けとなるエピソードは、Paris で開かれたテーマ週間に参加したときの事。レクチャーホールの外には、黒板とソファが置いてあるパブリックスペースがあったのだが、Hugo は講演そっちのけで、朝から晩まで、テーマ週間の間ずっと、Gady Kozma と議論を尽くしていた。大した集中力だな…と感心したのは筆者だけではなかったはずだ。(もちろん、筆者らの見ていないところで優雅に休憩を取っていたかも知れないが。) 別のエピソードとして思い出すのは、Oberwolfach での研究集会期間中、筆者が彼のプレプリント(強磁性 Ising 模型の超臨界相における連結 2 点関数の指数関数的減衰に関する論文)について質問をしたときの事。二人が満足する答えに至らない<sup>4</sup>まま、かなり時間が経ち、遂に筆者が先に音を上げてしまった。当時の筆者は比較的根性がある方だと思っていたが、全然甘かった。Grimmett も [23] で書いている通り、“He is invariably enthusiastic to share his ideas openly, and he collaborates freely and intensively with an unusually wide spread of colleagues, both younger and older.” なのである。そういうこともあっての副題である。

話が逸れてしまった。本題に戻そう。Hugo たちが到達した論法は、 $p_H$  や  $p_T := \inf\{p : \chi_p = \infty\}$  と、(2) で定義される第 3 の臨界点  $p_c$  を比較することである。 $\theta_p > 0$  ならば  $\chi_p = \infty$  なので、 $p_T \leq p_H$  は明らか。あとは  $p_c \leq p_T$  と  $p_H \leq p_c$  を示せば、臨界点の一意性を証明できたことになる。

**定理 2.1** ([17]). 原点  $o$  を含む有限集合  $S \subset \mathbb{Z}^d$  に対し、 $p$  連続な単調増加関数

$$\varphi_p(S) = \sum_{x \in S, y \notin S} \mathbb{P}_p\left(o \xleftrightarrow{S \text{ 上で}} x, \{x, y\} \text{ は開}\right)$$

を導入する。ただし、 $o \xleftrightarrow{S \text{ 上で}} x$  とは、 $o = x \in S$  か、両端点が  $S$  に含まれる開ポンドだけを使って  $o$  と  $x$  が繋がることを表す。これを用いて

$$p_c = \sup \left\{ p : \varphi_p(S) < 1 \text{ をみたす有限集合 } S \ni o \text{ が存在} \right\} \quad (2)$$

とすると、

- (i)  $0 < p < p_c \Rightarrow \exists C_1, C_2 \in (0, \infty), \forall n \geq 0, \theta_{p,n} \leq C_1 e^{-C_2 n}$  (したがって  $\chi_p$  も有限),
- (ii)  $p > p_c \Rightarrow \theta_p \geq \frac{p - p_c}{p(1 - p_c)} > 0$ .

<sup>4</sup>証明は「ランダムカレント表示」を用いたものだったが、結局プレプリントは削除された。しかし後日、「Fortuin-Kasteleyn (FK) ランダムクラスター表示」を用いた別証明 [15] が登場、問題は解決された。ランダムカレント表示のような強力な道具でも、いざとなったらスパッと切り捨てられるところも、彼の柔軟さを象徴しているだろう。

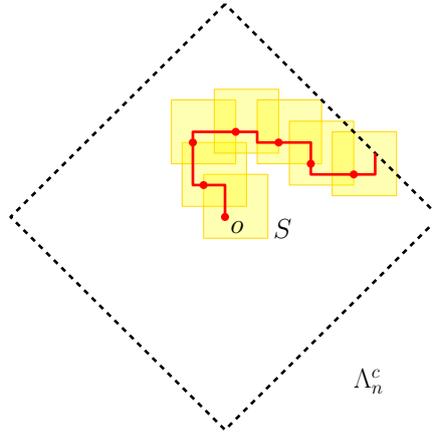


図 1: 不等式 (4) のイメージ.

(i) の証明の概要.  $0 < p < p_c$  なので,  $\varphi_p(S) \in (0, 1)$  をみたす有限集合  $S \ni o$  が必ず取れる. この  $S$  の「半径」と最近接ボンドの長さ 1 の和を  $L$  とし,  $n > L$  で  $o \longleftrightarrow \Lambda_n^c$  だとすると, 或る  $x \in S$ ,  $y \notin S$  があって,  $o \xrightarrow{S \text{ 上で}} x$ ,  $\{x, y\}$  が開,  $y \longleftrightarrow \Lambda_n^c$  の三つが同時にボンドを共有しないで実現するはず. BK 不等式 [8] を用いると,

$$\theta_{p,n} \leq \sum_{x \in S, y \notin S} \mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{S \text{ 上で}} x, \{x, y\} \text{ は開} \right) \mathbb{P}_p(y \longleftrightarrow \Lambda_n^c) \leq \varphi_p(S) \theta_{p,n-L} \quad (3)$$

が得られる. この不等式は,  $\Lambda_n^c$  に到達するまで最低でも  $\lfloor n/L \rfloor$  回は使える (図 1 を参照) ので,

$$\theta_{p,n} \leq \underbrace{\varphi_p(S)^{\lfloor n/L \rfloor}}_{C_1} \leq \underbrace{\frac{1}{\varphi_p(S)}}_{C_2} \exp \left( - \left( \frac{1}{L} \log \frac{1}{\varphi_p(S)} \right) n \right). \quad (4)$$

(ii) の証明の概要. 実は  $\theta_{p,n}$  について, 次の微分不等式が成り立つ (あとで Ising 版を解説しよう):

$$\frac{d}{dp} \theta_{p,n} \geq \frac{1 - \theta_{p,n}}{p(1-p)} \inf_{o \in S \subset \Lambda_n} \varphi_p(S). \quad (5)$$

$p > p_c$  なので, 常に  $\inf \{ \varphi_p(S) : o \in S \subset \Lambda_n \} \geq 1$ . 簡単になった微分不等式を変数分離して積分すれば, 任意の  $n$  で  $\theta_{p,n} \geq (p - p_c)/(p(1 - p_c))$  となる. あとは  $n \uparrow \infty$  極限を取ればよいだけ. ■

以上のように, 分かっただけで他愛のないことだったのだが,  $p_c$  の定義 (とくに,  $\varphi_p(S) < 1$  をみたすものが「一つでもあればよい」としたこと) が絶妙だったため, 未臨界相と超臨界相を上手く繋ぐことができたのだ.

