強磁性イジング模型の相転移・臨界現象 に関する研究の最近の動向

Recent progress in researches on phase transitions and critical behavior for Ising ferromagnets

坂井　哲　(北海道大学大学院理学研究院)*

概　要

本講演では，古典平衡統計力学モデルの代表格である「強磁性イジング模型」の相転移と臨界現象について，個人的に最重要クラスだと考える結果を振り返る．まずは2000年までの結果を概観し，残された宿題がどんなものであったのか思い出す．続いて，それらの宿題が21世紀に入ってどのように解決されていったのか概説する．全てではないが，それら宿題の解決のカギとなったのが「ランダムカレント表示」である．その導出や帰結について，幾つか例題を挙げて説明する．最後に，いま現在も残された宿題を纏め，将来の起点としたい．

1. 強磁性イジング模型の相転移・臨界現象

＜数学的な定義＞　イジング模型とは，磁性体を極端に単純化した古典統計力学モデルである．結晶構造を表わす有限グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき，各点 $x\in V$ に＋1または−1を値として取るスピン変数 σ_x が置かれていると考え，それらが相互作用係数 $\boldsymbol{J}\equiv\{J_b\}_{b\in E}$ や磁場 $\boldsymbol{h}\equiv\{h_x\}_{x\in V}$ で協力し合った結果,

$$H_{G,\boldsymbol{J},\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{\sigma})=-\sum_{b=\{x,y\}\in E}J_b\sigma_x\sigma_y-\sum_{x\in V}h_x\sigma_x \tag{1.1}$$

を系のエネルギーとしてもつと考えようというものである．平衡統計力学の枠組みに従って，スピン配置 $\boldsymbol{\sigma}\equiv\{\sigma_x\}$ の関数の逆温度 $\beta\ge 0$ における熱力学的期待値を

$$\langle f\rangle_{G,\boldsymbol{J},\boldsymbol{h},\beta}=\frac{1}{Z_{G,\boldsymbol{J},\boldsymbol{h},\beta}}\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\{\pm1\}^V}f(\boldsymbol{\sigma})\;e^{-\beta H_{G,\boldsymbol{J},\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{\sigma})} \tag{1.2}$$

と定義する．ただし $Z_{G,\boldsymbol{J},\boldsymbol{h},\beta}$ は分配関数で，$\langle 1\rangle_{G,\boldsymbol{J},\boldsymbol{h},\beta}=1$ となるように選んだ規格化定数である．

以下の話を簡単にするために，特に断らない限り，G として d 次元超立方格子 $\mathbb{Z}^d$ の部分グラフ $\Lambda=(V(\Lambda),E(\Lambda))$ を考える．ただし，$E(\Lambda)$ は $\|x-y\|_1=1$ をみたす格子点 $x,y\in V(\Lambda)$ のペアの集合とする．そして，同じく特に断らない限り，相互作用係数 J_b は $b\in E(\Lambda)$ であれば1，そうでなければ0とし，磁場 h_x は x によらない値 h をとるものとして，$\langle f\rangle_{\Lambda,h,\beta}$ のように表記を簡略化する．

本研究は科研費（課題番号：15K13440）の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 82B05, 82B20, 82B26, 82B27
キーワード：イジング模型, 相転移, 臨界現象, 臨界指数, ランダムカレント表示
* 〒060-0810　北海道札幌市北区北10条西8丁目　北海道大学大学院理学研究院
e-mail: sakai@math.sci.hokudai.ac.jp
web: http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/

果たして，このような単純なモデルで，我々の知る磁石の振る舞い，すなわち「常温で磁石のままでいられること」や「温度を上げていくと磁性を失うこと」などを記述できるだろうか？

＜相転移＞　実は，有限系では上述の問題に関して面白そうなことは起きない．では，$V_n := V(\Lambda_n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \le n\}$ として，原点スピンの期待値 $\langle \sigma_o \rangle_{\Lambda_n,h,\beta}$ の $n \to \infty$ 極限（この極限の存在や，h や β に対する単調性は，あとで引用する Griffiths の不等式で保証される）はどうか？　得られた極限をさらに $h \downarrow 0$ と飛ばせば，上述の「磁石のままでいられる」指標である自発磁化になろう：

$$m_\beta = \lim_{h\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \langle \sigma_o \rangle_{\Lambda_n,h,\beta}. \tag{1.3}$$

