論　説

特異点の数え上げと同変 Chern 類

大本　亨

本小文では，関数・写像の特異点分類に係る '特異点の数え上げ理論' について最近の進展を紹介し，さらにある種の積分論（Chern 類自然変換）に基づく筆者の観点を論じてみたい．

第 1 節では，Thom 多項式の一般論について概説する．まず，複素写像芽（完全交叉芽あるいは超曲面芽など）について，'局所座標変換がなす群の作用' による分類を考えてみよう—特異点型（写像芽空間の中の軌道）として余次元が有限のものを考える．このような特異点型 η の Thom 多項式 $tp(\eta)$ とは，一言でいえば，軌道閉包 $\bar{\eta}$ の同変基本類に対する同変 Poincaré 双対を意味する[1)]—あるいは，任意の一般的な写像 $f: M \to N$ に対して，その η-型特異点集合の閉包 $\overline{\eta(f)} \subset M$ が代表するコホモロジー類を表すような普遍 Chern 多項式（'障害類' の一種）であると言っても良い（定理 1）．典型例として線形写像の分類で見てみれば，その Thom 多項式はベクトル束間の準同型写像の退化集合を表す Chern 類の Schur 多項式のことである（Thom-Porteous 公式：例 2）．この '非線形版' である高次特異点型の Thom 多項式の計算は，軌道閉包の特異点解消を具体的に構成することが難しいために，比較的簡単な場合を除いて長らく手つかずであった．最近になって，特異点型のシンメトリー群を利用する新しい展開があり（Kazarian, Fehér, Rimányi ら），これを踏まえて，determinantial formula，多重点公式，曲線の数え上げ公式も広義の Thom 多項式として捉える '特異点の数え上げ理論の統合' が進められている．

第 2 節では話題を変えて，特異多様体の 'Chern 類理論' について述べる．特異点を許す代数多様体 X の 'Chern 類' は（Chow）ホモロジー群の中に実現され，Fulton 標準類 $C^F(X)$，Chern-Mather 類 $C^M(X)$， Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C_*(X)$，あるいは最近の '弦的' Chern 類 $c_{str}(X)$ など，出所の異なる種類が知られている．これらはすべて，X が非特異ならば全 Chern 類 $c(TX)$ の Poincaré 双対に一致する—つまり，これらの 'Chern 類' 達の「差異」は X の特異点集合 X_{sing} に台を持ち，X の特異性を反映する量として現れる．特に，MacPherson 類は共変関手の間の Grothendieck 自然変換 $C_*: \mathcal{F}(X) \to A_*(X)$ として定式化される：$C_*(X) := C_*(1\!\!1_X)$（$\mathcal{F}(X)$ は X 上の構成的関数のなす Abel 群を指す；C_* は Chern 指標あるいは Riemann-Roch 写像と対比される）．そこで，ホモロジー特性類達を特異点の数値的不変量（で定義される構成的関数）と関係づけて記述することが考えられる：一例を挙げれば，X が特異超曲面のとき，$C^F(X)$ と $C_*(X)$ の差異は Milnor 数構成的関数の C_*-値を用いて表される（後述の Milnor 類参照）．尚，$C_*(X)$ の（0 次項の）degree および最高次項は，それぞれ X の Euler 数および基本類に一致する．

上記 2 つの話題を合わせることで，不変特異多様体（軌道閉包 $\bar{\eta}$ など）の特異性を反映する局所不変量の（コ）ホモロジー値積分公式として '特異点の数え上げ公式' を見直してみよう．まず第 3

節で，'同変 Chow ホモロジー' を基礎にして，同変 Chern-MacPherson 自然変換 $C_*^G : \mathcal{F}^G(X) \to A_*^G(X)$ [41] を導入する（定理 4）．ちなみに C_*^G は 'C_* の商スタック $[X/G]$ への拡張' であると理解することもできる．つぎに，写像芽の特異点分類（'連続群作用'）および商特異点（'有限群作用'）を念頭に，C_*^G の簡単な応用について解説する （[41], [42], [43]）：Thom 多項式（同変基本類の双対）の "total class version" として，写像の特異点集合の Euler 標数（あるいは Milnor 数構成的関数の Chern-MacPherson 類）を与えるような普遍 Chern 多項式の存在が示される（第 4 節）；オービフォルド Euler 標数（degree）の "total class version" を導入することで，古典的群論における置換表現の数え上げ公式を，対称積の 'オービフォルド Chern ホモロジー類' に関する母関数公式に一般化する（第 5 節）．

本小文では，C_* の 'counterpart' であるところの（特異）多様体上の連接層の特性類理論についてはあまり立ち入らないが，同変 K 理論を介して Thom 多項式およびその一般化を与えることはもちろん考えられる．展望として，ここで取り上げる同変 MacPherson 変換（構成的関数）のアプローチと，同変 Chern 指標・Todd 類（構成可能層）のアプローチとの統合を考えたい（第 6 節）．

複素数体上で話を進めるが，第 2 節以降は標数 0 の閉体上でよい．第 1 節では Borel-Moore ホモロジー群 H_* を使うが，後は Chow ホモロジー群 A_* で通す．原則として，$M, N, V, \cdots$ は非特異多様体，$X, Y, Z, \cdots$ は非特異と限らないものに用いる．

1　Thom 多項式

1.1　写像の特異点分類と Thom 多項式

この節では，複素解析的特異点を扱う．$f : M^m \to N^n$ を複素多様体間の正則写像とし，便宜上，整数 $\ell = m - n$ を f の次元差と呼ぼう[2)]．f の特異点とは，$\mathrm{rank}\, df_x < \min(m, n)$ なる点 $x \in M$，あるいはその点での写像芽 $f : M, x \to N, f(x)$ を指す．

写像芽 $f : \boldsymbol{C}^m, 0 \to \boldsymbol{C}^n, 0$ の分類として，（スキームとしての）ファイバー芽 $(f^{-1}(0), 0)$ の分類，つまり局所環 $Q(f) := \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^m,0}/f^*\mathrm{m}_{n,0}$ の分類を考える（$\mathrm{m}_{n,0} \subset \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n,0}$ は極大イデアル）．これは，写像芽 $\boldsymbol{C}^m, 0 \to \boldsymbol{C}^n, 0$ 全体の空間 $\mathcal{E}(= \mathcal{E}(m, n))$ に働く '変換群'（接触同値群）$\mathcal{K}$ の作用を用いて言い換えられて，写像芽の $\mathcal{K}$-分類（接触同値）と呼ばれている[3)]；さらに自明な開折 $f \times id_s(x, u) = (f(x), u) : \boldsymbol{C}^{m+s}, 0 \to \boldsymbol{C}^{n+s}, 0$ も f と同じと見なせば，<u>次元差 ℓ の写像芽の安定 $\mathcal{K}$-分類</u>と呼ぶ．これは $\ell \geq 0$ ならば，ℓ 次元完全交叉特異点の分類に他ならない．

