

平成30年度夏ターム「数理科学概説」(前半)  
有向パーコレーションの相転移・臨界現象

講義日程：6/13, 6/20, 6/27, 7/4

担当教員：坂井 哲<sup>1</sup>

## 目次

1	はじめに	1
1.1	モデルの定義	2
1.2	基本的な観測量	3
1.3	基本的な概念や道具	4
2	臨界点の一意性	5
3	パーコレーション確率の連続性	8
4	臨界感受率の発散	9
5	臨界現象に関する厳密な結果	11
5.1	臨界指数	12
5.2	$d = 1$ でのハイパースケーリング等式	13
5.3	平均場臨界現象の厳密な証明(レース展開の紹介)	14

## 1 はじめに

Broadbent, Hammersley[7]は、流体のランダムな拡散を記述するモデルとして、従来の拡散過程ではなく、媒質がランダムである状況を陽に扱う「パーコレーション」を提唱した。それ以来60年、パーコレーションは大勢の研究者を魅了し、現在も積極的に研究されている。最近では、Sano, Tamai[43]が、乱流の発生は「有向パーコレーション」の臨界現象と同じユニバーサリティクラスに属している可能性がある、ということを指摘して話題になった。有向パーコレーションやその連続時間版である「コンタクトプロセス」(業界によっては「SISモデル」とも呼ばれる)は、さまざまなネットワーク上の感染症伝搬を記述するモデルとして活発に研究されている。

有向パーコレーションの応用が先行する一方で、その理論的な研究、とくに数学的に厳密な理論に関するものの進歩は非常に遅い。そのせいもあって、どこまでが数学的に厳密

<sup>1</sup><http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/>

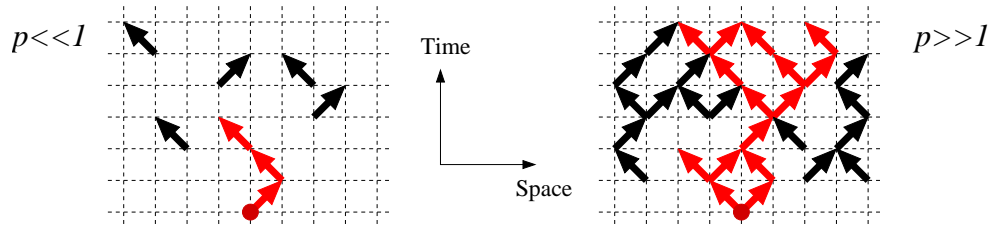


図 1:  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^1$  上の最近接モデルにおける  $\mathcal{C}(o)$  のサンプル.

に分かっていて、どこからが多少の厳密性に目を瞑って得た結果なのか、境界線がぼやけてしまっているように思われる. このままでは、有向パーコレーションの相転移・臨界現象を真に理解することは到底望めない.

そこで本講義では、有向パーコレーションの相転移・臨界現象に関して 2018 年現在までに得られている厳密な結果のうち、比較的簡単に証明できるものを選んで、4 回の講義で概観する. 講義の随所で未解決問題にも言及したい.

尚、この講義ノートは「Summer School 数理物理 2017」(2017 年 8 月 25~27 日@東大)の講義ノートをベースに、(まだプロの研究者の域に達していない) 大学院生が楽しめるよう、もっとも簡単な最近接モデルに限定して改修したものである.

## 1.1 モデルの定義

話を簡単にするため、我々の棲む時空間を  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  とする.  $\mathbb{Z}_+ \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$  が時間,  $d$  次元整数格子  $\mathbb{Z}^d$  が空間<sup>2</sup>である. その時空間の点を  $x = (\tau_x, \vec{x})$  と表わす. また、時空間の 2 点  $x, y$  が  $\tau_y = \tau_x + 1$  かつ  $\|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = 1$  をみたすとき、そのペア  $[x, y)$  を「 $x$  から  $y$  への (有向) ボンド」と呼ぶ. ボンドの集合を  $\mathbb{B}$  で表わす.

各ボンド<sup>3</sup>には「開」または「閉」を取る確率変数が与えられているものとする. これらの確率変数たちは互いに独立で、おのおの確率  $p \in [0, 1]$  で開, 確率  $1 - p$  で閉を取るものとする. この確率変数系の直積測度<sup>4</sup>を  $\mathbb{P}_p$  と表わし、その期待値を  $\mathbb{E}_p$  と表わす.

我々は、原点  $o \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  からランダムに開いた経路で繋がったクラスター (図 1 を参照) に興味がある. 時空間の 2 点  $x, y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  (ただし  $\tau_x \leq \tau_y$ ) が開いた経路で繋がる (それを単に  $x \rightarrow y$  と表わす) とは、 $x = y$  であるか、または次の 2 条件をみたす時空間の点列  $\{v_j\}_{j=0}^{\tau_y - \tau_x}$  が存在することとする.

- $v_0 = x, v_{\tau_y - \tau_x} = y,$
- 各ボンド  $[v_{j-1}, v_j) \in \mathbb{B}$  は開.

<sup>2</sup>空間を  $\mathbb{Z}^d$  とする代わりに、別の格子 (例えば 2 次元ならば三角格子や六方格子など) を考えても良い. 重要なのは、或る意味での等方性が保たれていることである.

<sup>3</sup>各ボンドがランダムに開閉するモデルは「ボンドパーコレーション」と呼ばれるのに対し、各点がランダムに開閉するモデルは「サイトパーコレーション」と呼ばれる. ボンドパーコレーションの方が扱い易い事情もあって、本講演ではボンドパーコレーションに話を限り、いちいち「ボンド」をつけて呼ばないことにする.

<sup>4</sup>Kolmogorov の拡張定理により、有限個のボンドに関する直積測度から  $\mathbb{P}_p$  を一意的に構成できることが知られている.

点  $x \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  から開いた経路で繋がった時空間の点集合を  $\mathcal{C}(x)$  と表わし、それを「 $x$  の開クラスター」と呼ぶ：

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d : x \rightarrow y\}. \quad (1.1)$$

## 1.2 基本的な観測量

原点  $o$  の開クラスター  $\mathcal{C}(o)$  の振る舞いを理解するため、以下の観測量を導入する：

- 時刻  $t$  における生存確率：

$$\theta_p(t) := \mathbb{P}_p(o \rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d) = \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{x:\tau_x=t} \{o \rightarrow x\}\right). \quad (1.2)$$

- パーコレーション確率：

$$\theta_p := \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_p(t) = \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(o)| = \infty). \quad (1.3)$$

- 2点関数：

$$\varphi_p(x) := \mathbb{P}_p(o \rightarrow x). \quad (1.4)$$

- 感受率：

$$\chi_p := \sum_{t \in \mathbb{Z}_+} \underbrace{\sum_{x:\tau_x=t} \varphi_p(x)}_{=: N_p(t)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d} \varphi_p(x) = \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}(o)|]. \quad (1.5)$$

これらの定義から、以下のことが分かってくる：

- $\theta_p(t)$  や 2点関数,  $N_p(t)$  は  $p$  について解析的なので、相転移のような特異性を捕まえることはできない。相転移を捕まえるなら、 $\theta_p$  や  $\chi_p$  などの極限量を用いるべき。
- $\theta_p$  と  $\chi_p$  は共に  $p$  について単調増加<sup>5</sup>なので、次の二つの臨界点が定義できる：

$$p_H = \inf\{p : \theta_p > 0\}, \quad p_T = \sup\{p : \chi_p < \infty\}. \quad (1.7)$$

明らかに  $\frac{1}{2d} \leq p_T \leq p_H$  (何故か?) であるが、 $p_T = p_H$  が成立するかどうかは非自明。

- $\theta_p$  は  $p$  について単調増加な関数列の単調減少極限なので、 $p$  について右連続。左連続かどうかは非自明。また、 $\chi_p$  の  $p < p_T$  についての連続性は自明だが、 $p \uparrow p_T$  における振る舞い (発散するのか、それとも有限の値に留まるのか) は非自明。