自発磁化が消失する臨界点を β_{c} と表わす：

$$\beta_{\mathrm{c}} = \inf\{\beta \ge 0 : m_\beta > 0\}. \tag{1.4}$$

この β_{c} が意味ある量なのかについては，定義した時点では明らかではない．

また，相転移を特徴づける別の方法として，2 点関数の和である「帯磁率」を測るという手もあろう．すなわち，2 点関数を

$$G^+_\beta(x,y) = \lim_{h\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \Big(\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n,h,\beta} - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda_n,h,\beta} \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda_n,h,\beta} \Big) \tag{1.5}$$

と定義（存在性は Griffiths の不等式が保証）し，帯磁率を

$$\chi_\beta = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G^+_\beta(o,x) \tag{1.6}$$

と定義する．もし $\beta < \beta_{\mathrm{c}}$ であれば，2 点関数は単なる 2 スピン期待値に退化するので，その領域では単調に増大するであろう（これも Griffiths の不等式で保証される）．そこで，帯磁率が有限でいられる上限を β'_{c} と表わす：

$$\beta'_{\mathrm{c}} = \sup\{\beta < \beta_{\mathrm{c}} : \chi_\beta < \infty\}. \tag{1.7}$$

前述の β_{c} 同様，この β'_{c} が意味ある量なのかどうかは，この時点では明らかではない．単に現実の磁石を測る真似事をしているだけである．仮に意味ある量だったとして，これら二つの臨界点は一致するだろうか？

＜臨界現象＞　実際の磁性体では臨界点は唯一つで，その近傍で「普遍的な」特異性を示すようだ．例えば，或るべき指数（「臨界指数」と呼ぶ）$\hat{\beta}, \gamma, \gamma', \eta$ が存在して，

$$m_\beta \underset{\beta\downarrow\beta_{\mathrm{c}}}{\approx} (\beta-\beta_{\mathrm{c}})^{\hat{\beta}}, \qquad \chi_\beta \begin{cases} \underset{\beta\uparrow\beta_{\mathrm{c}}}{\approx} (\beta_{\mathrm{c}}-\beta)^{-\gamma}, \\ \underset{\beta\downarrow\beta_{\mathrm{c}}}{\approx} (\beta-\beta_{\mathrm{c}})^{-\gamma'}, \end{cases} \qquad G^+_{\beta_{\mathrm{c}}}(o,x) \underset{|x|\to\infty}{\approx} |x|^{2-d-\eta}, \tag{1.8}$$

（ここでの極限は適当に「それぞれの対数の比が 1 に収束する」くらいに解釈しておく）のように振る舞うものと考えられている．果たして，このような特異性をイジング模型は捕まえることが出来ようか？

2. 前世紀の重要な結果と残された宿題

Lenzから提案されたこのモデルが1次元では有限温度で相転移しないことを証明したのがIsing[21]である．当時はこのような単純なモデルで相転移など記述できないと思う研究者が半分は居たらしい（そういった裏話や，この講演より遥かに深い内容の詰まった参考書として，最近出版された田崎, 原[30]がある）から，Isingの得た結果は大して反響を呼ばなかったかも知れない．しかし，Peierlsの論法に始まる非自明な結果から，このモデルが実際に意味のある面白いモデルなのだという認識が広まって以来，イジング模型の研究には大勢の研究者が魅了され，貢献を続けている．