写像芽 f が $\mathcal{K}$-有限（$\mathcal{K}$-有限確定）とは，ある有限次のジェット $j^r f(0)$（原点における r 次 Taylor 多項式）で f の $\mathcal{K}$-同値類が決定されるものである―これは，$\mathcal{E}$ の中で軌道 $\mathcal{K}.f$ の余次元が有限，あるいは f が普遍開折（言わば $\mathcal{K}.f$ の有限次元 'normal slice'）を持つことと同値である．また $\ell \geq 0$ であれば，完全交叉芽 $(f^{-1}(0), 0)$ が孤立特異点を持つことと同値である．

以降，次元差 ℓ の写像芽の $\mathcal{K}$-特異点型 η とは，安定 $\mathcal{K}$-同値類（軌道）あるいはそのパラメータ族（$\mathcal{K}$-モジュライ）を指すこととする．次元差 ℓ の正則写像 $f : M \to N$ に対して，$x \in M$ が η-型特異点とは，写像芽 $f : M, x \to N, f(x)$ が（適当な局所座標において）η に属するときにいう．η-型特異点全体を $\eta(f)(\subset M)$ で記す．

次の定理 1 は René Thom に遡る[4)] （[26], [15], [32], [22], [45]）．

定理 1　次元差 ℓ の写像芽の $\mathcal{K}$-有限特異点型 η に対して，η のみに依存する重み付き同次多項式

$tp(\eta)(c_1, c_2, \cdots)$（$\deg c_i = 2i$）で次の “universality” を満たすものが唯一存在する：次元差 ℓ の任意の一般的な正則写像 $M \to N$ に対して，閉包 $\overline{\eta(f)}$ の基本類が $tp(\eta)(c)$ に $c_i = c_i(f)(:= c_i(f^*TN - TM))$ を代入したもので表示される：$\iota : \overline{\eta(f)} \to M$ を自然な入射として，

$$\iota_*[\overline{\eta(f)}] = tp(\eta)(c(f)) \frown [M] \ \ \in \ H_*(M). \tag{1}$$

この $tp(\eta)(c)$ を（写像芽の安定 $\mathcal{K}$-分類における）特異点型 η の <u>Thom 多項式</u>と呼ぶ．ここで言う‘一般的な (generic) 写像’とは，f のジェット拡大と軌道閉包との横断性を満たすものを指す：たとえば，閉包 $\overline{\eta(f)}$ の各点 x において写像芽 $f : M, x \to N, f(x)$ がファイバー芽 $(f^{-1}f(x), x)$ の普遍変形を与えているのであれば，この条件は満たされる．横断性条件の代わりに，(1) 式左辺の基本類を適当な“局所化類”に置き換えることも考えられる．以降，$c(f) := c(f^*TN - TM)(= c(f^*TN)c(TM)^{-1})$ および $\bar{c}(f) = c(TM - f^*TN)$ とおく．

例 1 （Morse 特異点）$f : M^{1+\ell} \to N^1$ をコンパクト複素多様体上の正則関数で孤立特異点のみ持つものとする．このとき，孤立特異点の Milnor 数 $\mu_f(x)$ の総和は

$$\sum \mu_f(x) = (-1)^{\ell+1} c_{\ell+1}(TM - f^*TN) \frown [M] \ (= c_{\ell+1}(\Omega_M - f^*\Omega_N) \frown [M] \ ) \tag{2}$$

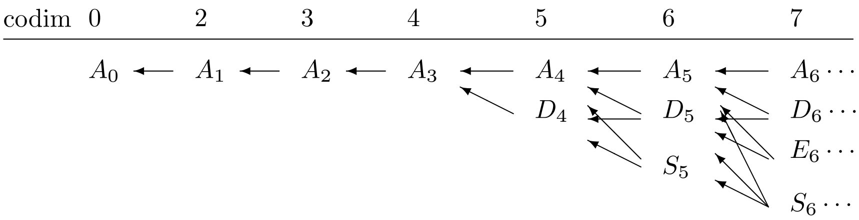
で表される（Iversen [27]）．左辺は，f が横断性条件を満たせば f の A_1-特異点[5)] の個数に他ならない（関数でなく次元差 ℓ の写像では，左辺を $\iota_*[\overline{A_1(f)}]$ に置き換える）．右辺は（次元差 ℓ の）A_1-特異点型に対する Thom 多項式である：$tp(A_1) = (-1)^{\ell+1}\bar{c}_{\ell+1}$.

例 2 （線形写像の分類）行列の空間 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^{n+\ell}, \boldsymbol{C}^n)$ への座標変換群 $GL_{n+\ell}(\boldsymbol{C}) \times GL_n(\boldsymbol{C})$ の作用を $(P, Q).A = QAP^{-1}$ とする．kernel の次元が k である軌道 Σ^k の閉包は，適当な小行列式達の零点集合（余次元は $k(k-\ell)$）である．この Thom 多項式 $tp(\Sigma^k)$ は以下の特別な形の Schur 多項式で与えられる（Thom-Porteous 公式 [52]; [24] Chap. 14）：多様体 M 上のベクトル束の間の準同型写像 $\sigma : E \to F$ （つまり切断 $\sigma : M \to \mathrm{Hom}(E, F)$；$\mathrm{rk}\, E = n + \ell$，$\mathrm{rk}\, F = n$）に対して，退化集合（degeneracy loci） $\overline{\Sigma^k(\sigma)} = \{x \in M, \dim\ker\sigma_x \geq k\}$ は次の特性類で表される[6)]：

$$\iota_*[\overline{\Sigma^k(\sigma)}] = \det[c_{k-\ell-i+j}(F - E)]_{1 \leq i,j \leq k} \frown [M]. \tag{3}$$

種々の determinantial formula およびその一般化も（しかるべき連続群作用の） tp 理論として捉えられる（Fehér-Rimányi [22], [20], [21]）．

例 3 （完全交叉曲線芽の分類）写像芽 $\boldsymbol{C}^{n+1}, 0 \to \boldsymbol{C}^n, 0$ の安定 $\mathcal{K}$-分類（次元差 $\ell = 1$）は，次の隣接関係図式のように始まる．記号 $\eta \leftarrow \tau$ は，$\mathcal{K}$-軌道 η の閉包に $\mathcal{K}$-軌道 τ が含まれること（すなわち，τ の普遍開折に η-特異点型が現れること）を意味し，codim は軌道の（$\mathcal{E}$ における）余次元を指す：



$$A_\mu : x^{\mu+1} + y^2,\ D_\mu : x^2y + y^{\mu-1},\ E_6 : x^3 + y^4,\ S_\mu : (x^2 + y^2 + z^{\mu-3}, yz), \cdots$$

