パーコレーションの数理 2020*

坂井　哲 †

2020 年 7 月 19 日

1　はじめに

「数学」のバックナンバーを調べてみると，パーコレーションに関する記事は，書評も合わせて計 5 回登場している [40, 41, 42, 65, 69]．最後に登場したのは，篠田（以下敬称略）による Grimmett の Percolation 第 2 版の書評 [65] で,（少なくとも筆者にとっては驚くべきことに）既に 20 年が経っている．この間，我々の理解は一体どのくらい深化したのだろうか？

パーコレーションを冠する重要な確率過程や確率幾何モデルは多い．例えば，有向パーコレーション（oriented percolation 或いは directed percolation），侵略パーコレーション（invasion percolation），最短通過時間パーコレーション（first-passage percolation）などが挙げられる．それぞれについて少しずつ触れるのも一興だが，この論説では，規則的で次数が有限な無限グラフ上の「ボンド」パーコレーションに的を絞ろう．今後わざわざ断らない限り，グラフは d 次元正方格子 $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$ とする．辺集合

$$\mathbb{B}^d \equiv \{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1\} \tag{1.1}$$

の元をボンドと呼び，各ボンド $b \in \mathbb{B}^d$ は他のボンドたちとは独立に確率 $p \in [0, 1]$ で 1（開），確率 $1-p$ で 0（閉）を取るものとする．各ボンドの状態をまとめたボンド配置 $\omega \equiv \{\omega_b\}_{b\in\mathbb{B}^d} \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}^d}$ が従う直積測度を $\mathbb{P}_p$ で表そう．パーコレーションの問題とは，ランダムな開ボンド集合 $\omega^{-1}(1) \equiv \{b \in \mathbb{B}^d : \omega_b = 1\}$ に含まれる連結クラスターの振る舞いや，その p 依存性を理解することである．この論説を執筆している 2020 年 5 月 25 日現在[1]，世界で 530 万人以上が感染し，34 万人以上が亡くなっている新型コロナウィルス（SARS-CoV-2）を念頭におくと，感染率 p の病気に罹った人の集団の典型的サイズなどが興味の対象である．

昨年亡くなった，パーコレーションの難問を幾つも解決した Kesten は，1982 年の著書 [47] の序文で，次のように述べている：

> "it is a source of fascinating problems of the best kind a mathematician can wish for: problems which are easy to state with a minimum of preparation, but whose solutions are (apparently) difficult and require new methods. At the same time many of the problems are of interest to or proposed by statistical physicists and not dreamt up merely to demonstrate ingenuity."

* この文章は，数学 **74**, No.3 (2022) に掲載されたものの著者版です．

† 北海道大学大学院理学研究院．https://orcid.org/0000-0003-0943-7842

[1] この論説を改稿している 2020 年 7 月 18 日時点では，世界で 1400 万人以上が感染，60 万人以上が亡くなっている．たった 2 か月弱の間に，信じられないスピードで増えてしまった．為政者は，経済を優先するのか，それとも人命を優先するのか，その判断基準を数値化して周知しておくべきだと思うが….

パーコレーションが最初に定式化されたのは，1957 年の Broadbent と Hammersley の論文 [11] だとされている．20 世紀前半に登場した，磁石の相転移・臨界現象を理解するための統計力学モデルであるイジング模型が，2 次元で解かれて間もない頃であった．そこで培われた知識や様々な技法を（パーコレーションのような）単純な設定で試してみたい，と思うのは自然であろう．逆に，パーコレーションの問題を解決しようと発展した知見が，イジング模型などの統計力学モデルの相転移・臨界現象に対する理解を進化・深化してくれるかも知れない．次節以降でも触れるが，パーコレーションの重要な成果群には，代数的・幾何的・解析的な発想が混在する．研究者のみならず，これから数学を真剣に学ぼうと思う学生にとっても，非常に魅力的でチャレンジングな問題だろう．パーコレーションは，そういう「良質な」確率幾何モデルなのだ，と Kesten は述べているのである．全くもって，その通りだと思う．お勧めなのである．

そうは言っても，Grimmett の本から 20 年経っていて，人智の到達点が現在どこなのか，初学者には見え難いだろう．より最近のものでは，2 次元の結果により重きを置いた Bollobás と Riordan の本 [9] や，高次元の結果により重きを置いた Heydenreich と van der Hofstad の本 [38]，日本語で勉強できる樋口の新版 [43] や臨時別冊・数理科学 [44] が入手可能である．これらの良い部分（だと筆者が思うところ）と，その後の発展で得られた知見が纏まった，初学者にとって入り易い超特急の読み物があったら有難いかも知れない．この論説は，あくまでも筆者が重要だと考える結果を，2020 年の時点で最も洗練された証明法の概略と共に紹介するものである．

2　相転移の存在性

パーコレーションの問題は，ランダムな開ボンド集合 $\omega^{-1}(1)$ に含まれる連結クラスターの振る舞いを理解することだと述べた．そこで，まず基準点となる原点 $o \in \mathbb{Z}^d$ の開クラスターと，その p 依存性を調べるためのオーダーパラメターを定義しよう．

与えられたボンド配置 $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{B}^d}$ において，或る二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が繋がっているとは，$x = y$ か，その二点間を結ぶ経路が $\omega^{-1}(1)$ 上に存在することとする．このことを簡単に $x \underset{\omega}{\longleftrightarrow} y$ と表す．この記号を用いて，点 x の開クラスター $\mathcal{C}_x$ と，その濃度 $|\mathcal{C}_x|$ を

$$\mathcal{C}_x(\omega) = \big\{y \in \mathbb{Z}^d : x \underset{\omega}{\longleftrightarrow} y\big\}, \qquad |\mathcal{C}_x(\omega)| = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{x \longleftrightarrow y\}}(\omega) \tag{2.1}$$

（ただし $\mathbb{1}_A$ は指示関数で，事象 A が成り立つときは 1，そうでないときは 0）とする．これらを用いて，オーダーパラメターを次のように定義しよう：

$$\theta_p = \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_o| = \infty) \equiv \mathbb{P}_p\big(\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{B}^d} : |\mathcal{C}_o(\omega)| = \infty\}\big), \qquad \chi_p = \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}_o|]. \tag{2.2}$$

ここで $\mathbb{E}_p$ は確率測度 $\mathbb{P}_p$ に対する期待値である．無限直積測度 $\mathbb{P}_p$ は，有限シリンダー（有限個のボンドの状態で決まる事象のこと）に対する周辺分布が通常の二項分布であるものから一意に構成できる．$(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$ の対称性と $\mathbb{P}_p$ の並進対称性により，これらの量は基準点の選び方によらない．また，直観的にも正しいと思うだろうが，これらは p について単調増加であることが，独立な一様乱数系を用いたカップリングによって証明できる．さらに，これらの境界値（$p = 0$ では $\theta_0 = 0$ と $\chi_0 = 1$，$p = 1$ では $\theta_1 = 1$ と $\chi_1 = \infty$）を考慮すると，次のような二つの臨界点を定義することができよう：

$$p_{\mathrm{H}} = \sup\{p \in [0,1] : \theta_p = 0\}, \qquad p_{\mathrm{T}} = \sup\{p \in [0,1] : \chi_p < \infty\}. \tag{2.3}$$

添字の H や T は，それぞれ Hammersley と Temperley に由来する．これらの値は，次元 d や格子の構造（正方格子の代わりに，体心立方格子を使う）など，モデルの詳細に依存して変わりうる．すぐに分かることは，$\theta_p > 0$ ならば $\chi_p = \infty$ （或いはその対偶「$\chi_p < \infty$ ならば $\theta_p = 0$」）なので，$p_{\mathrm{T}} \le p_{\mathrm{H}}$ ということ．それを踏まえて，次のような問題がすぐに思いつくだろう．

(i) 臨界点は非自明（$0 < p_{\mathrm{T}}$，$p_{\mathrm{H}} < 1$）なのか？(相転移の存在性)

(ii) 臨界点は唯一つか？(臨界点の一意性)

(iii) 臨界点が唯一つだったとして，その値は？

(iv) 臨界点近傍におけるオーダーパラメターの振る舞いは？(臨界現象の普遍性)

1 次元では自明（$p_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{T}} = 1$）なことが簡単に分かるので，以下では $d \geq 2$ と仮定する．この節では，問題 (i) を議論しよう．

実は，$p_{\mathrm{T}} > 0$ を示すのは簡単である．2 点関数を

$$\tau_p(x) = \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow x) \tag{2.4}$$

と定義すると，原点の開クラスターサイズの平均値は

$$\chi_p = \mathbb{E}_p\Bigg[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{o\longleftrightarrow x\}}\Bigg] = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \tau_p(x) \tag{2.5}$$

と書き直せる．ところが，Boole の不等式により，2 点関数は経路 $(o, v_1, \dots, v_{n-1}, x)$ 上のボンドが全て開である確率 p^n を経路の取り方全てに亘って足し合わせたものよりも小さい．したがって，$\chi_p \leq \sum_{n=0}^{\infty}(2dp)^n$ であり，$p_{\mathrm{T}} \geq 1/(2d)$ である．

他方，$p_{\mathrm{H}} < 1$ は，2 次元イジング模型に対する相転移の存在性を保証した Peierls の論法 [56] をパーコレーションに応用（誰が最初にそうしたか不明[2]）することで，$d = 2$ では解決された．カップリングを用いて θ_p の p 単調性を保証したように，次元 d に関する単調増加性を示すことができるので，高次元での p_{H} は 2 次元での値以下となり，したがって全ての次元で $p_{\mathrm{H}} < 1$ であることが分かる．

しかし，もし $d = 2$ だったら，その格子の単純な構造のおかげで，もっと精密な評価が得られてもよさそうなものである．実際その通りで，次の定理が示す通り，$p_{\mathrm{H}} = 1/2$ である．この尤もらしい結果を Kesten が解決するまで，ずいぶん長い年月がかかったのである．

定理 1 (Kesten[46])**.** $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{B}^2)$ 上のボンドパーコレーションでは，$p_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{T}} = 1/2$.

ここでは，Kesten のオリジナルな証明とは異なる方法を紹介する．カギは，$p_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{H}}$（臨界点の一意性）と，無限に大きい開クラスターが存在すれば唯一つだけ，を認めることである．これらの仮定については，次節以降で解決しよう．

証明の概略. 臨界点の一意性を認めれば，$\chi_{1/2} = \infty$ と $\theta_{1/2} = 0$ を示せば十分．まず，$\chi_{1/2} = \infty$ を証明しよう．形式的には，

$$\chi_{1/2} = \mathbb{E}_{1/2}[|\mathcal{C}_o|] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_{1/2}(|\mathcal{C}_o| \geq n) \tag{2.6}$$

[2] この辺の事情に関して，レフェリーのお一人に貴重な情報をいただいた．いろいろ調査していただいたものも含めて，本来そのまま引用させていただきたいくらいの情報だったので，どう扱うか非常に悩んだ．しかし，本論説では Peierls の論法に軽く触れる程度だったので，ここでは結論だけ紹介するにとどめる．パーコレーションにおける Peierls の論法の応用は，Hammersley[29] が最初だったようである．その後出版された幾つかのパーコレーションに関する文献でも，この論文が $p_{\mathrm{H}} < 1$ の証明の原典として引用されている．ところが，Hammersley はそのアイデアに独立に到達したようだ．そのやりとりが，[29] の最後についている discussion の部で展開されているらしい．しかし，証明のアイデアは同じなので，イジング模型における Peierls の論法の認知度が上がるにつれ，Hammersley の証明も「Peierls の論法」を冠して呼ばれるようになった，ということらしい．

と書けることに注意．実は，以下で示すように，$\mathbb{P}_{1/2}(|\mathcal{C}_o| \geq n) \geq 1/(2n)$ なので，これで証明完了．

さて，$\mathbb{P}_{1/2}(|\mathcal{C}_o| \geq n) \geq 1/(2n)$ の証明だが，これには長方形領域 $[0,n] \times [1,n]$ の左辺 L から右辺 R への横断確率が $1/2$ であること（その理由は，$\mathbb{Z}^2$ を縦横に $1/2$ ずつ平行移動した裏格子 $(\mathbb{Z}^2_*, \mathbb{B}^2_*)$ 上で長方形領域 $[\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]$ の上下を横断する「閉じた」裏ボンド（裏ボンドの開閉は，それを横切る元の格子上の唯一のボンドの開閉に応じて決まる）から成る経路が存在することが余事象であり，それらの確率は $p = 1/2$ のとき一致するから）を次のように使えばよい：

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}_{1/2}\Bigg(\underbrace{\bigcup_{x \in \mathrm{L}} \Big\{ x \xleftrightarrow{[0,n]\times[1,n] \text{ 上で}} \mathrm{R} \Big\}}_{[0,n]\times[1,n] \text{ の横断事象}}\Bigg) \leq \sum_{x \in \mathrm{L}} \mathbb{P}_{1/2}(|\mathcal{C}_x| \geq n) = n\,\mathbb{P}_{1/2}(|\mathcal{C}_o| \geq n). \tag{2.7}$$

ここで $x \xleftrightarrow{[0,n]\times[1,n] \text{ 上で}} \mathrm{R}$ は，両端点が長方形領域 $[0,n] \times [1,n]$ に含まれる開ボンドたちだけを使って x と R が繋がることを表す．最後の等式は，モデルの並進対称性による．

次に，$\theta_{1/2} = 0$ を背理法で証明しよう．今，仮に $\theta_{1/2} > 0$ とすると，確率 1 で世界のどこかに無限開クラスターが存在する（その理由は，この事象が平行移動不変なことと，直積測度の混合性により，確率 1 で起こるか起こらないかの二択しかないため）．したがって，$n \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば，正方領域 $[0,n]^2$ と無限開クラスターが交わる確率を $1 - 1/4^4$ より真に大きくできる．事象 $I_{\text{左}}$ を $[0,n]^2$ の左面から $[0,n]^2$ 内のボンドを使わずに開ボンドを伝って無限遠方に繋がる事象とする（$I_{\text{右}}, I_{\text{上}}, I_{\text{下}}$ も同様に定義）と，上で述べたことは $\mathbb{P}_{1/2}(I_{\text{左}} \cup I_{\text{右}} \cup I_{\text{上}} \cup I_{\text{下}}) > 1 - 1/4^4$，すなわち

$$\mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{\text{左}} \cap I^{\mathrm{c}}_{\text{右}} \cap I^{\mathrm{c}}_{\text{上}} \cap I^{\mathrm{c}}_{\text{下}}) \leq \frac{1}{4^4} \tag{2.8}$$