以下，個人的なテイストで選んだ，イジング模型の相転移・臨界現象に関する前世紀に得られた重要な結果を年代順に列挙する．

- Peierls[25]（1936年）：2次元以上で自発磁化をもつことを証明する論法の発案．実際に数学的に証明されたのは1960年代半ばで，Griffiths[13]とDobrushin[10]による．
- Onsager[24]（1944年）：ゼロ磁場における2次元イジング模型の「自由エネルギー」が完全に解かれた．可解模型の研究の幕開けである．これと関連して，Yang[32]が$\hat{\beta}=\frac{1}{8}$を，Wu, McCoy, Tracy, Barouch[31]が$\eta=\frac{1}{4}$を導出している．
- Lee, Yang[23]（1952年）：ゼロ磁場でなければ自由エネルギーは解析的．つまり，変なことが起こるとすれば，それはゼロ磁場ライン上だけである．
- Griffiths[14, 15, 16]（1967年）：相関関数の正値性や単調性を保証する相関不等式の開発．その他大勢の研究者によって開発された有益な相関不等式が存在するが，その一つであるLebowitzの不等式[22]は（もしγが存在すれば）$\gamma\geq 1$を暗示する．
- Fröhlich, Simon, Spencer[12]（1976年）：鏡映正値性を仮定した場合の2点関数の赤外評価．「周期的境界条件」を課した最近接モデルは鏡映正値性をみたす．
- Aizenman[2]（1982年）：臨界現象が平均場的なものに退化するための十分条件（「バブル収束条件」と呼ばれる）が示された．これと赤外評価を組み合わせると，$d>4$において$\gamma=1$が得られる．この論文では，Griffiths, Hurst, Sherman[17]が開発した「ランダムカレント表示」が威力を発揮している．
- Aizenman, Fernández[5]（1986年）：バブル収束条件下では$d>4$，赤外評価が使える状況では$d>\frac{7}{2}$における自発磁化の連続性証明．これにより，最近接モデルの自発磁化の連続性問題は，3次元を残すのみとなる．同論文では，バブル収束条件の下，$d>4$において$\hat{\beta}=\frac{1}{2}$であることも示されている．
- Aizenman, Barsky, Fernández[3]（1987年）：$\beta_{\mathrm{c}}=\beta'_{\mathrm{c}}$の証明．同論文で証明された微分不等式は（もし$\hat{\beta}$が存在すれば）$\hat{\beta}\leq\frac{1}{2}$も暗示する．

これらの結果で解決できなかった以下の問題が，「前世紀に残された宿題」だった．

(i) 自発磁化の連続性は3次元においても成立するか？　また，鏡映正値性など仮定しなくとも，自発磁化の連続性を保証できるか？

(ii) 帯磁率は$\beta > \beta_c$で収束するか？ また，$\beta \downarrow \beta_c$における振る舞いは？

(iii) 鏡映正値性を仮定しなくとも，$d > 4$でバブル収束条件は成立するか？ また，バブル収束条件だけでは特定できない臨界指数（ηや「1-arm指数」ρなど）も$d > 4$で平均場の値に退化するのか？

(iv) $d = 3$または4における臨界現象はどのようになっているのか？

3. 今世紀に解決された宿題

最後の重要な結果が発表されたのが1980年代，それ以降「宿題」に関して大きな進展はなかった．いろいろ事情はあると思うが，一つの理由として，イジング模型とパーコレーションをカップルさせた「ランダムクラスター模型」に研究者たちの興味が移ったことが考えられる．パーコレーションの知識を活用してイジング模型の宿題を解こうという思惑もあったろうし，逆もまた然りである．幾つか重要な結果が得られているが，その中の一つにGrimmett[18]の結果が挙げられる．これが直接宿題を解決したわけではないが，後のBodineau[6]の結果と合わせると，次元によらず，自発磁化が$\beta > \beta_c$で連続であることが分かってしまうのである．

Bodineau[6]は，これまた全ての次元で，臨界点以外の「並進対称な」平衡分布は，「プラス境界条件」の極限分布と「マイナス境界条件」の極限分布の一次結合に等しい，という重要な結果も示している．これはHiguchi[20]とAizenman[1]による，2次元イジング模型の「任意の」平衡分布が同様の一次結合で書ける，という主張を少し弱めた上で，全ての次元に拡張したものである．プラス境界条件とは，境界∂V_n以外で消磁しておく一方，境界上の磁場を発散させて，そこでのスピンを＋1にピン止めしたものである．