### 3 Ising 模型の相転移

Ising 模型とは, 各格子点に  $\pm 1$  を取る「スピン」が相互作用する, 磁石の統計力学模型である. 簡単のため,  $d$  次元立方格子  $\mathbb{Z}^d$  上の最近接強磁性モデルを考えることにして, 今後はいちいち「最近接」や「強磁性」などと断らない. 部分格子  $\Lambda_n$  上のスピン配位  $\sigma = \{\sigma_x\}_{x \in \Lambda_n} \in \{\pm 1\}^{\Lambda_n}$  のエネルギー (或いは「ハミルトニアン」) を

$$H_n^{h,\tau}(\sigma) = - \sum_{\{x,y\} \in \mathbb{J}_n} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x \left( h + \tau \sum_{y \in \Lambda_n^c} J_{x,y} \right)$$

で定義しよう。ただし<sup>5</sup>,

$$J_{x,y} = \mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}, \quad \mathbb{J}_n = \{\{x,y\} \subset \Lambda_n : J_{x,y} > 0\}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \{0, \pm\}.$$

$h$  は外部磁場の強さ,  $\tau$  は境界条件を表す。そして, 逆温度  $\beta \geq 0$  における有限 Gibbs 測度

$$\mu_{\beta,n}^{h,\tau}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_n^{h,\tau}(\sigma)}}{Z_{\beta,n}^{h,\tau}}, \quad Z_{\beta,n}^{h,\tau} = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{\Lambda_n}} e^{-\beta H_n^{h,\tau}(\sigma)}$$

(規格化定数  $Z_{\beta,n}^{h,\tau}$  は「分配関数」とも呼ばれる) を考える。とくに, 原点スピンの期待値

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,\tau} = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{\Lambda_n}} \sigma_o \mu_{\beta,n}^{h,\tau}(\sigma)$$

に興味がある。スピン反転対称性により, 周りに何もなく磁場も印加されていない期待値  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{0,0}$  は常にゼロである。また, Griffiths の不等式 [19, 20, 21] により, 周りには何も無いが磁場  $h$  が印加された期待値  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0}$  は  $h$  についても  $n$  についても単調増加する一方, +スピンの海に囲まれた磁場なし期待値  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{0,+}$  は  $n$  について単調減少することも知られている。そこで, 外部磁場や境界条件の影響が原点スピんに及ぼす影響の大きさを測る秩序変数として, 自発磁化

$$m_\beta = \lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{0,+} = \lim_{h \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0} \quad (6)$$

(二つの極限が一致することも古くから知られている) を採用しよう。

1次元の場合, 高温展開により  $0 \leq \langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{0,+} \leq 2(\tanh \beta)^n$  であることが直ぐに分かり, 任意の  $\beta < \infty$  で  $m_\beta = 0$  となる。すなわち, Ising [27] が示したように, 1次元では相転移しない。2次元以上では, パーコレーションと同様, 或る非自明な臨界点  $\beta_c < \infty$  が存在<sup>6</sup>し,  $\beta < \beta_c$  ならば  $m_\beta = 0$ ,  $\beta > \beta_c$  ならば  $m_\beta > 0$  であることが知られている (Peierls の論法 [32])。このことから, 二つの有限 Gibbs 測度の弱収束極限

$$\mu_\beta^{0,+} = \lim_{n \uparrow \infty} \mu_{\beta,n}^{0,+}, \quad \mu_\beta^{0,-} = \lim_{n \uparrow \infty} \mu_{\beta,n}^{0,-} \quad (7)$$

が  $\beta < \beta_c$  では一致し, 極限測度が唯一つであるのに対し,  $\beta > \beta_c$  では一致せず, 或る境界条件を課して得られる極限測度が平行移動不変ならば, それは  $\mu_\beta^{0,+}$  と  $\mu_\beta^{0,-}$  の凸結合  $\varepsilon \mu_\beta^{0,+} + (1-\varepsilon) \mu_\beta^{0,-}$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , で表されることが分かる [9]。

それでは,  $\beta = \beta_c$  直上の様子はどうなっているのだろう。自発磁化  $m_\beta$  は単調増加な連続関数  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{0,+}$  の減少極限なので, 右連続であることは明らか (図 2 を参照; ちなみに,  $\beta \neq \beta_c$  での左連

<sup>5</sup>最近接モデルに限らず, 以下の条件をみたす 2 体相互作用係数であれば, 同様に扱うことができる:

- [C1] 平行移動不変:  $J_{x,y} = J_{o,y-x}$ ,
- [C2] 強磁性的:  $J_{x,y} \geq 0$ ,
- [C3] 総和可能:  $|J| := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{o,x} < \infty$ ,
- [C4] 既約性 ([4] では aperiodicity と呼ばれていた):  $\forall x \in \mathbb{Z}^d, \exists \{x_j\}_{j=0}^n : x_0 = o, x_n = x, \prod_{j=1}^n J_{x_{j-1}, x_j} > 0$ .

<sup>6</sup>臨界点の値は, 次元だけでなく, 格子の形状や 2 体相互作用係数の詳細に依存して変わり得るので, 本紹介記事で解説した「モデルの詳細によらない証明法」や「臨界現象」などの普遍的なものよりも格は低い。とは言え, 臨界点の値を求めることが簡単だと述べているわけでは決してない。Hugo は Vincent Beffara と共に, 「 $\mathbb{Z}^2$  上の FK ランダムクラスターモデルの臨界点を求める」という長い間未解決だった問題も解いてしまった [7]。FK ランダムクラスターモデルは, パーコレーションで登場したボンド占有確率  $p \in [0, 1]$  とパラメータ  $q > 0$  で定義されるモデルで, パーコレーション ( $q = 1$ ) や Ising 模型 ( $q = 2$ ) を包含する。二人は, 臨界点が  $p_c(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$  であることを証明したのである。これは Kesten [28] の  $p_c(1) = 1/2$  や Onsager [31] の  $\beta_c = \frac{-1}{2} \log(1 - p_c(2)) = \log \sqrt{1 + \sqrt{2}}$  を再現している。その後 Hugo は, 共同研究者らと共に, FK ランダムクラスターモデルのパーコレーション確率  $\theta_{p,q} := \mathbb{E}_p[q^N \mathbb{1}_{\{o \leftrightarrow \infty\}}] / \mathbb{E}_p[q^N]$  (これは形式的な定義で, 本来は無限体積極限によって定義;  $N$  は開クラスターの個数を表す確率変数) が  $1 \leq q \leq 4$  のとき連続  $\theta_{p_c(q), q} = 0$  [16],  $q > 4$  のとき不連続  $\theta_{p_c(q), q} > 0$  [14] だとする予想が正しいことも解決してしまったのである。ちなみに, この問題は  $q$  彩色問題と関係している。