対応する tp は以下の形である．これらを Schur 多項式の線形和で書き下すと各係数は非負となる（Pragacz-Weber [51]）．

$$\begin{aligned}
&tp(A_1) = c_1^2 - c_2 (= \bar{c}_2), \qquad tp(A_2) = 2c_1^3 - 2c_1c_2, \qquad tp(A_3) = 5c_1^4 - 4c_1^2c_2 - c_1c_3,\\
&tp(A_4) = 12c_1^5 - 4c_1^3c_2 + 4c_1^2c_3 - 4c_1c_4 - 8c_1c_2^2,\\
&tp(D_4) = c_1^5 - c_1^3c_2 - 4c_1^2c_3 + 3c_1c_2^2 + c_1c_4,\\
&tp(A_5) = 30c_1^6 + 10c_1^4c_2 + 50c_1^3c_3 - 2c_1^2c_4 - 52c_1^2c_2^2 - 12c_1c_5 - 30c_1c_2c_3 + 6c_2^3 + 6c_3^2 - 6c_2c_4,\\
&tp(D_5) = 4c_1^6 - 2c_1^4c_2 - 18c_1^3c_3 - 6c_1^2c_4 + 12c_1^2c_2^2 + 2c_1c_5 + 12c_1c_2c_3 - 4c_2^3 - 4c_3^2 + 4c_2c_4,\\
&tp(S_5) = c_2^3 + c_3^2 - c_2c_4 + c_1^2c_4 - 2c_1c_2c_3, \quad \cdots\cdots
\end{aligned}$$

ちなみに，関数芽の安定 $\mathcal{K}$-分類[7]（超曲面特異点の分類）は，例 3 にある表の中で $S_5, S_6, \cdots$ 等を除いた所謂 ADE 分類から始まる—超曲面特異点型に対する Thom 多項式とは，$p : P \to N$ を非特異多様体間のスムース射，$\iota : M \subset P$ を非特異超曲面として，'超曲面族' $f = p \circ \iota : M \to N$ の特異点集合（あるいは特異値）の双対類を表す普遍 Chern 多項式を意味する（[30] 参照）．

例 4　（多重芽の特異点分類と多重点公式）多重芽（multi-germ）とは，有限個の点の周りにおける写像芽 $f : M^m, \{x_1, \cdots, x_k\} \to N^n, y$ を指し，（安定）$\mathcal{K}$-同値も同様に定義される．η_{ml} を多重特異点型（$\mathcal{K}$-同値類）とするとき，$f : M \to N$ に対して多重特異点集合 $\eta_{ml}(f) \subset M$ が定まり，その閉包の双対類の普遍的表示が考えられる—Kazarian [31], [32] によれば，（その双対類を表す）Thom 多項式 $tp(\eta_{ml})$ は，Chern 類 $c_i = c_i(f)$ と Landweber-Novikov 類 $s_I(f) := f^*f_!(c_I(f))$（c_I は Chern 単項式）の有理係数普遍多項式として一意的に存在する．多重特異点型の tp の応用として，例えば Hurwitz 空間に関して Kazarian-Lando [33] 参照．

1.2　特異点型の分類空間

定理 1 の証明の概略は以下のようなものである．まず，「（次元差 ℓ の）写像芽の $\mathcal{K}$-特異点型に関する分類空間」として Borel 構成 $\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$ を考える[8]．さて，η は $\mathcal{K}$-有限特異点型であるから $\mathcal{E}$ の代わりに有限ジェット空間（適当な次数 r までの Taylor 多項式の空間）を考えてよい；さらに，$\mathcal{K}_{n+\ell,n}$（の r ジェット）は線形部分 $GL_{n+\ell}(\boldsymbol{C}) \times GL_n(\boldsymbol{C})$ と高次項のアファイン部分の半直積に分解されるから，$\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$ の有限次元近似として，Grassmann 多様体の直積上にあるアファイン束（r-次ジェット束）の全空間を考えればよい（その後で帰納極限および射影極限（$n, r \to \infty$）を取る）．

さて，Thom 多項式 $tp(\eta)$ は，'軌道閉包 $\bar{\eta}$ に台をもつ同変コホモロジー類' のうちで最初に現れるものである—すなわち，$\bar{\eta}$ は既約で余次元を d とすれば，$\mathrm{Im}\,[\,H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} - \bar{\eta}) \to H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E})\,]$ の非自明な最低次数部分（次数 d, $\mathrm{rank} = 1$）のしかるべき生成元が $tp(\eta)$ に他ならない．$\mathcal{E}$ はアファイン空間なので $H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}) := H^*(\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}) = H^*(B\mathcal{K})$ である．その生成元を $c_i(\mathrm{source}) \in H^*(BGL_{\infty+\ell}(\boldsymbol{C}))$, $c_j(\mathrm{target}) \in H^*(BGL_\infty(\boldsymbol{C}))$ で記すことにすれば，$tp(\eta)$ は $c_i(\mathrm{source})$ と $c_j(\mathrm{target})$ の多項式で表されるが，安定 $\mathcal{K}$-分類の性質（安定化 $n \to \infty$）から[9]，実は $c_i(\mathrm{target} - \mathrm{source})$ の多項式で表されることが分かる．tp の普遍性は分類写像の議論による（分類写像と $\bar{\eta} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$ との横断性）．

以上の手筋は，代数幾何的文脈において後述の '代数的 Borel 構成'（§3, 4）に置き換えても，ほとんど逐語的に再構成できる．さらに，Thom 多項式は '同変基本類' を用いて直接的に定義できる（§4, 定義 1）．

一方，多重特異点の場合（例 4）は上のような単純な話しではなく少々込み入っている—「（次元差 ℓ

の）多重写像芽の $\mathcal{K}$-分類に関する分類空間」として，[31] では無限ループ空間 $\lim_{s\to\infty}\Omega^{2s}MU(s-\ell)$（複素コボルディズムの分類空間）が考えられている（Thom-Pontrjagin 構成 [54] も参照）．代数幾何的な対応物はまだ良くわからない．

1.3　tp の計算

（考えている特異点分類において）与えられた特異点型 η に対する普遍多項式 $tp(\eta)$ を決定せよ，というのが長らく問題であった．この問いに対していままで取られていた手法に，所謂 'desingularization method' がある—すなわち，軌道閉包 $\overline{\eta}$ の同変特異点解消を具体的に構成して Gysin 準同型を施して tp を求めるやり方[10)]（あるいは，構造層の同変自由分解を具体的に構成して Chern 指標の最低次項を計算するやり方）である．これは正攻法に違いないのだが，望むような特異点解消や自由分解の構成は一般にたいへん困難であり，実際的計算にはなかなか適さない（筆者の知る限り，例えば例 3 における $tp(A_4)$ をこの方法で求めることは（$tp(D_4)$ を法としない限り）出来ていない）．

一方で，Rimányi [53]（[22]）による 'restriction method' のアイデアは特異点型のシンメトリーを利用するすこぶる単純なものであり，実際多くの特異点型（特に単純特異点型[11)]）の tp が求められる．多重特異点型の tp の計算においてもこの方法が有効に働く．