<sup>5</sup>各  $n \in \mathbb{N}$  で  $\mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(o)| \geq n)$  が  $p$  の単調増加関数であることを示せば十分。なぜならば、

$$\theta_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(o)| \geq n), \quad \chi_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(o)| \geq n). \quad (1.6)$$

$\mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(o)| \geq n)$  の単調性は、一様乱数を用いたカップリング法で証明するのが一般的。[18] を参照せよ。

上で述べた相転移に関する「非自明」な主張は、物理では当然の事実として受け入れられているが、数学的に厳密に証明するとなると一筋縄ではいかない。実際、モデルが提唱されてから臨界点の一意性や臨界感受率の発散が証明されるまでに約 35 年、 $\theta_p$  の連続性が証明されるまでに約 50 年かかっている：

- $\lim_{p \uparrow p_T} \chi_p$  の発散  $\Rightarrow$  Aizenman, Newman[2] (1984 年) .
- 臨界点の一意性  $\Rightarrow$  Aizenman, Barsky[1] (1987 年)
- $\theta_p$  の連続性  $\Rightarrow$  Grimmett, Hiemer[19] (2002 年) .

### 1.3 基本的な概念や道具

この節を閉じる前に、次節以降で使う重要な概念や不等式などを纏めておく。

- 開いたボンドを 1, 閉じたボンドを 0 に対応させる関数  $\omega : \mathbb{B} \rightarrow \{0, 1\}$  をボンド配置と呼ぶ。二つのボンド配置  $\omega, \omega' \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}}$  が与えられたとき,

$$\omega \leq \omega' \quad \stackrel{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \quad \forall b \in \mathbb{B} \text{ で } \omega(b) \leq \omega'(b). \quad (1.8)$$

この大小関係が全順序関係ではないことに注意する。

- ボンド配置の集合を事象と呼ぶ。事象  $A$  が単調増加であるとは、 $\omega \in A$  かつ  $\omega \leq \omega'$  ならば  $\omega' \in A$  であることと定義する。
- 二つの事象  $A, B$  が「ボンドを共有しないで実現」するようなボンド配置  $\omega$  の集合を  $A \circ B$  と表わす。より正確な定義は,

$$A \circ B = \left\{ \omega : \exists E \subset \mathbb{B} \left[ \omega_E^0 \in A, \omega_{E^c}^0 \in B \right] \right\}, \quad \omega_E^j(b) := \begin{cases} j & [b \in E], \\ \omega(b) & [b \notin E]. \end{cases} \quad (1.9)$$

パーコレーションの問題を考える上で、次の FKG 不等式と BK 不等式（証明は [6] を参照）は必須である：

$$A, B \text{ が単調増加} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_p(A \cap B) \stackrel{\text{FKG}}{\geq} \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B) \stackrel{\text{BK}}{\geq} \mathbb{P}_p(A \circ B). \quad (1.10)$$

- もう一つの必須アイテムである Russo の公式（証明は [18, §2.4] を参照）を述べるため、ピボタルボンドの概念を導入する。或る事象  $A$  に対し、ボンド配置  $\omega$  の関数（すなわち確率変数）として

$$\text{piv}A(\omega) = \{b \in \mathbb{B} : \omega_b^1 \in A, \omega_b^0 \notin A\} \cup \{b \in \mathbb{B} : \omega_b^0 \in A, \omega_b^1 \notin A\} \quad (1.11)$$

を定義し、その要素を「 $A$  のピボタルボンド」と呼ぶ。もし  $A$  が単調増加なら、右辺は最初のボンド集合だけであることに注意。Russo の公式とは、単調増加事象  $A$  が依存するボンド集合  $\mathbb{B}_A$  が有限のときに成り立つ、次の等式のことである：

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{[x,y] \in \mathbb{B}_A} \mathbb{P}_p([x,y] \in \text{piv}A) = \mathbb{E}_p[|\text{piv}A|]. \quad (1.12)$$

## 2 臨界点の一意性

有向パーコレーションの臨界点の一意性は Aizenman, Barsky[1] によって解決されたが, ここでは最近の Duminil-Copin, Tassion[15] を紹介する. 前者の論文はかなりテクニカルで初学者には難しかったが, それを劇的に簡単にしたのが後者の論文である.

Duminil-Copin, Tassion[15] の内容に入る前に, まず有向パーコレーションの Markov 性を利用した不等式 (とその帰結) を示しておく. これは等方的なパーコレーションにおける Simon の不等式 [44] に相当するものである.

まず, 原点  $o$  を含む有限集合  $S \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  に対して

$$\Phi_p(S) := \sum_{x \in S, y \notin S} \mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{S \text{ 上}} x, [x, y] \text{ は開} \right) \quad (2.1)$$

とし,

$$p_c := \sup \left\{ p : \exists S \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d \left[ S \ni o, |S| < \infty, \Phi_p(S) < 1 \right] \right\} \quad (2.2)$$

と定義する.

**定理 2.1** (Markov 性を利用した不等式とその帰結). 任意の  $p \geq 0$ , 原点  $o$  を含む有限集合  $S \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$ ,  $t > \max_{z \in S} \tau_z$  に対し, 次の不等式が成り立つ:

$$N_p(t) \leq \sum_{x \in S, y \notin S} \mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{S \text{ 上}} x, [x, y] \text{ は開} \right) N_p(t - \tau_y). \quad (2.3)$$

もし  $p < p_c$  ならば, 上の不等式から  $N_p(t)$  の  $t$  に関する指数関数的減衰を導くことができ, したがって  $\chi_p < \infty$  (すなわち  $p_c \leq p_T$ ) が得られる.

次の定理で述べられる微分不等式が, Duminil-Copin, Tassion[15] のカギである.

**定理 2.2** (Duminil-Copin, Tassion の不等式とその帰結 [15]). 任意の  $p > 0$  と  $t \in \mathbb{Z}_+$  に対し, 次の微分不等式が成り立つ:

$$\frac{d}{dp} \theta_p(t) \geq \frac{1}{p} \left( \inf_{o \in S \subset [0, t] \times \mathbb{Z}^d} \Phi_p(S) \right) (1 - \theta_p(t)). \quad (2.4)$$

もし  $p > p_c$  ならば, 上の微分不等式を区間  $[p_c, p]$  で積分し,  $t \uparrow \infty$  極限を取れば,  $\theta_p \geq 1 - p_c/p > 0$  (すなわち  $p_H \leq p_c$ ) が得られる.

以上の二つの結果と, 定義から明らかな  $p_T \leq p_H$  を合わせれば, 臨界点の一意性が得られる. 以降, 臨界点の表記を  $p_c$  で統一する.