と同値．

ここで，単調な事象に対する Harris の不等式を述べておく．事象 A が単調増加（または単調減少）であるとは，$\omega \in A \subset \{0,1\}^{\mathbb{B}^d}$，$\xi \in \{0,1\}^{\mathbb{B}^d}$，$\omega^{-1}(1) \subset \xi^{-1}(1)$（または $\omega^{-1}(1) \supset \xi^{-1}(1)$）ならば，$\xi$ も A の元となることである．直観的には，開ボンドを増やす（または減らす）と起こり易くなる事象のことである．単調増加または単調減少な事象に対し，次の有名な Harris の不等式が成り立つ：

定理 2 (Harris[37])**.** 事象 A, B が共に単調増加または共に単調減少であるとき，

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\,\mathbb{P}_p(B). \tag{2.9}$$

この不等式は，共に単調増加または共に単調減少な事象 A, B が「協力して」起こる確率は，それぞれ独立に起こる確率よりも大きいということを示している．Harris の不等式は直積測度に対して証明されたものであるが，のちに強磁性スピン系も包含する広いクラスに適用可能な FKG 不等式 [23] に拡張された．

Harris の不等式の証明は後回しにして，単調減少事象が同時に起こる確率 (2.8) に (2.9) を使ってみよう．モデルの対称性から $\mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{\text{左}}) = \cdots = \mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{\text{下}})$ なので，$\mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{\text{左}})^4 < 1/4^4$ となる．すなわち

$$\mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{\text{左}}) = \mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{\text{右}}) < \frac{1}{4}. \tag{2.10}$$

また，事象 $I^*_{上}$ を裏格子 $(\mathbb{Z}^2_*, \mathbb{B}^2_*)$ 上で長方形領域 $[\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}]^2$ の上辺から $[\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}]^2$ 内の裏ボンドを使わずに「閉じた」裏ボンドを伝って無限遠方に繋がる単調減少事象とすると，同様の議論により，n が十分大きければ,

$$\mathbb{P}_{1/2}({I^*_{上}}^{\mathrm{c}}) = \mathbb{P}_{1/2}({I^*_{下}}^{\mathrm{c}}) < \frac{1}{4} \tag{2.11}$$

である．したがって，Boole の不等式より,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(I_{左} \cap I_{右} \cap I^*_{上} \cap I^*_{下}) &= 1 - \mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{左} \cup I^{\mathrm{c}}_{右} \cup {I^*_{上}}^{\mathrm{c}} \cup {I^*_{下}}^{\mathrm{c}}) \\ &\geq 1 - \mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{左}) - \mathbb{P}_{1/2}(I^{\mathrm{c}}_{右}) - \mathbb{P}_{1/2}({I^*_{上}}^{\mathrm{c}}) - \mathbb{P}_{1/2}({I^*_{下}}^{\mathrm{c}}) > 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

が得られる．ここで，正方領域 $[\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}]^2$ 内の裏ボンドを全て閉じる（この確率は正で，しかも上の事象とは独立）と，二つの無限開クラスターが存在する確率が正となってしまい，無限開クラスターの一意性に反する．よって，最初から $\theta_{1/2} = 0$ でなければならなかったというわけだ．■

定理 2 の証明の概略． 事象 A, B が共に n 個のボンド $[n] \equiv \{1, \dots, n\}$ だけに依存した単調増加なシリンダー（このことを $A, B \in \mathscr{F}_{[n]}$ と書き，その上の直積測度を p を略して $\mathbb{P}_{[n]}$ と書こう）の場合に対して証明すれば十分．$n = 1$ の場合は明らか (全事象や空事象のような自明な場合を除けば，$\mathbb{P}_{[1]}(A \cap B) = \mathbb{P}_{[1]}(A) = \mathbb{P}_{[1]}(B) = p$ だから）．仮に $n-1 \in \mathbb{N}$ まで (2.9) が正しいとして，$A, B \in \mathscr{F}_{[n]}$ に対して (2.9) を示したい．$A^s \equiv A \cap \{\omega_n = s\} \in \mathscr{F}_{[n-1]}$ に対して $a_s = \mathbb{P}_{[n]}(A|\omega_n = s)$（直積測度なので，これは $\mathbb{P}_{[n-1]}(A^s)$ と一致）などと表記すれば，単調増加性 $A^0 \subset A^1$，$B^0 \subset B^1$ から $(a_1 - a_0)(b_1 - b_0) \geq 0$ （すなわち $a_1 b_0 + a_0 b_1 \leq a_1 b_1 + a_0 b_0$）が成り立つので，帰納法の仮説（使うところに ★ 印）により,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[n]}(A)\,\mathbb{P}_{[n]}(B) &= \big(a_1 p + a_0(1-p)\big)\big(b_1 p + b_0(1-p)\big) \\ &= a_1 b_1 p^2 + a_0 b_0 (1-p)^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) p(1-p) \\ &\leq a_1 b_1 \big(p^2 + p(1-p)\big) + a_0 b_0 \big((1-p)^2 + p(1-p)\big) \\ &\overset{\bigstar}{\leq} \mathbb{P}_{[n-1]}(A^1 \cap B^1)\, p + \mathbb{P}_{[n-1]}(A^0 \cap B^0)\,(1-p) \\ &= \mathbb{P}_{[n]}(A \cap B) \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる． ■

3　無限開クラスターの一意性

パーコレーションの研究の中でも特に重要な結果群で頻繁に目にする名前がある．Kesten もその一人であるが，Aizenman と Newman もそうした研究者である．前節で仮定した「無限開クラスターの一意性」の問題は，歴史的にはこの三人によって初めて解決された [2]．彼らは，統計力学で言うところの「自由エネルギー」f_p のパーコレーション版を考え，その p 微分が連続であることを証明した．実は，パーコレーションの f_p とは，一点あたりの開クラスター濃度の期待値として定義されるのだが，その右微分と左微分の差は

$$f'_{p+} - f'_{p-} = \frac{1}{2(1-p)} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d : |x| = 1} \mathbb{P}_p\big(o \text{ と } x \text{ は異なる無限開クラスターに属する}\big) \tag{3.1}$$

となることが分かっている [2, Proposition 1.4]．左辺はゼロなのだから，右辺もゼロ．したがって，任意の二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が異なる無限開クラスターに属する確率もゼロ，というわけだ．

上述の統計力学的な証明が発表された 2 年後の 1989 年，Burton と Keane による圧倒的に簡単な証明が発表された [14]．それを紹介する前に，まず $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$ 上の無限開クラスターは（存在するなら）唯一つか，際限なく沢山存在するかのどちらかしかありえないことを述べておこう．無限開クラスターの個数を N_∞ とすると，各 $n \in \mathbb{Z}_+^* \equiv \{0, 1, \ldots, \infty\}$ に対して $\{N_\infty = n\}$ は平行移動不変なので，直積測度の混合性により，その確率は 1 か 0 である．ところが，或る $n \in \mathbb{Z}_+^* \setminus \{0, 1, \infty\}$ で $\mathbb{P}_p(N_\infty = n) = 1$ と仮定すると，n 個の無限開クラスターが全て $\Lambda_\ell^d \equiv [-\ell, \ell]^d$ と交わる確率を正にできるような $\ell \in \mathbb{N}$ が取れる．この事象は Λ_ℓ^d 内のボンドとは独立なので，Λ_ℓ^d 内のボンドを全て開いてやると，$\mathbb{P}_p(N_\infty = 1) > 0$ が得られる．これは確率の保存に矛盾するので，背理法から $\mathbb{P}_p(N_\infty \in \{0, 1, \infty\}) = 1$ というわけだ．Burton と Keane のエライところは，Λ_ℓ^d 内にある無限開クラスターの「三重点」を数えることで，$N_\infty = \infty$ の可能性も排除できる，と見抜いたことである．

定理 3 (Burton & Keane[14]). $\mathbb{P}_p(N_\infty \in \{0, 1\}) = 1$.

証明の概略. $\mathbb{P}_p(N_\infty = \infty) = 1$ と仮定して矛盾を導こう．このとき十分大きな $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して，Λ_ℓ^d と交わる無限開クラスターの総数が 3 以上となる確率を正にできる．この事象は Λ_ℓ^d 内のボンドたちとは独立なので，Λ_ℓ^d 内をスカスカに繋いでやることで，原点を三重点にすることができる．ここで三重点とは，Burton と Keane の原論文では「encounter point」と呼ばれていたもので，その点は無限開クラスターに属し，その点を端点とするボンドのうち三本だけが開いていて，その三本のボンドを取り除くと三つの互いに素な無限開クラスターに分離できる点のことである．事象 $\{x$ は三重点$\}$ を T_x で表すと，上で述べたことは $\mathbb{P}_p(T_o) > 0$ ということであり，モデルの並進対称性により，$\mathbb{P}_p(T_x)$ は $x \in \mathbb{Z}^d$ の取り方によらない．したがって，

$$\mathbb{E}_p\left[\sum_{x \in \Lambda_\ell^d} \mathbb{1}_{T_x}\right] = |\Lambda_\ell^d|\, \mathbb{P}_p(T_o) \tag{3.2}$$

が成り立つ．ところが，各三重点における樹状構造のせいで，Λ_ℓ^d 内の三重点個数は高々$|\partial \Lambda_\ell^d|$（$=\Lambda_\ell^d$ の表面上の格子点数）しかないはず．よって矛盾が導かれた． ■

4 臨界点の一意性

定理 1 を証明する際に認めたもう一つの事実，二つの臨界点 $p_{\mathrm{H}}, p_{\mathrm{T}}$ の一意性について議論しよう．これもパーコレーションが考案されて以来，一般の次元では未解決であったが，1980 年代半ばの同時期，当時のソビエトとアメリカ合衆国で，しかし全く異なる方法で解決された．前者は Menshikov[53]，後者は Aizenman–Barsky[1] による．

Menshikov は，原点と半径 n の d 次元超立方体の表面が繋がる確率 $\theta_p(n) \equiv \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \partial \Lambda_n^d)$ の p 微分を調べ，$p < p_{\mathrm{H}}$ であれば $\theta_p(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$ が劣指数関数的であることを証明した.（のちに Kesten は，この劣指数関数的減衰から指数関数的減衰が導かれることを指摘した.）任意の $x \in \partial \Lambda_n^d$ で $\tau_p(x) \le \theta_p(n)$ が成り立つので，$\chi_p \le 1 + \sum_{n=1}^\infty |\partial \Lambda_n^d| \theta_p(n) < \infty$ （つまり $p < p_{\mathrm{T}}$）となり，先に述べた自明な逆向き不等式 $p_{\mathrm{T}} \le p_{\mathrm{H}}$ と合わせて，$p_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{T}}$ が得られるのである．

一方，Aizenman と Barsky のアプローチは統計力学的で，原点の開クラスター濃度に対する母関数 $M_{p,h} \equiv 1 - \mathbb{E}_p[e^{-h|\mathcal{C}_o|}]$（スピン系との類似性から，$h > 0$ は「磁場」とか「ゴースト場」と呼

ばれるものの強さを表す）がみたす偏微分不等式を導出し，それが等式に退化した「平均場モデル」と比較．その結果，例えば「$p > p_{\mathrm{T}}$ ならば $\theta_p = M_{p,+0} \ge \frac{3}{8p}(p - p_{\mathrm{T}}) > 0$」を証明した．これは，単に $p_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{T}}$ を示しているだけでなく，θ_p の立ち上がり方は平均場モデルの上がり方（$p - p_{\mathrm{H}}$ の 1 乗に比例）より急だと主張しているのである．あとで登場する「臨界指数」という言葉を使うと，これは臨界指数 β が存在すれば 1 以下であることを示していて，Menshikov の方法よりも或る意味強力である．

どちらの方法も，パラメター p や h に対する応答を調べるために微分する，という立場をとっている．これは普遍的な考え方で，少なくとも数理物理の問題ではよくお目にかかるアプローチである．得体の知れないものを手にしたら，まずは叩いて（微分して）みようということだろう．

長年の難問が解けて一件落着と相成ったわけだが，それぞれの証明の詳細はなかなか重く，諳んじて語るには（少なくとも筆者には）練習が必要だった．ところが最近，上の二つの方法とは異なる，しかし圧倒的に簡単な証明を Duminil-Copin と Tassion が発見した [19, 20]．そのアイデアは，$p < p_{\mathrm{T}}$ であれば 2 点関数 $\tau_p(x) \xrightarrow[|x|\uparrow\infty]{} 0$ が指数関数的であることを証明した Simon の不等式 [64] からインスパイアされた第三の臨界点 p_{c} が，実は $p_{\mathrm{T}}, p_{\mathrm{H}}$ と一致することを見抜いたところにある．（Heydenreich と van der Hofstad の本 [38] では Hammersley[28] が引用されているが，それだと臨界点 p_{T} まで近寄れないし，証明のノリはむしろ Simon[64] に近いと思う．）この節では，Duminil-Copin と Tassion の証明を少し詳しく紹介しよう．

まず，原点 o を含む有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ に対し，p 連続な単調増加関数として

$$\varphi_p(S) = \sum_{x\in S, y\notin S} \mathbb{P}_p\Big(o \xleftrightarrow{S\text{ 上で}} x,\ \{x,y\}\text{ は開}\Big) \tag{4.1}$$

を導入する．$o \xleftrightarrow{S\text{ 上で}} x$ は，$o = x \in S$ か，$o \neq x$ ならば両端点が S に含まれる開ボンドたちだけを使って o と x が繋がることを意味する（(2.7) と同じ）．これを用いて，上で述べた第三の臨界点 p_{c} を

$$p_{\mathrm{c}} = \sup\Big\{p : \varphi_p(S) < 1\text{ をみたす有限集合 } S \ni o\text{ が存在}\Big\} \tag{4.2}$$

と定義しよう．この定義からすぐに分かることは，任意の有限集合 $S \ni o$ で $\varphi_{p_{\mathrm{c}}}(S) \ge 1$ だということ．そこで，$S_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \le n\}$ （したがって $\partial S_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 = n\}$）とすると，

$$1 \le \varphi_{p_{\mathrm{c}}}(S_n) \le 2dp_{\mathrm{c}} \sum_{x\in\partial S_n} \mathbb{P}_{p_{\mathrm{c}}}\Big(o \xleftrightarrow{S_n\text{上で}} x\Big) \le 2dp_{\mathrm{c}} \sum_{x\in\partial S_n} \tau_{p_{\mathrm{c}}}(x) \tag{4.3}$$

が得られ，

$$\chi_{p_{\mathrm{c}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x\in\partial S_n} \tau_{p_{\mathrm{c}}}(x) \ge \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2dp_{\mathrm{c}}} = \infty \tag{4.4}$$