要は，制限射 $H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E})\to H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}-\overline{\eta})$ の kernel の最低次部分を軌道のシンメトリー群の表現を使って具体的に書き下すことである（生成元 $tp(\eta)$ の取り方は，「$tp(\eta)$ を軌道 η の管状近傍に制限すれば η の法束の Thom 類を意味する」という条件から一意的に定まる）．例 3 で見てみよう．図式にあるいずれかの特異点型を η として，$tp(\eta)$ を求めてみる—$tp(\eta)$ は普遍 Chern 類 $c_i=c_i(target-source)$ の多項式として一意的に表されるのだから，そこに現れる Chern 単項式の係数をすべて決定することを考える．まず，τ を余次元が $\operatorname{codim}\eta$ 以下の特異点型とする（$\tau=\eta$ も含む）．軌道 τ の（ある代表元の）固定部分群 $(\subset\mathcal{K})$ を G_τ とし[12)]，それに含まれる代数的トーラスを T_τ とする：例 3 の標準形は重み付き斉次多項式だから自然な $\boldsymbol{C}^*$ 作用を考えればよい（ただし，$A_1:(x,y)\mapsto xy$ についてのみ $T_{A_1}=\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$）．さて，$T_\tau$ は τ の普遍開折（軌道の代表元における 'normal slice'）も固定する—例えば，A_2 の普遍開折への $\boldsymbol{C}^*$-作用は次のように書ける：

$$A_2:(x,y,u)\mapsto(x^3+ux+y^2,u)\qquad\begin{tikzcd}\boldsymbol{C}^2_{x,y}\times\boldsymbol{C}_u \arrow[r,"A_2"] \arrow[loop below, "\rho_0=(\alpha^{\otimes2}\oplus\alpha^{\otimes3})\oplus\alpha^{\otimes4}"] & \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}_u \arrow[loop below, "\rho_1=\alpha^{\otimes6}\oplus\alpha^{\otimes4}"]\end{tikzcd}$$

この T_τ の（普遍開折への）線形表現 ρ_0,ρ_1 から，分類空間 BT_τ（あるいはその有限次元近似）上のベクトル束 E_τ,F_τ が得られ，ファイバーをファイバーに移す写像 $f_\tau:E_\tau\to F_\tau$ で各ファイバー上への制限が τ の普遍開折に同型なものが構成できる．この f_τ に定理 1 を適用すれば，$H^*(E_\tau)\simeq H^*(BT_\tau)$ における等式を得る：

$$\begin{cases} tp(\eta)(c(f_\tau))=0 & (\tau\neq\eta,\ \operatorname{codim}\tau\leq\operatorname{codim}\eta)\\ tp(\eta)(c(f_\tau))=c_{top}(E_\tau) & (\tau=\eta)\end{cases}\tag{4}$$

実際，（第 1 式）τ の普遍開折に η-特異点型は現れない：$\eta(f_\tau)=\emptyset$；（第 2 式）f_η の η-特異点集合 $\eta(f_\eta)$ はベクトル束 E_η の零切断である．(4) 式は，制限射 $H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E})\to H^*_{\mathcal{K}}(\tau)\simeq H^*(BG_\tau)\to H^*(BT_\tau)$ による $tp(\eta)$ の像に関する等式に他ならない．

最後に，各 τ について $H^*(BT_\tau)$ の生成元を用いて (4) を書き下せば，求めたい未知係数に関する連立線形方程式を得る．あとは方程式を解けば良い[13)]．最も簡単な例として，$\eta = A_2$ とし，$tp(A_2) = Ac_1^3 + Bc_1c_2 + Cc_3$ とおいてこの係数を決定してみよう．$\tau = A_2$ に適用すると，$B\boldsymbol{C}^*(\simeq P^\infty)$ の標準線束の第 1 Chern 類を a として，$c_3(E_{A_2}) = 2a\cdot 3a\cdot 4a = 24a^3$ および

$$c(f_{A_2}) = c(F_{A_2} - E_{A_2}) = \frac{1+6a}{(1+2a)(1+3a)} = 1 + a - 11a^2 + 49a^3 + \cdots .$$

これらを (4) の第 2 式に代入して，$tp(A_2)(c(f_{A_2})) = Aa^3 + Ba\cdot(-11a^2) + C\cdot 49a^3 = 24a^3$，すなわち $A - 11B + 49C = 24$ を得る．同様に $\tau = A_0, A_1$ に (4) を適用して得られる 2 つの線形方程式を合わせて連立すれば，$A = -B = 2$，$C = 0$ を得る．

2　特異多様体の Chern ホモロジー類

代数多様体 X の Chern 特性類について簡単に振り返ってみる（$k = \boldsymbol{C}$ あるいは標数 0 の代数閉体上）．この話題に関する最近のサーベイとして Schürmann-Yokura [57] を挙げておく．X が非特異であれば，接束 TX の Chern コホモロジー類がある：$c(TX) \frown [X] \in A_*(X)$．$X$ が特異である場合には，しかるべき blowing-up や smoothing などの改変操作で X を適当に “良い空間” $\tilde{X}$ に置き換えて，$\tilde{X}$ 上の適当なベクトル束（“接束 TX の代換物”）の Chern 類を考え，$\frown [\tilde{X}]$ を施して pushforward あるいは specialization により X の “Chern ホモロジー類” を定める．どのような改変操作を考察するかによって異なった種類のホモロジー特性類が導かれるが，代表的なものを以下に挙げる（Fulton [24] Example 4.2.6, 4.2.9, 19.1.7）．他に，Baum-Fulton-MacPherson [7] に関連して特異多様体上の連接層のホモロジー特性類も考えられる（例えば，特異局所完全交叉に対する接層の Chern ホモロジー指標（諏訪 [61], [62]））．

以降，X は非特異多様体への埋め込みを持つとする．

- Fulton 標準類 $C^F(X)$：$X \subset M$ とし，X に沿った blowing-up $p : \tilde{M} \to M$ の例外因子を D とおく．よく知られているように，Segre 類は D の自己交差を用いて

$$s(X,M) = \sum_i p_*(c_1(\mathcal{O}_D(1))^i \frown [D]) \ \in \ A_*(X)$$

と定義される（法錐 $C_X(M)$ の Segre 類）．X の Fulton 標準類は，M が非特異であるとして，

$$C^F(X) = c(TM|_X) \frown s(X,M) \tag{5}$$

で与えられる（$C^F(X)$ は埋め込みの取り方に依らない；[24]）．特に， X が完全交叉の場合，X 上の局所自明な仮想法束を ν と記すと，$C^F(X) = c(TM|_X - \nu) \frown [X]$ が成り立つ．

- Chern-Mather 類 $C^M(X)$：$\pi : \widehat{X} \to X$ を X の Nash blowing-up [14)] とする．$\widehat{X}$ 上のベクトル束である Nash 接束 $\widehat{TX}$ の全 Chern 類を π で pushforward して，Chern-Mather 類を定義する（これも X の埋め込みの取り方に依らない）：

$$C^M(X) = \pi_*(c(\widehat{TX}) \frown [\widehat{X}]) \ \in \ A_*(X). \tag{6}$$

- Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C_*(X)$：X 上の構成的関数とは，有限和 $\alpha = \sum a_i 1\!\!1_{W_i}$（$a_i \in$

$\boldsymbol{Z}$，W_i は部分代数多様体）で表されるような（X の閉点上の）整数値関数 $\alpha : X \to \boldsymbol{Z}$ のことを指す．ここで $\mathbb{1}_W$ は特性関数を指す（$\mathbb{1}_W(x) = 1$ $(x \in W)$，それ以外で 0)．X 上の構成的関数全体がなす Abel 群を $\mathcal{F}(X)$ で記す．代数多様体と固有射のなす圏に対して，A_* と同様，$\mathcal{F}$ は共変関手となる：固有射 $f : X \to Y$ に対して， pushforward が定義される：複素数体上での文脈 [37] では

$$f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y), \quad f_*(\alpha)(y) = \sum a_i \ \chi(W_i \cap f^{-1}(y)) \quad (y \in Y)$$

（ここで，χ は (Borel-Moore ホモロジーの) Euler 標数)．超越的な χ を用いない，f_* の代数幾何的定義は [34] を参照のこと．構成的関数 $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ の X 上の積分 $\int_X \alpha$ を，$pt : X \to pt = Spec(k)$ による α の pushforward として定義する：$\int_X \alpha := pt_*(\alpha) \in \mathcal{F}(pt) = \boldsymbol{Z}$，特に $\int_X \mathbb{1}_X = \chi(X)$．Chern-MacPherson 変換 C_* とは，積分 $\int_X$ の “class version” に相当する：

定理 2　([37]; [34]) 次を満たす自然変換 $C_* : \mathcal{F}(X) \to A_*(X)$ が唯一存在する：非特異な X に対して $C_*(\mathbb{1}_X) = c(TX) \frown [X]$.

