臨界現象の数理

坂井　哲*

北海道大学創成研究機構†

2011 年 3 月 28 日

1　序

温度を変えると磁石が磁性を失ったり，水が沸騰して蒸発するといった現象には馴染みが深い．このように温度などの巨視的なパラメターが変化したとき，系が質的に全く異なる状態に遷移する現象を相転移といい，そのギリギリのパラメター値を臨界点という．特に系の「物差し」である相関距離が発散する臨界点付近では，様々な観測量が冪的な特異性を示し，マクロとミクロの区別がつかない（スケールフリー，フラクタル的）．このような現象を臨界現象といい，その冪指数たちを臨界指数という．

実は，様々な物理系は臨界指数の値をもとに分類できると信じられている（臨界指数の普遍性）．例えば，病気が蔓延する過程も感染率をパラメターとして臨界現象を示すが，病気ごとに臨界点の値は変わっても臨界指数の値は共通だと考えられている．さらに驚くべきことに，水と磁石は全く異なる物理系であるにも拘らず，それらは同じ普遍性クラスに属することを示唆する実験事実がある．したがって，臨界現象とは系の詳細によらない普遍的な構造が「巨視的な極限」で顕在化する現象と言えるかも知れない．この隠れた構造を数理モデルを用いて理論的に完全に理解することは，統計力学・数理物理の重要課題の一つである．臨界現象に関連した研究が，2006 年と 2010 年にフィールズ賞を受賞したことも記憶に新しい．

一方，巨視的な極限で何らかの構造が現れる簡単な例として，独立な確率変数系に対する大数の法則や中心極限定理が挙げられる．しかし，実際の物理系の構成要素たちは強く相互作用し合っていて，独立変数系に対して有効な解析手法は必ずしも通用しない．したがって，従来の確率論が発展すべき方向としても，臨界現象を解明することは重要な問題である．

本講演では，臨界現象に興味を持つための切っ掛けとして，d 次元正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークと自己回避歩行（self-avoiding walk，略して SAW）の臨界現象を紹介した．ランダムウォークは空中を漂う煙分子の動きを理想化したモデルで，数学的には独立な $\mathbb{Z}^d$ 値確率変数の和として表わされる．その独立性ゆえ，ランダムウォークの「臨界現象」は完全に解けてしまう．SAW は線形高分子の統計力学モデルで，ランダムウォークに「自分自身と交わってはいけない」という制限が掛かったもの[1]である．この体積排除効果により，ランダムウォークが持っていたような独立性は失われ，SAW の臨界現象が一般には非自明なものになろうことは予想できよう．しかし高次元においては，SAW の臨界現象がランダムウォークのそれに退化してしまうことが厳密に証明できるのである．その解析手段が「レース展開」なのであった．

2　ランダムウォークの臨界現象

この節でランダムウォークを数学的に導入し，その「臨界現象」を解説する．

*sakai@math.sci.hokudai.ac.jp

†2011 年 4 月 1 日より北海道大学大学院理学研究院数学部門へ異動

[1] むしろ物理や化学の側からは，「線形高分子の振る舞いを理解したいけど，（少なくとも我々の棲む 3 次元では）難しいので，その第ゼロ近似としてランダムウォークを考える意味がある」と言ってくれるかも知れない．

まず，次の確率空間 $(\Omega_o,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を考えよう．

- $\Omega_o:=\{\omega=(o,\omega_1,\dots,\omega_{|\omega|}):\omega_j\in\mathbb{Z}^d\ \ \forall j\in\mathbb{N}\}$．ただし o は $\mathbb{Z}^d$ の原点で，$|\omega|$ は ω のステップ数．
- $\mathcal{F}=2^{\Omega_o}$：Ω_o の冪集合，すなわち Ω_o の部分集合全体．
- $|\omega|\in\mathbb{N}$ なる $\omega\in\Omega_o$ に対し，

$$\mathbb{P}(\{\omega\}):=\prod_{j=1}^{|\omega|}J_{\omega_{j-1},\omega_j} \tag{2.1}$$

とする．ただし $\omega_0=o$ で，各ステップの重み関数 J は以下の性質を満たすものとする．

  – 並進対称的：$J_{x,y}=J_{o,y-x}$.
  – $\mathbb{Z}^d$ 対称的：$x=(x_1,\dots,x_d)$ の各成分を任意に置換したものを x' とすると，$J_{o,x}=J_{o,x'}$.
  – 有限レンジ確率測度：任意の $x\in\mathbb{Z}^d$ で $J_{o,x}\in[0,1]$ であり，或る有限な $D\subset\mathbb{Z}^d\setminus\{o\}$ があって，

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}J_{o,x}=\sum_{x\in D}J_{o,x}=1,\qquad\qquad \sigma^2:=\sum_{x\in D}|x|^2J_{o,x}<\infty. \tag{2.2}$$