また，今世紀に入ってからは，イジング模型やパーコレーションなどの2次元統計力学モデルの共形不変なスケーリング極限を表わすと考えられるSLE_κに注目が集まり，2012年にはイジング模型の境界線のスケーリング極限がSLE_3で表わされることがChelkak, Smirnov[8]により証明された．

さて，宿題の方はどうだろう？

- Sakai[26]（2007年）: イジング模型のレース展開とその展開係数を分解する相関不等式の完成．これにより，十分広いクラスに属する相互作用係数$\boldsymbol{J}$（鏡映正値性が成り立つ必要はない）では，$d > 4$において$m_{\beta_c} = 0$や$\eta = 0$（したがってバブル収束条件も）が成立することが証明された．J_bがbの両端点距離$|b|$の関数として$|b|^{-d-\alpha}$（ただし$\alpha > 0$）のように冪減衰する長距離モデルでは，$d > 2\min\{2, \alpha\}$まで$m_{\beta_c} = 0$を拡張できる[9].

- Aizenman, Duminil-Copin, Sidoravicius[4]（2015年）: $m_{\beta_c} = 0$が成立するための十分条件が示された．鏡映正値性をみたすモデルであれば，相互作用係数$\boldsymbol{J}$から生成されるランダムウォークが推移的であるとき，この十分条件が成立する．3次元最近接モデルは，その一例であるし，上述の冪減衰長距離モデルであれば，$d > \min\{2, \alpha\}$で十分条件が成立する．

- Duminil-Copin, Tassion[11]（2016年）: $\beta_c = \beta_c'$の証明の簡略化．1987年のAizenmanらの難しい仕事[3]を，Simonの不等式[28]に似たアイデアを上手く使って，

驚くほど簡単に臨界点の一意性と $\hat{\beta} \le \frac{1}{2}$ を証明してしまった．上述の連続性証明の論文を見たときは「悔しい！」と思ったが，この論文を読んだときは「こりゃ敵わん！」と喝采した．

- Handa, Heydenreich, Sakai[19]（2016 年）：$d > 4$ における 1-arm 指数 ρ の上限評価．プラス境界条件下での 1 スピン期待値 $\langle \sigma_o \rangle^+_{\Lambda_n,\beta}$ は $n \to \infty$ で自発磁化 m_β に収束するので，臨界点直上ではゼロに収束することが上述の通り分かっている．その収束の速さを特徴づける臨界指数を，1-arm 指数という．従来はハイパースケーリング不等式 [29] による上限 $\rho \le \frac{d-2}{2}$ しか得られていなかったが，$d > 4$ で最適な（つまり「これ以上良くならないはず」という意味で）$\rho \le 1$ に改善した．

少し結果の選び方が偏った恐れはあるが，重要なことは，これらが全て「ランダムカレント表示」という共通言語で達成されたということである．

命題 3.1 (ランダムカレント表示 [17]). Λ に属さないダミーの点として g（“ghost site”や“graveyard”と呼ばれる）を導入し，$\bar{\Lambda}^g = (V(\bar{\Lambda}^g), E(\bar{\Lambda}^g))$ を $V(\bar{\Lambda}^g) = V(\Lambda) \cup \{g\}$，$E(\bar{\Lambda}^g) = E(\Lambda) \cup \{\{x, g\} : x \in V(\Lambda)\}$ と定義する．また，各辺 $b \in E(\bar{\Lambda}^g)$ にカレント $n_b \in \mathbb{Z}_+$ を与える重みを

$$w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n}) = \prod_{b \in E(\Lambda)} \frac{\beta^{n_b}}{n_b!} \prod_{x \in V(\Lambda)} \frac{(\beta h)^{n_{x,g}}}{n_{x,g}!} \tag{3.1}$$