< (2.4) の証明 > まず Russo の公式 (1.12) により,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \theta_p(t) &= \sum_{[x,y]} \mathbb{P}_p \left( [x,y] \in \text{piv} \{ o \rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d \} \right) \\ &\geq \sum_{[x,y]} \mathbb{P}_p \left( [x,y] \in \text{piv} \{ o \rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d \}, [x,y] \text{ は開} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られる. ここで

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d : \tau_z \in [0, t), \|z\|_1 < t, z \not\rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d \right\} \quad (2.6)$$

というランダムな集合を定義すると, (2.5) の右辺の確率は

$$\mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{\mathcal{S} \text{ 上 } \tau} x, \mathcal{S} \not\ni y \right) = \sum_{o \in SC[0,t) \times \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{x \in S, y \notin S\}} \mathbb{P}_p \left( \mathcal{S} = S, o \xrightarrow{S \text{ 上 } \tau} x \right) \quad (2.7)$$

と書ける. ここで, 事象  $\{o \xrightarrow{S \text{ 上 } \tau} x\}$  は両端点が  $S$  に含まれるボンドたちの状態が決まるのに対し, 事象  $\{\mathcal{S} = S\}$  は少なくとも一方の端点が  $S$  の補集合に含まれるボンドたちの状態が決まる, ということに注意すると,

$$\mathbb{P}_p \left( \mathcal{S} = S, o \xrightarrow{S \text{ 上 } \tau} x \right) = \mathbb{P}_p(\mathcal{S} = S) \mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{S \text{ 上 } \tau} x \right) \quad (2.8)$$

のように分解できる. したがって,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \theta_p(t) &\geq \sum_{[x,y]} \sum_{o \in SC[0,t) \times \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{x \in S, y \notin S\}} \mathbb{P}_p(\mathcal{S} = S) \mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{S \text{ 上 } \tau} x \right) \\ &= \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{o \in SC[0,t) \times \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(\mathcal{S} = S)}_{=1-\theta_p(t)} \underbrace{\sum_{x \in S, y \notin S} \mathbb{P}_p \left( o \xrightarrow{S \text{ 上 } \tau} x, [x,y] \text{ は開} \right)}_{=\Phi_p(S)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となり, (2.4) が導かれる. ■

定理 2.1 により,  $p < p_c$  では  $N_p(t)$  が指数関数的に減衰することが分かった. その減衰レートは, 実は生存確率の指数関数的減衰レート<sup>6</sup>と同じだということを主張しているのが, 次の定理である.

**定理 2.3** (非自明な緩和時間の存在性). 任意の  $p \in (0, p_c)$  に対して,

$$\exists T_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\log \theta_p(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\log N_p(t)} \in (0, \infty).$$

この  $T_p$  を「緩和時間」と呼ぶ.

<sup>6</sup> $p > p_c$  では,  $\theta_p(t) - \theta_p$  も  $t$  について指数関数的に減衰することが証明されている [33].

<証明> Markov 性と並進対称性により, 任意の  $s, t \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} N_p(s+t) &= \sum_{x:\tau_x=s+t} \mathbb{P}_p \left( \bigcup_{y:\tau_y=s} \{o \rightarrow y \rightarrow x\} \right) \\ &\leq \sum_{y:\tau_y=s} \varphi_p(y) \sum_{x:\tau_x=s+t} \varphi_p(x-y) = N_p(s) N_p(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

が成り立つ. また, Markov 性と単調性により, 任意の  $s, t \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \theta_p(s+t) &= \theta_p(s) \mathbb{P}_p \left( o \rightarrow \{s+t\} \times \mathbb{Z}^d \mid o \rightarrow \{s\} \times \mathbb{Z}^d \right) \\ &= \theta_p(s) \mathbb{P}_p \left( \bigcup_{x \in \mathcal{C}(o):\tau_x=s} \{x \rightarrow \{s+t\} \times \mathbb{Z}^d\} \mid o \rightarrow \{s\} \times \mathbb{Z}^d \right) \\ &\geq \theta_p(s) \theta_p(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

が成り立つ. したがって  $\{\log N_p(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  は劣加法的な数列であり,  $\{\log \theta_p(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  は優加法的な数列であるので, 次の関係が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log N_p(t)}{t} = \inf_{t \in \mathbb{N}} \frac{\log N_p(t)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \theta_p(t)}{t} = \sup_{t \in \mathbb{N}} \frac{\log \theta_p(t)}{t}. \quad (2.12)$$

ところが  $D$  の台は有限だと仮定していたので,

$$\theta_p(t) \leq N_p(t) = \mathbb{E}_p \left[ \underbrace{\sum_{x:\tau_x=t} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d\}}}_{=O(t^d)} \right] = O(t^d) \theta_p(t) \quad (2.13)$$

が得られ, (2.12) の二つの極限は一致することが分かる. それを  $-1/T_p$  としよう.

ところで,  $0 < p < p_c$  では  $\chi_p \equiv \sum_{t \in \mathbb{Z}_+} N_p(t) < \infty$  なのだから,  $N_p(t_*) < 1$  となるような  $t_* \in \mathbb{N}$  が存在する. したがって

$$0 > \frac{\log N_p(t_*)}{t_*} \geq \inf_{t \in \mathbb{N}} \frac{\log N_p(t)}{t} = \frac{-1}{T_p} = \sup_{t \in \mathbb{N}} \frac{\log \theta_p(t)}{t} \geq \log \theta_p(1). \quad (2.14)$$

ところが

$$\theta_p(1) = 1 - (1-p)^{2d} > 0 \quad (2.15)$$

なので  $\log \theta_p(1) > -\infty$  となり, したがって  $T_p \in (0, \infty)$  が帰結される. ■

本節の最後として, 臨界点の値の評価 (数学的に厳密に証明されているもののみ) について触れておく. 全ての次元  $d \geq 1$  で  $p_c$  の値が非自明である (0 や 1 に退化していない) ことは知られているが, その正確な値が分かっている例は今のところ一つも無い. 1次元の場合<sup>7</sup>,

$$2 - \sqrt{2} = 0.5857 \dots \leq p_c \leq \frac{2}{3} = 0.6666 \dots \quad (2.16)$$

<sup>7</sup>級数展開法によって約 0.644700185 と評価されているらしい [31].

であることが知られている [31]. 他方, 高次元極限では, [14] の結果を本講義の設定で読みかえると,

$$\frac{1}{2d} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2d} \right)^3 + o(d^{-3}) \leq p_c \leq \frac{1}{2d} + \left( \frac{1}{2d} \right)^3 + O(d^{-4}) \quad (2.17)$$

という評価が得られている. 上界と下界の共通主要項  $\frac{1}{2d}$  は「分枝過程」の臨界点であることに注目.

### 3 パーコレーション確率の連続性

前節の定理 2.2 では, 臨界点の一意性の副産物として,  $p > p_c$  のとき  $\theta_p \geq 1 - p_c/p$  であることも示された. しかし, これでは  $p_c$  直上で  $\theta_p$  が不連続転移する可能性を排除できない.

次の定理は, 第 1.2 節で述べた  $\theta_p$  の右連続性と合わせると, 全ての  $p$  で  $\theta_p$  が連続であることを主張している.

**定理 3.1** (パーコレーション確率の連続性 [19]).

(a) 全ての  $p \leq p_c$  で  $\theta_p = 0$ .

(b) 任意の  $x, y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  に対して

$$\mathbb{P}_p \left( \bigcup_z \{x \rightarrow z, y \rightarrow z \rightarrow \infty\} \mid x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty \right) = 1 \quad (3.1)$$

が成り立ち, したがって  $\theta_p$  は  $p > p_c$  で左連続.

等方的なパーコレーションでも同等の主張が成り立つか興味のあるところだ. (a) に相当するもの (とくに臨界点直上での連続性  $\theta_{p_c} = 0$  について) は 2次元と  $d \geq 11$  のとき証明されているが, 一般の次元で正しいかどうかは現在も未解決である. (b) に相当するものは有向パーコレーションよりも先に解決されている (例えば [9] を参照). (3.1) は或る意味「無限クラスターの一意性」を述べている.

(a) の主張は, 有向パーコレーションよりも先に, コンタクトプロセスに対して初めて証明された [5]. その主張がもっと広いクラスの有向パーコレーションに対しても成立すること, さらに無限クラスターの一意性 (b) を示したのが Grimmett, Hiemer [19] である.

定理の主張は重要だが, 証明は非常にテクニカルで, それを説明するために必要な時間は長大となるろう. 実際, 本講義を通して伝えたいと思っているアプローチとは性格が相当異なるので, これらの証明に時間を費やすことは本望ではない.

以下では (3.1) を使って  $\theta_p$  が  $p > p_c$  で左連続であることを説明するだけに留める.