要するに，Ω_o は o を出発点とする $\mathbb{Z}^d$ 上のパスの集合で，各ステップは互いに独立，1 歩あたりの確率分布 J は空間的に一様で 90 °回転不変，しかも台は有限なものである．最も簡単な例として，単純ランダムウォークの推移確率

$$J_{o,x}=\frac{1}{2d}\mathbf{1}_{\{|x|=1\}} \tag{2.3}$$

が挙げられる．ただし $\mathbf{1}_A$ は条件 A の定義関数，$|x|$ は x のユークリッド距離．

さて，我々が興味ある物理量として，次のようなものが挙げられる．

- ランダムウォークの 2 点関数（＝グリーン関数）：パラメター $p\geq 0$ に対し，

$$G_p^{\rm RW}(x):=\sum_{\omega:o\to x}p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\})\equiv\delta_{o,x}+\sum_{t\in\mathbb{N}}p^t\sum_{\substack{\eta_1,\dots,\eta_t\in\mathbb{Z}^d\\ (\sum_{s=1}^t\eta_s=x)}}\prod_{s=1}^tJ_{o,\eta_s}. \tag{2.4}$$

ただし“ $\omega:o\to x$ ”は「ω は o から x へのパス」という意味で，“ $\omega\in\Omega_o:\omega_{|\omega|}=x$ ”を略記したもの．最後の式では $\eta_s=\omega_s-\omega_{s-1}$（$s=1,\dots,t$）と置いた．$\delta_{o,x}$ は「0 歩のパス」からの寄与．

- ランダムウォークの「帯磁率」：

$$\chi_p^{\rm RW}:=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}G_p^{\rm RW}(x). \tag{2.5}$$

- ランダムウォークの相関距離（＝確率分布 $G_p^{\rm RW}/\chi_p^{\rm RW}$ の回転半径）：

$$\xi_p^{\rm RW}:=\sqrt{\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}|x|^2\frac{G_p^{\rm RW}(x)}{\chi_p^{\rm RW}}}. \tag{2.6}$$

これらの物理量，$p\ll 1$ のときは短いパスたちからの寄与が支配的なので大きくないが，だんだん p が大きくなっていくと長いパスたちからの寄与が大きくなっていき，ついには帯磁率も相関距離も共に発散してしまう．その発散する点を臨界点と呼ぶ．実際 (2.4) を (2.5) に代入すると，

$$\chi_p^{\rm RW}=1+\sum_{t=1}^\infty p^t\prod_{s=1}^t\underbrace{\sum_{\eta_s\in\mathbb{Z}^d}J_{o,\eta_s}}_{=1}=\sum_{t=0}^\infty p^t=\begin{cases}(1-p)^{-1} & [p<1]\\ \infty & [p\geq 1]\end{cases} \tag{2.7}$$

となり，$p=1$ がランダムウォークの臨界点であることが分かる．また，(2.4) と J の対称性を用いると，

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}|x|^2\,G_p^{\mathrm{RW}}(x)=\sum_{t=1}^{\infty}p^t\sum_{\eta_1,\dots,\eta_t\in\mathbb{Z}^d}\bigg|\sum_{j=1}^{t}\eta_j\bigg|^2\prod_{s=1}^{t}J_{o,\eta_s} \tag{2.8}$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}p^t\sum_{j=1}^{t}\underbrace{\sum_{\eta_j\in\mathbb{Z}^d}|\eta_j|^2J_{o,\eta_j}}_{=\sigma^2}\prod_{s\neq j}\underbrace{\sum_{\eta_s\in\mathbb{Z}^d}J_{o,\eta_s}}_{=1}=\sum_{t=1}^{\infty}p^t t\sigma^2=\begin{cases}p\sigma^2(1-p)^{-2} & [p<1]\\ \infty & [p\geq 1]\end{cases}$$

となり，これと (2.7) を (2.6) に代入すると

$$\xi_p^{\mathrm{RW}}=\begin{cases}\sqrt{p\sigma^2}\,(1-p)^{-1/2} & [p<1]\\ \infty & [p\geq 1]\end{cases} \tag{2.9}$$

となる．このようにランダムウォークの各ステップが独立であることを使うと，とくに相関距離の計算は本質的に簡単になったことが分かるだろう．このような計算は，独立性を持たない SAW では通用しない．では，どのように解析すればよいのだろうか？ それは次節で考えよう．

さて，帯磁率や相関距離などの物理量が臨界点近傍で冪的な異常性を示す現象を一般に臨界現象といい，その冪指数を臨界指数と呼ぶ．ランダムウォークの帯磁率の臨界指数は $\gamma^{\mathrm{RW}}=1$，相関距離の臨界指数は $\nu^{\mathrm{RW}}=1/2$ である．後者は有名な「中心極限定理」に現れる指数である．ここで重要なことは，相関距離の振幅 $\sqrt{p\sigma^2}$ のような量はモデルの詳細（1 歩あたりの分布 J の細かい情報や，考えている空間が $\mathbb{Z}^d$ であること等）に依存して変わりうるのに対し，臨界指数はそういったものには左右されず，系の対称性や次元 d 等のもっと本質的なものにのみ依存して決まる普遍的な量だということである．例えば，J が単純ランダムウォークの推移確率であろうが，もっと広範囲に台を持つ分布であろうが，常に $\gamma^{\mathrm{RW}}=1$ や $\nu^{\mathrm{RW}}=1/2$ である．もちろん，ランダムウォークの場合は事情が簡単だったので正確に求まってしまったが，エネルギーとエントロピーのバランスが問題になる相互作用の入った統計力学モデルで同じことができるとは限らない．実際，事情はもっと複雑であることを SAW の臨界現象を通して見てみよう．