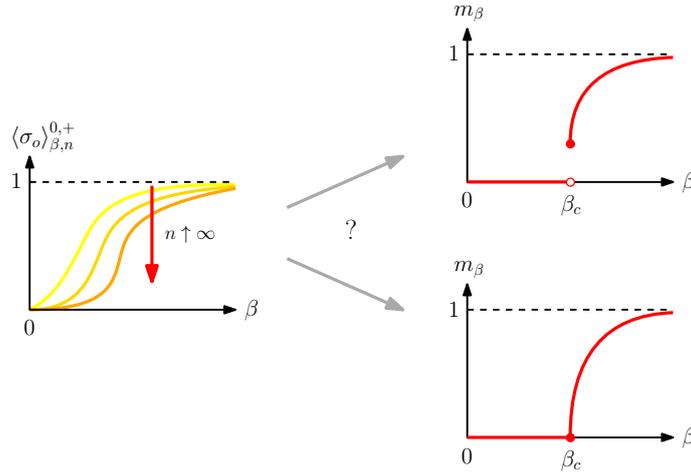


図 2: 単調増加な連続関数  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+}$  の減少極限としての自発磁化  $m_\beta$ .

性は Bodineau[9] によって解決された). したがって,  $\beta = \beta_c$  直上での連続性が問題になる. 実は, パーコレーションの場合よりも状況はよく, 次元  $d$  が 2 または 4 以上 (形式的には  $d > \frac{7}{2}$  [6]) であれば  $m_{\beta_c} = 0$  となり連続だということは知られていた. その大きな理由は, 最近接モデルが「鏡映正值性」という強い対称性をみだし, そのおかげで 2 点関数がランダムウォークのグリーン関数で制御できてしまうからだ [36]<sup>7</sup>:  $\forall d > 2, \exists C < \infty, \forall \beta \leq \beta_c, \forall x \neq o,$

$$0 \leq \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_\beta := \lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta, n}^{0,0} \leq C|x|^{2-d}. \quad (8)$$

このような性質の良い「赤外評価」は 3 次元でも成り立つのに,  $m_\beta$  の  $\beta = \beta_c$  における連続性だけは未解決なままだった. しかし, Ising[27] の登場から 90 年後の 2015 年, 遂に Hugo は Michael Aizenman, Vladas Sidoravicius と共に, 全ての次元  $d \geq 2$  で  $m_{\beta_c} = 0$  を証明し, 連続性の問題を解決したのである.

**定理 3.1** ([4]). 脚注 5 の条件 [C1]~[C4] と

$$\inf_{\substack{B \subset \mathbb{Z}^d \\ (0 < |B| < \infty)}} \left\langle \left( \frac{1}{|B|} \sum_{x \in B} \sigma_x \right)^2 \right\rangle_\beta = \inf_{\substack{B \subset \mathbb{Z}^d \\ (0 < |B| < \infty)}} \frac{1}{|B|^2} \sum_{x, y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta = 0 \quad (9)$$

を仮定 (鏡映正值性をみたす「推移的な」モデルでは,  $\beta \leq \beta_c$  において正しい; とくに 3 次元最近接モデルでは, (8) により正しい) すると,  $m_\beta = 0$  が成り立つ.

### 3.1 ランダムカレント表示

定理 3.1 の証明のカギは, 数多ある Ising 模型の幾何的表現の一つ「ランダムカレント表示」である [1, 22]. これは高温展開を洗練したもので, 自発磁化に対する GHS 不等式を証明するために, Griffiths, Hurst, Sherman が考え出した表現である. 「源泉移し替え」という強力な恒等式が最大

<sup>7</sup>鏡映正值性だけでは (8) のような  $x$  に関する評価は得られず, Fourier 空間での評価に甘んずるしかない. そのような不都合を回避する数少ない手法の一つがレース展開 [11, 33, 34, 35] で, Ising 模型や格子  $\varphi^4$  模型の上部臨界次元 4 よりも高次元では, 臨界 2 点関数  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta_c}$  が  $|x|^{2-d}$  の定数倍に漸近していくことを証明できる.

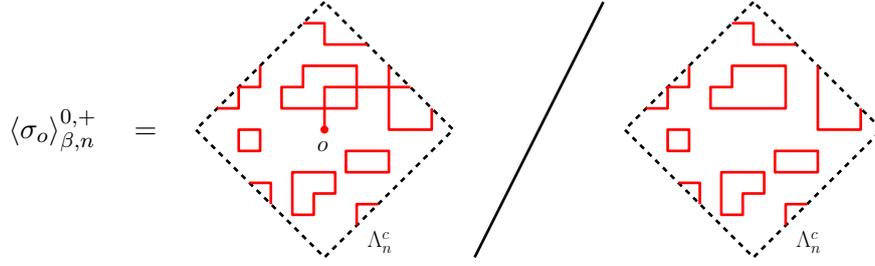


図 3: 期待値  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+}$  のランダムカレント表示のイメージ（本当は源泉条件をみたすカレント配置についての和が分母・分子それぞれにあるはずだが、省略した）。図のサンプルでは、奇数の乗ったボンドだけが明示されている。

の長所だ。この表現によって、期待値  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h, \tau}$  や  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta, n}^{h, \tau}$ 、或いは異なる領域で定義された期待値どうしの差を、パーコレーションの連結関数のように扱うことができるようになる。

例えば、分配関数  $Z_{\beta, n}^{0,+}$  のランダムカレント表示は、 $\Lambda_n$  の境界を跨ぐボンドを含めた集合を  $\tilde{\mathbb{J}}_n = \mathbb{J}_n \cup \{ \{u, v\} : u \in \Lambda_n, v \in \Lambda_n^c \}$  とすると、

$$Z_{\beta, n}^{0,+} = 2^{|\Lambda_n|} \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset} \prod_{b \in \tilde{\mathbb{J}}_n} \frac{(\beta J_b)^{\ell_b}}{\ell_b!} = 2^{|\Lambda_n|} \underbrace{\sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset} w_{\beta, n}^{0,+}(\ell)}_{W_{\beta, n}^{0,+}}$$