実際，（X を proper として）自然性より $pt_* C_*(\alpha) = C_* pt_*(\alpha) = \int_X \alpha \in \boldsymbol{Z}$ だから，C_* の 0 次ホモロジー部分が $\int_X$ である．通常，$C_*(X) := C_*(\mathbb{1}_X)$ を X の Chern-Schwartz-MacPherson 類と呼ぶ[15)]．$C_*(X)$ の最高次項は基本類 $[X]$ であり，0 次項は Euler 標数 $\chi(X)$ に対応する．MacPherson [37] の C_* の構成には，Mather 類 $C^M(X)$ と Euler 障害と呼ばれる構成的関数 Eu_X が本質的な役割を果たす：特に，$C^M(X) = C_*(Eu_X)$.

C_* の自然性 $C_* \circ f_* = f_* \circ C_*$ は Grothendieck-Riemann-Roch 公式（非特異 X に対する $\tau = ch(\ )td(TX) : K^0(X) \to A^*(X)$ と $f_!$ の可換性）の類似である（尚，GRR の特異多様体への拡張は Baum-Fulton-MacPherson [7] にある特異 GRR 写像 τ)．また，C_* は specialization に対して可換である[16)] (Verdier [67], [35])．さらに，C_* はスムース射 $f : X \to Y$ の pullback に対して $C_* \circ f^* = c(T_f) \frown f^*$ が成り立つ（T_f は相対接束）—これを Verdier-Riemann-Roch 公式（VRR 公式）と呼ぶ ([70], [56]).

- Milnor 類 $\mathcal{M}(X)$：上記 3 種の Chern 類は，その定義から，X が非特異ならば $c(TX) \frown [X]$ に等しい．そこで，このような異なる種類の Chern 類の「差異」を，X の特異点のある局所不変量が定める構成的関数の C_*-値と関係させて表すことを考える．

例えば，X の Milnor 特性類がある：$\mathcal{M}(X) := (-1)^n(C_*(X) - C^F(X))$．特に X を特異超曲面としよう（特異点は非孤立のものも含む)：超曲面芽に対しては Milnor ファイバーが常に考えられるから，X の特異点にその Milnor 数を対応させる構成的関数 $\mu \in \mathcal{F}(X)$ が定義できる．ν を仮想法束として，次の公式が知られている [50], [1]：

$$\mathcal{M}(X) = c(\nu)^{-1} \frown C_*(\mu). \tag{7}$$

これは本質的には C_* の specialization との可換性から導かれる．完全交叉特異多様体の $\mathcal{M}(X)$ については [71], [56], [14] 参照．特に完全交叉 X が孤立特異点のみ有する場合，3 種の Chern ホモロジー特性類の差異は 0 次ホモロジーにある—これは孤立完全交叉芽の重要な不変量に対応する：

定理 3　([60], [48]) 局所完全交叉多様体 X の特異点は孤立特異点 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ のみとする．このとき，$\mathcal{M}(X)$（の degree）は Milnor 数の総和 $\sum_{i=1}^k \mu(X, x_i)$ に一致する．また，差 $C_*(X) - C^M(X)$，$C^F(X) - C^M(X)$ （の degree）は，符号 ± 1 の違いを除いて，孤立特異点の generic hyperplane section の Milnor 数の総和，Buchsbaum-Rim 重複度の総和，に各々一致する．

- Segre-Schwartz-MacPherson 類 $s^{SM}(X,M)$ ：Fulton 標準類の定義を逆手にとって，Chern-Schwartz-MacPherson 類に対応する "Segre 類"を次で与える：埋め込み $X \subset M$ に対して，

$$s^{SM}(X,M) := c(TM|_X)^{-1} \frown C_*(X) \tag{8}$$

とおく（Mather 類でも同様）．X が非特異部分多様体ならば，いずれの "Segre 類"も法束 $\nu = TM|_X/TX$ の inverse Chern 類 $c(-\nu) \frown [X]$ であることに注意する．P. Aluffi [2] も参照．

3　同変 Chern-MacPherson 変換

§2 にある Chern ホモロジー特性類の同変版を考えたい．G を代数群，X を G-代数多様体とする．まず，Totaro-Edidin-Graham ([65], [17]) による代数的 Borel 構成に従って，G-同変 Chow 群 $A_*^G(X)$ を与える．

V を G の線形表現で，ある Zariski 開集合 $U(\subset V)$ に G が自由に作用しているものを取る．G は $X \times U$ に自由に作用しているから，その商 $X_U := X \times_G U(= (X \times U)/G)$ を取って主 G-束 $X_U \to U/G$ を考える[17]．そのような表現 V と V'（および開集合 U, U'）で，同変な全射線形写像 $p : V' \to V$（$l_1 = \dim V' - \dim V$）があって $U_1 := p^{-1}(U) \subset U'$ となるものに対して，ベクトル束の射影と包含写像の図式 $X_U \overset{p}{\leftarrow} X_{U_1} \overset{\iota}{\to} X_{U'}$ が誘導される．これから，"Radon 変換"準同型 $\iota_* \circ p^* : A_*(X_U) \to A_{*+l_1}(X_{U'})$ が（$V - U$ の余次元よりも低い次元の範囲で）得られる．この帰納的極限として X の同変 Chow ホモロジー群を定義する：

$$A_i^G(X) := \lim_{\to} A_{i+(l-g)}(X_U), \qquad (l = \dim V,\ \ g = \dim G).$$

一般に $A_i^G(X)$ は負次元（$i < 0$）でも非自明である．また，同変基本類 $[X]_G \in A_n^G(X)$ が一意に定まる（$\dim X = n$）．X_U の operational Chow 群の射影極限として $A_G^i(X) := \lim A^i(X_U)$ が定義され，基本類は同変 Poincaré 写像 $\frown [X]_G : A_G^i(X) \to A_{n-i}^G(X)$ を与える．特に X が非特異のとき，これは同型である（逆写像を Dual_G と記す）．

$\mathcal{F}_{inv}^G(X \times V)$ を $X \times V$ 上の G-不変な構成的関数全体がなす Abel 群とする（$\mathcal{F}(X \times V)$ の部分群）．そこで，同変全射 $p : V' \to V$ の pullback による帰納的極限を

$$\mathcal{F}^G(X) := \lim_{\to} \mathcal{F}_{inv}^G(X \times V)$$

とおき，この元を G-同変構成的関数と呼ぶ[18]．

（G-embeddable な）G-代数多様体と固有 G-射の圏に対して，次が成り立つ：

定理 4　（同変 Chern-MacPherson 変換 [41]）次を満たす自然変換

$$C_*^G : \mathcal{F}^G(X) \to A_*^G(X)$$

が唯一存在する：X が非特異ならば，$C^G(1\!\!1_X) = c^G(TX) \frown [X]_G$.