が帰結される．（この主張を p_{c} でなく p_{T} でしようと思うと，実は結構大変．この点については，第 6 節でもう少し詳しく述べる．）Duminil-Copin と Tassion の主張は，次のようなものである．

定理 4 (Duminil-Copin & Tassion[19, 20])**.** $p < p_{\mathrm{c}}$ ならば，或る定数 $c > 0$ が存在して，

$$\theta_p(n) \le e^{-cn} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{4.5}$$

一方，$p > p_{\mathrm{c}}$ ならば，

$$\theta_p \ge \frac{p - p_{\mathrm{c}}}{p(1 - p_{\mathrm{c}})}. \tag{4.6}$$

したがって，$p_{\mathrm{c}} = p_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{T}}$ である．

証明の概略．まず $p<p_c$ の場合，$\varphi_p(S)<1$ をみたす有限集合 $S\ni o$ が存在するので，$S\subset\Lambda^d_{\ell-1}$ をみたす $\ell\in\mathbb{N}$ が取れる．(4.5) の十分条件は，任意の $k\in\mathbb{N}$ で $\theta_p(k\ell)\le\varphi_p(S)^k$ が成り立つことである．その理由は，この不等式と同値な $\frac{1}{k\ell}\log\theta_p(k\ell)\le\frac{1}{\ell}\log\varphi_p(S)$ と，$\theta_p(n)$ の優乗法性 $\theta_p(n+m)\ge\theta_p(n)\,\theta_p(m)$ から得られる

$$-c\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{\log\theta_p(n)}{n}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\log\theta_p(n)}{n}\tag{4.7}$$

を合わせれば明らかである．

さて，肝心の $\theta_p(k\ell)\le\varphi_p(S)^k$ であるが，$\boldsymbol{\mathcal{S}}_o\equiv\{x\in S:o\xleftrightarrow{S\text{ 上で}}x\}$ を導入すると，次のように証明できる．もし $o\longleftrightarrow\partial\Lambda^d_{k\ell}$ ならば，或る $x\in S$，$y\notin S$ が存在して，$\{o\xleftrightarrow{S\text{ 上で}}x$，$\{x,y\}$ は開 $\}$ と $\{y\xleftrightarrow{\Lambda^d_{k\ell}\setminus\boldsymbol{\mathcal{S}}_o\text{上で}}\partial\Lambda^d_{k\ell}\}$ が同時に起こるはず．少なくとも一方の端点が $\boldsymbol{\mathcal{S}}_o$ に含まれるボンドたちだけで決まる事象の σ 加法族を $\mathscr{F}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}_o}$ と表すと，前者は $\mathscr{F}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}_o}$ 可測，後者は $\mathscr{F}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}_o}$ と独立である．したがって，期待値のタワー性（tower property），連結確率の体積に関する単調性と並進対称性を順番に使うことにより，

$$\begin{aligned}\theta_p(k\ell)&\le\sum_{x\in S,y\notin S}\mathbb{E}_p\Bigg[\mathbb{1}_{\{o\xleftrightarrow{S\text{ 上で}}x,\ \{x,y\}\text{ は開 }\}}\underbrace{\mathbb{P}_p\Big(y\xleftrightarrow{\Lambda^d_{k\ell}\setminus\boldsymbol{\mathcal{S}}_o\text{上で}}\partial\Lambda^d_{k\ell}\Big)}_{\le\theta_p((k-1)\ell)}\Bigg]\\&\le\varphi_p(S)\,\theta_p\big((k-1)\ell\big)\end{aligned}\tag{4.8}$$

が得られる．1 行目において，$\boldsymbol{\mathcal{S}}_o$ は外側の $\mathbb{E}_p$ に対してはランダムだが，内側の $\mathbb{P}_p$ に対しては定数であることに注意．これを繰り返し使い，最後に $\theta_p(0)=1$（$\partial\Lambda^d_0=\{o\}$ だから）を使えば，欲しかった式 $\theta_p(k\ell)\le\varphi_p(S)^k$ に到達する．ここまでは易しい．

次に $p>p_c$ の場合である．上述のように，臨界点 p_c は $p<p_c$ で $\theta_p(n)$ の指数関数的減衰が出るようにデザインされているわけだが，Duminil-Copin と Tassion のエライところは，その定義を $p>p_c$ でも生かすことができる微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\theta_p(n)\ge\frac{1-\theta_p(n)}{p(1-p)}\inf_{o\in S\subset\Lambda^d_n}\varphi_p(S)\tag{4.9}$$

を見つけたことだ．この微分不等式は全ての $p\in(0,1)$ で成立するのだが，$p\ge p_c$ に制限すれば常に $\varphi_p(S)\ge1$ となり，より簡単な微分不等式が得られる．あとはそれを p_c から $p>p_c$ まで積分すれば，(4.6) が得られるのだ．

では，肝心の微分不等式 (4.9) であるが，カギは次の Margulis-Russo の公式である．

定理 5 (Margulis[52]; Russo[59])．ボンド $b\in\{1,\dots,n\}$，状態 $s\in\{0,1\}$，ボンド配置 $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\{0,1\}^n$ に対し，新しいボンド配置 $\delta^s_b\omega$ を

$$(\delta^s_b\omega)_j=\begin{cases}\omega_j & (j\ne b\text{ のとき})\\ s & (j=b\text{ のとき})\end{cases}\tag{4.10}$$

と定義する．また，単調増加な有限シリンダー A と ω に対し，$\delta^1_b\omega\in A$ かつ $\delta^0_b\omega\notin A$ をみたす b を「ボンド配置 ω の中で事象 A に対するピボタルボンド」と呼び，$b\in\mathtt{piv}A(\omega)$ と表す．このとき，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathbb{P}_p(A)=\mathbb{E}_p[|\mathtt{piv}A|]=\sum_{b=1}^n\mathbb{P}_p(b\in\mathtt{piv}A).\tag{4.11}$$

実は，この公式と「sharp threshold」という概念を組み合わせることで，相転移の新しい特徴づけが可能になった（[24]）のだが，これ以上は深堀りしないでおこう．

この公式の証明は後回しにして，先に使って (4.9) を導出しよう．事象 $\{o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d\}$ は単調増加な有限シリンダーなので，Margulis-Russo の公式を使うと，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\theta_p(n) &= \sum_b \mathbb{P}_p\big(b \in \mathtt{piv}\{o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d\}\big)\\ &= \frac{1}{1-p}\sum_b \mathbb{P}_p\big(b \in \mathtt{piv}\{o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d\},\ o \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d\big)\end{aligned} \tag{4.12}$$

が得られる．二番目の等式は，b が $\{o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d\}$ に対するピボタルボンドであるということと，b 以外のボンドで o と $\partial\Lambda_n^d$ が繋がるか繋がらないかのギリギリの状態になっていることが同値だという事実による．すなわち，b の状態とは独立なので，b を閉じて（すると o と $\partial\Lambda_n^d$ は繋がらなくなる）その確率で割っているのである．ここで，境界から繋がっていない点の集合を表す確率変数 $\mathscr{S} \equiv \{x \in \Lambda_n^d : x \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d\}$ を導入して「ギリギリの状態」を表現し直すと，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\theta_p(n) &= \frac{1}{1-p}\sum_{\{x,y\}}\bigg(\mathbb{P}_p\Big(o \xleftrightarrow{\mathscr{S}\text{ 上で}} x,\ \mathscr{S} \not\ni y\Big) + \mathbb{P}_p\Big(o \xleftrightarrow{\mathscr{S}\text{ 上で}} y,\ \mathscr{S} \not\ni x\Big)\bigg)\\ &= \frac{1}{1-p}\sum_{x,y:\|x-y\|_1=1}\mathbb{P}_p\Big(o \xleftrightarrow{\mathscr{S}\text{ 上で}} x,\ \mathscr{S} \not\ni y\Big)\end{aligned} \tag{4.13}$$

と書き直せる．少なくとも一方の端点が $\mathscr{S}^{\mathrm{c}}$ に含まれるボンドたちだけで決まる事象の σ 加法族を $\mathscr{F}_{\mathscr{S}^{\mathrm{c}}}$ と表すと，$\{\mathscr{S} \ni o, x,\ \mathscr{S} \not\ni y\}$ は $\mathscr{F}_{\mathscr{S}^{\mathrm{c}}}$ 可測，$\{o \xleftrightarrow{\mathscr{S}\text{ 上で}} x\}$ は $\mathscr{F}_{\mathscr{S}^{\mathrm{c}}}$ と独立である．したがって，(4.8) と同様に期待値のタワー性を使うと，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\theta_p(n) = \frac{1}{1-p}\mathbb{E}_p\Bigg[\mathbb{1}_{\{\mathscr{S}\ni o\}}\underbrace{\sum_{\substack{x\in\mathscr{S},y\notin\mathscr{S}:\\ \|x-y\|_1=1}}\mathbb{P}_p\Big(o \xleftrightarrow{\mathscr{S}\text{ 上で}} x\Big)}_{\frac{1}{p}\varphi_p(\mathscr{S})}\Bigg] \tag{4.14}$$

が得られる．$\mathscr{S}$ は外側の $\mathbb{E}_p$ に対してはランダムだが，内側の $\mathbb{P}_p$ に対しては定数であることに注意．あとは φ_p の下限を取って期待値の外に出し，$\mathbb{E}_p[\mathbb{1}_{\{\mathscr{S}\ni o\}}] = \mathbb{P}_p(o \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n^d)$ を使えば証明完了． ■

初学者には込み入った証明に見えたかも知れないが，Menshikov や Aizenman & Barsky のオリジナルの証明を知っている方には信じられないくらい簡単になっただろう．時代が経つと，どんどん証明が洗練されて，当初の難しさが忘れ去られてしまう，その一例になりそうである．だからと言って，これらの方法に意味がなかったというわけではない．特に後者のアイデアは，のちに登場する「レース展開」の考え方に大きな影響を与えることになる．

定理 5 の証明の概略． 各ボンド b の開く確率を独立なパラメター p_b として $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$ と表すと，多変数微分により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathbb{P}_p(A) = \sum_{b=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_b}\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}(A)\bigg|_{\boldsymbol{p}=(p,\dots,p)} \tag{4.15}$$

が得られる．ところが，A は単調増加事象なので，$\boldsymbol{e}_b$ を第 b 成分が 1 である n 次元単位ベクトルとすると，

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}+\varepsilon\boldsymbol{e}_b}(A) - \mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}(A) \underset{\varepsilon\to0}{=} \varepsilon\,\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}\big(\{\omega : \delta_b^1\omega \in A,\ \delta_b^0\omega \notin A\}\big) + o(\varepsilon) \tag{4.16}$$

となる．あとは両辺を ε で割って極限を取り，(4.15) に代入すれば (4.11) が得られる． ■

5　臨界点近傍での振る舞いと未解決問題

さて，そろそろオーダーパラメターの p 依存性について知りたくなってきたかも知れない．特に臨界点近傍では，どのように振る舞うのだろう？ この節では，前節までと同様，既に証明された重要な結果群を紹介すると共に，未解決問題の幾つかを選り好んで紹介しよう．

まず，オーダーパラメター θ_p について．θ_p は p について単調増加な多項式 $\theta_p(n)$ の単調減少極限（$p<p_{\rm c}$ の場合，その収束スピードは指数関数的だと (4.5) は述べている）なので，p について右連続である．また，p 単調性を保証した際に述べたカップリングと無限開クラスターの一意性を用いると，θ_p は $p>p_{\rm c}$ で左連続であることも分かる [7]．したがって，θ_p は臨界点以外で連続である．残るは臨界点直上における連続性であるが，これが長きに亘って未解決のままである．

未解決問題 1：　全ての次元 $d\geq 2$ で $\theta_{p_{\rm c}}=0$ か？

定理 1 の証明でも示したように，2 次元では $\theta_{1/2}=0$ である．また，あとで紹介するレース展開の方法により，$d\geq 11$ でも $\theta_{p_{\rm c}}=0$ であることが示されている [21, 22]．さらに，$\mathbb{B}^d$ の代わりに

$$\mathbb{B}^d_{\rm BCC}=\big\{\{x,y\}\subset\mathbb{Z}^d:\text{全ての成分 } j \text{ で } |x_j-y_j|=1\big\}\tag{5.1}$$

を辺集合とすると，$(\mathbb{Z}^d,\mathbb{B}^d_{\rm BCC})$ は d 次元体心立方格子（Body-Centered Cubic lattice）となるが，レース展開により $d\geq 9$ で $\theta_{p_{\rm c}}=0$ となることも証明されている [30]．そして，$L\in[1,\infty)$ に対して

$$\mathbb{B}^d_L=\big\{\{x,y\}\subset\mathbb{Z}^d:0<\|x-y\|_\infty\leq L\big\}\tag{5.2}$$

を辺集合とした場合（これは spread-out model と呼ばれるものの一例であるが，適当な日本語訳が思いつかないので，敢えて名前を付けないでおく），L を十分大きく取ることで，$d>6$ ならば $\theta_{p_{\rm c}}=0$ となることもレース展開から帰結できる [34]．しかし，元来レース展開は「上部臨界次元」$d_{\rm c}$（あとで説明するが，パーコレーションでは $d_{\rm c}=6$ だと思われていて，spread-out model の結果はそれを支持している）より上の次元で臨界現象が平均場的なものに退化することを証明する手法である．例えば，(4.6) のような下からの評価だけでなく，上からも同様に $p-p_{\rm c}$ の定数倍で押さえられることを示すことができる．つまり，$\theta_{p_{\rm c}}=0$ は副産物なのである．したがって，レース展開のような飛び道具に頼らない，もっと一般的なやり方で未解決問題 1 を解決することが望ましい．

ここで，θ_p の立ち上がり方が問題になった．仮に全ての次元 $d\geq 2$ で $\theta_{p_{\rm c}}=0$ だったとして，その近傍では

$$\theta_p\underset{p\downarrow p_{\rm c}}{\approx}(p-p_{\rm c})^\beta\qquad\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}\qquad\lim_{p\downarrow p_{\rm c}}\frac{\log\theta_p}{\log(p-p_{\rm c})}=\beta\tag{5.3}$$

のような冪的な異常性（臨界現象）を示すものと思われている．また，臨界点直上では

$$\theta_{p_{\rm c}}(n)\underset{n\uparrow\infty}{\approx}n^{-\rho}\tag{5.4}$$

のように振る舞うものと考えられている．（$p<p_{\rm c}$ では (4.5) のように指数関数的に減衰し，$p>p_{\rm c}$ では正の値 θ_p に収束したこととは対照的である．）これら β,ρ の存在は明らかではないが，もし存在すれば，それらは臨界指数と呼ばれる．一般に臨界指数は，臨界点の値や「≈」の記号で見えなくなってしまっている定数項や緩慢変動関数などのモデルごとに異なるものとは一線を画し，次元や対称性だけで決まる普遍的なものだと信じられている．つまり，パーコレーションにはパー