というものである。ここで登場した和は、条件  $\partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset$  をみたすカレント配置  $\ell \in \mathbb{Z}_+^{\tilde{\mathbb{J}}_n}$  に対して取られ、 $\partial \ell$  は  $\sum_{b \ni x} \ell_b$  が奇数である点  $x$ （これを「源泉」と呼ぶ）の集合である。この表現を導出するには、まず Boltzmann 因子  $e^{-\beta H_n^{0,+}}$  を Maclaurin 展開し、和の順序を交換したのち、スピン配置  $\sigma$  の和を先に実行すればよい。同様に期待値  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+}$  の分子も計算すると、

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+} = \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\}} \frac{w_{\beta, n}^{0,+}(\ell)}{W_{\beta, n}^{0,+}} \quad (10)$$

を得る。源泉条件  $\partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\}$  をみたすカレント配置には、原点  $o$  と  $\Lambda_n$  の外側を繋ぐ奇数カレントが乗ったボンドから成る経路が必ず存在する（他方、 $\partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset$  をみたすカレント配置には、そのような経路があるとは言えない；図 3 を参照）ので、 $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+}$  は確率ではないが、見ている事象はパーコレーション確率と同じ「 $o \longleftrightarrow \Lambda_n^c$ 」なのである。したがって、前節で紹介したパーコレーションに対するアイデアを Ising 模型にも適用できるのでは、と期待するのは自然であろう。ちなみに、(6) で登場した「周囲が真空で、外部磁場  $h$  が印加された期待値」 $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h, 0}$  のランダムカレント表示は、

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h, 0} = \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\}} \prod_{b \in \mathbb{J}_n^g} \frac{(\beta J_b)^{\ell_b}}{\ell_b!} \bigg/ \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset} w_{\beta, n}^{h, 0}(\ell)$$

である。ただし、分母・分子の和は、それぞれの源泉条件をみたすカレント配置  $\ell \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{J}_n^g}$  に対して取られ、 $\mathbb{J}_n^g = \mathbb{J}_n \cup \{ \{x, g\} : x \in \Lambda_n \}$ （点  $g$  はダミーで、英語名の“ghost site”や“graveyard”の頭文字に因んでいる）、 $J_{x, g} = h$  とした。

ランダムカレント表示の最大の長所である「源泉移し替え」は、二つのカレント配置を重ね合わせたとき、一方の源泉条件の一部をもう一方に移し替えることを「一定の条件下で」正当化する。例えば、次節で登場する  $(\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0})^2$  のランダムカレント表示は

$$(\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0})^2 = \sum_{\substack{\partial \mathbf{k} \cap \Lambda_n = \{o\} \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\}}} \frac{w_{\beta,n}^{h,0}(\mathbf{k})}{W_{\beta,n}^{h,0}} \frac{w_{\beta,n}^{h,0}(\ell)}{W_{\beta,n}^{h,0}} = \sum_{\partial \mathbf{L} \cap \Lambda_n = \emptyset} \frac{w_{\beta,n}^{h,0}(\mathbf{L})}{(W_{\beta,n}^{h,0})^2} \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\}} \prod_{b \in \mathbb{J}_n^g} \binom{L_b}{\ell_b}$$

であるが、重ね合わせたカレント配置  $\mathbf{L} \in \mathbb{Z}_+^g$  において正のカレントが乗ったボンドから成る経路で  $o$  と  $g$  が繋がることを  $o \xleftrightarrow[\mathbf{L}]{} g$  と表わすと、

$$\sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\}} \prod_{b \in \mathbb{J}_n^g} \binom{L_b}{\ell_b} = \mathbb{1}_{\{o \xleftrightarrow[\mathbf{L}]{} g\}} \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset} \prod_{b \in \mathbb{J}_n^g} \binom{L_b}{\ell_b} \quad (11)$$

が成り立つ<sup>8</sup>ので、これを元の式に戻して変形すれば、源泉移し替え

$$(\langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0})^2 = \sum_{\substack{\partial \mathbf{k} \cap \Lambda_n = \emptyset \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset}} \frac{w_{\beta,n}^{h,0}(\mathbf{k})}{W_{\beta,n}^{h,0}} \frac{w_{\beta,n}^{h,0}(\ell)}{W_{\beta,n}^{h,0}} \mathbb{1}_{\{o \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{} g\}} =: P_{\beta,n}^{h,0} \otimes P_{\beta,n}^{h,0} (o \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{} g) \quad (12)$$

(この場合、上述の「一定の条件」とは  $o \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{} g$  という条件) が完了する。このような源泉の操作を「等式レベルで」行なえることが高温展開よりも遥かに優れている点であり、Hugo たちの臨界点の一意性証明 (第 3.2 節) や自発磁化の連続性証明 (第 3.3 節) で威力を発揮することになる。

### 3.2 臨界点の一意性

パーコレーションの場合と同様、系の秩序度合いを計る別の指標として、帯磁率<sup>9</sup>

$$\chi_\beta = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_\beta^+, \quad \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_\beta^+ = \lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta,n}^{0,+} = \lim_{h \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta,n}^{h,0} \quad (13)$$

を考えよう。Griffiths の不等式により  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta,n}^{0,+} \geq \langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{0,+} \langle \sigma_x \rangle_{\beta,n}^{0,+} \geq m_\beta^2$  となるので、 $\chi_\beta \geq \sum_x m_\beta^2$  が得られる。臨界点  $\beta_T = \inf\{\beta : \chi_\beta = \infty\}$  を定義すると、これは  $\beta_T \leq \beta_c$  を暗示している。逆向き不等式  $\beta_T \geq \beta_c$  も正しいこと (すなわち、臨界点  $\beta_c$  が一意であること) を一般的な形で証明するのに成功したのは Aizenman, Barsky, Fernández [3] だったが、最初の二人によるパーコレーションの臨界点  $p_c$  の一意性証明に似て、なかなか大変であった。それを圧倒的に簡単にしたのが、定理 2.1 の Ising 版である次の定理である。