3　自己回避歩行（SAW）の臨界現象

この節では SAW を数学的に定義し，その臨界現象についての現時点における知見を紹介し，最後に高次元において有効な解析手段であるレース展開を解説する．

まず，SAW の 2 点関数を

$$G_p^{\mathrm{SAW}}(x):=\sum_{\omega:o\to x}p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\})\,\mathbf{1}_{\{\omega\text{は SAW}\}}\equiv\delta_{o,x}+\sum_{\substack{\omega:o\to x\\(|\omega|\geq 1)}}p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\})\prod_{0\leq s<t\leq|\omega|}(1-\delta_{\omega_s,\omega_t}) \tag{3.1}$$

と定義する．ランダムウォークの 2 点関数との唯一の違いである定義関数 $\mathbf{1}_{\{\omega\text{は SAW}\}}$ は，ω を 1 本の高分子鎖と見做したときの構成要素間の体積排除効果を表わしている．この効果により，せっかく $\mathbb{P}(\{\omega\})$ が積に分解できていても，もはや (2.7) や (2.8) のように和を独立に行なうことは出来ない．

実は，それでも臨界点 $p_{\mathrm{c}}\geq 1$ が一意に存在することを証明することができる．証明（詳細は [6, 11] を参照）には触れないが，鍵となるアイデアは「SAW の劣加法性」である．それがどういうものか説明するために，次の記号を導入しよう．或る 2 つのパス $\omega:x\to y$ と $\eta:y\to z$ が与えられたとき，それらを結合したパスを $\omega\circ\eta$ と表わす．当然 $(\omega\circ\eta)_0=x$，$(\omega\circ\eta)_{|\omega|}=y$，$(\omega\circ\eta)_{|\omega|+|\eta|}=z$ である．もし $\omega\circ\eta$ が「全体として」自己回避的だったなら，ω も η もそれぞれ自己回避的であることは当然だが，さらに $\omega\cap\eta=\{y\}$ も要求されていることに注意．この「部分どうしの体積排除効果」を忘れることによって数え過ぎが起き，例えば長さ t の自己回避的なパスの総数 C_t について $C_{t+s}\leq C_tC_s$（$c_t:=\log C_t$ とすれば，$c_{t+s}\leq c_t+c_s$）が成り立つのである．これが SAW の劣加法性である．

さて，上の議論で存在性が保証された臨界点 p_c に向かって p が下から近づいていくと，帯磁率

$$\chi_p^{\mathrm{SAW}} := \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G_p^{\mathrm{SAW}}(x) \tag{3.2}$$

や相関距離

$$\xi_p^{\mathrm{SAW}} := \sqrt{\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^2 \frac{G_p^{\mathrm{SAW}}(x)}{\chi_p^{\mathrm{SAW}}}} \tag{3.3}$$

が発散することが知られている（例えば [11] を参照）．その発散の仕方は冪的で，現在のところ

$$\chi_p^{\mathrm{SAW}} \underset{p\uparrow p_\mathrm{c}}{\asymp} \begin{cases} (p_\mathrm{c}-p)^{-43/32} & [d=2] \\ (p_\mathrm{c}-p)^{-1.15756\cdots} & [d=3] \\ (p_\mathrm{c}-p)^{-1}|\log(p_\mathrm{c}-p)|^{1/4} & [d=4] \\ (p_\mathrm{c}-p)^{-1} & [d\ge 5] \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\xi_p^{\mathrm{SAW}} \underset{p\uparrow p_\mathrm{c}}{\asymp} \begin{cases} (p_\mathrm{c}-p)^{-3/4} & [d=2] \\ (p_\mathrm{c}-p)^{-0.587597\cdots} & [d=3] \\ (p_\mathrm{c}-p)^{-1/2}|\log(p_\mathrm{c}-p)|^{1/8} & [d=4] \\ (p_\mathrm{c}-p)^{-1/2} & [d\ge 5] \end{cases} \tag{3.5}$$

であることが分かっている．「分かっている」と述べたが，実は $d \le 4$ の振る舞いは 未だ証明されていない．解説しておこう．

- 上で使った記号“ $\asymp$ ”は，左辺が右辺の正の定数倍で上下から押さえられることを表わしている．本当は或る定数 $C_\chi, C_\xi \in (0,\infty)$ があって，漸近的な振る舞い

$$\chi_p^{\mathrm{SAW}} \underset{p\uparrow p_\mathrm{c}}{\sim} C_\chi (p_\mathrm{c}-p)^{-\gamma^{\mathrm{SAW}}}, \qquad \xi_p^{\mathrm{SAW}} \underset{p\uparrow p_\mathrm{c}}{\sim} C_\xi (p_\mathrm{c}-p)^{-\nu^{\mathrm{SAW}}} \tag{3.6}$$