コレーションの，有向パーコレーションには有向パーコレーションの，イジング模型にはイジング模型の「普遍性クラス」があって，それぞれ臨界指数の値で分類できる（ユニバーサリティー）というのである．したがって，臨界指数の存在証明と，さらにその値を特定することは，臨界現象の問題の中でも最上位の問題なのである．

未解決問題 2： 全ての次元 $d \geq 2$ で β や ρ などの臨界指数は存在するか？ それらの値は？

上で述べたレース展開による帰結は，6 次元より十分高い全ての次元で β は存在し，平均場モデルの値（$= 1$）に退化しているということである．また，レース展開から得られる 2 点関数 $\tau_{p_c}(x)$ の評価（後述）と開クラスターの濃度分布 $\mathbb{P}_{p_c}(|\mathcal{C}_o| \geq n)$ の評価を帰納的に使うことにより，やはり 6 次元より十分高い全ての次元で ρ も存在し，平均場モデルの値（$= 2$）に退化することも証明されている [49]．これら以外にも，フォーマルに

$$\chi_p \underset{p\uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\gamma}, \qquad \xi_p \equiv \sqrt{\sum_x |x|^2 \frac{\tau_p(x)}{\chi_p}} \underset{p\uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\nu}, \qquad \tau_{p_c}(x) \underset{|x|\uparrow\infty}{\approx} |x|^{2-d-\eta} \tag{5.5}$$

と定義される臨界指数 γ, ν, η が，高次元で平均場モデルの値（$\gamma = 1$，$\nu = 1/2$，$\eta = 0$）に退化することも証明されている．ここで登場した ξ_p は，原点の開クラスターが空間的にどのくらい拡がっているのかを表す量で，平均 2 乗距離，回転半径，或いは（2 次の）相関距離などと呼ばれる．

これら臨界指数たちの間には，（もし存在すれば）興味深い関係式が幾つも成り立つことが知られている．それらの中でも，次元 d をあらわに含む以下の不等式をハイパースケーリング不等式と呼ぶ．

定理 6 (Kesten[48] と Tasaki[68] から得られる帰結)**.** 任意の $d \geq 2$ で臨界指数 η, ρ, ν, γ が存在すれば，

$$d - 2 + \eta \geq 2\rho, \qquad (d - 2\rho)\nu \geq \gamma \tag{5.6}$$

が成り立つ．特に $d = 2$ のとき等式成立．

上の定理に臨界指数 β が入っていないが，この論説に登場しない「超臨界相での相関距離」と ξ_p が同じ臨界指数 ν で発散すると仮定して得られる不等式 $\rho\nu \geq \beta$ [68] を (5.6) の二番目の不等式に代入すれば，最も有名なハイパースケーリング不等式の一つである $d\nu \geq \gamma + 2\beta$ も得られる．

これらハイパースケーリング不等式に平均場モデルの値を代入すると，$d \geq 6$ が得られることに気づくだろう．対偶を取ると，$d < 6$ では少なくとも一つの臨界指数が平均場モデルの値とは異なるということになる．一般に，高次元で全ての臨界指数がそれぞれ平均場モデルの値に退化するとき，そうなる次元の下限 d_c を上部臨界次元と呼ぶ．上述したレース展開は $d_c \leq 6$ を示唆しているのに対し，ハイパースケーリング不等式は $d_c \geq 6$ を示唆している．これがパーコレーションでは $d_c = 6$ であることの所以である．これを完全に証明するには，未解決問題 2（臨界指数の存在性証明）を解決することと，辺集合が $\mathbb{B}^{d>6}_{L\gg1}$（spread-out model）ではなく元来の $\mathbb{B}^{d>6}$ であっても平均場モデルのように振る舞うことを証明すればよい．

未解決問題 3： $(\mathbb{Z}^{d>6}, \mathbb{B}^{d>6})$ 上のパーコレーションの臨界現象は平均場的か？

前述の Fitzner と van der Hofstad による結果 [21, 22] から，この問題は $d = 7, 8, 9, 10$ で未解決である．この点については，第 7 節で再検討しよう．

一方，2 次元では，三角格子上のサイトパーコレーション（各格子点が互いに独立に確率 p で開，確率 $1-p$ で閉となるモデルで，$(\mathbb{Z}^2, \mathbb{B}^2)$ 上のボンドパーコレーションと同じ普遍性クラスに属するものと考えられている）において，

$$\beta = \frac{5}{36}, \qquad \rho = \frac{5}{48}, \qquad \gamma = \frac{43}{18}, \qquad \nu = \frac{4}{3}, \qquad \eta = \frac{5}{24} \tag{5.7}$$

であり，確かにハイパースケーリング不等式 (5.6) は等式となる．これらの値は，臨界点直上（このモデルの臨界点も $p_c = 1/2$ であり，裏格子との相補性がカギとなる）において開クラスターの境界の連続極限が SLE_6（パラメター $\kappa = 6$ の Schramm-Löwner Evolution）で記述できるという事実から導かれる [50, 51, 67, 70]．SLE_κ はブラウン運動 $\{B_{\kappa t}\}_{t \geq 0}$ を駆動関数とした Löwner 発展方程式の解で，κ の値に応じて性質の異なる曲線を生成する．例えば，その曲線の Hausdorff 次元は確率 1 で $(1+\kappa/8) \wedge 2$ であり，しかも $\kappa \leq 4$ のときは単純曲線，$4 < \kappa < 8$ のときは自身と交わる曲線，$\kappa \geq 8$ のときは平面を埋め尽くす曲線を確率 1 で描く（[6] やその中の引用文献を参照）．$\kappa = 6$ のときだけ「局所性」と呼ばれる性質が成り立つことが知られていて，それがパーコレーションの性質に合致していることから，連続極限があるとすれば，それは SLE_6 でなければならなかった，というわけだ．共形不変で完全なスケーリング極限は，最終的に Camia & Newman[15] によって解決された．

<u>定理 6 の証明の概略.</u> (5.6) の最初の不等式は，$o \longleftrightarrow x$ ならば $o \longleftrightarrow \partial\Lambda^d_{|x|/2}$ かつ $x \longleftrightarrow \partial\Lambda^d_{|x|/2}(x)$（$= \Lambda^d_{|x|/2}$ を x だけ平行移動させたものの境界）なので，それらの独立性と並進対称性により，

$$\tau_p(x) \leq \mathbb{P}_p\big(o \longleftrightarrow \partial\Lambda^d_{|x|/2},\ x \longleftrightarrow \partial\Lambda^d_{|x|/2}(x)\big) = \theta_p(|x|/2)^2 \qquad (p \text{ は任意}) \tag{5.8}$$

から明らか．(5.6) の二番目の不等式は，まず和の範囲を分けて得られる不等式

$$\chi_p \leq \sum_{x:|x| \leq 2\xi_p} \tau_p(x) + \frac{1}{4\xi_p^2} \sum_{x:|x|>2\xi_p} |x|^2 \tau_p(x) \leq \sum_{x:|x| \leq 2\xi_p} \tau_p(x) + \frac{1}{4}\chi_p \tag{5.9}$$

に (5.8) を代入し，さらに $p < p_c$ についての単調性を使うと，

$$\chi_p \leq \frac{4}{3} \sum_{x:|x| \leq 2\xi_p} \theta_{p_c}(|x|/2)^2 \tag{5.10}$$

となることから，やはり明らか．

一方，2 次元でハイパースケーリング等式を導くために，不等式 (5.8) の向きを反転させたい．そのために，単調増加事象 $A_x(r, R)$（ただし $r < R$）を

$$A_x(r, R) = \big\{\Lambda^2_r(x) \text{ を囲む開サーキットが} \Lambda^2_R(x) \text{ 内に存在 }\big\} \tag{5.11}$$

と定義すると，四つの事象 $o \longleftrightarrow \partial\Lambda^2_{|x|}$，$x \longleftrightarrow \partial\Lambda^2_{|x|}(x)$，$A_o(|x|/2, |x|)$，$A_x(|x|/2, |x|)$ が同時に起これば必ず $o \longleftrightarrow x$ なので，Harris の不等式と並進対称性により，

$$\begin{aligned}\tau_p(x) &\geq \mathbb{P}_p\big(o \longleftrightarrow \partial\Lambda^2_{|x|},\ x \longleftrightarrow \partial\Lambda^2_{|x|}(x),\ A_o(|x|/2, |x|),\ A_x(|x|/2, |x|)\big) \\ &\geq \theta_p(|x|)^2\, \mathbb{P}_p\big(A_o(|x|/2, |x|)\big)^2 \qquad (p \text{ は任意})\end{aligned} \tag{5.12}$$

が得られる．さらに四つの単調増加事象を

$$A_1 = \{\ \text{長方形領域}\ [|x|/2, |x|] \times [-|x|, |x|]\ \text{を縦に横断する開経路が存在}\ \}, \tag{5.13}$$
$$A_2 = \{\ \text{長方形領域}\ [-|x|, |x|] \times [|x|/2, |x|]\ \text{を横に横断する開経路が存在}\ \}, \tag{5.14}$$
$$A_3 = \{\ \text{長方形領域}\ [-|x|, -|x|/2] \times [-|x|, |x|]\ \text{を縦に横断する開経路が存在}\ \}, \tag{5.15}$$
$$A_4 = \{\ \text{長方形領域}\ [-|x|, |x|] \times [-|x|, -|x|/2]\ \text{を横に横断する開経路が存在}\ \} \tag{5.16}$$

と定義すると，$\bigcap_{j=1}^4 A_j \subset A_o(|x|/2, |x|)$ なので，再び Harris の不等式と並進対称性，および $\pi/2$ 回転対称性により，

$$\mathbb{P}_p\big(A_o(|x|/2, |x|)\big) \geq \mathbb{P}_p(A_1)^4 \qquad (p\ \text{は任意}) \tag{5.17}$$

が得られる．ところが，臨界点直上 $p = 1/2$ の場合，正方領域 Λ_n^2 の横断確率 $\mathbb{H}_{1/2}(n)$ は n によらない定数 $\varepsilon \fallingdotseq 1/2$（なぜなら，(2.6) の下で述べたように，$p = 1/2$ のとき，正方形に近い長方形領域 $[0, n] \times [1, n]$ の長辺方向を開経路が横断する確率は常に $1/2$ だから）なので，Russo，Seymour，Welsh による RSW 定理（例えば [10] を参照；異なるサイズの正方領域における横断事象を適当にずらして結合すると，長方形領域における長辺方向の横断事象が成り立つので，その確率は $p = 1/2$ のとき長方形の縦横比だけで決まる正定数で下から押さえられる）を使えば，$|x|$ の大きさによらず $\mathbb{P}_{1/2}(A_1) \geq 2(\varepsilon^5/8)^6 \equiv \tilde{\varepsilon}^{1/8}$ が得られる（[10]）．以上より，

$$\tau_{1/2}(x) \geq \tilde{\varepsilon}\, \theta_{1/2}(|x|)^2 \tag{5.18}$$

となって，ハイパースケーリング等式 $\eta = 2\rho$ が得られる．

上の議論において，(5.8) の逆向き不等式を証明するには，正方領域 Λ_n^2 の横断確率 $\mathbb{H}_p(n)$ が n によらない定数で下から押さえられていればよかった．そのようなことは $p = 1/2$ のときのみ可能なのだが，n に制限を加えることで p に自由度を与えられるだろうか？ 実際それは可能で，任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対し，或る定数 $K, K' \in (0, \infty)$ が存在して，$n \leq K\xi_p$ ならば $\mathbb{H}_p(n) \geq \varepsilon$ かつ $\theta_p(n) \geq K'\theta_{1/2}(n)$ が成り立つ（詳しくは [48] を参照；直観的には，半径 ξ_p 内では未臨界相か臨界点直上か判別できないということ）．したがって，

$$\begin{aligned}\chi_p &\geq \sum_{x:|x|/4 \leq K\xi_p} \tau_p(x) \geq \tilde{\varepsilon} \sum_{x:|x|/4 \leq K\xi_p} \theta_p(|x|)^2 \geq \tilde{\varepsilon} \sum_{x:|x| \leq K\xi_p} \theta_p(|x|)^2 \\ &\geq \tilde{\varepsilon} \sum_{x:|x| \leq K\xi_p} \big(K'\theta_{1/2}(|x|)\big)^2 \geq \tilde{\varepsilon}\, (K\xi_p)^2 \big(K'\theta_{1/2}(K\xi_p)\big)^2 \end{aligned} \tag{5.19}$$

となって，もう一つのハイパースケーリング等式 $\gamma = (2 - 2\rho)\nu$ が得られる． ■

最後に，$3 \leq d \leq 6$ の場合について述べておこう．今のところ数値計算による臨界指数の近似値（[55] やその中の引用文献を参照）が得られているだけで，正確な値は分かっていない．有理数か無理数かも分かっていない．そもそも，ちょっとでも異なる値を臨界指数が取るならば，同じ普遍性クラスに属しているとは言えないはずなのだから，近似値を求めること自体意味がないように思える．にも拘わらず，それら近似値をハイパースケーリング不等式 (5.6) に代入すると，あたかも等式が成り立っているように見えるのだ．2 次元の場合，臨界指数の具体的な値を知らなくとも，不等式 (5.8)–(5.9) を反転できて，ハイパースケーリング等式を証明することができた．$3 \leq d \leq 6$ でも同じように不等式 (5.8)–(5.9) を反転できるのか，何故できるのか，何故 $d > 6$ とした途端にできなくなるのか，そのようなクロスオーバー現象を完全に理解することが今後の最重要課題の一つであろう．

未解決問題 4： $3 \le d \le 6$ の場合でも，ハイパースケーリング等式は成り立つのか？

臨界次元 $d_{\mathrm{c}} = 6$ 直上では，平均場的な振る舞いと非平均場的な振る舞いが混在していて，(5.3) の意味で臨界指数は平均場モデルの値に退化するものの，漸近的には対数補正項がついているものと予想されている．例えば，$f_p \asymp g_p$ と書いたら $0 < \liminf_{p\uparrow p_{\mathrm{c}}} f_p/g_p \le \limsup_{p\uparrow p_{\mathrm{c}}} f_p/g_p < \infty$ を意味するものとすると，

$$\chi_p \asymp \frac{|\log(p_{\mathrm{c}}-p)|^{2/7}}{p_{\mathrm{c}}-p}, \qquad \xi_p \asymp \frac{|\log(p_{\mathrm{c}}-p)|^{5/42}}{\sqrt{p_{\mathrm{c}}-p}} \tag{5.20}$$