**定理 3.2** ([17]). 原点  $o$  を含む有限集合  $S \subset \mathbb{Z}^d$  に対し、 $\beta$  連続な単調増加関数

$$\varphi_\beta(S) = \sum_{x \in S, y \notin S} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta,S}^{0,0} \tanh(\beta J_{x,y})$$

<sup>8</sup> この等式を手取り早く分か (った気にな) りたいければ、最も簡単な  $n=0$  の場合、すなわち一点集合  $\mathbb{J}_0^g = \{\{o, g\}\}$  を考えればよい。このとき、(11) の左辺は  $\sum_{\ell: \text{奇数}} \binom{L}{\ell}$ 、右辺は  $\sum_{\ell: \text{偶数}} \binom{L}{\ell}$  であり、 $L \geq 1$  (すなわち  $o \xleftrightarrow[\mathbf{L}]{} g$ ) ならば両者は等しい。証明には、左辺を表わす集団と右辺を表わす集団の間に全単射を構成すればよい [1, 22].

<sup>9</sup> 本来の「帯磁率」は、外部磁場  $h$  に対する磁化  $\lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0}$  の変化率を  $h \downarrow 0$  とした極限であり、有限体積版は  $\frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_o \rangle_{\beta,n}^{h,0} = \beta \sum_{x \in \Lambda_n} \langle \sigma_o; \sigma_x \rangle_{\beta,n}^{h,0}$  に等しい。ここで登場した  $\langle \sigma_o; \sigma_x \rangle_{\beta,n}^{h,0}$  は連結 2 点関数と呼ばれ、 $\sigma_o$  と  $\sigma_x$  の共分散を表わす。  $\beta < \beta_c$  で  $n \uparrow \infty$ ,  $h \downarrow 0$  の順に極限を取ったものは  $\beta \chi_\beta$  だが、敢えて  $\chi_\beta$  を帯磁率と呼ぶことにする。

を用いて

$$\beta_c = \sup \left\{ \beta : \varphi_\beta(S) < 1 \text{ をみたす有限集合 } S \ni o \text{ が存在} \right\}$$

とすると,

$$(i) \quad 0 < \beta < \beta_c \Rightarrow \exists C_1, C_2 \in (0, \infty), \forall n \geq 0, \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+} \leq C_1 e^{-C_2 n} \quad (\text{Griffiths の不等式による 帰結 } \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta}^+ \leq (\langle \sigma_o \rangle_{\beta, |x|/2}^{0,+})^2 \text{ と合わせれば, } \chi_\beta < \infty \text{ が得られる}),$$

$$(ii) \quad \beta > \beta_c \Rightarrow m_\beta \geq \frac{\sqrt{\beta^2 - \beta_c^2}}{\beta} > 0.$$

(i) の証明の概要.  $0 < \beta < \beta_c$  なので,  $\varphi_\beta(S) \in (0, 1)$  をみたす有限集合  $S \ni o$  が必ず取れる. この  $S$  の半径と最近接ボンドの長さ 1 の和を  $L$  とし,  $n > L$  で  $o \xleftrightarrow{\ell} \Lambda_n^c$  だとすると, 或る  $x \in S$ ,  $y \notin S$  があって,  $o \xleftrightarrow{\ell} x$  かつ  $\ell_{x,y}$  が奇数であるようなものが存在するはず ((10) や図 3 を参照). ここで  $\ell_{x,y}$  の偶奇を反転して源泉を増やせば,

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+} \leq \sum_{x \in S, y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \sum_{\partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\} \Delta \{x,y\}} \frac{w_{\beta, n}^{0,+}(\ell)}{W_{\beta, n}^{0,+}} \mathbb{1}_{\{o \xleftrightarrow{\ell} x\}}$$

が得られる. この右辺に  $W_{\beta, S}^{0,0}/W_{\beta, S}^{0,0} = \sum_{\partial \mathbf{k} = \emptyset} w_{\beta, S}^{0,0}(\mathbf{k})/W_{\beta, S}^{0,0}$  ( $W_{\beta, S}^{0,0}$  や  $w_{\beta, S}^{0,0}(\mathbf{k})$  は表記の濫用で, 領域を  $\Lambda_n$  の代わりに  $S$  としたもの) を掛け, 単調性  $\mathbb{1}_{\{o \xleftrightarrow{\ell} x\}} \leq \mathbb{1}_{\{o \xleftrightarrow{\ell} x\}}^{\mathbf{k}+\ell}$  を用いたのち, 源泉移し替えを行なうと,

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+} \leq \sum_{x \in S, y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \underbrace{\sum_{\substack{\partial \mathbf{k} = \{o\} \Delta \{x\} \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \{y\}}} \frac{w_{\beta, S}^{0,0}(\mathbf{k}) w_{\beta, n}^{0,+}(\ell)}{W_{\beta, S}^{0,0} W_{\beta, n}^{0,+}}}_{\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta, S}^{0,0} \langle \sigma_y \rangle_{\beta, n}^{0,+}} \leq \varphi_\beta(S) \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n-L}^{0,+}$$

が得られる. これは (3) の Ising 版であり, (4) のように指数関数的に減衰することが示せる.

(ii) の証明の概要. 目指すは微分不等式 (5) の Ising 版だが,  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+}$  を使うことに拘るのではなく,  $\tilde{h} = \beta h$  を固定した  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0}$  を代用するのがミソ. 一貫性よりも, 性質の良い「似て非なるもの」にスパッと乗り換えられるのも, Hugo の (彼だけじゃないかも知れないが) 柔軟なところだ.