  （$d=4$ のときは対数補正も込み）が期待されている．振幅 C_χ, C_ξ や臨界点 p_c の値は分布 J の細かい定義や格子の形状[2]に依存して変わりうるのに対し，臨界指数 $\gamma^{\mathrm{SAW}}, \nu^{\mathrm{SAW}}$（や対数補正の冪指数）の値はそういったものに左右されないはずだと思われている．これを「臨界指数の普遍性」と呼ぶ．

- $d=2$ での値は Schramm-Löwner 発展方程式（略して SLE）による予想値である．SLE は複素解析の Löwner 発展方程式で駆動関数が 1 次元ブラウン運動になったもの．その拡散係数 $\kappa>0$ をあらわに書いて，“ SLE_κ ”と表わされることが普通である．Oded Schramm [14] によって導入され，2 次元統計力学モデルの等角不変なスケーリング極限が全て書き尽くされるものと思われている．実際，幾つかの統計力学モデルについては厳密に証明されていて，例えば「パーコレーション」のクラスター境界のスケーリング極限は SLE_6，「イジング模型」のクラスター境界のスケーリング極限は SLE_3，等が知られている．SAW の等角不変なスケーリング極限が存在するかどうかは未だ証明されていないが，もし存在するなら $\mathrm{SLE}_{8/3}$ であるはずだということまで分かっている [10]．(3.4) や (3.5) に現れた $(\gamma^{\mathrm{SAW}}, \nu^{\mathrm{SAW}}) = (43/32,\ 3/4)$ は $\mathrm{SLE}_{8/3}$ から導かれたもので，ランダムウォークの指数の値 $(\gamma^{\mathrm{RW}}, \nu^{\mathrm{RW}}) = (1, 1/2)$ とは全く異なる．

- $d=3$ での値は数値計算 [2, 3] による近似値で，やはりランダムウォークの指数の値とは全く異なる．Flory の理論 [5] による予想値 $\nu^{\mathrm{SAW}} = 3/(d+2) = 0.6$ とも有意に差がある．

[2]2 次元六角格子上の最近接 SAW では，$p_\mathrm{c} = 3/\sqrt{2+\sqrt{2}}$ であることが最近証明された [4]．

- $d=4$ での振る舞いは「4 次元」階層格子上の「弱い」SAW に対する厳密な繰り込み群解析の結果 [16] から予想された値である．弱い SAW とは (3.1) の体積排除項を

$$\prod_{0\le s<t\le|\omega|}(1-\epsilon\delta_{\omega_s,\omega_t}) \tag{3.7}$$

（ただし $0\le\epsilon\le1$）と弱めたもので，ランダムウォーク（$\epsilon=0$）と強い SAW（$\epsilon=1$）を内挿したものになっているが，$\epsilon>0$ である限り強い SAW と同じ普遍性クラスに属するものと思われている．(3.4) や (3.5) の冪的な発散部分だけ見ると，ランダムウォーク的なものに退化してしまっている．このようなことが起こる次元は「上部臨界次元」と呼ばれる．

- $d\ge5$ の場合のみ，現在のところ数学的に厳密に証明されている．その解析手段が「レース展開」である．レース展開は 1985 年，Brydges と Spencer [1] により弱い SAW を解析するために考案された．しかし，当時のレース展開の解析方法で強い SAW の臨界指数が $(\gamma^{\rm SAW},\nu^{\rm SAW})=(1,1/2)$ と退化してしまうことを証明しようとすると，次元 d を非常に高く設定しなければならなかった．上述の「ϵ が正でありさえすれば，その大小によらず同じ普遍性クラスに属する」ことを信じれば，d を十分大きく取らなければならない状況は理想的とは言えない．この問題は 1992 年，原と Slade [9] によって完全に解決された．

この節の残りでは，レース展開がどういうものなのか，どのように導出するのか，簡単に解説しよう．

(i) レース展開とは？ レース展開には 2 通りの導出法がある．(3.1) の体積排除項を代数的に展開する方法と，包含数え上げを繰り返し用いて導出する方法である．名前の由来は前者にあるのだが，何が起こっているのか理解するためには後者の方が適している．そこで，このパラグラフでは前者を大まかに説明し，次のパラグラフで後者の方法を用いたレース展開の導出法を解説する．

まず準備として，以下の記号を導入する．非負整数 $s<t$ のペアを「ボンド st」と呼ぶ．$\ell\in\mathbb{N}$ に対し，$\{0,1,\dots,\ell\}$ 上のボンド集合の冪集合を $\mathcal{B}_\ell$ と表わす．例えば，

$$\mathcal{B}_3=2^{\{01,02,03,12,13,23\}}\equiv\Big\{\varnothing,\{01\},\{02\},\{03\},\{01,02\}\dots,\{01,02,03,12,13,23\}\Big\}. \tag{3.8}$$