<超臨界相における  $\theta_p$  の左連続性> 一様乱数によるカップリングを使う.  $\{X_b\}_{b \in \mathbb{B}}$  を互いに独立な  $[0, 1]$  上の一様乱数系とし, その直積測度を  $\mathbb{P}$  とする. また,  $\{\xi_p(b)\}_{b \in \mathbb{B}}$  を

$$\xi_p([u, v]) = \begin{cases} 1 & [X_{[u,v]} < p \text{ のとき} \\ 0 & [X_{[u,v]} \geq p \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.2)$$

と定義し,  $\xi_p(b) = 1$  をみたすボンド  $b$  たちを使って原点  $o$  から繋がる点の集合を  $\mathcal{C}_p(o)$  とする. このとき,

$$\theta_p = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(o)| = \infty), \quad \lim_{n \uparrow \infty} \theta_{p - \frac{1}{n}} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|\mathcal{C}_{p - \frac{1}{n}}(o)| = \infty\}\right). \quad (3.3)$$

したがって, もし  $p > p_c$  における左連続性を示したければ,

$$\theta_p - \lim_{n \uparrow \infty} \theta_{p - \frac{1}{n}} = \theta_p \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|\mathcal{C}_{p - \frac{1}{n}}(o)| = \infty\} \mid |\mathcal{C}_p(o)| = \infty\right)\right) = 0 \quad (3.4)$$

を示せば十分.

そこで, まず  $p > p_c$  と  $|\mathcal{C}_p(o)| = \infty$  を仮定しよう. 任意の  $q \in (p_c, p)$  を選ぶと, 確率 1 で  $|\mathcal{C}_q(x)| = \infty$  となる点  $x \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$  が世界のどこかに存在する (末尾事象だから). ところが, (3.1) が暗示する通り, 確率 1 で或る  $z \in \mathcal{C}_q(x)$  があって  $\mathcal{C}_q(z) \subset \mathcal{C}_p(o)$  (さもないと,  $q \uparrow p$  としたとき, 最低でも二つの無限クラスターが存在することになってしまうから). つまり,  $o$  と  $z$  を繋ぐ  $\xi_p(b) = 1$  をみたす有限個のボンド  $b$  たちから成る経路  $l$  が存在するという事. 有限個なので, 当然

$$\tilde{p}_l := \max_{[u,v] \in l} X_{[u,v]} < p. \quad (3.5)$$

そこで, もし  $p - \frac{1}{n} \in (q \vee \tilde{p}_l, p)$  となるように  $n \in \mathbb{N}$  を大きく選べば,  $|\mathcal{C}_{p - \frac{1}{n}}(o)| = \infty$  という事になり, (3.4) が得られる. ■

## 4 臨界感受率の発散

臨界感受率は  $p \uparrow p_c$  極限で有限に留まるのか, それとも発散するのか? この問題を解決したのは Aizenman, Newman[2] で, カギは感受率に関する微分不等式である. 定理 2.2 の哲学に似ている... というより, むしろ「こちら」の方が Duminil-Copin, Tassion[15] や, その原典である Aizenman, Barsky[1] よりも先である.

定理の主張を述べる前に, 以下の記号を導入する:

$$\chi_p(t) = \sum_{s=0}^t N_p(s) = \sum_{x: \tau_x \leq t} \varphi_p(x), \quad (4.1)$$

$$\nabla_p(x) = \sum_{y,z} \varphi_p(y-x) \varphi_p(z-y) \varphi_p(z) = \sum_z \varphi_p^{*2}(z-x) \varphi_p(z). \quad (4.2)$$

**定理 4.1** (Aizenman, Newman の不等式とその帰結 [2]).

(a) 任意の  $p > 0$  と  $t \in \mathbb{Z}_+$  に対して, 次の微分不等式が成り立つ:

$$\frac{d\chi_p(t)}{dp} \leq 2d\chi_p(t)^2. \quad (4.3)$$

この不等式を  $p (< p_c)$  から  $q (> p_c)$  の間で積分し, そのあと  $t \uparrow \infty$ ,  $q \downarrow p_c$  の順に極限をとれば,  $\chi_p \geq \frac{1}{2d}(p_c - p)^{-1}$  が得られる. すなわち  $\lim_{p \uparrow p_c} \chi_p = \infty$ .

(b) 任意の  $p \in (0, p_c)$  に対して, 次の微分不等式が成り立つ:

$$2d \left( 1 - \sup_{[o,w]} \nabla_p(w) \right) \chi_p^2 \leq \frac{d\chi_p}{dp} \leq 2d\chi_p^2. \quad (4.4)$$

(a) により, 臨界感受率の  $p \uparrow p_c$  極限が発散することが分かった. その事実を (b) に適用し, さらに臨界点直上で  $\sup_{[o,w]} \nabla_{p_c}(w) < 1$  と仮定すると, 感受率の発散の仕方が上下から  $(p_c - p)^{-1}$  の定数倍で押さえられることが分かる. この振る舞いは (異なる枝どうしが相互作用を持たない) 分枝過程のものと同じであり, 「平均場的な振る舞い」と呼ばれる. 詳しくは次節で述べよう.

ところで, 上で使った仮定  $\sup_{[o,w]} \nabla_{p_c}(w) < 1$  は少々厳し過ぎる観がある. とくに次元がそれ程高くないとき, 紫外領域 (すなわち (4.2) の 3 点  $x, y, z$  が互いに近い場合) からの寄与は大きいかも知れない. そこで, もし代わりに

$$\sup_{w:\tau_w \geq t} \nabla_{p_c}(w) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} 0 \quad (4.5)$$

程度の仮定で感受率の発散の仕方を制御できたら良いのに, と考えるわけである. 実際, 次のような「紫外正則化」された微分不等式が成り立つことが知られている [2]:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_t > 0 \left[ \frac{d\chi_p}{dp} \geq \varepsilon_t \left( 1 - \sup_{w:\tau_w \geq t} \nabla_{p_c}(w) \right) \chi_p^2 \right]. \quad (4.6)$$

もし (4.5) が成立しているならば,  $\sup_{w:\tau_w \geq t} \nabla_{p_c}(w) < 1$  をみたすくらい十分大きい  $t \in \mathbb{N}$  を選ぶことができ, 最終的に感受率  $\chi_p$  を上下から  $(p_c - p)^{-1}$  の定数倍で押さえられることができるのである.

< (4.3) の証明 > まず Russo の公式 (1.12) より,

$$\frac{d\chi_p(t)}{dp} = \sum_{x:\tau_x \leq t} \frac{d\varphi_p(x)}{dp} = \sum_{x:\tau_x \leq t} \sum_{[u,v]} \mathbb{P}_p \left( [u,v] \in \text{piv}\{o \rightarrow x\} \right) \quad (4.7)$$

を得る. ここで

$$\tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o) = \left\{ x \in \mathcal{C}(o) : o \xrightarrow{[u,v] \text{ を経由しないで}} x \right\} \quad (4.8)$$

という記号を導入すると, (4.7) は

$$\frac{d\chi_p(t)}{dp} = \sum_{x:\tau_x \leq t} \sum_{[u,v]} \mathbb{P}_p(o \rightarrow u, v \rightarrow x \notin \tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o)) \quad (4.9)$$

と書き直せる. ここで  $x \notin \tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o)$  という条件を外せば, Markov 性と並進対称性から

$$\frac{d\chi_p(t)}{dp} \leq \sum_{[u,v]:\tau_u < t} \varphi_p(u) \sum_{x:\tau_x \leq t} \varphi_p(x-v) \leq 2d\chi_p(t)^2 \quad (4.10)$$

となって, (4.3) が得られる. ■

< (4.4) の証明 >  $p < p_c$  であれば, (4.9) の  $t \uparrow \infty$  極限を取ることができ,

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_p}{dp} &= \sum_x \sum_{[u,v]} \mathbb{P}_p(o \rightarrow u, v \rightarrow x \notin \tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o)) \\ &= 2d\chi_p^2 - \sum_x \sum_{[u,v]} \mathbb{P}_p(o \rightarrow u, v \rightarrow x \in \tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

が得られる. あとは第2項目を上から評価すればよい.