まず  $\tilde{h} = \beta h$  を固定したまま  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0}$  を  $\beta$  で微分し, 得られた式に源泉移し替えを行なうと,

$$\frac{d \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0}}{d\beta} = \sum_{x,y \in \Lambda_n} J_{x,y} \sum_{\substack{\partial \mathbf{k} \cap \Lambda_n = \emptyset \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\} \Delta \{x,y\}}} \frac{w_{\beta, n}^{h,0}(\mathbf{k}) w_{\beta, n}^{h,0}(\ell)}{W_{\beta, n}^{h,0} W_{\beta, n}^{h,0}} \mathbb{1}_{\{y \xleftrightarrow{\ell} g\}} \mathbb{1}_{\{o \not\xleftrightarrow{\ell} g\}}$$

という等式が得られる. ここで, 重ね合わせた配置  $\mathbf{k} + \ell$  上で  $g$  と繋がらない点集合を  $\mathcal{S}_{\mathbf{k}+\ell} = \{z \in \Lambda_n : z \not\xleftrightarrow{\ell} g\}$  とし,  $\mathcal{S}_{\mathbf{k}+\ell} = S \subset \Lambda_n$  をみたす配置を考えると, 源泉条件  $\partial \mathbf{k} \cap \Lambda_n = \emptyset$  により,  $\mathbf{k}$  を  $\Lambda_n \setminus S$  に制限した配置には源泉がないことに注意. そこに無理やり源泉  $\{y\}$  を作るつもりで,  $\langle \sigma_y \rangle_{\beta, \Lambda_n \setminus S}^{h,0} / \langle \sigma_y \rangle_{\beta, \Lambda_n \setminus S}^{h,0}$  を掛け, 単調性  $\langle \sigma_y \rangle_{\beta, \Lambda_n \setminus S}^{h,0} \leq \langle \sigma_y \rangle_{\beta, n}^{h,0} \leq \langle \sigma_o \rangle_{\beta, 2n}^{h,0}$  (もし  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{0,+}$  を使っていたら, このような体積単調性は破綻していた) を用いて分母を大きくしたのち, 源泉移し替えを行なって源泉  $\{y\}$  どうしをキャンセルすると,

$$\frac{d \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0}}{d\beta} \geq \sum_{x,y \in \Lambda_n} \frac{J_{x,y}}{\langle \sigma_o \rangle_{\beta, 2n}^{h,0}} \sum_{\substack{S \subset \Lambda_n: \\ o, x \in S, \\ y \notin S}} \sum_{\substack{\partial \mathbf{k} \cap \Lambda_n = \emptyset \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \{o\} \Delta \{x\}}} \frac{w_{\beta, n}^{h,0}(\mathbf{k}) w_{\beta, n}^{h,0}(\ell)}{W_{\beta, n}^{h,0} W_{\beta, n}^{h,0}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{S}_{\mathbf{k}+\ell} = S\}}$$

が得られる．最後に、 $\ell$  を  $S$  に制限した配置から  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\beta, S}^{0,0}$  を抜き出し、 $\beta J_{x,y} \geq \tanh(\beta J_{x,y})$  を用いてから  $S$  についての和を実行すると、

$$\frac{d}{d\beta} (\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0})^2 = 2 \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0} \frac{d \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0}}{d\beta} \geq \frac{2c_{\beta, n}}{\beta} \inf_{o \in S \subset \Lambda_n} \varphi_\beta(S) \underbrace{\sum_{\substack{\partial \mathbf{k} \cap \Lambda_n = \emptyset \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset}} \frac{w_{\beta, n}^{h,0}(\mathbf{k})}{W_{\beta, n}^{h,0}} \frac{w_{\beta, n}^{h,0}(\ell)}{W_{\beta, n}^{h,0}} \mathbb{1}_{\{o \leftrightarrow_{\mathbf{k}+\ell} y\}}}_{1 - (\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0})^2} \quad (14)$$

(ただし  $c_{\beta, n} = \langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0} / \langle \sigma_o \rangle_{\beta, 2n}^{h,0}$ ) が帰結される． $(\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0})^2$  のパーコレーション表示 (12) を思い出すと、微分不等式 (14) はパーコレーションの (5) にそっくりである．その解き方を真似て、(14) を区間  $[\beta_c + \varepsilon, \beta]$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$  は任意) で積分すると、 $\tilde{c}_n = \inf\{c_{s, n} : \beta_c + \varepsilon \leq s \leq \beta\}$  を用いて

$$(\langle \sigma_o \rangle_{\beta, n}^{h,0})^2 \geq \frac{\beta^{2\tilde{c}_n} - (\beta_c + \varepsilon)^{2\tilde{c}_n}}{\beta^{2\tilde{c}_n}} \quad (15)$$

のように押さえられる．あとは  $n \uparrow \infty$  (したがって  $\tilde{c}_n \rightarrow 1$ , これも秀逸なアイデアだ),  $\varepsilon \downarrow 0$ ,  $h \downarrow 0$  の順に極限を取ればよい. ■

### 3.3 自発磁化の連続性

定理 3.1 の証明の概要を述べよう．まず Griffiths の不等式により、任意の  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  に対して

$$0 \leq m_\beta^2 = \langle \sigma_x \rangle_\beta^+ \langle \sigma_y \rangle_\beta^+ \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+$$

が成り立つことに注意する．もし最右辺を  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta = \lim_{n \uparrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, n}^{0,0}$  に置き換えても良いのなら、最近接モデルの場合は (8) が成り立つので、 $|x - y| \uparrow \infty$  極限から  $m_\beta = 0$  が得られるはず (仮定 (9) さえあれば、一般の場合でも  $\inf_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_\beta = 0$  となり、 $m_\beta = 0$  が得られる)．置き換えによる誤差のランダムカレント表示は、源泉移し替えにより、

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, n}^{0,+} - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, n}^{0,0} = \sum_{\substack{\partial \mathbf{k} = \emptyset \\ \partial \ell \cap \Lambda_n = \{x\} \Delta \{y\}}} \frac{w_{\beta, n}^{0,0}(\mathbf{k})}{W_{\beta, n}^{0,0}} \frac{w_{\beta, n}^{0,+}(\ell)}{W_{\beta, n}^{0,+}} \left(1 - \mathbb{1}_{\{x \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{\Lambda_n^c} y\}}\right) \quad (16)$$

となる．注目すべきは、源泉条件をみたしつつ指示関数  $1 - \mathbb{1}_{\{x \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{\Lambda_n^c} y\}}$  が非ゼロとなるためには、 $x$  と  $y$  を繋ぐ経路が必ず  $\Lambda_n$  の外側を通過してこなければならない、すなわち  $x \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{\Lambda_n^c} \Lambda_n^c$  を実現するクラスターと  $y \xleftrightarrow[\mathbf{k}+\ell]{\Lambda_n^c} \Lambda_n^c$  を実現するクラスターが  $\Lambda_n$  内では交わらない、ということだ．このことは、 $n \uparrow \infty$  極限において、二つの排反な無限クラスターが存在することを暗示している．したがって、複数の無限クラスターが存在する「確率」がゼロであることを示せば、 $m_\beta = 0$  の証明が完了するように思える．