とくに $G = \{e\}$ のとき，$C_*^G = C_*$（MacPherson 変換）．この C_*^G の構成において本質的な点は Verdier-Riemann-Roch 公式である一射影 $p : X_{U_1} \to X_U$ に対して VRR 公式を用いて，しかるべき帰納的極限を取る：$C_*^G(1\!\!1_X) := \lim c(T_p)^{-1} \frown C_*(X_U)$（'Radon 変換 $\iota_* p^*$' の C_* [19] の帰納

的極限)．また，すぐ分かることとして，$C_*^G(1\!\!1_X) = \chi(X)[pt] + \cdots + [X]_G$.

注として，C_*^G は商スタックに対する MacPherson 変換 $C_* : \mathcal{F}([X/G]) \to A_*([X/G])$（'$C_*$ の拡張'）と見なしてもよい（ここで，商スタック $[X/G]$ に対して，$A_i([X/G]) := A_{i+g}^G(X)$ および $\mathcal{F}([X/G]) := \mathcal{F}^G(X)$ とおく；これらは presentation X, G の取り方に依らない)．

尚，同変 Riemann-Roch 写像（特異 GRR の同変版）については Edidin-Graham [18] にある．

4　Thom 多項式の "total class version"

§2 で触れた Segre 類の同変版を考える．まず一般の Thom 多項式の定義を次で与える（簡単の為，アファインの場合とした)：

定義 1　G-アファイン空間 V と V の G-不変部分代数多様体 X が与えられたとき，X の同変基本類の（V における）G-同変 Poincaré 双対を取り，これを G-特性類で表したものを <u>X の Thom 多項式</u>と呼ぶ[19)]：$Tp(X) = \mathrm{Dual}_G\ \iota_*[X]_G \in A_G^s(V) \simeq A^s(BG)$（$s = \mathrm{codim}\ X$，$\iota$ は包含写像)．

ここで Segre-SM 類 (8) の同変版

$$s_G^{SM}(X, V) := c^G(TV|_X)^{-1} \frown C_*^G(X) \in A_*^G(X)$$

を考える（X が非特異ならば，G-法束を ν として，$c^G(\nu)^{-1} \frown [X]_G$ を意味する)．$Tp(X)$ の 'total class version' として，

$$Tp^{SM}(X) := \mathrm{Dual}_G\ \iota_* s_G^{SM}(X, V) = Tp(X) + \text{higher terms} \in A^*(BG)$$

とおく．さらに，G-不変構成的関数 $\alpha = \sum_{i=1}^s a_i 1\!\!1_{X_i}$　($a_i \in \boldsymbol{Z}$，X_i は G-不変部分多様体）に対して $Tp^{SM}(\alpha) := \sum a_i\, Tp^{SM}(X_i)$ とおくことで，群準同型 $Tp^{SM} : \mathcal{F}_{inv}^G(V) \to A^*(BG)$ を与える．

例 5　当たり前の例として，$G = GL(n)$，$V = \boldsymbol{C}^n$ として，軌道 $X = \{0\}$ に対する Thom 多項式は top Chern 類 $c_n (= c_n^G(V) = c_n(EG))$ であり，Tp^{SM} は $(1 + c_1 + \cdots + c_n)^{-1} c_n$ である．

さて，§1 での「写像の特異点分類」における $tp(\eta)$ は，上の定義 1 において $V = \mathcal{E}$，$G = \mathcal{K}$，$X = \bar{\eta}$ の場合の $Tp(X)$ のことである（但し，有限次ジェット空間で考えて極限を取る：§1.2 参照)．少々紛らわしいかも知れないが，写像の特異点の場合には Tp^{SM} を tp^{SM} と表すことにする．

$\mathcal{K}$-不変構成的関数 $\alpha \in \mathcal{F}_{inv}^{\mathcal{K}}(\mathcal{E})$ および（次元差 ℓ の）写像 $f : M \to N$ に対して，分類写像の pullback として得られる M 上の構成的関数を $\alpha(f) \in \mathcal{F}(M)$ と記す．いま，$\alpha = \sum a_i 1\!\!1_{\bar{\eta}_i}$（各 η_i は $\mathcal{K}$-有限特異点型）のように表される関数を考える．f が α に対して一般的 (generic) であるとは，各 $\bar{\eta}_i$ に対して横断性条件を満たすときにいう．定理 4 の系としてすぐに次が示される：

系 1　([41]) このような構成的関数 $\alpha \in \mathcal{F}_{inv}^{\mathcal{K}}(\mathcal{E})$ に対して，$tp^{SM}(\alpha)$ は $c_i = c_i(target - source)$ の形式的べき級数であって，α に対して一般的な写像 $f : M \to N$ に対して次が成り立つ：

$$C_*(\alpha(f)) = c(TM) \cdot tp^{SM}(\alpha)(c(f)) \frown [M]. \tag{9}$$

特に $\alpha = 1\!\!1_{\bar{\eta}}$ とすれば，η-型特異点集合の閉包 $\overline{\eta(f)}$ の Euler 標数に関する "universal" な Chern 類表示が存在する：

$$\chi(\overline{\eta(f)}) = \int_M c(TM) \cdot tp^{SM}(1\!\!1_{\bar{\eta}})(c(f)).$$

写像の特異点型 η に対して普遍 Chern 類の級数 $tp^{SM}(\mathbb{1}_{\overline{\eta}})$ を完全に決定するのは一般に不可能であり（η には無限に多くの特異点型が隣接する故），分類が出来ている余次元まで計算するのが望める範囲である．一方で，以下のように tp^{SM} の計算が完全にできる場合もある．

例 6　例 2 における (3) の class version $tp^{SM}(\overline{\Sigma^k})$ は，脚注にある $\overline{\Sigma^k}$ の特異点解消を介して，ある Schur S-多項式の線形和として求められている（Parusiński-Pragacz [49]）．

例 7　([44]) 孤立完全交叉芽の Milnor 数が定める構成的関数 μ について，$tp^{SM}(\mu)$ は簡明な表示ができる．いま，$f : M^{n+\ell} \to N^n$ ($\ell \geq 0$) を孤立完全交叉特異点のみ有する固有射で，M，N は連結とする．Milnor 数を対応させる M 上の関数を μ_f，一般ファイバーを F とすると，

$$f_*(\mathbb{1}_M + (-1)^\ell \mu_f) = \chi(F) \cdot \mathbb{1}_N$$

が成り立つ．この式に $\int_N$ あるいは C_* を施せば, N 上の特異値集合について情報が得られる (Yomdin [73], Nakai [40])．これを Novkov-Landweber 類の性質等を介して M 上の特異点集合に関する形に記すれば，$C_*(\mu(f)) = (-1)^{\ell+1} c(f^*TN)(\bar{c}_{\ell+1}(f) + \cdots) \frown [M]$ が導かれる．これより，

$$tp^{SM}(\mu) = (-1)^{\ell+1}(1 + c_1 + c_2 + \cdots)(\bar{c}_{\ell+1} + \bar{c}_{\ell+2} + \cdots) \tag{10}$$