もし事象  $\{o \rightarrow u, v \rightarrow x \in \tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o)\}$  が起こったとすると,  $o$  から  $u$  への開いた経路上の或る点  $y$  と,  $v$  から  $x$  への開いた経路上の或る点  $z$  が存在し,  $\{y \rightarrow u\}$ ,  $\{v \rightarrow z\}$ ,  $\{y \rightarrow z\}$  がボンドを共有しないで実現される. したがって, Markov 性と並進対称性, さらに BK 不等式 (1.10) を用いると,

$$\begin{aligned} &\sum_x \sum_{[u,v]} \mathbb{P}_p(o \rightarrow u, v \rightarrow x \in \tilde{\mathcal{C}}^{[u,v]}(o)) \\ &\leq \sum_{x,y,z} \sum_{[u,v]} \varphi_p(y) \mathbb{P}_p(\{y \rightarrow u\} \circ \{v \rightarrow z\} \circ \{y \rightarrow z\}) \varphi_p(x-z) \\ &\leq \chi_p \sum_y \varphi_p(y) \sum_z \sum_{[u,v]} \varphi_p(u-y) \varphi_p(z-v) \varphi_p(z-y) \\ &= 2d\chi_p^2 \sup_{[o,w]} \nabla_p(w) \end{aligned} \quad (4.12)$$

が得られる. これを (4.11) に戻せば証明完了. ■

## 5 臨界現象に関する厳密な結果

一般に臨界現象は, 観測量の臨界点近傍における冪的な振る舞いで特徴づけられる. それらの冪指数は「臨界指数」と呼ばれ, 次元や対称性だけで決まり, それ以外のモデルの詳細にはよらないものと考えられている. したがって, 全てのモデルは臨界指数の値によって決まる「ユニバーサルリティクラス」に分類できるのではないかと考えられているのである.

まず最初に, 有向パーコレーションの種々の観測量に対する臨界指数を「ゆるい感じ」で導入し, それらに関する知られた事実 (数学的に厳密でないものも含む) を纏めておく.

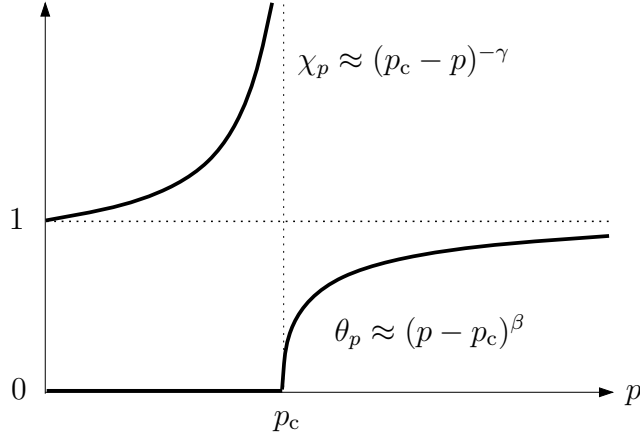


図 2:  $\chi_p$  と  $\theta_p$  の臨界点近傍における振る舞い.

## 5.1 臨界指数

これまでに導入した観測量は，臨界点近傍において以下のような冪的な振る舞いを示すものと考えられている（とりあえず“ $\approx$ ”の意味は，左辺の対数と右辺の対数の比が指定された極限で1に収束することとしよう）：

$$\chi_p \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \theta_p \underset{p \downarrow p_c}{\approx} (p - p_c)^\beta, \quad T_p \begin{cases} \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\zeta}, \\ \underset{p \downarrow p_c}{\approx} (p - p_c)^{-\zeta'}, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\mathbb{P}_{p_c}(|\mathcal{C}(o)| \geq n) \underset{n \uparrow \infty}{\approx} n^{-1/\delta}, \quad N_{p_c}(t) \underset{t \uparrow \infty}{\approx} t^\eta, \quad \theta_{p_c}(t) \underset{t \uparrow \infty}{\approx} t^{-\rho}. \quad (5.2)$$

また，時刻  $t$  における  $\mathcal{C}(o)$  の「断面」が空間的にどのくらい広がっているかを表わす指標として

$$\xi_p(t) = \left( \frac{1}{N_p(t)} \sum_{x: \tau_x = t} |\vec{x}|^2 \varphi_p(x) \right)^{1/2} \quad (5.3)$$

を観察すると，臨界点直上では

$$\xi_{p_c}(t) \underset{t \uparrow \infty}{\approx} t^\nu \quad (5.4)$$

のように振る舞うものと思われている。

実際には，これらの臨界指数の存在性を証明する一般論は，今のところ無い。そこで，とりあえず存在性だけは仮定して議論を進めると，以下のような事実が分かってくる。

- 異なる枝どうしの相互作用を無視したモデルは「平均場近似」と呼ばれる。有向パーコレーションの場合，それは「分枝ランダムウォーク<sup>8</sup>」と等価である。分枝ランダムウォークに対する臨界指数は正確に計算できて，それぞれ

$$\gamma = \beta = \zeta = \zeta' = \rho = 1, \quad \delta = 2, \quad \eta = 0, \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (5.5)$$

である。

<sup>8</sup>時刻  $t$  まで生き残った分枝ランダムウォークの個体数は分枝過程に従う。

表 1: 数値計算, (数学的には厳密ではない) 繰り込み計算, 平均場近似の結果 [36].

	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4 - \varepsilon$	$d \geq 4$
$\gamma$	2.277730	1.60	1.25	$1 + \frac{1}{6}\varepsilon + 0.06683\varepsilon^2$	1
$\beta$	0.276486	0.584	0.81	$1 - \frac{1}{6}\varepsilon - 0.01128\varepsilon^2$	1
$\zeta (= \zeta')$	1.733847	1.295	1.105	$1 + \frac{1}{12}\varepsilon + 0.02238\varepsilon^2$	1
$\eta$	0.313686	0.230	0.12	$\frac{1}{12}\varepsilon + 0.03751\varepsilon^2$	0
$\rho$	0.159464	0.451	0.73	$1 - \frac{1}{4}\varepsilon - 0.01283\varepsilon^2$	1
$\nu$	0.632613	0.568	0.526	$\frac{1}{2} + \frac{1}{48}\varepsilon + 0.008171\varepsilon^2$	$\frac{1}{2}$

- 臨界指数の間には

$$d\nu - 2\rho \geq \eta, \quad (d\nu - 2\rho + 1)\zeta \geq \gamma, \quad (d\nu + 1)(\zeta \vee \zeta') \geq \gamma + 2\beta \quad (5.6)$$

という「ハイパースケーリング不等式」が成り立つことが証明されている [38, 39, 42]. 平均場近似の値 (5.5) を代入すると, 全て  $d \geq 4$  となる. 対偶を考えると, 「 $d < 4$  では (5.5) の値を取らない臨界指数が少なくとも一つは存在する」ということであり, したがって上部臨界次元  $d_c$  (次元を上げていったとき, (5.5) の値に退化し始めるギリギリの次元) は 4 以上ということになる.