とし，カレント配置 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}_+^{E(\bar{\Lambda}^g)}$ の源泉集合を

$$\partial \boldsymbol{n} = \left\{ x \in V(\bar{\Lambda}^g) : \sum_{b \in E(\bar{\Lambda}^g)} n_b \mathbb{1}_{\{x \in b\}} \text{ は奇数} \right\} \tag{3.2}$$

と定義する．さて，$A \subset V(\Lambda)$ を相異なる点の集合とし，$\sigma^A = \prod_{x \in A} \sigma_x$ と解釈したとき，次の等式が成り立つ：

$$\frac{1}{2^{|V(\Lambda)|}} \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \sigma^A e^{-\beta H_{\Lambda,h}(\boldsymbol{\sigma})} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = A} w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n}) & \big[|A| \text{ が偶数のとき}\big], \\ \displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = A \cup \{g\}} w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n}) & \big[|A| \text{ が奇数のとき}\big]. \end{cases} \tag{3.3}$$

上の命題から，1 スピン期待値 $\langle \sigma_o \rangle_{\Lambda,h,\beta}$ は

$$\langle \sigma_o \rangle_{\Lambda,h,\beta} = \frac{\displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = \{o,g\}} w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})}{\displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = \varnothing} w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})} \tag{3.4}$$

と書ける．つまり「原点 o から湧き出したカレントが g まで流れている」というパーコレーション問題と等価になる．

それにしても，これは確かに有難い表現であろうが，それほど強力なのだろうか？統計力学を勉強したことのある人は,「高温展開と大して変わらないじゃないか」と思うだろう．違いが明らかになるのは，次の「源泉移し替え等式」のおかげである．

補題 3.2 (**源泉移し替え等式** [17] **の特別なケース**)**.** カレント配置 $\boldsymbol{N} = \{N_b\}_{b\in E(\bar{\Lambda}^g)}$ が与えられたとき，正のカレントが付与された辺を繋いで2点 $x, y \in V(\bar{\Lambda}^g)$ を結べることを $x \underset{\boldsymbol{N}}{\longleftrightarrow} y$ と表わす．このとき，次の等式が成り立つ：

$$\sum_{\partial\boldsymbol{m}=\{x,y\}} \prod_{b\in E(\bar{\Lambda}^g)} \binom{N_b}{m_b} = \mathbb{1}_{\{x \underset{\boldsymbol{N}}{\longleftrightarrow} y\}} \sum_{\partial\boldsymbol{m}=\varnothing} \prod_{b\in E(\bar{\Lambda}^g)} \binom{N_b}{m_b}. \tag{3.5}$$

例えば，2点関数の定義 (1.5) に現れた期待値の差 $\langle\sigma_x\sigma_y\rangle_{\Lambda,h,\beta} - \langle\sigma_x\rangle_{\Lambda,h,\beta}\langle\sigma_y\rangle_{\Lambda,h,\beta}$ を書き換えてみよう．ランダムカレント表示を用いれば，

$$\sum_{\substack{\partial\boldsymbol{n}=\{x\}\triangle\{y\}\\ \partial\boldsymbol{m}=\varnothing}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{m})}{W_{\Lambda,h,\beta}} - \sum_{\substack{\partial\boldsymbol{n}=\{x,g\}\\ \partial\boldsymbol{m}=\{y,g\}}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{m})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \tag{3.6}$$

と書き直すことができる．ただし $W_{\Lambda,h,\beta} = \sum_{\partial\boldsymbol{n}=\varnothing} w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})$ と略記し，第1項目には $W_{\Lambda,h,\beta}/W_{\Lambda,h,\beta} \equiv 1$ を掛けた．さらに第2項は，$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$ で和を取ると，

$$\sum_{\partial\boldsymbol{N}=\{x\}\triangle\{y\}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{N})}{(W_{\Lambda,h,\beta})^2} \sum_{\partial\boldsymbol{m}=\{y,g\}} \prod_{b\in E(\bar{\Lambda}^g)} \binom{N_b}{m_b} \tag{3.7}$$