が成り立つ．この式の leading term は $(-1)^{\ell+1}\bar{c}_{\ell+1} (= tp(A_1))$ であり，例 1 の “class version” と見なされる．また，ある意味で定理 3 の同変版と言ってよい．また，孤立完全交叉芽 τ が与えられたとき，§1.3 の (4) 式に出てくる f_τ に (10) を適用すれば，τ の Milnor 数 μ_τ を E_τ, F_τ の Chern 類で表わす公式が得られる；τ が擬斉次であれば，μ_τ は τ のウェイトと次数を用いて表される．

5　オービフォルド Euler 標数の “total class version”

例えば曲面の A_μ-特異点は，§1 で扱ったように適当な座標変換を用いて $x^{\mu+1} + yz = 0$（標準形）と表せる一方で，$\boldsymbol{C}^2$ を巡回群作用で割った商特異点でもある．また，多重特異点型に対して自然に置換群の作用が現れる（[31], [53]）．そこでこの節では，有限群作用に関して C_*^G の応用を考えてみたい．以下，G を有限群とし，G-代数多様体 X（特異であってもよい）の幾何的商 X/G（あるいは $[X/G]$）の Chern-SM 類について基本的な考察をする．

5.1　群準同型の個数と構成的関数

X 上の構成的関数で G の作用の仕方を反映する何らかの “標準的な” ものを取り出すことを考える．まず，次の G-不変な有理数値構成的関数を見てみよう：

$$\mathbb{1}^{(1)}_{X;G} := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathbb{1}_{X^g}, \quad \mathbb{1}^{(2)}_{X;G} := \frac{1}{|G|}\sum_{gh=hg} \mathbb{1}_{X^g \cap X^h}, \tag{11}$$

これらの X 上での積分は良く知られた不変量を与える：$\int_X \mathbb{1}^{(1)}_{X;G} = \chi(X/G)$, $\int_X \mathbb{1}^{(2)}_{X;G} = \chi^{orb}(X;G)$（後者は所謂オービフォルド Euler 標数 [28]）．

より一般に，A を任意の群で $|\mathrm{Hom}(A,G)| < \infty$ を満たすものとし，群 A に付随する標準 G-同変構成的関数 $\mathbb{1}^{(A)}_{X;G}$ を次で与える（$A = \boldsymbol{Z}^m$ の場合には $\mathbb{1}^{(m)}_{X;G}$ と略記する）：

$$\mathbb{1}^{(A)}_{X;G} := \frac{1}{|G|}\sum_{\rho} \mathbb{1}_{X^{\rho(A)}} \quad \in \mathcal{F}^G_{inv}(X) \otimes \boldsymbol{Q}, \tag{12}$$

ここで，和は A の G-表現 $\rho \in \mathrm{Hom}(A,G)$ 全部に関して取り，$X^{\rho(A)} := \cap_{g\in\rho(A)} X^g$ とおいた．

この標準構成的関数は，$[X/G]$ の各 '点' に対して，その automorphism group の '大きさ' を（群 A からの準同型の個数でもって）計る関数と見なされる．これらの構成的関数に C_*^G を作用させれば，しかるべき意味を持つ全ホモロジー類が得られる．

商 X/G が存在するとし， $\pi : X \to X/G$ を自然な射影，$\pi_* : (\mathcal{F}^G_{inv}(X) \subset)\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X/G)$ をその pushforward とする．標準的な同型 $A_*^G(X)\otimes \boldsymbol{Q} \simeq A_*(X/G)\otimes \boldsymbol{Q}$ （[17], Thm 3）を通して，（有理係数において）$C_*^G(1\!\!1^{(A)}_{X;G})$ と $C_*(\pi_* 1\!\!1^{(A)}_{X;G})$ とは同一視される．特に，$\pi_* 1\!\!1^{(1)}_{X;G} = 1\!\!1_{X/G} \in \mathcal{F}(X/G)$ が簡単に確かめられるので，$C_*^G(1\!\!1^{(1)}_{X;G})$ は商 X/G の Chern-MacPherson 類 $C_*(X/G)$ に同一視される．

便宜上，$C_*(\pi_* 1\!\!1^{(2)}_{X;G})$（あるいは $C_*^G(1\!\!1^{(2)}_{X;G})$）を $C_*^{orb}(X/G)$ と記す—この 0 次の degree は $\chi^{orb}(X;G)$ である．[28] と同様な議論より，次の表示が成り立つ：

$$C_*^{orb}(X/G) = \sum (\iota_g)_* C_*(X^g/C(g)), \tag{13}$$

ここで右辺の和は G の元の共役類すべてに渡る和であり，各共役類から代表元 g をひとつずつ選んでおく；$C(g)$ は g の中心化群，$\iota_g : X^g/C(g) \to X/G$ は自然な入射を指す．より一般に，$C_*(\pi_* 1\!\!1^{(A\times \boldsymbol{Z})}_{X;G}) = \sum (\iota_g)_* C_*(\pi_* 1\!\!1^{(A)}_{X^g;C(g)})$ が成り立つ．また，X が非特異でクレパント特異点解消 $p : Y \to X/G$ がある場合，(13) と弦的 Chern 類（[16] Thm 0.2, Prop. 4.5; [3]）を経由して，次が成り立つ：

$$C_*^{orb}(X/G) = c_{str}(X/G, 0) = p_*(C_*(Y)) \ \ (= p_*(c(TY) \frown [Y]\,)). \tag{14}$$

5.2 対称積

一例として，対称積 $S^nX := X^n/S_n$ を考える．ここで，S_n は n 次置換群とし，座標成分の置換として Cartesian 積 $X^n = X\times\cdots\times X$ に作用する．X は特異であっても構わない．よく知られているように対称積の Euler 標数の母関数は次で与えられる（Macdonald [36]）：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(S^nX) z^n = (1-z)^{-\chi(X)}.$$

この母関数表示において，Euler 数を Chern-MacPherson 類に読み替え，さらに不定元 z に "作用素 D"を添加させて，次の "Chern class version" を得る [42]：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*(S^nX) z^n = (1-zD)^{-C_*(X)}, \tag{15}$$

さらにオービフォルド Euler 標数の母関数表示に対応するものは，

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*^{orb}(S^nX) z^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1-z^kD^k)^{-C_*(X)}. \tag{16}$$

まず，記号の意味を述べる．(15, 16) 式が住んでいる場所は，次のような "形式的べき級数"の全体がなす $\boldsymbol{Q}$-代数である：

$$A_X^{sym} := \sum_{n=0}^{\infty} z^n A_*^{S_n}(X^n)\otimes \boldsymbol{Q} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n, \quad \xi_n \in A_*^{S_n}(X^n)\otimes \boldsymbol{Q} \right\}.$$