- $d < d_c$  のとき, ハイパースケーリング不等式は等式に退化すると予想されている. 実際, 表 1 の値を (5.6) に代入すると, 等式が成立しているように見える<sup>9</sup>. 最近, (5.6) の最初の二つの不等式が  $d = 1$  で等式に退化することが証明された [42] ことで, この予想の信憑性はますます高まっている.
- 前節の最後の考察により, トライアングル条件 (4.5) が  $\gamma = 1$  の十分条件であることが分かった. 実は, Aizenman, Barsky[1] や Barsky, Aizenman[3] により, この条件は  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  の十分条件にもなっていることが知られている. その他の臨界指数が平均場近似の値に退化しているかどうかは, トライアングル条件 (4.5) だけでは確かめられない.

## 5.2 $d = 1$ でのハイパースケーリング等式

この節では, 最近解決した「1次元におけるハイパースケーリング等式」について概観する. 主張は次の通り:

<sup>9</sup>原理的には  $10^{-10}$  だけ異なっても違うユニバーサルティクラスに属することになってしまうので, 乱暴に言うと, 臨界指数の「近似値」というものには意味がない.

**定理 5.1** ([38, 42]).  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^1$  上の有向パーコレーションを考える.

(a) 臨界指数  $\nu, \eta, \rho$  のうち二つが存在すれば, 残りの一つも存在し, 等式

$$\nu - 2\rho = \eta \quad (5.7)$$

が成り立つ.

(b) 臨界指数  $\nu, \rho, \zeta, \gamma$  のうち三つが存在すれば, 残りの一つも存在し, 等式

$$(\nu - 2\rho + 1)\zeta = \gamma \quad (5.8)$$

が成り立つ.

本講義では (a) の等式だけ解説する. 証明のカギは次の不等式である.

**命題 5.2** ([38, 42]).

(a) 全ての  $d \geq 1$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $t \in \mathbb{N}$  で

$$N_p(t) \leq \frac{4}{3} (4\xi_p(t) + 1)^d \theta_p(t/2)^2 \quad (5.9)$$

が成り立つ.

(b)  $d = 1$ ,  $p = p_c$  とする. このとき或る定数  $K > 0$  が存在して, 全ての  $t \in \mathbb{N}$  で

$$N_{p_c}(t) \geq K \xi_{p_c}(t) \theta_{p_c}(t)^2 \quad (5.10)$$

が成り立つ.

証明は講義で紹介するが, 上からの評価 (5.9) は結構乱暴で, 有向パーコレーションの可逆性のおかげで「いつでも」成り立つ. 他方, 下からの評価 (5.10) は絶妙で, 現在のところ「 $d = 1$  の最近接モデルだけ」でしか確かめられていない. 証明のカギは, 臨界横断確率の一樣非退化性 [16] である. 詳細は講義で.

### 5.3 平均場臨界現象の厳密な証明 (レース展開の紹介)

低次元で臨界指数の値を正確に求めることは今のところ見通しも立たないが, 十分高次元では異なる枝どうしの相互作用 (排除効果) が弱く, したがってトライアングル条件 (4.5) が成立し, 臨界指数が平均場近似の値に退化することを厳密に証明できるのではないかと予想するのは自然である. もしその予想が正しかったとして, 一体何次元まで降りることができるだろう?

その予想に対する答えは、2点関数の Fourier-Laplace 変換

$$\hat{\varphi}_p(z; \vec{k}) = \sum_x z^{\tau_x} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \varphi_p(x) \quad [z \in \mathbb{C}, \vec{k} \in [-\pi, \pi]^d] \quad (5.11)$$

に関する次の定理<sup>10</sup>で明らかになる：

**定理 5.3** (2点関数の赤外評価 [10, 35]). 以下のことが成り立つような  $d_0 > 4$  が存在する：任意の  $d \geq d_0$  に対し、或る定数  $C = C(d) < \infty$  が存在して、

$$|\hat{\varphi}_p(m e^{i\theta}; \vec{k})| \leq \frac{C}{(e^{1/T_p} - m) + m(|\theta| + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j))} \quad (5.12)$$

が全ての  $p \in [1, p_c)$ ,  $m \in [0, e^{1/T_p})$ ,  $(\theta, \vec{k}) \in [-\pi, \pi]^{d+1}$  について成り立つ。したがって、 $\gamma = \beta = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\zeta = 1$  が得られる。

<赤外評価 (5.12)  $\Rightarrow \gamma = \beta = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\zeta = 1$  の証明> まず Hausdorff-Young の不等式 (ただし  $0 < \varepsilon < 1$ )

$$\begin{aligned} \|f\|_{1+\varepsilon^{-1}} &\equiv \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d} |f(x)|^{1+\varepsilon^{-1}} \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \\ &\leq \exists C_\varepsilon \left( \int_{[-\pi, \pi]^{d+1}} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} |\hat{f}(e^{i\theta}; \vec{k})|^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \equiv C_\varepsilon \|\hat{f}\|_{1+\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.13)$$

を思い出そう。  $f = \nabla_p$  として (5.12) を用いれば、任意の  $d > 4$ ,  $\varepsilon \in (0, 1 \wedge \frac{d-4}{6})$  に対して

$$\|\nabla_p\|_{1+\varepsilon^{-1}} \leq C_\varepsilon \|\hat{\nabla}_p\|_{1+\varepsilon} \leq C_\varepsilon \|\hat{\varphi}_p^3\|_{1+\varepsilon} < \infty \quad (5.14)$$

が  $p < p_c$  で一様に成り立つ。これは  $\nabla_{p_c}(w)$  が  $\tau_w \vee |\vec{w}| \rightarrow \infty$  でゼロに収束することを示している。とくに<sup>11</sup>

$$\sup_{w: \tau_w \geq t} \nabla_{p_c}(w) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} 0. \quad (5.15)$$

これでトライアングル条件 (4.5) を示すことができたので、前節の最後で述べたとおり、 $\gamma = \beta = 1$ ,  $\delta = 2$  が得られる。ちなみに、ここでの等式は、例えば  $\delta = 2$  の場合、或る定数  $c_\delta, C_\delta \in (0, \infty)$  が存在し、全ての  $n \in \mathbb{N}$  について

$$c_\delta n^{-1/2} \leq \mathbb{P}_{p_c}(|\mathcal{C}(o)| \geq n) \leq C_\delta n^{-1/2} \quad (5.16)$$

が成り立つことである。

もうひとつの関係式  $\zeta = 1$  について。まず (2.12) より

$$\chi_p = \sum_{t=0}^{\infty} N(t) \geq \sum_{t=0}^{\infty} e^{-t/T_p} = \frac{1}{1 - e^{-1/T_p}} \geq T_p \quad (5.17)$$

<sup>10</sup>定理の主張は、本講義で扱っている最近接モデルだけでなく、もっと広いクラスのモデルに対しても成り立つ。詳しくは [10, 35] を参照。

<sup>11</sup>Riemann-Lebesgue の補題からも証明可能。

であるが、他方 (5.12) より

$$\chi_p = \hat{\varphi}_p(1; \vec{0}) \leq \frac{C}{e^{1/T_p} - 1} \leq CT_p \quad (5.18)$$

であるので、 $\gamma = 1$  と合わせると  $\zeta = 1$  が得られる。 ■

赤外評価 (5.12) の証明のカギは、2点関数に対する「レース展開」である。この手法を最初に考案したのは Brydges, Spencer [8] で、彼らは体積排除効果が非常に弱い自己回避歩行の2点関数が  $d > 4$  で赤外評価をみたすことを証明した。それ以来、さまざまなモデルに対してレース展開が適用され、高次元平均場臨界現象の厳密な証明に成功している：

- 強い自己回避歩行 [22],
- パーコレーション [20], 有向パーコレーション [34],
- 格子樹・格子動物 [21],
- コンタクトプロセス [37],
- イジング模型 [40],
- $\varphi^4$  模型 [41].