と書き直すことができる．源泉移し替え等式を使ってから和を取り直すと，

$$\begin{aligned} &\sum_{\partial\boldsymbol{N}=\{x\}\triangle\{y\}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{N})}{(W_{\Lambda,h,\beta})^2} \mathbb{1}_{\{y \underset{\boldsymbol{N}}{\longleftrightarrow} g\}} \sum_{\partial\boldsymbol{m}=\varnothing} \prod_{b\in E(\bar{\Lambda}^g)} \binom{N_b}{m_b} \\ &\qquad = \sum_{\substack{\partial\boldsymbol{n}=\{x\}\triangle\{y\}\\ \partial\boldsymbol{m}=\varnothing}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{m})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \mathbb{1}_{\{y \underset{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}{\longleftrightarrow} g\}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

となるので，(3.6) に戻せば，

$$\langle\sigma_x\sigma_y\rangle_{\Lambda,h,\beta} - \langle\sigma_x\rangle_{\Lambda,h,\beta}\langle\sigma_y\rangle_{\Lambda,h,\beta} = \sum_{\substack{\partial\boldsymbol{n}=\{x\}\triangle\{y\}\\ \partial\boldsymbol{m}=\varnothing}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{n})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \frac{w_{\bar{\Lambda}^g}(\boldsymbol{m})}{W_{\Lambda,h,\beta}} \left(1 - \mathbb{1}_{\{y \underset{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}{\longleftrightarrow} g\}}\right) \tag{3.9}$$

という等式を得る．右辺の意味するところは,「一つのカレント配置 $\boldsymbol{n}$ だけでも（源泉条件のせいで）x と y は繋がっているが，もう一つのカレント配置 $\boldsymbol{m}$ の助けを借りても g とは繋がってはいけない」ということである．

同様の書き換えを応用して，Simon の不等式 [28]，Duminil-Cpoin, Tassion の不等式 [11]，レース展開 [26] などを導くことができる．

定理 3.3 (**Simon の不等式** [28] **と高温相での指数関数的減衰**)**.** 任意の $\Gamma \subset \Lambda_n$ に対し，

$$\langle\sigma_o\rangle^+_{\Lambda_n,\beta} \le \sum_{x\in V(\Gamma)} \sum_{\substack{y\notin V(\Gamma):\\ |x-y|=1}} \langle\sigma_o\sigma_x\rangle_{\Gamma,0,\beta} (\tanh\beta) \langle\sigma_y\rangle^+_{\Lambda_n,\beta} \tag{3.10}$$

が成り立つ．もし $\varphi_\beta(\Gamma) := \sum_{x\in V(\Gamma)} \sum_{y\notin V(\Gamma):|x-y|=1} \langle\sigma_o\sigma_x\rangle_{\Gamma,0,\beta} (\tanh\beta) < 1$ をみたす部分グラフ Γ が存在すれば，$\langle\sigma_o\rangle^+_{\Lambda_n,\beta}$ は n について指数関数的に減衰する．

上記の事実を踏まえて，

$$\tilde{\beta}_{\rm c} = \sup\Big\{\beta \ge 0 : {}^{\exists}\Gamma\ \big[o \in V(\Gamma),\ \varphi_\beta(\Gamma) < 1\big]\Big\} \tag{3.11}$$

と定義する．

定理 3.4 (**Duminil-Cpoin，Tassion の不等式 [11] と $\hat{\beta}$ の上限評価**)**.** $c_{\Lambda,h,\beta} = \min_{y\in V(\Lambda)} \langle\sigma_o\rangle_{\Lambda,h,\beta} / \langle\sigma_y\rangle_{\Lambda,h,\beta}$ とすると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\langle\sigma_o\rangle^2_{\Lambda,h,\beta} \ge \frac{2c_{\Lambda,h,\beta}}{\beta}\Big(\inf_{\Gamma:o\in V(\Gamma)}\varphi_\beta(\Gamma)\Big)\Big(1-\langle\sigma_o\rangle^2_{\Lambda,h,\beta}\Big) \tag{3.12}$$