と予想されている [58]．これに対して，$d > 6$（の spread-out model）では，$(p_{\mathrm{c}}-p)\chi_p$ や $\sqrt{p_{\mathrm{c}}-p}\,\xi_p$ の $p \uparrow p_{\mathrm{c}}$ 極限が存在してレース展開係数の和や 2 次モーメントによって記述できることが証明されている．φ^4 模型や同様のスピン表現を持つ弱い自己回避歩行（weakly self-avoiding walk）に対しては「繰り込み群の方法」があって，臨界次元 $d_{\mathrm{c}} = 4$ 直上での対数補正項を数学的に厳密に捉えることができている（[5] やその中の引用文献を参照）が，パーコレーションに対するまともなスピン表現は今のところ存在せず，厳密でない繰り込み群からの予想 (5.20) を正当化する手段がない．したがって，これを厳密に証明することは，クロスオーバー現象を完全に理解することの一環として重要だろう．

未解決問題 5： 臨界次元 $d_{\mathrm{c}} = 6$ 直上で (5.20) を証明せよ．

6 平均場臨界現象の十分条件

第 4 節では，臨界点 p_{c} を上手くデザインしたことによって $\chi_{p_{\mathrm{c}}} = \infty$ が得られたが，元来の臨界点 p_{T} での発散を証明することは，それほど自明ではなかった．Aizenman と Newman[3] が最終的に解決したのは 1984 年で，モデルが提案されてから実に 30 年弱もかかっている．彼らがやったことは，χ_p の振る舞いを知るために「叩いた」こと，すなわち微分に対する応答を評価したことである．以下で厳密に述べるが，とりあえず直観的な言い方を許してもらうとすると，単調増大な χ_p の微分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\chi_p \le 2d\chi_p^2 \tag{6.1}$$

という不等式をみたすので，それを $p < p_{\mathrm{T}}$ から $p_{\mathrm{T}} + \varepsilon$ まで積分し，さらに $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を取れば，欲しい式

$$\chi_p \ge \frac{1}{2d}(p_{\mathrm{T}}-p)^{-1} \tag{6.2}$$

（つまり $\chi_{p_{\mathrm{T}}} = \infty$，(4.4) と比較）が得られる，ということを Aizenman と Newman は示したのだ．$p_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{c}}$ は既に定理 4 で示されている．

この論法の利点は，単に臨界点直上で χ_p が発散していることが分かるだけでなく，その発散のスピード，すなわち臨界指数 γ の下からの評価 1（＝平均場モデルの値）も手に入ることだ．さらに，χ_p の微分を (6.1) で上から評価した際に捨ててしまった引き算の項を大きく評価すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\chi_p \ge 2d\big(1-\triangledown_p(e_1)\big)\chi_p^2 \tag{6.3}$$

が得られる（詳細後述）．ここで，e_1 は単位ベクトル $(1,0,\dots,0)\in\mathbb{Z}^d$ であり，$\triangledown_p(x)$ はトライアングル関数

$$\triangledown_p(x)=(\tau_p*\tau_p*\tau_p)(x)\equiv\sum_{y,z\in\mathbb{Z}^d}\tau_p(x-y)\,\tau_p(y-z)\,\tau_p(z) \tag{6.4}$$

である．したがって，もし $\triangledown_{p_{\rm c}}(e_1)<1$ であれば，χ_p の微分は上下から自身の 2 乗で挟まれるので，臨界指数 γ は平均場モデルの値 1 に退化することになる．しかし，実際に $\triangledown_{p_{\rm c}}(e_1)<1$ を要求するのは強過ぎるかも知れない（十分高次元であれば，レース展開によって証明可能）．そこで，トライアングルが一点に潰れないよう「紫外正則化」してやると，

$$\forall\ell\in\mathbb{N},\ \exists c_\ell>0:\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\chi_p\ge c_\ell\Bigg(1-\underbrace{\sum_{y,z\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_\ell^d}\tau_p(e_1-y)\,\tau_p(y-z)\,\tau_p(z)}_{\equiv\,\triangledown_p^{>\ell}(e_1)}\Bigg)\chi_p^2 \tag{6.5}$$

が得られ，$\triangledown_{p_{\rm c}}^{>\ell}(e_1)\underset{\ell\uparrow\infty}{\longrightarrow}0$ ならば $\gamma=1$ となるので，$\triangledown_{p_{\rm c}}(o)<\infty$ で十分だと分かる．（というのも，$\triangledown_{p_{\rm c}}(o)<\infty$ であれば $\tau_{p_{\rm c}}(x)$ は 2 乗可積分であり，L^2 関数として Fourier 変換 $\hat\tau_{p_{\rm c}}(k)$ が存在．並進対称性から $\hat\tau_{p_{\rm c}}(k)\ge0$ であり，$\triangledown_{p_{\rm c}}(e_1)\equiv(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\hat\tau_{p_{\rm c}}(k)^3e^{ik_1}\mathrm{d}^dk\le\triangledown_{p_{\rm c}}(o)$ となるから.）

このように，Aizenman と Newman の論法は，平均場臨界現象に退化するための十分条件（トライアングル条件 $\triangledown_{p_{\rm c}}(o)<\infty$）を自然に教えてくれる．同様の考え方は，この論文のあとに登場した Aizenman & Barsky[1] や Barsky & Aizenman[4] でも踏襲され，原点の開クラスター濃度に対する母関数 $M_{p,h}$ が従う微分不等式が導出された．これらを用いて，臨界点の一意性や臨界指数の（平均場モデルの値による）片側不等式，その片側不等式がトライアングル条件下で等式になること等が証明されたのである．

さて，Aizenman と Newman の結果を厳密に述べるために，Λ_n^d の境界上の二点 x,y で $\|x-y\|_1=\|x-y\|_\infty=2n$（すなわち，或る一つの成分だけが異なる値を取り，一方は n，もう一方は $-n$ だということ）をみたすものを同一視した d 次元トーラスを考え，その上のパーコレーションの確率測度を $\tilde{\mathbb{P}}_p$ と表す．以下で導出するのは，

$$\tilde\chi_{p,n}=\sum_{x\in\Lambda_n^d}\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(o\longleftrightarrow x) \tag{6.6}$$

に対する微分不等式である．両端点が Λ_n^d に含まれるボンド以外を全開または全閉としたパーコレーションと比べることで，少なくとも $p\ne p_{\rm c}$ で $\lim_{n\uparrow\infty}\tilde\chi_{p,n}=\chi_p$ が成り立つことが分かる．

定理 7 (Aizenman & Newman[3])**.** 任意の $p\in(0,1)$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$2d\big(1-\triangledown_{p_{\rm c}}(e_1)\big)\tilde\chi_{p,n}^2\le\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde\chi_{p,n}\le2d\tilde\chi_{p,n}^2 \tag{6.7}$$

が成り立つ．また，任意の $\ell<n$ に対して或る $c_\ell>0$（n によらない）が存在し，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde\chi_{p,n}\ge c_\ell\big(1-\triangledown_{p_{\rm c}}^{>\ell}(e_1)\big)\tilde\chi_{p,n}^2. \tag{6.8}$$

したがって，臨界指数 γ は（もし存在すれば）常に ≥1 であり，$\triangledown_{p_{\rm c}}(o)<\infty$ ならば（γ は存在して）$\gamma=1$ となる．

証明の概略．　まず，(6.7)，(6.8) を認めて，定理の最後で述べていることを証明しよう．(6.7) の後半の不等式を $p<p_{\rm c}$ から $p_{\rm c}+\varepsilon$ まで積分すると $\tilde{\chi}_{p,n}^{-1}-\tilde{\chi}_{p_{\rm c}+\varepsilon,n}^{-1}\le 2d(p_{\rm c}+\varepsilon-p)$ となるので，$n\uparrow\infty$，$\varepsilon\downarrow 0$ の順に極限を取って (6.2) を得る．特に $\chi_{p_{\rm c}}=\infty$．他方，$\triangledown_{p_{\rm c}}^{>\ell}(e_1)<1$ となるくらい ℓ を十分大きく取り，それより大きい n を想定して (6.8) を $p<p_{\rm c}$ から $p_{\rm c}-\varepsilon$ まで積分すると $\tilde{\chi}_{p,n}^{-1}-\tilde{\chi}_{p_{\rm c}-\varepsilon,n}^{-1}\ge c_\ell(1-\triangledown_{p_{\rm c}}^{>\ell}(e_1))(p_{\rm c}-\varepsilon-p)$ となる．あとは同じように $n\uparrow\infty$，$\varepsilon\downarrow 0$ の順に極限を取れば，$\gamma=1$ が得られる．

残るは，(6.7)，(6.8) の導出のみ．次節で紹介するレース展開の導出にも絡むところなので，少し詳しく述べたい．まず，$(\mathbb{Z}^d,\mathbb{B}^d)$ 全体で定義された χ_p と違い，$\tilde{\chi}_{p,n}$ は有限個のボンドだけで決まる多項式なので，Margulis-Russo の公式 (4.11) が使えて，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde{\chi}_{p,n}=\sum_{x\in\Lambda_n^d}\sum_{\{u,v\}\subset\Lambda_n^d}\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(\{u,v\}\in\mathtt{piv}\{o\longleftrightarrow x\}\Big). \tag{6.9}$$

ここで，ボンド b を使わずに x から開経路で繋がる点の集合 $\tilde{\mathcal{C}}_x^b$ を

$$\tilde{\mathcal{C}}_x^b(\omega)=\big\{y\in\mathbb{Z}^d:x\underset{\delta_b^0\omega}{\longleftrightarrow}y\big\} \tag{6.10}$$

と定義（$\mathcal{C}_x$ の定義 (2.1) と比較；δ_b^s の定義 (4.10) も思い出そう）すると，上の等式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde{\chi}_{p,n}=\sum_{x,u,v\in\Lambda_n^d}\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(o\xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}}u,\ v\xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}}x\Big) \tag{6.11}$$

と書ける．少なくとも一方の端点が $\tilde{\mathcal{C}}_x^b$ に含まれるボンドたちだけで決まる事象の σ 加法族を $\mathscr{F}_{\tilde{\mathcal{C}}_x^b}$ とすると，最初の事象は $\mathscr{F}_{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}}$ 可測，二番目の事象は $\mathscr{F}_{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}}$ と独立なので，期待値のタワー性から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde{\chi}_{p,n}=\sum_{x,u,v\in\Lambda_n^d}\tilde{\mathbb{E}}_{p,n}\bigg[\mathbb{1}_{\{o\longleftrightarrow u\}}\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(v\xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}}x\Big)\bigg]. \tag{6.12}$$

$\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}$ は外側の $\tilde{\mathbb{E}}_{p,n}$ に対してはランダムだが，内側の $\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}$ に対しては定数であることに注意．ここで，$\{o\xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}}u\}$ が $\{o\longleftrightarrow u\}$ に変わった理由は，その差事象 $\{o\longleftrightarrow u\}\setminus\{o\xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}}u\}$（つまり，$o$ と u が繋がるためには必ず $\{u,v\}$ を通らなければいけない，ということ）の下では $v\in\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}$ であり，したがって $\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\big(v\xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}}x\big)=0$ となってしまうからである．排除体積効果を表す「$\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}$ 上で」という条件を忘れ，さらに並進対称性（周期的境界条件を課したから）を使うと，(6.7) の上からの不等式が得られる．

他方，(6.7) の下からの不等式を導出するためには，上からの不等式と (6.12) の差をあらわに書いた

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde{\chi}_{p,n}=2d\tilde{\chi}_{p,n}^2-\sum_{x,u,v\in\Lambda_n^d}\tilde{\mathbb{E}}_{p,n}\bigg[\mathbb{1}_{\{o\longleftrightarrow u\}}\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(v\xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{を通過して}}x\Big)\bigg] \tag{6.13}$$

を使う．$v\xleftrightarrow{C\text{ を通過して}}x$ は，$v=x\in C$ か，$v\ne x$ の二点を結ぶ全ての開経路が C の元を端点に持つボンドを少なくとも一本含むことを意味し，したがって $\bigcup_{z\in C}\{v\longleftrightarrow z\}\circ\{z\longleftrightarrow x\}$ の部分集合である．記号 $A\circ B$ は，Λ_n^d 内のボンドたちの状態だけで決まる事象 A,B が「ボンドを共有しないで」同時に起こること，すなわち

$$A\circ B=\big\{\omega\in A\cap B:(\omega_J,\,\cdot\,)\in A,\ (\,\cdot\,,\omega_{J^c})\in B\text{ をみたす }\Lambda_n^d\text{ 内のボンド集合 }J\text{ が存在 }\big\} \tag{6.14}$$

を意味する．ω_J は ω の J への制限．A,B が共に単調増加なとき，次の BK 不等式が成り立つ．

定理 8 (Van den Berg & Kesten[8])**.** 単調増加な有限シリンダー A, B に対し，

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \le \mathbb{P}_p(A)\,\mathbb{P}_p(B). \tag{6.15}$$

この不等式は，単調増加事象 A, B が「非協力的に」起こる確率は，それぞれ独立に起こる確率よりも小さいということを示している．直感的にも尤もらしい不等式だが，そもそも非協力的に起こるのであれば，単調性などなくてもよいのではないか？と思うかも知れない．実際にその通りで，のちに登場した Reimer[57] による一般化では，A, B に対する単調性の仮定は外された．

BK 不等式の証明は後回しにし，先に定理 7 の証明を完結しよう．上で述べた考察と Boole の不等式，BK 不等式を順に使うと，

$$\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(v \xleftrightarrow{\mathcal{C}\text{ を通過して}} x\Big) \le \sum_{z \in \mathcal{C}} \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(v \longleftrightarrow z)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(z \longleftrightarrow x) \tag{6.16}$$

が得られる．したがって，(6.13) の右辺第二項は上から

$$\sum_{x,u,v,z \in \Lambda_n^d} \tilde{\mathbb{E}}_{p,n}\big[\mathbb{1}_{\{o \longleftrightarrow u\} \cap \{o \longleftrightarrow z\}}\big]\,\mathbb{P}_{p,n}(v \longleftrightarrow z)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(z \longleftrightarrow x) \tag{6.17}$$

で押さえられる．さらに，$\{o \longleftrightarrow u\} \cap \{o \longleftrightarrow z\}$ ならば $\{o \longleftrightarrow y\} \circ \{y \longleftrightarrow u\} \circ \{y \longleftrightarrow z\}$ をみたす分岐点 $y \in \Lambda_n^d$ が少なくとも一つは存在するので，再び Boole の不等式と BK 不等式を使い，最後に並進対称性と $\pi/2$ 回転対称性を用いると，欲しかった (6.7) の下からの不等式が得られる．