有向パーコレーションの2点関数に対するレース展開<sup>12</sup>は、微分不等式 (4.3)–(4.4) の導出手続きを等式レベルで繰り返して得られる再生方程式（とその導出法）のことである。詳細は（時間があれば）講義で紹介するが、形式的には

$$\varphi_p(x) = \Pi_p(x) + \sum_{u,v} \Pi_p(u) 2dpD(v-u) \varphi_p(x-v) \quad (5.19)$$

という再生方程式である。ただし、 $D$  は  $\mathbb{Z}^d$  上の単純ランダムウォークの推移確率

$$D(x) = \frac{1}{2d} \mathbb{1}_{\{[0,x] \in \mathbb{B}\}} \quad (5.20)$$

であり、 $\Pi_p(x) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Pi_p^{(j)}(x)$  は非負値レース展開係数  $\{\Pi_p^{(j)}(x)\}_{j=0}^{\infty}$  の交代級数で、低次係数のダイアグラム表示は

$$\Pi_p^{(0)}(x) = \text{Diagram 1}, \quad \Pi_p^{(1)}(x) = \text{Diagram 2}, \quad \Pi_p^{(2)}(x) = \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \quad (5.21)$$

<sup>12</sup>次の三通りの導出法が知られているが、(iii) が最も簡単な方法と言われている：

- (i) Brydges, Spencer 型の代数的な方法 [34],
- (ii) 包含数え上げと条件つき期待値を組み合わせた方法 [20],
- (iii) 包含数え上げと Markov 性を組み合わせた方法 [37].



(各線の意味などは講義で解説) で与えられる.

いま仮にレース展開係数の交代級数  $\Pi_p(x)$  が非常に性質の良い関数 (例えば,  $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_p^{(j)}(x)$  が時空間で総和可能など) だったと仮定する. このとき, (5.19) の Fourier-Laplace 変換は

$$\hat{\varphi}_p(z; \vec{k}) = \hat{\Pi}_p(z; \vec{k}) + \hat{\Pi}_p(z; \vec{k}) 2dpz \hat{D}(\vec{k}) \hat{\varphi}_p(z; \vec{k}) = \frac{\hat{\Pi}_p(z; \vec{k})}{1 - 2dpz \hat{D}(\vec{k}) \hat{\Pi}_p(z; \vec{k})} \quad (5.22)$$

と書ける. これは  $\mathbb{Z}^d$  上の単純ランダムウォークの  $n$  ステップ分布  $D^{*n}(x)$  を Fourier-Laplace 変換したものによく似た形になっている:

$$\hat{G}_z(\vec{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} (z \hat{D}(\vec{k}))^n = \frac{1}{1 - z \hat{D}(\vec{k})} \quad [|z| < 1]. \quad (5.23)$$

簡単な場合分けにより, 赤外評価

$$|\hat{G}_z(\vec{k})| \leq \frac{\exists c}{1 - |z| + |z|(|\arg(z)| + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j))} \quad (5.24)$$

(ただし  $|\arg(z)| \leq \pi$ ) を確かめることができる. つまり, 定理 5.3 の言わんのしていることは, 高次元 2 点関数の Fourier-Laplace 変換  $\hat{\varphi}_p(z; \vec{k})$  が単純ランダムウォークの  $\hat{G}_z(\vec{k})$  で ( $p < p_c$  で一様に) 評価できる, ということである.

レース展開 (5.19) は再生方程式なので, 展開係数さえ上手くコントロールできれば, もっと細かい情報を得ることができる. 次の定理はその一例である.

**定理 5.4** (空間成分のモーメントの漸近評価 [10, 12, 29, 35]). 任意の  $d \geq d_0$  (定理 5.3 の  $d_0$  と同じ),  $p \in (0, p_c]$  において

$$A = \frac{\hat{\Pi}_p(e^{1/T_p}; \vec{0})}{e^{1/T_p} \partial_z \hat{\Pi}_p(e^{1/T_p}; \vec{0})}, \quad W = \frac{-\vec{\nabla}^2 \hat{\Pi}_p(e^{1/T_p}; \vec{0})}{e^{1/T_p} \partial_z \hat{\Pi}_p(e^{1/T_p}; \vec{0})} \quad (5.25)$$

が存在して

$$N_p(t) \underset{t \uparrow \infty}{\sim} \frac{A}{p} e^{-t/T_p}, \quad \xi_p(t) \underset{t \uparrow \infty}{\sim} \sqrt{(A+W)t} \quad (5.26)$$

成り立つ. したがって,  $\eta = 0$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = 1$  が得られる.

**<  $\eta = 0$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = 1$  の証明 >** 臨界点直上では  $T_{p_c} = \infty$  なので, (5.26) の前半の式より  $\eta = 0$  が得られる. また, (5.26) の後半の式より  $\nu = \frac{1}{2}$  も得られる.

もう一つの関係式  $\rho = 1$  について<sup>13</sup>. まず 2 次モーメント法 (Paley-Zygmund 不等式の

<sup>13</sup>生存確率  $\theta_p(t)$  に対するレース展開も開発されていて, 定理 5.4 で登場した定数  $A$  と “vertex factor” と呼ばれる定数  $V$  を用いて  $\theta_{p_c}(t) \underset{t \uparrow \infty}{\sim} 2/(AVt)$  と表わせることが証明されている [24, 25]. ここでは, 初学者にやさしいソフトな議論を紹介する.

簡単版) により [39],

$$\begin{aligned}
N_p(t)^2 &= \mathbb{E}_p \left[ \sum_{x:\tau_x=t} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d\}} \right]^2 \\
&\leq \mathbb{E}_p \left[ \sum_{x,y:\tau_x=\tau_y=t} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow y\}} \right] \mathbb{E}_p [\mathbb{1}_{\{o \rightarrow \{t\} \times \mathbb{Z}^d\}}] \\
&= \sum_{x,y:\tau_x=\tau_y=t} \mathbb{P}_p(o \rightarrow x, o \rightarrow y) \theta_p(t).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

ところが, Markov 性と BK 不等式 (1.10) により

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y:\tau_x=\tau_y=t} \mathbb{P}_p(o \rightarrow x, o \rightarrow y) \\
&= \sum_{x,y:\tau_x=\tau_y=t} \mathbb{P}_p \left( \bigcup_w \{o \rightarrow w\} \cap \{\{w \rightarrow x\} \circ \{w \rightarrow y\}\} \right) \\
&\leq \sum_{w:\tau_w \leq t} \varphi_p(w) N_p(t-s)^2 = \sum_{s=0}^t N_p(s) N_p(t-s)^2
\end{aligned} \tag{5.28}$$

となるので,

$$\theta_p(t) \geq \frac{N_p(t)^2}{\sum_{s=0}^t N_p(s) N_p(t-s)^2}. \tag{5.29}$$

この不等式を臨界点直上で用いれば,  $\eta = 0$  から (もし  $\rho$  が存在すれば)  $\rho \leq 1$  が得られる.