が成り立つ．もし $\beta > \tilde{\beta}_{\rm c}$ ならば，$m_\beta \ge \sqrt{1-\tilde{\beta}_{\rm c}/\beta}$ が成り立つ．

以上より，実は $\tilde{\beta}_{\rm c} = \beta_{\rm c} = \beta'_{\rm c}$ ということが分かったのである．

定理 3.5 (**レース展開と高次元での平均場臨界現象 [26]**)**.** レース展開係数と呼ばれる或る関数列 $\pi^{(n)}_{\Lambda,\beta} : \Lambda \to [0,\infty)$ が存在して，$\Pi^{(N)}_{\Lambda,\beta} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\pi^{(n)}_{\Lambda,\beta}$ と表わすと，

$$\langle\sigma_o\sigma_x\rangle_{\Lambda,0,\beta} = \Pi^{(N)}_{\Lambda,\beta}(x) + \sum_{\substack{u,v\in V(\Lambda):\\ |u-v|=1}}\Pi^{(N)}_{\Lambda,\beta}(u)\,(\tanh\beta)\ \langle\sigma_v\sigma_x\rangle_{\Lambda,0,\beta} + R^{(N+1)}_{\Lambda,\beta}(x) \tag{3.13}$$

が成り立ち，剰余項は高温相で

$$\sum_x |R^{(N+1)}_{\Lambda,\beta}(x)| \le 2d\chi_\beta(\tanh\beta)\sum_u \pi^{(N)}_{\Lambda,\beta}(u) \tag{3.14}$$

をみたす．もし $d \gg 4$ ならば，或る公比 $r = O(d^{-1})$ が存在して

$$\pi^{(n)}_{\Lambda,\beta}(x) \le r^n\delta_{o,x} + O(n^{3d-4})r^{\max\{n-2,0\}}\frac{1-\delta_{o,x}}{|x|^{3(d-2)}} \tag{3.15}$$

が成り立ち，最終的に $G^+_{\beta_{\rm c}}(o,x) \underset{|x|\to\infty}{\approx} |x|^{2-d}$ （つまり $\eta = 0$）が得られる．

定理 3.6 (**$d > 4$ における 1-arm 指数 ρ の上限評価 [19]**)**.** 任意の $r < n$ に対し，

$$\langle\sigma_o\rangle^+_{\Lambda_r,\beta} \ge \frac{\Big(\sum_{x\in\partial V_r}\langle\sigma_o\sigma_x\rangle_{\Lambda_n,0,\beta}\Big)^2}{2\sum_{\substack{u\in V_n\\ x,y\in\partial V_r}}\langle\sigma_o\sigma_u\rangle_{\Lambda_n,0,\beta}\langle\sigma_u\sigma_x\rangle_{\Lambda_n,0,\beta}\langle\sigma_u\sigma_y\rangle_{\Lambda_n,0,\beta}\langle\sigma_o\rangle^+_{\Lambda_{\mathrm{dist}(u,\partial V_r)},\beta}} \tag{3.16}$$

が成り立つ．もし $d > 4$ かつ $\eta = 0$ であり，さらに ρ が存在するならば，$\rho \le 1$ でなければならない．

4. 残された宿題とその発展的課題

ご覧の通り，相変わらず臨界点から低温相にかけた非 Lee-Yang 相がオープンである．プラス境界条件下で無限体積極限をとった1スピン期待値が自発磁化に収束するのは既知だが，その収束スピードに興味がある．それと関連して，低温相での2点関数の収束スピードや帯磁率の収束性も解決されなければならない問題として残されている．これら全てが解決して，漸くイジング模型の相図が納得のいく形で完成するのである．それを求めて，半田 悟氏（北大理）との共同研究が進行中である．

古典的な強磁性イジング模型に対してはレース展開が完成し，$d \gg 4$ で $\eta = 0$ という強力な結果を得ることができた．同じ普遍性クラスに属すると考えられる「（1成分）φ^4 模型」への応用も既に完成している [27]．今後はレース展開の適用範囲を広めるべく，パラメター $q \in [1, 2]$ のランダムクラスター模型（パーコレーション（$q = 1$）とイジング模型（$q = 2$）を補間するモデル）や量子イジング模型に対してもレース展開の可能性を探っていきたい．