紫外正則化による不等式 (6.8) の出発点は (6.11) である．これを下から押さえるため，次の三つの事象を考えよう．(有向パーコレーションの場合，その時間異方性のおかげで，もっと簡単な事象で紫外正則化できる．これは，有向パーコレーションでは $\theta_{p_c} = 0$ が証明されている（[27]）のに，普通のパーコレーションでは未解決であることと関係しているのだが，本論説では深入りしない.)

$$E_1 = \Big\{o \longleftrightarrow u,\ v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ 上で}} x\Big\} \equiv \Big\{o \xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ 上で}} u,\ v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ 上で}} x\Big\}, \tag{6.18}$$

$$E_2 = \Big\{o \longleftrightarrow u,\ v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^{V}\text{ 上で}} x\Big\}, \tag{6.19}$$

$$F = \Big\{\tilde{\mathcal{C}}_o^V \cap \partial V \ne \varnothing,\ \tilde{\mathcal{C}}_x^V \cap \partial V \ne \varnothing,\ \tilde{\mathcal{C}}_o^V \cap \tilde{\mathcal{C}}_x^V = \varnothing\Big\}, \tag{6.20}$$

ただし，$V = \Lambda_\ell^d(v)$ と略記し，$\tilde{\mathcal{C}}_o^V$ を両端点が V に含まれるボンドたちを使わずに o から開経路で繋がる点の集合とした．明らかに $E_1 \subset E_2 \subset F$ なので，

$$\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(E_1) = \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(E_1|F)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(F) \ge \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(E_1|F)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(E_2) \tag{6.21}$$

が成り立つ．あとは V 内をスカスカに繋ぐつもりで，$\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(E_1|F) \ge (p \wedge (1-p))^m \equiv c_\ell/(2d)$（$m$ は V 内に両端点を持つボンドの総数）と押さえればよい．以上より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\tilde{\chi}_{p,n} \ge \frac{c_\ell}{2d} \sum_{x,u,v \in \Lambda_n^d} \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(o \longleftrightarrow u,\ v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} x\Big). \tag{6.22}$$

ところが，$\{o \longleftrightarrow u\} = \{\tilde{\mathcal{C}}_o^V \cap \partial V \ne \varnothing\} \cap \{\tilde{\mathcal{C}}_o^V \cap \partial V \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} u\}$ であり，$\{v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} x\}$ も $\{\tilde{\mathcal{C}}_o^V \cap \partial V \xleftrightarrow{\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} u\}$ も $\Lambda_n^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^V$ 上の単調増加事象なので，期待値のタワー性と Harris の不等

式により，(6.22) 右辺の $\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(\cdots)$ は

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}_{p,n}\Big[\mathbb{1}_{\{\tilde{\mathcal{C}}_o^V\cap\partial V\neq\varnothing\}}\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(\tilde{\mathcal{C}}_o^V\cap\partial V \xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} u,\ v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} x\Big)\Big]\\
&\geq \tilde{\mathbb{E}}_{p,n}\Big[\mathbb{1}_{\{\tilde{\mathcal{C}}_o^V\cap\partial V\neq\varnothing\}}\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(\tilde{\mathcal{C}}_o^V\cap\partial V \xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} u\Big)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} x\Big)\Big]\\
&= \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(o\longleftrightarrow u)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(v\longleftrightarrow x)\\
&\quad - \tilde{\mathbb{E}}_{p,n}\Big[\mathbb{1}_{\{\tilde{\mathcal{C}}_o^V\cap\partial V\neq\varnothing\}}\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(\tilde{\mathcal{C}}_o^V\cap\partial V \xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ 上で}} u\Big)\,\tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(v \xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^V\text{ を通過して}} x\Big)\Big] \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

で下から押さえられる．あとは (6.16)–(6.17) 周辺の議論を踏襲（ただし，y,z の範囲は $\Lambda_n^d\setminus V$ に制限）すれば，欲しかった式 (6.8) が手に入る．■

定理 8 の証明の概略．　Harris の不等式（定理 2）の証明で登場した記号を使おう．すなわち，ボンド集合を $[n]\equiv\{1,\dots,n\}$，その上のシリンダーの族を $\mathscr{F}_{[n]}$，その上の直積測度を $\mathbb{P}_{[n]}$ と書く．

$n=1$ の場合は明らか（少なくとも一方が全事象であるような自明な場合を除けば，$A\circ B$ は常に空事象だから）．仮に $n-1\in\mathbb{N}$ まで (6.15) が正しいとして，$A,B\in\mathscr{F}_{[n]}$ に対して (6.15) を示したい．$C=A\circ B$ とおくと，単調性から $C^0=A^0\circ B^0\subset(A^1\circ B^0)\cap(A^0\circ B^1)$，$C^1=(A^1\circ B^0)\cup(A^0\circ B^1)\subset A^1\circ B^1$ となるので，帰納法の仮説（使うところに ★ 印）により，

$$c_0=\mathbb{P}_{[n-1]}(A^0\circ B^0)\overset{\bigstar}{\leq} a_0b_0, \qquad (6.24)$$

$$\begin{aligned}
c_1&\leq \mathbb{P}_{[n-1]}(A^1\circ B^1)\overset{\bigstar}{\leq} a_1b_1, &(6.25)\\
c_0+c_1&\leq \mathbb{P}_{[n-1]}\big((A^1\circ B^0)\cap(A^0\circ B^1)\big)+\mathbb{P}_{[n-1]}\big((A^1\circ B^0)\cup(A^0\circ B^1)\big)\\
&=\mathbb{P}_{[n-1]}(A^1\circ B^0)+\mathbb{P}_{[n-1]}(A^0\circ B^1)\\
&\overset{\bigstar}{\leq} a_1b_0+a_0b_1. &(6.26)
\end{aligned}$$

あとは上の三式に，それぞれ $(1-p)^2$，p^2，$p(1-p)$ を掛けて足し算すると，

$$\mathbb{P}_{[n]}(C)=c_0(1-p)+c_1p\leq\big(a_0(1-p)+a_1p\big)\big(b_0(1-p)+b_1p\big)=\mathbb{P}_{[n]}(A)\,\mathbb{P}_{[n]}(B) \qquad (6.27)$$

となる．■

7　レース展開による高次元臨界現象の解析

最後に，高次元臨界現象が平均場的なものに退化することの証明を概観して，この論説を閉じよう．その証明とは，前節までに何度も名前だけは登場していたレース展開（lace expansion）によるものである．或るクラスのスピン系では「鏡映正値性」を用いた方法や厳密な繰り込み群による方法など複数の証明が存在するが，パーコレーションでは今のところレース展開を用いた方法だけである．

レース展開とは，1985 年に Brydges と Spencer が発表した手法で，高分子鎖の統計力学モデルである自己回避歩行（self-avoiding walk）のクラスター展開を上手く総和し直し，臨界点ギリギリまで解析するために考案されたものである.「レース」の由来は，その総和の取り直しをするときに現れるグラフの形状がレース模様に似ていることから来ている．その後，レース展開（の考え方）は，パーコレーションを含む様々な確率幾何モデル・統計力学モデルに拡張されていった．それらを登場した年代順に列挙すると，

- 1985 年：自己回避歩行（Brydges & Spencer[13]），
- 1990 年：格子樹・格子動物（Hara & Slade[33]），
- 1990 年：パーコレーション（Hara & Slade[34]），
- 1993 年：有向パーコレーション（Nguyen & Yang[54]），
- 2001 年：コンタクトプロセス（Sakai[60]），
- 2007 年：イジング模型（Sakai[61]，正しいダイアグラム評価は [63]），
- 2015 年：格子 φ^4 模型（Sakai[62]），
- 2019 年：格子 Edwards 模型と n 成分 $|\varphi|^4$ 模型（Brydges, Helmuth & Holmes[12]），
- 2019 年：ランダム接続模型（Heydenreich, van der Hofstad, Last & Matzke[39]），

となっている．一般に，これらの 2 点関数（パーコレーションでは $\tau_p(x)$，イジング模型や φ^4 模型では原点 o と x にいるスピン変数の積の熱力学的期待値）は，モデル特有の相互作用のせいで，各ステップが独立で同分布 $D(x) \equiv \frac{1}{2d}\mathbb{1}_{\{\|x\|_1=1\}}$ に従う単純ランダムウォークのグリーン関数 $S_q \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^n D^{*n}$（$D^{*n} \equiv D * D^{*(n-1)}$ は D の n 重畳み込み，$q \in [0,1]$ は逃散能）のようには振る舞わない．例えば，グリーン関数は再生方程式

$$S_q = \delta + qD * S_q \tag{7.1}$$

をみたすので，これを $q \in (0,1)$ で微分した式を繰り返し用いれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} S_q = D * S_q + qD * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} S_q = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (qD)^{*n} * D * S_q = D * S_q^{*2} \tag{7.2}$$

のように書ける．これに対し，例えばパーコレーションの場合，(6.11) を思い出すと，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}(o \longleftrightarrow x) = \sum_{u,v\in\Lambda_n^d} \tilde{\mathbb{P}}_{p,n}\Big(o \xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}} u,\ v \xleftrightarrow{\Lambda_n^d\setminus\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{上で}} x\Big) \tag{7.3}$$

のような互いを避けあう排除体積効果が効いていて，グリーン関数のように綺麗な積には分解できない．この排除体積効果を無視したものが平均場近似（(6.13) の右辺第 1 項）であり，したがって平均場モデルはランダムウォークということになる．この近似があまりにも悪いので，本来引かなければいけなかった項を無視せず，むしろ大きめに評価したものが (6.13) の右辺第 2 項なのであった．それでは，この手順（足し過ぎたら引いてやり，引き過ぎたら足してやる）を繰り返したとして，毎回出てくる補正項がどんどん小さくなっていくとしたら，2 点関数の微分に対する平均場モデルからの良い摂動展開が得られるのではないか？と期待するのは自然である．レース展開は，このアイデアを厳密にしたものなのである．

$(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$ 上のパーコレーションに対するレース展開の結果は，次の通りである．

定理 9 (Hara & Slade[34]; Hara[31])**.** 各 $n \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $\mathbb{Z}^d$ 上の非負値関数（レース展開係数）$\pi_p^{(n)}$ が存在し，$\Pi_p^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \pi_p^{(j)}$ と表すと，

$$\tau_p = \Pi_p^{(n)} + \Pi_p^{(n)} * 2dpD * \tau_p + (-1)^{n+1} R_p^{(n+1)}, \qquad 0 \le R_p^{(n+1)} \le \pi_p^{(n)} * 2dpD * \tau_p \tag{7.4}$$

が成り立つ．特に $d \gg 6$ のとき，$p \le p_c$ で $\pi_p^{(n)}$ は n について（多項式程度の補正を許して）指数関数的に減衰，極限 $\Pi_p \equiv \lim_{n\uparrow\infty} \Pi_p^{(n)}$ は $|x| \uparrow \infty$ について $|\Pi_p(x)| = O(|x|^{2(2-d)})$ で押さえられ，$|\hat{\Pi}_p(0) - 1| = O(d^{-1})$，$|\nabla^2\hat{\Pi}_p(0)| = O(d^{-1})$ が成り立つ．その結果，

$$2dp_c = \frac{1}{\hat{\Pi}_{p_c}(0)}, \qquad \sigma_p^2 = 2dp\left(1 + \frac{-\nabla^2\hat{\Pi}_p(0)}{\hat{\Pi}_p(0)}\right) \tag{7.5}$$

とおくと，次の意味で $\gamma = 1$，$\nu = 1/2$，$\eta = 0$ が成り立つ：

$$\chi_p \underset{p\uparrow p_c}{\asymp} \frac{1}{2d}(p_c - p)^{-1}, \qquad \xi_p^2 \underset{p\uparrow p_c}{\asymp} \sigma_p^2\chi_p, \qquad \tau_{p_c}(x) \underset{|x|\uparrow\infty}{\sim} \frac{\frac{d}{2}\Gamma(\frac{d-2}{2})}{\pi^{d/2}\sigma_{p_c}^2}|x|^{2-d}. \tag{7.6}$$

しかも，記号 $\asymp$ に隠れた振幅は $1 + O(d^{-1})$．

ここで注目すべきは，2 点関数に対する再生方程式 (7.4) である．もし定理が主張するように極限 Π_p が存在するなら，グリーン関数の再生方程式 (7.1) とよく似た

$$\tau_p = \Pi_p + \Pi_p * 2dpD * \tau_p \tag{7.7}$$

が得られることになる．これを $p < p_c$ で繰り返し用いれば，

$$\tau_p = \Pi_p * \sum_{n=0}^{\infty}(2dpD * \Pi_p)^{*n} = \Pi_p * \sum_{n=0}^{\infty}\left(2dp\hat{\Pi}_p(0)\right)^n\left(\frac{D * \Pi_p}{\hat{\Pi}_p(0)}\right)^{*n} \tag{7.8}$$

となる．$\hat{\Pi}_p(0)$ は Π_p の Fourier 変換 $\hat{\Pi}_p(k) \equiv \sum_x e^{ik\cdot x}\Pi_p(x)$ の $k = 0$ モード，すなわち Π_p の総和のことである．最右辺の和は形式的に，逃散能 $2dp\hat{\Pi}_p(0)$,「推移確率」$D * \Pi_p/\hat{\Pi}_p(0)$（総和は 1 だが，高次元でも負になったりするので,「確率」とは呼べない代物；ただし，$0 < \alpha \le 2$，$L \gg 1$ とした長距離分布 $D(x) \propto (|x| \vee L)^{-d-\alpha}$ で定義されたモデルならば，$D * \Pi_p/\hat{\Pi}_p(0)$ の正値性が保証され，推移確率として扱える [17]）のグリーン関数と見做すことができる．逃散能が 1 となるところが臨界点であり，したがって (7.5) の最初の式が得られる．また，$D * \Pi_{p_c}/\hat{\Pi}_{p_c}(0)$ を「推移確率」とするグリーン関数の $|x| \uparrow \infty$ における漸近的振る舞いが，よく知られた $S_1(x) \sim \frac{d}{2}\Gamma(\frac{d-2}{2})\pi^{-d/2}|x|^{2-d}$ を分散

$$\sum_x |x|^2\frac{D * \Pi_{p_c}(x)}{\hat{\Pi}_{p_c}(0)} = \sum_{y,z}|y + z|^2 D(y)\frac{\Pi_{p_c}(z)}{\hat{\Pi}_{p_c}(0)} = 1 + \frac{-\nabla^2\hat{\Pi}_{p_c}(0)}{\hat{\Pi}_{p_c}(0)} \equiv \frac{\sigma_{p_c}^2}{2dp_c} \tag{7.9}$$