逆向き不等式  $\rho \geq 1$  の証明には, 以下の Holmes, van der Hofstad[26] の論法 (これは Kozma, Nachmias[32] による等方的なパーコレーションに対する類似の主張を証明する際に使われた論法を簡単にしたもの) を使う. まず, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\begin{aligned}
\theta_{p_c}(4t) &= \mathbb{P}_{p_c} \left( \{o \rightarrow \{4t\} \times \mathbb{Z}^d\} \cap \bigcap_{s=t}^{3t} \left\{ \sum_{x:\tau_x=s} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} \geq \varepsilon t \right\} \right) \\
&\quad + \mathbb{P}_{p_c} \left( \{o \rightarrow \{4t\} \times \mathbb{Z}^d\} \cap \bigcup_{s=t}^{3t} \left\{ \sum_{x:\tau_x=s} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} < \varepsilon t \right\} \right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

であることに注意. (5.16) より, 右辺第 1 項目は

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{p_c} \left( \{o \rightarrow \{4t\} \times \mathbb{Z}^d\} \cap \bigcap_{s=t}^{3t} \left\{ \sum_{x:\tau_x=s} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} \geq \varepsilon t \right\} \right) \\
&\leq \mathbb{P}_{p_c} (|\mathcal{C}(o)| \geq 2\varepsilon t^2) \leq \frac{C_\delta}{\sqrt{2\varepsilon}} t^{-1}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

で押さえられる. 他方, (5.30) の右辺 2 項目は, 停止時刻

$$J = \min \left\{ s \geq t : \sum_{x:\tau_x=s} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} < \varepsilon t \right\} \tag{5.32}$$

を導入すると,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{p_c} \left( \{o \rightarrow \{4t\} \times \mathbb{Z}^d\} \cap \bigcup_{s=t}^{3t} \left\{ \sum_{x: \tau_x=s} \mathbb{1}_{\{o \rightarrow x\}} < \varepsilon t \right\} \right) \\ &= \mathbb{E}_{p_c} \left[ \mathbb{1}_{\{t \leq J \leq 3t\}} \mathbb{P}_{p_c} \left( \bigcup_{x \in \mathcal{C}(o): \tau_x=J} \{x \rightarrow \{4t\} \times \mathbb{Z}^d\} \middle| \mathcal{F}_J \right) \right] \leq \varepsilon t \theta_{p_c}(t)^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

で押さえられる. 纏めると

$$\theta_{p_c}(4t) \leq \frac{C_\delta}{\sqrt{2\varepsilon}} t^{-1} + \varepsilon t \theta_{p_c}(t)^2. \quad (5.34)$$

これを帰納的に用いれば, 或る定数  $C_\theta < \infty$  が存在して  $\theta_{p_c}(4^n) \leq C_\theta/4^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) となる. あとは  $\theta_{p_c}(t)$  の単調性から, 全ての  $t \in \mathbb{N}$  について  $\theta_{p_c}(t) \leq 4C_\theta/t$  となり, 逆向き不等式  $\rho \geq 1$  が得られる.  $\blacksquare$

## 参考文献

- [1] M. Aizenman and D.J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Commun. Math. Phys.* **108** (1987): 489–526.
- [2] M. Aizenman and C.M. Newman. Tree graph inequalities and critical behavior in percolation models. *J. Stat. Phys.* **36** (1984): 107–143.
- [3] D.J. Barsky and M. Aizenman. Percolation critical exponents under the triangle condition. *Ann. Probab.* **19** (1991): 1520–1536.
- [4] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *J. Appl. Probab.* **22** (1985): 556–569.
- [5] C. Bezuidenhout and G. Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.* **18** (1990): 1462–1482.
- [6] B. Bollobás and O. Riordan. *Percolation* (Cambridge University Press, 2006).
- [7] S.R. Broadbent and J.M. Hammersley. Percolation processes: I. Crystals and mazes. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **53** (1957): 629–641.
- [8] D.C. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.* **97** (1985): 125–148.
- [9] R.M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Commun. Math. Phys.* **121** (1989): 501–505.
- [10] L.-C. Chen and A. Sakai. Critical behavior and the limit distribution for long-range oriented percolation. I. *Probab. Theory Related Fields* **142** (2008): 151–188.

- [11] L.-C. Chen and A. Sakai. Critical behavior and the limit distribution for long-range oriented percolation. II: Spatial correlation. *Probab. Theory Related Fields* **145** (2009): 435–458.
- [12] L.-C. Chen and A. Sakai. Asymptotic behavior of the gyration radius for long-range self-avoiding walk and long-range oriented percolation. *Ann. Prob.* **39** (2011): 507–548.
- [13] L.-C. Chen and A. Sakai. Critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions. *Ann. Prob.* **43** (2015): 639–681.
- [14] J.T. Cox and R. Durrett. Oriented percolation in dimensions  $d \geq 4$ : bounds and asymptotic formulars. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **93** (1983): 151–162.
- [15] H. Duminil-Copin and V. Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **343** (2016): 725–745.
- [16] H. Duminil-Copin, V. Tassion and A. Teixeira. The box-crossing property for critical two-dimensional oriented percolation. To appear in *Probab. Theory Related Fields*.
- [17] R. Durrett. *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation* (Wadsworth & Brooks/Cole, 1988).
- [18] G. Grimmett. *Percolation* (2nd ed., Springer, 1999).
- [19] G. Grimmett and P. Hiemer. Directed percolation and random walk. *In and Out of Equilibrium* (V. Sidoravicius ed., Birkhäuser, 2002): 273–297.
- [20] T. Hara and G. Slade. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Commun. Math. Phys.* **128** (1990): 333–391.
- [21] T. Hara and G. Slade. On the upper critical dimension of lattice trees and lattice animals. *J. Stat. Phys.* **59** (1990): 1469–1510.
- [22] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.* **147** (1992): 101–136.
- [23] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.* **4** (1992): 235–327.
- [24] R. van der Hofstad, F. den Hollander and G. Slade. The survival probability for critical spread-out oriented percolation above  $4 + 1$  dimensions. I. Induction. *Probab. Theory Related Fields* **138** (2007): 363–389.
- [25] R. van der Hofstad, F. den Hollander and G. Slade. The survival probability for critical spread-out oriented percolation above  $4 + 1$  dimensions. II. Expansion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **43** (2007): 509–570.

- [26] R. van der Hofstad and M. Holmes. The survival probability and  $r$ -point functions in high dimensions. *Ann. Math.* **178** (2013): 665–685.
- [27] R. van der Hofstad and A. Sakai. Gaussian scaling for the critical spread-out contact process above the upper critical dimension. *Electron. J. Probab.* **9** (2004): 710–769.
- [28] R. van der Hofstad and A. Sakai. Critical points for spread-out self-avoiding walk, percolation and the contact process above the upper critical dimensions. *Probab. Theory Related Fields* **132** (2005): 438–470.
- [29] R. van der Hofstad and G. Slade. A generalised inductive approach to the lace expansion. *Probab. Theory Related Fields* **122** (2002): 389–430.
- [30] R. van der Hofstad and G. Slade. Convergence of critical oriented percolation to super-Brownian motion above  $4 + 1$  dimensions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **39** (2003): 413–485.
- [31] 今野紀雄. 無限粒子系の科学 (講談社, 2008 年).
- [32] G. Kozma and A. Nachmias. Arm exponents in high dimensional percolation. *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011): 375–409.
- [33] T.M. Liggett. *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes* (Springer, 1999).
- [34] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. Triangle condition for oriented percolation in high dimensions. *Ann. Prob.* **21** (1993): 1809–1844.
- [35] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. Gaussian limit for critical oriented percolation in high dimensions. *J. Stat. Phys.* **78** (1995): 841–876.
- [36] G. Ódor. Universality classes in nonequilibrium lattice systems. *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004): 663–724.
- [37] A. Sakai. Mean-field critical behavior for the contact process. *J. Stat. Phys.* **104** (2001): 111–143.
- [38] A. Sakai. Hyperscaling inequalities for the contact process and oriented percolation. *J. Stat. Phys.* **106** (2002): 201–211.
- [39] A. Sakai. Mean-field behavior for the survival probability and the percolation point-to-surface connectivity. *J. Stat. Phys.* **117** (2004): 111–130.
- [40] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.
- [41] A. Sakai. Application of the lace expansion to the  $\varphi^4$  model. *Commun. Math. Phys.* **336** (2015): 619–648.

- [42] A. Sakai. Hyperscaling for oriented percolation in  $1 + 1$  space-time dimensions. *J. Stat. Phys.* **171** (2018): 462–469.
- [43] M. Sano and K. Tamai. A universal transition to turbulence in channel flow. *Nature Phys.* **12** (2016): 249–253.
- [44] B. Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Commun. Math. Phys.* **77** (1980): 111–126.