パーコレーションに馴染みのある方は、「無限クラスターの一意性の問題」について聞いたことがあるだろう．任意の  $p \in [0, 1]$  で

$$\mathbb{P}_p \left( \mathbb{Z}^d \text{ 上のどこかに無限開クラスターが 2 つ以上存在} \right) = 0$$

(すなわち、開ボンドから成る無限クラスターは、存在しても高々1つ) という主張である．パーコレーションが考案されてから解決されるまでに長い時間を要した問題の一つであるが、現在では直積測度  $\mathbb{P}_p$  のエルゴード性を上手く使った Burton と Keane の論法 [12] が整備されていて、割と簡単に証明できる．しかし、(16) は (分母・分子の和の範囲が異なるため) 確率とは見做せず、Burton と Keane の論法が使えない．

そこで Hugo たちが考案したのは、 $x$  と  $y$  を結ぶ経路  $x = x_0, x_1, \dots, x_j = y$  で  $\prod_{i=1}^j J_{x_{i-1}, x_i} > 0$  をみたすものを一つ選び (既約性 [C4] により,  $\{x_i\}_{i=0}^j \subset \Lambda_n$  となるよう  $n$  を十分大きく取ることが可能), それに沿って  $\ell$  の偶奇を交換する, という荒技だ. もう少し詳しく述べると, 各ボン  
ド  $b = \{x_{i-1}, x_i\}$  で

$$\sum_{\ell_b \text{ が偶}} \frac{(\beta J_b)^{\ell_b}}{\ell_b!} = \frac{\cosh(\beta J_b)}{\sinh(\beta J_b)} \sum_{\ell_b \text{ が奇}} \frac{(\beta J_b)^{\ell_b}}{\ell_b!}, \quad \sum_{\ell_b \text{ が奇}} \frac{(\beta J_b)^{\ell_b}}{\ell_b!} = \frac{\sinh(\beta J_b)}{\cosh(\beta J_b) - 1} \sum_{\ell_b \text{ が正の偶}} \frac{(\beta J_b)^{\ell_b}}{\ell_b!}$$

のように置き換えるのである. そうすれば, 置き換え後の源泉条件は  $\partial n \cap \Lambda_n = \emptyset$  となって, 確かに確率測度のように扱うことができるようになる. その反面,  $x \xleftrightarrow[k+\ell]{\Lambda_n^c}$  を実現するクラスターと  $y \xleftrightarrow[k+\ell]{\Lambda_n^c}$  を実現するクラスターは  $\Lambda_n$  内で繋がってしまうため, (16) の指示関数は常にゼロになってしまう. この問題を回避するため, 今度はこの指示関数を  $\mathbb{1}_{\{x \xleftrightarrow[k+\ell]{\Lambda_n^c}\}}$  に緩める, という更なる荒技を繰り出す. その結果, (12) で登場したものとよく似た確率測度

$$P_{\beta,n}^{0,0} \otimes P_{\beta,n}^{0,+}(\mathbf{k}, \ell) = \frac{w_{\beta,n}^{0,0}(\mathbf{k})}{W_{\beta,n}^{0,0}} \frac{w_{\beta,n}^{0,+}(\ell)}{W_{\beta,n}^{0,+}} \mathbb{1}_{\{\partial \mathbf{k} = \partial \ell \cap \Lambda_n = \emptyset\}}$$

と定数<sup>10</sup> $C_{x,y} = \prod_{i=1}^j \coth(\beta J_{x_{i-1}, x_i}/2)$  を用いて,

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta,n}^{0,+} - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta,n}^{0,0} \leq C_{x,y} P_{\beta,n}^{0,0} \otimes P_{\beta,n}^{0,+} \left( x \xleftrightarrow[k+\ell]{\Lambda_n^c} \right)$$

のように押さえられるわけだ. したがって, あとは最右辺の確率の  $n \uparrow \infty$  極限がゼロであることを示せば良いことになる.

Hugo たちは [4] で, 実際に無限体積極限  $\mathbb{P}_\beta := \lim_{n \uparrow \infty} P_{\beta,n}^{0,0} \otimes P_{\beta,n}^{0,+}$  を構成し, この測度が平行移動不変でエルゴード的なことを証明, そして無限クラスターが 2 つ以上存在し得ないことも示している. これらを認めて, 仮定 (9) から  $\mathbb{P}_\beta(o \longleftrightarrow \infty) = 0$  を導いて締めくくろう. 任意の空でない有限集合  $B \subset \mathbb{Z}^d$  に対し, 確率変数  $X := \frac{1}{|B|} \sum_{x \in B} \mathbb{1}_{\{x \longleftrightarrow \infty\}}$  の 1 次モーメントと 2 次モーメントを比べると, 平行移動不変性により,

$$\mathbb{P}_\beta(o \longleftrightarrow \infty)^2 = \mathbb{E}_\beta[X]^2 \leq \mathbb{E}_\beta[X^2] = \frac{1}{|B|^2} \sum_{x,y \in B} \mathbb{P}_\beta(x, y \longleftrightarrow \infty)$$

が得られる. ところが, 無限クラスターは唯一つだけなので, 最右辺の確率は  $\mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow y)$  で押さえられる. しかも, 有限体積で源泉移し替えを行ってから無限体積極限を取ると,  $\mathbb{P}_\beta(x \longleftrightarrow y) = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta$  なので,

$$\mathbb{P}_\beta(o \longleftrightarrow \infty)^2 \leq \frac{1}{|B|^2} \sum_{x,y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta$$

となる. あとは  $B$  について下限を取れば, 仮定 (9) より  $\mathbb{P}_\beta(o \longleftrightarrow \infty) = 0$  が帰結される. ■

## 4 おわりに

こうして Hugo たちの証明を振り返ると, この長年の未解決問題を解決するための「登山道」に自分が何度も訪れていたことに愕然とする. 結構その近くまで来ていたのに, 「こっちの道には, さすがに未来はないだろう…」と高を括って, 分け入らなかった「茂み」は数か所である. そこを

<sup>10</sup>  $x > 0$  に対して  $\frac{\cosh x}{\sinh x} < \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \coth \frac{x}{2}$  が成り立つことを用いて簡略化した.