（クロスタームは対称性により消滅）でスケールしたものに等しいので，残る (7.8) 最右辺の先頭にある「$\Pi_{p_c}*$」を「$\hat{\Pi}_{p_c}(0)\times$」で近似（それができるのは，$|x|^2|\Pi_{p_c}(x)| = O(|x|^{6-2d})$ が $d > 6$ で総和可能だから）すれば，(7.6) の最後の式が得られる．これはトライアングル条件 $\triangledown_{p_c}(o) < \infty$ が成り立つことを暗示（ランダムウォークの閉じたトライアングル $(S_1 * S_1 * S_1)(o)$ は $d > 6$ で収束するから）しているので，(7.6) の最初の式も得られる．(7.6) の二番目の式を得るためには，まず (7.7) を Fourier 変換し，

$$\chi_p = \hat{\tau}_p(0) = \hat{\Pi}_p(0) + \hat{\Pi}_p(0)2dp\,\hat{\tau}_p(0) = \frac{\hat{\Pi}_p(0)}{1 - 2dp\hat{\Pi}_p(0)} \tag{7.10}$$

であることと，$\nabla^2\hat{\tau}_p(0) = -\sum_x |x|^2\tau_p(x) = -\xi_p^2\chi_p$，$\nabla^2\hat{D}(0) = -1$ を用いればよい．すると，

$$\begin{aligned}\nabla^2\hat{\tau}_p(0) &= \nabla^2\hat{\Pi}_p(0) + \nabla^2\hat{\Pi}_p(0)2dp\chi_p - \hat{\Pi}_p(0)2dp\chi_p + \hat{\Pi}_p(0)2dp\nabla^2\hat{\tau}_p(0)\\ &= \frac{\nabla^2\hat{\Pi}_p(0) + \nabla^2\hat{\Pi}_p(0)2dp\chi_p - \hat{\Pi}_p(0)2dp\chi_p}{1 - 2dp\hat{\Pi}_p(0)} = -\left(\sigma_p^2\chi_p + \frac{\nabla^2\hat{\Pi}_p(0)}{\hat{\Pi}_p(0)}\right)\chi_p\end{aligned} \tag{7.11}$$

となって，欲しかった関係式が得られるわけである．

以上のことから分かるように，レース展開の方法は「all or nothing」である．つまり，再生方程式 (7.4) が手に入り，さらにレース展開係数 $\pi_p^{(n)}(x)$ の $|x|\uparrow\infty$ や $n\uparrow\infty$ における「適切な」挙動が $p<p_{\rm c}$ 一様に評価できれば，高次元で綺麗な（というより，むしろ「単純な」）描像が全て手に入る．しかし，そのうちのどれか一つでも達成できないと絵に描いた餅になってしまう．当たり前のことだが，再生方程式 (7.4) の「形」を真似ること自体は難しいことではない．単に 1 を $2-1$ と書くか，それとも $100-200+101$ と書くか，というだけの話である．一番大事なことは，全ての $p\le p_{\rm c}$ でコントロール可能な「適切な」展開係数を使って，再生方程式 (7.4) を導出できるか？ということなのである．この部分が一番難しく，しかも考えている問題に強く依存する．先に列挙したのは，この部分を解決できたモデルたちだったのである．

ところで，上の定理では $d\gg6$ が要求されているが，これは $\{\pi_p^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ の交代級数が絶対収束することを保証するために仮定されたものである．第 5 節で登場した spread-out model（辺集合が (5.2) の $\mathbb{B}_L^d$ で与えられたグラフ上のパーコレーション）の場合，定理 9 の主張は全ての $d>6$ で成り立つ（d に依存して L を十分大きく取らねばならない）が，この論説で考察している $(\mathbb{Z}^d,\mathbb{B}^d)$ 上のパーコレーションの場合，Fitzner と van der Hofstad による $d\ge11$ が 2020 年 5 月現在の最良の評価である（[21, 22]）．このことは，レース展開の手法が臨界次元ギリギリまで上手く行った，自己回避歩行の事情 [35, 36] とは大きく異なる．Fitzner と van der Hofstad は，スタンダードなランダムウォークからの摂動ではなく，1 歩前に居たところを訪れないランダムウォーク（non-backtracking random walk）からの摂動を解析するためのレース展開（NoBLE）をデザインし，トライアングル関数だけでなく「ペンタゴン関数」まで導入して，レース展開の収束性を証明したのである．彼らの 2 編の論文を読めば分かるが，ここまで頑張ったのに一桁の次元にすら到達できないことに，愕然とするだろう．(それに対し，(5.1) で定義した d 次元体心立方格子上では，最近接点の数が $2d$ ではなく 2^d とかなり大きいので，比較的簡単に $d\ge9$ でレース展開の絶対収束性を証明できる [30]．この結果を $d\ge7$ まで拡大できれば,「正統な」最近接モデルで臨界次元が 6 であることを証明した初めてのケースになれるのだが…．）我が師が Aizenman に初めてレース展開の結果を紹介したときに「right results, wrong method」と指摘されたらしいが，それはレース展開が絶対収束するようにトライアングル関数を一所懸命小さくしようとしているからであろう．定理 7 を思い出すと，平均場的な振る舞いの十分条件は臨界トライアングル関数の収束であって，それが小さいことを要求しているのではなかったはず．このことに着目して，レース展開の収束証明に，前節で議論した紫外正則化のアイデアを融合させられれば，全ての $d>6$ で平均場臨界現象へ退化することを完全に解決できるかも知れない．興味のある方，腕力に自信のある方，ぜひ一緒にチャレンジしていただきたい．

定理 9 の証明の概略． この論説では，再生方程式 (7.4) の導出（ただし $n=0,1$）と，$p<p_{\rm c}$ 一様に $|\Pi_p(x)|=O(|x|^{2(2-d)})$ であることだけを概説する．詳細は原著などを参照．

まず (7.4) であるが，このような構造を抜き出すために，ピボタルボンドの集合 $\mathtt{piv}\{o\longleftrightarrow x\}$ に着目したい．(これに着目することがマトモなのは，二点間の繋がりが或る程度スカスカな状態であろうから，当然 $p<p_{\rm c}$ の相はよしとして，臨界点直上でも 2 点関数がランダムウォークのグリーン関数で近似できるはずの高次元でも上手くいくだろうと予想できる．一方，低次元の臨界パーコレーションでは，或る特定のボンドが二点間を繋ぐためのピボタルボンドである確率はゼロだろうから，その集合に着目するのは筋が悪い．）目標となる再生方程式 (7.1) は，ランダムウォークの最初の一歩で場合分けすることにより得られていた．同じように，原点側から見て最初のピボタルボンドで場合分けしてみよう．一本もピボタルボンドがないのに繋がっている事象（ボンドを共有しない開経路が少なくとも二本以上存在する事象）を $\{o\Longleftrightarrow x\}$ と表し，その確率

を $\pi_p^{(0)}(x)$ と表すと，

$$\tau_p(x) = \pi_p^{(0)}(x) + \sum_{u,v} \mathbb{P}_p\Big(\{o \Longleftrightarrow u\} \cap \big\{\{u,v\}\text{ は開 }\big\} \cap \big\{\{u,v\} \in \texttt{piv}\{o \longleftrightarrow x\}\big\}\Big) \tag{7.12}$$

のように分解できる．ここで (6.9) から (6.12) を導出したときと同様，まずは $\mathscr{F}_{\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}}$ 可測の部分とそれとは独立な部分に分離し，続いて期待値のタワー性を用いれば，上の式は

$$\tau_p(x) = \pi_p^{(0)}(x) + \sum_{u,v} 2dpD(v-u)\,\mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{\{o \Longleftrightarrow u\}}\,\mathbb{P}_b\Big(v \xleftrightarrow{\ \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ 上で}\ } x\Big)\Big] \tag{7.13}$$

のように書き直すことができる．再び強調しておくが，$\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}$ は外側の期待値に対してはランダムだが，内側の確率の中では定数である．期待値の中の確率 $\mathbb{P}_b\big(v \xleftrightarrow{\ \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ 上で}\ } x\big)$ に課せられた排除体積効果を忘れて $\tau_p(x-v)$ で置き換えたいのだが，そうすると，お釣り項として「v と x を繋ぐ開経路は必ず $\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}$ を通過する」確率が出てくる．すなわち，

$$\mathbb{P}_b\Big(v \xleftrightarrow{\ \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ 上で}\ } x\Big) = \tau_p(x-v) - \mathbb{P}_b\Big(v \xleftrightarrow{\ \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ を通過して}\ } x\Big). \tag{7.14}$$

これを (7.13) に代入すれば，$n=0$ のときの (7.4) が得られる．ただし，剰余項 $R_p^{(1)}(x)$ は

$$R_p^{(1)}(x) = \sum_{u,v} 2dpD(v-u)\,\mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{\{o \Longleftrightarrow u\}}\,\mathbb{P}_b\Big(v \xleftrightarrow{\ \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\text{ を通過して}\ } x\Big)\Big] \tag{7.15}$$

であり，明らかに $0 \le R_p^{(1)}(x) \le (\pi_p^{(0)} * 2dpD * \tau_p)(x)$ も成立している．

続いて $n=1$ のときの (7.4) を得るために，$\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}} = A \subset \mathbb{Z}^d$ を固定して，剰余項 $R_p^{(1)}(x)$ の定義式に入っている $\mathbb{P}_b\big(v \xleftrightarrow{\ A\text{ を通過して}\ } x\big)$ から再生方程式 (7.1) のような構造を抜き出したい．そこで，ピボタルボンド $(y,z) \in \texttt{piv}\{v \longleftrightarrow x\}$（無向ペア $\{y,z\}$ でなく有向ペア (y,z) を使って，y が v 側の端点であることを強調しているつもり）の中で $v \xleftrightarrow{\ A\text{ を通過して}\ } y$ をみたす最初のボンドで場合分けしてみよう．そのようなピボタルボンドがない事象を $E(v,x;A)$ と略記すると，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_p\Big(v \xleftrightarrow{\ A\text{ を通過して}\ } x\Big) - \mathbb{P}_p\big(E(v,x;A)\big)\\
&= \sum_{y,z} \mathbb{P}_p\Big(E(v,y;A) \cap \big\{\{y,z\}\text{ は開 }\big\} \cap \big\{\{y,z\} \in \texttt{piv}\{v \longleftrightarrow x\}\big\}\Big)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

のように分解できる．$\mathbb{P}_p(E(v,x;A))$ から $R_p^{(1)}(x)$ への寄与を $\pi_p^{(1)}(x)$ と表そう：

$$\pi_p^{(1)}(x) = \sum_{u,v} 2dpD(v-u)\,\mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{\{o \Longleftrightarrow u\}}\,\mathbb{P}_p\Big(E\big(v,x;\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\big)\Big)\Big]. \tag{7.17}$$

(7.16) 右辺の各項は，(7.12) から (7.13) を導出したときと同じように期待値のタワー性を使い，さらに (7.14) を使えば，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_p\Big(E(v,y;A) \cap \big\{\{y,z\}\text{ は開 }\big\} \cap \big\{\{y,z\} \in \texttt{piv}\{v \longleftrightarrow x\}\big\}\Big)\\
&= 2dpD(z-y)\,\mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{E(v,y;A)}\,\mathbb{P}_b\Big(z \xleftrightarrow{\ \mathbb{Z}^d \setminus \tilde{\mathcal{C}}_v^{\{y,z\}}\text{ 上で}\ } x\Big)\Big]\\
&= 2dpD(z-y)\bigg(\mathbb{P}_p\big(E(v,y;A)\big)\,\tau_p(x-z) - \mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{E(v,y;A)}\,\mathbb{P}_b\Big(z \xleftrightarrow{\ \tilde{\mathcal{C}}_v^{\{y,z\}}\text{ を通過して}\ } x\Big)\Big]\bigg)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

のように書き直すことができる．これを $R_p^{(1)}(x)$ の式に戻してやれば，$R_p^{(1)}(x) = \pi_p^{(1)}(x) + (\pi_p^{(1)} * 2dpD * \tau_p)(x) - R_p^{(2)}(x)$ となって，$n=1$ のときの (7.4) が得られる．ただし，剰余項 $R_p^{(2)}(x)$ は

$$R_p^{(2)}(x) = \sum_{u,v,y,z} 2dpD(v-u)\, 2dpD(z-y) \\ \times \mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{\{o \Longleftrightarrow u\}}\, \mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{E(v,x;\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}})}\, \mathbb{P}_p\Big(z \xleftrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}_v^{\{y,z\}}\text{を通過して}} x\Big)\Big]\Big] \tag{7.19}$$

であり，明らかに $0 \le R_p^{(2)}(x) \le (\pi_p^{(1)} * 2dpD * \tau_p)(x)$ も成立している．再び「…を通過して」という事象が登場したので，上の議論を繰り返せば，高次の剰余項についても同じ関係式

$$R_p^{(n)}(x) = \pi_p^{(n)}(x) + (\pi_p^{(n)} * 2dpD * \tau_p)(x) - R_p^{(n+1)}(x) \tag{7.20}$$

が得られることになる．詳しくは [34] を参照.