また，$B\in\mathcal{B}_\ell$ に対する区間 $\bigcup_{st\in B}(s,t)$ を互いに排反な開区間の和集合で書き直したとき，その排反な開区間たちの中で 0 を含むものを I_B（無ければ $I_B=\varnothing$）と表わす．例えば $B=\{01,02,12,23\}\in\mathcal{B}_3$ の場合，$\bigcup_{st\in B}(s,t)=(0,2)\,\dot\cup\,(2,3)$ なので，$I_B=(0,2)$ である．これらの記号を用いて (3.1) に現れた体積排除項を展開すると，

$$\begin{aligned}\prod_{0\le s<t\le|\omega|}(1-\delta_{\omega_s,\omega_t})&=\sum_{B\in\mathcal{B}_{|\omega|}}\prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})\\&=\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_{|\omega|}\\(I_B=\varnothing)}}\prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})+\sum_{\ell=1}^{|\omega|}\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_{|\omega|}\\(I_B=(0,\ell))}}\prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})\end{aligned} \tag{3.9}$$

と書き直せる．和を取り直すと，右辺第 1 項はそのまま

$$\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_{|\omega|}\\(I_B=\varnothing)}}\prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})=\prod_{1\le s<t\le|\omega|}(1-\delta_{\omega_s,\omega_t}) \tag{3.10}$$

となる．s の下限が 1 になっていることに注意．また (3.9) の右辺第 2 項も，ℓ 以降の和を取り直して，

$$\sum_{\ell=1}^{|\omega|}\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_{|\omega|}\\(I_B=(0,\ell))}}\prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})=\sum_{\ell=1}^{|\omega|}\bigg(\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_\ell\\(I_B=(0,\ell))}}\prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})\bigg)\prod_{\ell\le i<j\le|\omega|}(1-\delta_{\omega_i,\omega_j}) \tag{3.11}$$

となる．これらを (3.1) に戻してやると，

$$
\begin{aligned}
G_p^{\mathrm{SAW}}(x) &= \delta_{o,x} + \sum_{\substack{\omega:o\to x\\(|\omega|\ge 1)}} p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \prod_{1\le s<t\le|\omega|}(1-\delta_{\omega_s,\omega_t})\\
&\qquad + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{\omega:o\to x\\(|\omega|\ge\ell)}} p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \Bigg(\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_\ell\\(I_B=(0,\ell))}} \prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t})\Bigg) \prod_{\ell\le i<j\le|\omega|}(1-\delta_{\omega_i,\omega_j})\\
&= \delta_{o,x} + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y}\,G_p^{\mathrm{SAW}}(x-y) + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \varPi_p^{\mathrm{SAW}}(y)\,G_p^{\mathrm{SAW}}(x-y)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

が得られる．$\varPi_p^{\mathrm{SAW}}(x)$ は「連結 2 点関数」（或いは「レース展開係数」）と呼ばれ，上の式より，

$$
\varPi_p^{\mathrm{SAW}}(x) := \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{\omega:o\to x\\(|\omega|=\ell)}} p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_\ell\\(I_B=(0,\ell))}} \prod_{st\in B}(-\delta_{\omega_s,\omega_t}).
\tag{3.13}
$$

ちなみに，この連結 2 点関数を 0 で置き換えると，ランダムウォークの 2 点関数が満たす恒等式

$$
G_p^{\mathrm{RW}}(x) = \delta_{o,x} + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y}\,G_p^{\mathrm{RW}}(x-y)
\tag{3.14}
$$

と同じ格好になる．したがって，連結 2 点関数からの「影響」が十分小さければ，SAW はランダムウォークに近い挙動を示すだろうと期待される．

さて，この展開が「レース展開」と呼ばれる理由は，連結 2 点関数の和を取り直したときに現れる「最小連結グラフ」の形に由来する．例えば，$\mathcal{B}_3$ の 64 個（$=2^6$）の元 B のうち連結なもの（すなわち $I_B=(0,3)$ を満たすもの）は 40 個あるが，そのうち最小連結部分集合 L_B が $\{03\}$ であるものは 32 個（$=2^5$），$L_B=\{02,13\}$ であるものは 8 個（$=2^3$）である．それぞれグラフで表わすと，以下のように「レース」が現れる．

もちろん，これで話が終わってしまうわけではない．より詳しくレース展開の代数的な導出法を勉強したい者は，[11, 15] を参照せよ．

(ii) どのように導出するのか？ このパラグラフでは，(3.1) の体積排除項 $\mathbf{1}_{\{\omega は\ \mathrm{SAW}\}}$ に包含数え上げを繰り返し用いて (3.12) を導出し，同時に連結 2 点関数 $\varPi_p^{\mathrm{SAW}}(x)$ の意味を明らかにしていく．

まず $G_p^{\mathrm{SAW}}(x)$ の定義式

$$
G_p^{\mathrm{SAW}}(x) = \delta_{o,x} + \sum_{\substack{\omega:o\to x\\(|\omega|\ge 1)}} p^{|\omega|}\,\mathbb{P}(\{\omega\})\,\mathbf{1}_{\{\omega は\ \mathrm{SAW}\}}
\tag{3.15}
$$