乗り越えるために、彼らは何か新しいものを生み出したわけではなく、既存の技法・論法を尽くして解決してしまった。素晴らしいことだとは思いつつも、何だか悔しい…。

本紹介記事は、標準的な紹介記事とは趣を異にってしまったかも知れない。Hugo や筆者の研究分野は海外では盛んな一方、日本の数学者の間では手薄な感じがしていて、だからこそ一所懸命宣伝しようと頑張り過ぎてしまった感がある。読者の方々にお許しを請う次第である。

本紹介記事を執筆するに際し、一部はJSPS 科研費 JP18K03406 の助成を受けました。また、国立陽明交通大学應用數學系の千野由喜さんと、北海道大学大学院理学院の野田栄太郎さんには、本紹介記事の初稿に目を通していただき、貴重なご意見をいただきました。そして匿名のレフェリーの方には、非常に注意深く原稿を読んでいただき、沢山のアドバイスと温かいお言葉をいただきました。ここにお礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] M. Aizenman, Geometric analysis of  $\phi^4$  fields and Ising models, *Commun. Math. Phys.*, **86** (1982), 1–48.
- [2] M. Aizenman and D.J. Barsky, Sharpness of the phase transition in percolation models, *Commun. Math. Phys.*, **108** (1987), 489–526.
- [3] M. Aizenman, D.J. Barsky and R. Fernández, The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp, *J. Stat. Phys.*, **47** (1987), 343–374.
- [4] M. Aizenman, H. Duminil-Copin and V. Sidoravicius, Random currents and continuity of Ising model’s spontaneous magnetization, *Commun. Math. Phys.*, **334** (2015), 719–742.
- [5] M. Aizenman and H. Duminil-Copin, Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and  $\phi_4^4$  models, *Ann. Math.*, **194** (2021), 163–235.
- [6] M. Aizenman and R. Fernández, On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional Ising models, *J. Stat. Phys.*, **44** (1986), 393–454.
- [7] V. Beffara and H. Duminil-Copin, The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for  $q \geq 1$ , *Probab. Theory Related Fields* **153** (2012), 511–542.
- [8] J. van den Berg and H. Kesten, Inequalities with applications to percolation and reliability, *J. Appl. Probab.*, **22** (1985), 556–569.
- [9] T. Bodineau, Translation invariant Gibbs states for the Ising model, *Probab. Theory Related Fields* **135** (2006), 153–168.
- [10] S.R. Broadbent and J.M. Hammersley, Percolation processes: I. Crystals and mazes, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 629–641.
- [11] D.C. Brydges, T. Helmuth and M. Holmes, The continuous-time lace expansion, *Commun. Pure Appl. Math.*, **74** (2021), 2251–2309.
- [12] R.M. Burton and M. Keane, Density and uniqueness in percolation, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989), 501–505.
- [13] R.L. Dobrushin, Existence of a phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **160** (1965), 1046.

- [14] H. Duminil-Copin, M. Gagnebin, M. Harel, I. Manolescu and V. Tassion, Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with  $q > 4$ , *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, **54** (2021), 1363–1413.
- [15] H. Duminil-Copin, S. Goswami and A. Raoufi, Exponential decay of truncated correlations for the Ising model in any dimension for all but the critical temperature, *Commun. Math. Phys.*, **374** (2020), 891–921.
- [16] H. Duminil-Copin, V. Sidoravicius and V. Tassion, Continuity of the phase transition for planar random-cluster and Potts models with  $1 \leq q \leq 4$ , *Commun. Math. Phys.*, **349** (2017), 47–107.
- [17] H. Duminil-Copin and V. Tassion, A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model, *Commun. Math. Phys.*, **343** (2016), 725–745.
- [18] J. Fröhlich, B. Simon and T. Spencer, Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking, *Commun. Math. Phys.*, **50** (1976), 79–95.
- [19] R.B. Griffiths, Correlations in Ising ferromagnets I, *J. Math. Phys.*, **8** (1967), 478–483.
- [20] R.B. Griffiths, Correlations in Ising ferromagnets II, *J. Math. Phys.*, **8** (1967), 484–489.
- [21] R.B. Griffiths, Correlations in Ising ferromagnets III, *Commun. Math. Phys.*, **6** (1967), 121–127.
- [22] R.B. Griffiths, C.A. Hurst and S. Sherman, Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field, *J. Math. Phys.*, **11** (1970), 790–795.
- [23] G.R. Grimmett, The work of Hugo Duminil-Copin, Preprint, [arXiv:2207.02022](https://arxiv.org/abs/2207.02022).
- [24] M. Hairer, The work of Hugo Duminil-Copin, Preprint, [arXiv:2207.01715](https://arxiv.org/abs/2207.01715).
- [25] 原 隆, [フィールズ賞業績紹介] デュミニル=コパン, *数学セミナー*, **62** (2023), 32–37.
- [26] T. Hara and G. Slade, Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **128** (1990), 333–391.
- [27] E. Ising, Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, *Zeitschrift für Physik* **31** (1925), 253–258.
- [28] H. Kesten, The critical probability of bond percolation of the square lattice equals  $\frac{1}{2}$ , *Commun. Math. Phys.*, **74** (1980), 41–59.
- [29] T.D. Lee and C.N. Yang, Statistical theory of equation of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model, *Phys. Rev.*, **87** (1952), 410–419.
- [30] M.V. Menshikov, Coincidence of critical points in percolation problems, *Soviet Math. Doklady* **33** (1986), 856–859.
- [31] L. Onsager, Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.*, **65** (1944), 117–149.
- [32] R. Peierls, On Ising’s model of ferromagnetism, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **32** (1936), 477–481.

- [33] A. Sakai, Lace expansion for the Ising model, *Commun. Math. Phys.*, **272** (2007), 283–344.
- [34] A. Sakai, Application of the lace expansion to the  $\varphi^4$  model, *Commun. Math. Phys.*, **336** (2015), 619–648.
- [35] A. Sakai, Correct bounds on the Ising lace-expansion coefficients, *Commun. Math. Phys.*, **392** (2022), 783–823.
- [36] A.D. Sokal, An alternate constructive approach to the  $\varphi_3^4$  quantum field theory, and a possible destructive approach to  $\varphi_4^4$ , *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théorique* **37** (1982), 317–398.
- [37] 田崎 晴明, 原 隆, 相転移と臨界現象の数理, 共立叢書 現代数学の潮流, 共立出版, 2015 年.