今ところ，3次元や4次元における（短距離相互作用係数で定義された）イジング模型はお手上げの状態である．繰り込み群による方法も，4次元 φ^4 模型に対しては上手く行ったが，イジング模型に対しては技術的な問題があって未完成のままである．この問題，21世紀中に解かれるであろうか？

参考文献

[1] M. Aizenman. Translation invariance and instability of phase coexistence in the two-dimensional Ising system. *Commun. Math. Phys.* **73** (1980): 83–94.

[2] M. Aizenman. Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. *Commun. Math. Phys.* **86** (1982): 1–48.

[3] M. Aizenman, D.J. Barsky and R. Fernández. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *J. Stat. Phys.* **47** (1987): 343–374.

[4] M. Aizenman, H. Duminil-Copin and V. Sidoravicius. Random currents and continuity of Ising model ’s spontaneous magnetization. *Commun. Math. Phys.* **334** (2015): 719–742.

[5] M. Aizenman and R. Fernández. On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional Ising models. *J. Stat. Phys.* **44** (1986): 393–454.

[6] T. Bodineau. Translation invariant Gibbs states for the Ising model. *Probab. Theory Related Fields* **135** (2006): 153–168.

[7] D.C. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.* **97** (1985): 125–148.

[8] D. Chelkak and S. Smirnov. Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables. *Invent. Math.* **189** (2012): 515–580.

[9] L.-C. Chen and A. Sakai. Critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions. *Ann. Prob.* **43** (2015): 639–681.

[10] R.L. Dobrushin. Existence of a phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **160** (1965): 1046.

[11] H. Duminil-Copin and V. Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **343** (2016): 725–745.

[12] J. Fröhlich, B. Simon and T. Spencer. Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking. *Commun. Math. Phys.* **50** (1976): 79–95.

[13] R.B. Griffiths. Peierls proof of spontaneous magnetization in a two-dimensional Ising ferromagnet. *Phys. Rev.* **136** (1964): A437–A439.

[14] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets I. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 478–483.

[15] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets II. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 484–489.

[16] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets III. *Commun. Math. Phys.* **6** (1967): 121–127.

[17] R.B. Griffiths, C.A. Hurst and S. Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Math. Phys.* **11** (1970): 790–795.

[18] G. Grimmett. The stochastic random-cluster process and the uniqueness of random-cluster measures. *Ann. Prob.* **23** (1995): 1461–1510.

[19] S. Handa, M. Heydenreich and A. Sakai. Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions. Preprint (2016). `arXiv:1612.08809`.

[20] Y. Higuchi. On the absence of non-translation invariant Gibbs states for the two-dimensional Ising model. In *Random Fields, Vols. I, II (Esztergom, 1979)* (Colloq. Math. Soc. Yanos Bolyai 27, North-Holland, 1981): 517–534.

[21] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik* **31** (1925): 253–258.

[22] J.L. Lebowitz. GHS and other inequalities. *Commun. Math. Phys.* **35** (1974): 87–92.

[23] T.D. Lee and C.N. Yang. Statistical theory of equation of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model. *Phys. Rev.* **87** (1952): 410–419.

[24] L. Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.* **65** (1944): 117–149.

[25] R. Peierls. On Ising's model of ferromagnetism. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **32** (1936): 477–481.

[26] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.

[27] A. Sakai. Application of the lace expansion to the φ^4 model. *Commun. Math. Phys.* **336** (2015): 619–648.

[28] B. Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Commun. Math. Phys.* **77** (1980): 111–126.

[29] H. Tasaki. Hyperscaling inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.* **113** (1987): 49–65.

[30] 田崎 晴明，原 隆．相転移と臨界現象の数理（共立出版，2015 年）．

[31] T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy and E. Barouch. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region. Phys. Rev. B **13** (1976): 316-374.

[32] C.N. Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. *Phys. Rev.* **85** (1952): 808–816.