を思い出そう．$|\omega|\ge 1$ なので，1 歩目の位置 $y\in\mathbb{Z}^d$ で場合分けして $\omega=(o,y)\circ\omega'$ と書けば，

$$
G_p^{\mathrm{SAW}}(x) = \delta_{o,x} + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\omega':y\to x} p^{|\omega'|}\,\mathbb{P}(\{\omega'\})\,\mathbf{1}_{\{(o,y)\circ\omega' は\ \mathrm{SAW}\}}
\tag{3.16}
$$

となる．ところが,「SAW の劣加法性」のところで注意したように，

$$
\mathbf{1}_{\{(o,y)\circ\omega' は\ \mathrm{SAW}\}} = \mathbf{1}_{\{(o,y)\ は\ \mathrm{SAW}\}}\,\mathbf{1}_{\{\omega' は\ \mathrm{SAW}\}}\,\mathbf{1}_{\{(o,y)\cap\omega'=\{y\}\}}
\tag{3.17}
$$

である．最後の定義関数が 2 つのパス (o,y) と ω' の体積排除効果を表わしている．この効果さえなければ，(o,y) に関する部分と ω' に関する部分はきれいに積に分解できる．しかし無視するわけにもいかないから，包含数え上げの等式

$$
\mathbf{1}_{\{(o,y)\cap\omega'=\{y\}\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{(o,y)\cap\omega'\ne\{y\}\}}
\tag{3.18}
$$

を使うのである．右辺の定義関数に入っている条件は,「元々の共通点 y 以外に (o, y) と ω' の共通点が存在する」ということ，すなわち“ $\omega' \ni o$ ”ということを主張している．以上を纏めると，(3.16) の第 2 項は[3]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\omega':y\to x} p^{|\omega'|}\,\mathbb{P}(\{\omega'\})\,\mathbf{1}_{\{(o,y)\circ\omega'\text{は SAW}\}} \\
&= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\omega':y\to x} p^{|\omega'|}\,\mathbb{P}(\{\omega'\})\,\mathbf{1}_{\{\omega'\text{は SAW}\}}\big(1-\mathbf{1}_{\{\omega'\ni o\}}\big) \\
&= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y}\, G_p^{\text{SAW}}(x-y) - \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\omega':y\to o\to x} p^{|\omega'|}\,\mathbb{P}(\{\omega'\})\,\mathbf{1}_{\{\omega'\text{は SAW}\}}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

となる．これで (3.12) の第 2 項までが得られた．

次に (3.19) の右辺第 2 項を調べよう．まず $\omega' : y \to o \to x$ の前半部分を $\lambda : y \to o$，後半部分を $\lambda' : o \to x$ と書けば，

$$
\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\omega':y\to o\to x} p^{|\omega'|}\,\mathbb{P}(\{\omega'\})\,\mathbf{1}_{\{\omega'\text{は SAW}\}} = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\substack{\lambda:y\to o\\ \lambda':o\to x}} p^{|\lambda\circ\lambda'|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\circ\lambda'\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\circ\lambda'\text{は SAW}\}}. \tag{3.20}
$$

ここで (3.17) と同様の恒等式

$$
\mathbf{1}_{\{\lambda\circ\lambda'\text{は SAW}\}} = \mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAW}\}}\,\mathbf{1}_{\{\lambda'\text{は SAW}\}}\,\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'=\{o\}\}} \tag{3.21}
$$

を使う．最後の定義関数のせいで λ に関する部分と λ' に関する部分が分解できないので，さらに包含数え上げの等式

$$
\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'=\{o\}\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'\neq\{o\}\}} \tag{3.22}
$$

も使えば，

$$
(3.20) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\lambda:y\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAW}\}}\Bigg(G_p^{\text{SAW}}(x) - \sum_{\lambda':o\to x} p^{|\lambda'|}\,\mathbb{P}(\{\lambda'\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda'\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'\neq\{o\}\}}\Bigg) \tag{3.23}
$$

が得られる.「端点以外は自己回避的であるパス $\lambda : o \to o$」を自己回避ループ（SAL）と呼ぶことにすると，

$$
\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y} \sum_{\lambda:y\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAW}\}} = \sum_{\lambda:o\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}} \tag{3.24}
$$

と表わせる．ここで

$$
\underset{o}{\bigcirc} := \sum_{\lambda:o\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}} \tag{3.25}
$$

というダイアグラム表示を導入すると，

$$
(3.23) = \underset{o}{\bigcirc} \times G_p^{\text{SAW}}(x) - \sum_{\lambda:o\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}} \sum_{\lambda':o\to x} p^{|\lambda'|}\,\mathbb{P}(\{\lambda'\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda'\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'\neq\{o\}\}}. \tag{3.26}
$$

この式と (3.16)，(3.19) を合わせれば，連結 2 点関数の一部が明らかになった式

$$
\begin{aligned}
G_p^{\text{SAW}}(x) &= \delta_{o,x} + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y}\, G_p^{\text{SAW}}(x-y) - \underset{o}{\bigcirc} \times G_p^{\text{SAW}}(x) \\
&\quad + \sum_{\lambda:o\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}} \sum_{\lambda':o\to x} p^{|\lambda'|}\,\mathbb{P}(\{\lambda'\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda'\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'\neq\{o\}\}}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