さて，肝心の「$p < p_{\mathrm{c}}$ 一様に $|\Pi_p(x)| = O(|x|^{2(2-d)})$」の証明であるが，これには BK 不等式が大きな役割を果たす．例えば，事象 $\{o \Longleftrightarrow x\}$ を $\{o \longleftrightarrow x\} \circ \{o \longleftrightarrow x\}$ と解釈すると，BK 不等式によって $\pi_p^{(0)}(x) \le \tau_p(x)^2$ と評価できる．また，

$$\pi_p^{(1)}(x) \equiv \sum_{u,v} 2dpD(v-u)\, \mathbb{E}_p\Big[\mathbb{1}_{\{o \Longleftrightarrow u\}}\, \mathbb{P}_p\big(E(v,x;\tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}})\big)\Big] \tag{7.21}$$

に入っている事象を観察すると，

$$E(v,x;A) \subset \bigcup_{y \in \mathbb{Z}^d,\, z \in A} \{v \longleftrightarrow y\} \circ \{y \longleftrightarrow x\} \circ \{y \longleftrightarrow z\} \circ \{z \longleftrightarrow x\} \tag{7.22}$$

という包含関係，さらに

$$\{o \Longleftrightarrow u\} \cap \{z \in \tilde{\mathcal{C}}_o^{\{u,v\}}\} \subset \bigcup_w \{o \longleftrightarrow u\} \circ \{o \longleftrightarrow w\} \circ \{w \longleftrightarrow u\} \circ \{w \longleftrightarrow z\} \tag{7.23}$$

という包含関係に気づく．したがって，Boole の不等式と BK 不等式を使うと，

$$\pi_p^{(1)}(x) \le \sum_{u,w,y,z} \tau_p(u)\, \tau_p(w)\, \tau_p(u-w)\, \tau_p(z-w) \\ \times (2dpD * \tau_p)(y-u)\, \tau_p(x-y)\, \tau_p(z-y)\, \tau_p(x-z) \tag{7.24}$$

のように評価できる．2 点関数を一本の線分と見做せば，o と x の次数が 2，それ以外の点の次数が 3 であるような（ファインマン）ダイアグラムが描けるだろう．同様にして，高次のレース展開係数 $\pi_p^{(n)}$ に対するダイアグラム評価も得られるのだが，その中に現れる和の数は $4n$ 個（(7.24) では u, w, y, z の四つ），線分の数は $6n+2$ 個である [34]．場の理論に登場する「次数勘定定理」に従えば，$n+1$ 個のトライアングル関数（和二つ，線分三つでできている）で評価できることになる．したがって，臨界トライアングル関数が $\sup_{x \ne o} \triangledown_{p_{\mathrm{c}}}(x) = O(d^{-1})$ ならば，十分高次元で $\sum_x \Pi_p(x)$ は絶対収束し，しかも $1 + O(d^{-1})$ だと想像できるだろう．

では，Π_p の各点評価（point-wise estimate）の方は，どのように証明するのだろう．カギとなるのは，次のブートストラップ論法である：

Step 1: まず $g(p) \equiv \max\Big\{2dp,\, \sup_{x \ne o} \dfrac{\tau_p(x)}{S_1(x)}\Big\} \le 3$ と仮定.

Step 2: それを使って，$|\Pi_p(x)| = O(|x|^{2(2-d)})$（や $\triangledown_p(x) \le \delta_{o,x} + O(d^{-1})$ など）が $d \gg 6$ で成り立つことを証明.

Step 3: それらを (7.4) に適用して，仮定よりもっと強い評価 $g(p) \le 2$ を導く．

これにより，$d \gg 6$ であれば，全ての p で $g(p) \notin (2, 3]$ であることが分かる．ところが，$g(p)$ は $p < p_c$ について単調増加な連続関数（無限クラスターの一意性から，各 $\tau_p(x)$ が連続なことはすぐに分かるが，無限個の連続関数の上限が連続かどうかは，それほど自明ではない）であり，しかも $g(\frac{1}{2d}) \le 1$ であるので，$p < p_c$ 一様に $g(p) \le 2$ であること，したがって $|\Pi_p(x)| = O(|x|^{2(2-d)})$ であることが証明できるのである．Step 2 の「$g(p) \le 3 \Rightarrow |\Pi_p(x)| = O(|x|^{2(2-d)})$」では，前述のダイアグラム評価が威力を発揮する．例えば，$x \neq o$ であれば，$\pi_p^{(0)}(x) \le \tau_p(x)^2 \le 9S_1(x)^2 = O(|x|^{2(2-d)})$ ((7.9) の直前も参照）がすぐに得られる．$\pi_p^{(1)}(x)$ についても，$g(p) \le 3$ を使って (7.24) の各 2 点関数 $\tau_p(y)$ を $S_1(y) = O(|y|^{2-d})$ で押さえ，複数の冪関数の掛け算の和を「畳み込み不等式」[16, 17, 32] によって評価（例えば，$\sum_{y \neq o,x} |y|^{2-d}|x-y|^{4-d}$ は $d > 6$ で収束し，$O(|x|^{6-d})$ で押さえられる）すると，やはり $\pi_p^{(1)}(x) = O(|x|^{2(2-d)})$ が得られる．高次のレース展開係数についても同じように評価できるが，詳しくは原著を参照するように．以上で，長かった定理 9 の概説を終える．■

8　おわりに

ここまで一気に書き上げたせいで，最後はバランスが悪くなってしまった．筆者の貢献は，専らレース展開関連の研究に集中しているので，最終節とそれに密接な関係のある第 6 節が重くなるのは仕方ない．読者の方々にお許しを請う次第である．また，パーコレーションは確率幾何モデルなのだから，ふんだんに図を使って説明すべきとも考えたが,「数学」の読者は自分で絵を描きながら考えたいだろうから，無粋なマネはすまいと敢えて図を使わなかった．その辺りにご不満の方がおられたら，ご容赦願いたい．

本論説を執筆するに際し，一部は JSPS 科研費 JP18K03406 の助成を受けました．また，お二人のレフェリーには，非常に注意深く原稿を読んでいただき，本論説をより良くするための沢山のアドバイスと，温かいお言葉をいただきました．ここにお礼を申し上げます．

参考文献

[1] M. Aizenman and D.J. Barsky, Sharpness of the phase transition in percolation models. Comm. Math. Phys., **108** (1987), 489–526.

[2] M. Aizenman, H. Kesten and C.M. Newman, Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation, Comm. Math. Phys., **111** (1987), 505–531.

[3] M. Aizenman and C.M. Newman, Tree graph inequalities and critical behavior in percolation models, J. Statist. Phys., **36** (1984), 107–143.

[4] D.J. Barsky and M. Aizenman, Percolation critical exponents under the triangle condition, Ann. Probab., **19** (1991), 1520–1536.

[5] R. Bauerschmidt, D.C. Brydges and G. Slade, Introduction to a Renormalisation Group Method, Lecture Notes in Math., **2242**, Springer, 2019.

[6] V. Beffara, The dimension of the SLE curves, Ann. Probab., **36** (2008), 1421–1452.

[7] J. van den Berg and M. Keane, On the continuity of the percolation probability function, In: Conference in Modern Analysis and Probability, New Haven, CT, 1982 (eds. R. Beals, A. Beck, A. Bellow and A. Hajian), Contemp. Math., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 61–65.

[8] J. van den Berg and H. Kesten, Inequalities with applications to percolation and reliability, J. Appl. Probab., **22** (1985), 556–569.

[9] B. Bollobás and O. Riordan, Percolation, Cambridge Univ. Press, New York, 2006.

[10] B. Bollobás and O. Riordan, A short proof of the Harris-Kesten theorem, Bull. London Math. Soc., **38** (2006), 470–484.

[11] S.R. Broadbent and J.M. Hammersley, Percolation processes: I. Crystals and mazes, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53** (1957), 629–641.

[12] D.C. Brydges, T. Helmuth and M. Holmes, The continuous-time lace expansion, arXiv:math.PR/1905.09605.

[13] D.C. Brydges and T. Spencer, Self-avoiding walk in 5 or more dimensions, Comm. Math. Phys., **97** (1985), 125–148.

[14] R.M. Burton and M. Keane, Density and uniqueness in percolation, Comm. Math. Phys., **121** (1989), 501–505.

[15] F. Camia and C.M. Newman, Two-dimensional critical percolation: the full scaling limit, Comm. Math. Phys., **268** (2006), 1–38.

[16] L.-C. Chen and A. Sakai, Critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions, Ann. Probab., **43** (2015), 639–681.

[17] L.-C. Chen and A. Sakai, Critical two-point function for long-range models with power-law couplings: The marginal case for $d \geq d_{\mathrm{c}}$, Comm. Math. Phys., **372** (2019), 543–572.

[18] J.T. Cox and R. Durrett, Oriented percolation in dimensions $d \geq 4$: bounds and asymptotic formulars, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **93** (1983), 151–162.

[19] H. Duminil-Copin and V. Tassion, A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on $\mathbb{Z}^d$, Enseign. Math., **62** (2016), 199–206.

[20] H. Duminil-Copin and V. Tassion, A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model, Comm. Math. Phys., **343** (2016), 725–745.

[21] R. Fitzner and R. van der Hofstad, Generalized approach to the non-backtracking lace expansion, Probab. Theory Related Fields, **169** (2017), 1041–1119.

[22] R. Fitzner and R. van der Hofstad, Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation in $d > 10$, Electron. J. Probab., **22** (2017), paper no. 43; arXiv:math.PR/1506.07977.

[23] C.M. Fortuin, P.W. Kasteleyn and J. Ginibre, Correlation inequalities on some partially ordered sets, Comm. Math. Phys., **22** (1971), 89–103.

[24] C. Garban and J.E. Steif, Noise sensitivity and percolation, In: Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions, Búzios, 2010, (eds. D. Ellwood, C. Newman, V. Sidoravicius and W. Werner), Clay Math. Proc., **15**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 49–154.

[25] G. Grimmett, Percolation, Springer, 1989.

[26] G. Grimmett, Percolation. 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **321**, Springer, 1999.

[27] G. Grimmett and P. Hiemer, Directed percolation and random walk, In: In and Out of Equilibrium, Mambucaba, 2000, (ed. V. Sidoravicius), Progr. Probab., **51**, Birkhäuser, 2002, pp. 273–297.

[28] J.M. Hammersley, Percolation processes: lower bounds for the critical probability, Ann. Math. Statist., **28** (1957), 790–795.

[29] J.M. Hammersley, Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration, Colloques Int. Centre Nat. Rech. Sci., **87** (1959), 17–34; discussions 35–37.

[30] S. Handa, Y. Kamijima and A. Sakai, A survey on the lace expansion for the nearest-neighbor models on the BCC lattice, Taiwanese J. Math., **24** (2020), 723–784.

[31] T. Hara, Decay of correlations in nearest-neighbor self-avoiding walk, percolation, lattice trees and animals, Ann. Probab., **36** (2008), 530–593.

[32] T. Hara, R. van der Hofstad and G. Slade, Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high-dimensional percolation and related models, Ann. Probab., **31** (2003), 349–408.

[33] T. Hara and G. Slade, On the upper critical dimension of lattice trees and lattice animals, J. Statist. Phys., **59** (1990), 1469–1510.

[34] T. Hara and G. Slade, Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions, Comm. Math. Phys., **128** (1990), 333–391.

[35] T. Hara and G. Slade, Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour, Comm. Math. Phys., **147** (1992), 101–136.

[36] T. Hara and G. Slade, The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions, Rev. Math. Phys., **4** (1992), 235–327.

[37] T.E. Harris, A lower bound for the critical probability in a certain percolation process, Proc. Cambridge Philos. Soc., **56** (1960), 13–20.

[38] M. Heydenreich and R. van der Hofstad, Progress in High-Dimensional Percolation and Random Graphs, CRM Short Courses, Springer, 2017.

[39] M. Heydenreich, R. van der Hofstad, G. Last and K. Matzke, Lace expansion and mean-field behavior for the random connection model, arXiv:math.PR/1908.11356.

[40] 樋口保成, パーコレーションの問題, 数学, **35** （1983）, 143–157.

[41] 樋口保成, Percolation の臨界現象, 数学, **40** （1988）, 247–254.

[42] 樋口保成, [25] の書評, 数学, **46** （1994）, 79–80.

[43] 樋口保成, 新版 パーコレーション—ちょっと変わった確率論入門—, 遊星社, 2011.

[44] 樋口保成, パーコレーション理論講義—基礎から SLE 理論の入り口まで—, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ, **107**, サイエンス社, 2014.

[45] R. van der Hofstad and A. Sakai, Critical points for spread-out self-avoiding walk, percolation and the contact process above the upper critical dimensions, Probab. Theory Related Fields, **132** (2005), 438–470.

[46] H. Kesten, The critical probability of bond percolation of the square lattice equals 1/2, Comm. Math. Phys., **74** (1980), 41–59.

[47] H. Kesten, Percolation Theory for Mathematicians, Progr. Probab., **2**, Birkhäuser, 1982.

[48] H. Kesten, Scaling relations for 2D-percolation, Comm. Math. Phys., **109** (1987), 109–156.

[49] G. Kozma and A. Nachmias, Arm exponents in high dimensional percolation, J. Amer. Math. Soc., **24** (2011), 375–409.

[50] G.F. Lawler, O. Schramm and W. Werner, Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents, Acta Math., **187** (2001), 275–308.

[51] G.F. Lawler, O. Schramm and W. Werner, One-arm exponents for critical 2D percolation, Electron. J. Probab., **7** (2002), paper no. 2.

[52] G.A. Margulis, Probabilistic characteristics of graphs with large connectivity, Problemy Peredači Informacii, **10** (1974), 101–108.

[53] M.V. Menshikov, Coincidence of critical points in percolation problems, Soviet Math. Doklady, **33** (1986), 856–859.

[54] B.G. Nguyen and W.-S. Yang, Triangle condition for oriented percolation in high dimensions, Ann. Probab., **21** (1993), 1809–1844.

[55] G. Ódor, Universality classes in nonequilibrium lattice systems, Rev. Modern Phys., **76** (2004), 663–724.

[56] R. Peierls, On Ising's model of ferromagnetism, Proc. Cambridge Philos. Soc., **36** (1936), 477–481.

[57] D. Reimer, Proof of the van den Berg-Kesten conjecture, Combin. Probab. Comput., **9** (2000), 27–32.

[58] J.J. Ruiz-Lorenzo, Logarithmic corrections for spin glasses, percolation and Lee-Yang singularities in six dimensions, J. Phys. A, **31**, no. 44 (1998), 8773–8787.

[59] L. Russo, On the critical percolations probabilities, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **56** (1981), 229–237.

[60] A. Sakai, Mean-field critical behavior for the contact process, J. Statist. Phys., **104** (2001), 111–143.

[61] A. Sakai, Lace expansion for the Ising model, Comm. Math. Phys., **272** (2007), 283–344.

[62] A. Sakai, Application of the lace expansion to the φ^4 model, Comm. Math. Phys., **336** (2015), 619–648.

[63] A. Sakai, Correct bounds on the Ising lace-expansion coefficients, arXiv:math-ph/2003.09856.

[64] B. Simon, Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets, Comm. Math. Phys., **77** (1980), 111–126.

[65] 篠田正人, [26] の書評, 数学, **53** （2001）, 96–99.

[66] G. Slade, The lace expansion and its applications, Lecture Notes in Math., **1879**, Springer, 2006.

[67] S. Smirnov and W. Werner, Critical exponents for two-dimensional percolation, Math. Res. Lett., **8** (2001), 729–744.

[68] H. Tasaki, Hyperscaling inequalities for percolation, Comm. Math. Phys., **113** (1987), 49–65.

[69] 田崎晴明, Percolation と臨界現象の物理, 数学, **40** （1988）, 254–257.

[70] W. Werner, Lectures on two-dimensional critical percolation, In: Statistical Mechanics, Park City, UT, 2007, (eds. S. Sheffield and T. Spencer), IAS/Park City Math. Ser., **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 297–360.