[3]最初から $J_{o,o} = 0$ と仮定していたので，$\mathbf{1}_{\{(o,y)\text{ は SAW}\}}$ $(= \mathbf{1}_{\{o\neq y\}})$ は省略した．

が得られる．

さらに連結 2 点関数の高次の項を得るためには，(3.27) の最後の定義関数 $\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'\neq\{o\}\}}$ からの寄与を考える必要がある．この定義関数が 1 であるとき，λ と λ' は o 以外の点でも交わっている．$\lambda' : o \to x$ が初めて λ と交わる点 $y \neq o$ とし，λ' の前半部分を $\eta : o \to y$，後半部分を $\eta' : y \to x$ と書けば，

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda:o\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}} \sum_{\lambda':o\to x} p^{|\lambda'|}\,\mathbb{P}(\{\lambda'\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda'\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\lambda'\neq\{o\}\}}\\&=\sum_{y\neq o}\sum_{\lambda:o\to y\to o} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}} \sum_{\substack{\eta:o\to y\\ \eta':y\to x}} p^{|\eta\circ\eta'|}\,\mathbb{P}(\{\eta\circ\eta'\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\eta=\{o,y\}\}}\mathbf{1}_{\{\eta\circ\eta'\text{は SAW}\}}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

ここで再度 (3.17) や (3.21) と同様の恒等式

$$\mathbf{1}_{\{\eta\circ\eta'\text{は SAW}\}} = \mathbf{1}_{\{\eta\text{は SAW}\}}\,\mathbf{1}_{\{\eta'\text{は SAW}\}}\,\mathbf{1}_{\{\eta\cap\eta'=\{y\}\}} \tag{3.29}$$

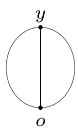
を使い，さらに最後の定義関数に包含数え上げの等式

$$\mathbf{1}_{\{\eta\cap\eta'=\{y\}\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\eta\cap\eta'\neq\{y\}\}} \tag{3.30}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}(3.28) &= \sum_{y\neq o}\sum_{\substack{\lambda:o\to y\to o\\ \eta:o\to y}} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}}\,p^{|\eta|}\,\mathbb{P}(\{\eta\})\,\mathbf{1}_{\{\eta\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\eta=\{o,y\}\}}\\&\quad\times\left(G_p^{\mathrm{SAW}}(x-y) - \sum_{\eta':y\to x} p^{|\eta'|}\,\mathbb{P}(\{\eta'\})\,\mathbf{1}_{\{\eta'\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\eta\cap\eta'\neq\{y\}\}}\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

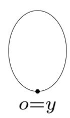
が得られる．ここで



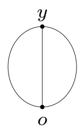
$$:= \sum_{\substack{\lambda:o\to y\to o\\ \eta:o\to y(\neq o)}} p^{|\lambda|}\,\mathbb{P}(\{\lambda\})\,\mathbf{1}_{\{\lambda\text{は SAL}\}}\,p^{|\eta|}\,\mathbb{P}(\{\eta\})\,\mathbf{1}_{\{\eta\text{は SAW}\}}\mathbf{1}_{\{\lambda\cap\eta=\{o,y\}\}} \tag{3.32}$$

というダイアグラム表示を導入すると，(3.27)–(3.28) と (3.31) により，

$$G_p^{\mathrm{SAW}}(x) = \delta_{o,x} + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} pJ_{o,y}\,G_p^{\mathrm{SAW}}(x-y) + \sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\Bigg(-$$



$$+$$

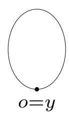


$$\Bigg)\,G_p^{\mathrm{SAW}}(x-y) - [\text{剰余項}] \tag{3.33}$$

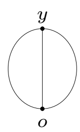
となる．これで連結 2 点関数の 2 次の項までが導出できた．

以上の操作を [剰余項] に繰り返し施していくと，形式的には (3.12) と，連結 2 点関数のダイアグラム表示

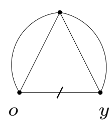
$$\mathit{\Pi}_p^{\mathrm{SAW}}(y) = -$$



$$+$$



$$-$$



$$+\cdots \tag{3.34}$$

に到達する．スラッシュの付いていない線が「1 歩以上のパスたち」からの寄与を表わすのに対し，スラッシュの付いた線は「0 歩も許す」ことを意味している．また，ラベルの付いていないダイアグラムの点は，$\mathbb{Z}^d$ 上で和が取られているものと見做す．より高次のダイアグラムの定義や形を知りたい者は，例えば [11, 15] を参照．

(iii) 何故 $d>4$ でないとダメなのか？ (i) の最後で「連結 2 点関数の影響が十分小さければ，SAW はランダムウォークに近い挙動を示すだろう」と述べた.「影響が小さい」という表現は非常に曖昧な表現だが，少なくとも連結 2 点関数の可積分性くらいは要求している．実は「SAW の劣加法性」を使って荒っぽく押さえる[4]と，次元 d に依らず

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}|\Pi_p^{\mathrm{SAW}}(y)|\le\sum_{N=1}^{\infty}\biggl(\sup_{x\neq o}G_{p_\mathrm{c}}^{\mathrm{SAW}}(x)+\sum_{x\neq o}G_{p_\mathrm{c}}^{\mathrm{SAW}}(x)^2\biggr)^N \tag{3.35}$$

が成り立つ．ここで本来は「この和は収束して小さく，その結果として SAW はランダムウォークに近い」ということを示さなければならないのだが，逆にもし SAW がランダムウォークに近いことが分かっているなら，最低でも和の各項は収束していなければならないはず．いま $G_{p_\mathrm{c}}^{\mathrm{SAW}}(x)\simeq G_1^{\mathrm{RW}}(x)$ とすると，グリーン関数は $d>2$ で $G_1^{\mathrm{RW}}(x)\approx|x|^{2-d}$ だったから，

$$\sum_{x\neq o}G_{p_\mathrm{c}}^{\mathrm{SAW}}(x)^2\simeq\sum_{x\neq o}G_1^{\mathrm{RW}}(x)^2\approx\sum_{x\neq o}|x|^{2(2-d)}\overset{d>4}{<}\infty. \tag{3.36}$$

これが $d>4$ となっていなければならない直観的な説明である．

実際 $d\gg4$ の最近接 SAW の場合，$\sup_{x\neq o}G_{p_\mathrm{c}}^{\mathrm{SAW}}(x)$ も $\sum_{x\neq o}G_{p_\mathrm{c}}^{\mathrm{SAW}}(x)^2$ も共に $O(d^{-1})$ であることが証明できる（概略は [6] で見ることができる）．これを $d\ge5$ まで下ろしてくるためには，より精度の高い評価が必要である．詳しくは [9] を参照せよ．

4 結び

「レース展開」によって SAW の体積排除効果を連結 2 点関数として分離し，巨視的にはランダムウォークの 2 点関数が満たす恒等式と似た畳み込み等式を導出してみせた．さらに上部臨界次元より高い次元では連結 2 点関数が小さく，したがって SAW の臨界現象はランダムウォークの振る舞いで近似できることを概説した．本講演では SAW に対するレース展開しか解説できなかったが，その他にも $d>4$ のイジング模型 [13]，$d>6$ のパーコレーション [7]，$d>8$ の格子木（lattice trees）や格子動物（lattice animals）[8]，$d>4$ のコンタクトプロセス [12] 等がある．レース展開は，様々な統計力学モデルの高次元臨界現象を解析するための非常に強力な手法なのである．

本講演を聴講した学生さん達が臨界現象に興味を持ち，さらに詳しくレース展開や種々の解析手法を勉強して，将来「低次元」臨界現象にも光を当てられる新しい解析手法を確立しててくれたら望外の喜びである．

参考文献

[1] Brydges, D.C., Spencer, T., *Self-avoiding walk in 5 or more dimensions*, Comm. Math. Phys., **97** (1985), 125–148.

[2] Caracciolo, S., Causo, M.S., Pelissetto, A., *High-precision determination of the critical exponent γ for self-avoiding walks*, Phys. Rev. E, **57** (1998), 1215–1218.

[3] Clisby, N., *Accurate estimate of the critical exponent ν for self-avoiding walks via a fast implementation of the pivot algorithm*, Phys. Rev. Lett., **104** (2010), 055702.

[4] Duminil-Copin, H., Smirnov, S., *The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$*, Preprint, (2010), arXiv:1007.0575.

[5] Flory, P.J., *The configuration of a real polymer chain*, J. Chem. Phys., **17** (1949), 303–310.

[4] もっとシャープな評価は，例えば [15, Theorem 4.1] に載っている．

[6] 原 隆, **高次元における** *Self-Avoiding Walk* **とレース展開**, 数理科学, 2011 年 2 月号, 7–12.

[7] Hara, T., Slade, G., *Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions*, Comm. Math. Phys., **128** (1990), 333–391.

[8] Hara, T., Slade, G., *On the upper critical dimension of lattice trees and lattice animals*, J. Stat. Phys., **59** (1990), 1469–1510.

[9] Hara, T., Slade, G., *Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour*, Comm. Math. Phys., **147** (1992), 101–136.

[10] Lawler, G.F., Schramm, O., Werner, W., *On the scaling limit of planner self-avoiding walk*, Proc. Symposia Pure Math., **72** (2004), 339–364.

[11] Madras, N., Slade, G., The Self-Avoiding Walk (Birkhäuser, Boston, 1993).

[12] Sakai, A., *Mean-field critical behavior for the contact process*, J. Stat. Phys., **104** (2001), 111–143.

[13] Sakai, A., *Lace expansion for the Ising model*, Comm. Math. Phys., **272** (2007), 283–344.

[14] Schramm, O., *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math., **118** (2000), 221–288.

[15] Slade, G., *The lace expansion and its applications*, Lecture Notes in Math., **1879** (2006).

[16] Slade, G., *The self-avoiding walk: a brief survey*, To appear in *Surveys in Stochastic Processes* (Proceedings of the 33rd SPA Conference in Berlin, 2009).