積は通常通り $(\xi z^m)\odot(\xi' z^n) := z^{m+n}/(m+n)!\cdot\sum_{\sigma\in S_{m+n}}\sigma_*(\xi\times\xi')$ で与える．記号 D は "対角作用素の生成元" を意味する：すなわち，$D^0=1$，$D^1=D=id$,

$$D^n := (\Delta^n)_* : A_*(X)\otimes \boldsymbol{Q} \to A_*^{S_n}(X^n)\otimes \boldsymbol{Q}$$

($\Delta^n : X\to \Delta X^n \subset X^n$ は diagonal embedding) とする．さらに，形式的に $zD=Dz$ および

$$(1-zD)^{-c} := exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}D^k(c)z^k\right) = exp(D(c)z)\odot exp\left(\frac{1}{2}D^2(c)z^2\right)\odot\cdots$$

とおいた[20]．次に (15, 16) の導出のポイントを列挙する：

１）$\boldsymbol{Q}$-代数 $\mathcal{F}_X^{sym} := \sum_{n=0}^{\infty} z^n\mathcal{F}^{S_n}(X^n)\otimes\boldsymbol{Q}$ が同様に考えられて，D^n 作用素, pushforward f_*^{sym} : $\mathcal{F}_X^{sym}\to\mathcal{F}_Y^{sym}$ も定義できる．これらの "構成的関数および全ホモロジー類係数の" ベキ級数代数 (共変関手) の間には，自然変換 $C_*^{sym} : \mathcal{F}_X^{sym}\to A_X^{sym}$ が次で与えられる：$C_*^{sym}(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n) := \sum_{n=0}^{\infty} C_*^{S_n}(\alpha_n)z^n$.

２）いま，自然数 n の分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ に対して，$\mathcal{D}^\lambda(\alpha) := D^{\lambda_1}(\alpha)\odot\cdots\odot D^{\lambda_k}(\alpha)$ と記す．すべての n とその分割に渡る有理係数形式和 $T=\sum v_\lambda \mathcal{D}^\lambda z^{|\lambda|}$ は，自然に写像 $T:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}_X^{sym}$ および $T: A_*(X)\to A_X^{sym}$ を定義する（例：$T(\alpha)=(1-zD)^{-\alpha}$）．構成から次が分かる：

(a)　固有射 $f: X\to Y$ に対して，$T\circ f_* = f_*^{sym}\circ T$；

(b)　Chern-MacPherson 自然変換に対して，$T\circ C_* = C_*^{sym}\circ T$.

３）群 A（今の場合は $\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}^2$）の置換表現の個数に関する数え上げ母関数公式（下記の (18) 参照）の拡張として，しかるべき "有理関数形"（一般には指数形）写像 T を用いた「構成的関数 $1\!\!1_{X^n;S_n}^{(A)}$ に関する母関数公式」が $\mathcal{F}_X^{sym}$ の中に構成できる．そして，C_*^{sym} を施す—上記の性質 (b) を介して (15, 16) が導かれる．

この種の公式の一般形は次で与えられる：有限群 G が (特異) 多様体 X に作用しているとし，wreath product $G_n := G^n\sim S_n$ （G と S_n の半直積群）の X^n への作用 $(g_1,\cdots,g_n,\sigma).(x_1,\cdots,x_n) := (g_1.x_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,g_n.x_{\sigma^{-1}(n)})$ を考える．Ω_A で A の中の指数有限の部分群全体の集合とする．和の有限性に関するしかるべき条件の下，次の公式が成り立つ：

定理 5　(Chern ホモロジー類に関する "Dey-Wohlfahrt" 公式 [42]) ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*^{G_n}(1\!\!1_{X^n;G_n}^{(A)})z^n = exp\left(\sum_{B\in\Omega_A}\frac{1}{|A:B|}(zD)^{|A:B|}C_*^G(1\!\!1_{X;G}^{(B)})\right). \tag{17}$$

注として，$X=pt$ の場合の (17) 式は，群 A の G_n-表現の個数に関する公式 [39]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\mathrm{Hom}(A,G_n)|}{|G|^n n!}z^n = exp\left(\sum_{B\in\Omega_A}\frac{|\mathrm{Hom}(B,G)|}{|G|\cdot|A:B|}z^{|A:B|}\right) \tag{18}$$

に他ならない．$G=\{e\}$ のときが，古典的な Dey-Wohlfahrt 公式である [69], [74].

例 8　$A=\boldsymbol{Z}^m$ の場合，(17) は,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*^{G_n}(1\!\!1_{X^n;G_n}^{(m)})\,z^n = \prod_{r=1}^{\infty}(1-z^rD^r)^{-j(m-1;r)\,C_*^G(1\!\!1_{X;G}^{(m)})}. \tag{19}$$

ここで，$j(k;r)$ は格子 $\boldsymbol{Z}^k$ に含まれる指数 r の部分群の個数を指す．$G=\{e\}$ で $A=\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}^2$ の場合が，前出の (15, 16) 式である．(15, 16) 式において，各 z^n の係数として 0-次元ホモロジー (degree) だけ抜き出してくれば，各々，$\chi(S^nX)$ および $\chi^{orb}(X^n;S_n)$ の母関数表示に一致する（$pt: X\to pt$ に関する上記 (a) を (15, 16) 式の両辺に適用すればよい）．同様に，(19) の 0-次元ホモロジー部分は，一般化オービフォルド Euler 標数 $\chi_m(X^n;G_n)$ の生成母関数（Tamanoi [63]）に一致する．

例 9　良く知られているように，非特異射影曲面 X に対して，n 点の Hilbert スキーム $X^{[n]}$ は非特異であって，特異点解消 $\pi_n: X^{[n]}\to S^nX$（Hilbert-Chow 写像）を与える．(14) および (16) から，'$\chi(X^{[n]})$ の母関数公式'（Göttsche）の一般化が得られる：同変 Poincaré 双対を経由してコホモロジーで書くと

$$\pi_*\left(\sum_{n=0}^{\infty} c(TX^{[n]})\, z^n\right)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-z^kD^k)^{-c(TX)} \tag{20}$$

（ここで，π_* は 各 z^n の係数（全コホモロジー類）に π_n の Gysin 準同型を施すものを指し，D^k についても Gysin 準同型を意味する）．尚，$c(TX^{[n]})$ の母関数公式については [9], [10] 参照．

6　おわりに

ここでは触れなかった事あるいは今後の展望としていくつか思いつくものを述べて，本小文のまとめとさせて頂きたい．

関数・写像芽の局所理論について，この 40 年余の間に数多の仕事がなされた．これらの結果群を '特異点型のシンメトリーと普遍特性類'（"特異点型の分類空間"上の交差理論）の観点から再考しようというのが §1, §4 の主旨である．例 7 の路線は，超曲面・完全交叉芽の Milnor 数，polar 種数，μ^*-不変量などに関する代数的公式群を tp 理論の観点から統一的に再構成する試みであり，超平面配置や対数的ベクトル場の古典的話題も含めて，開拓する余地がまだ多く残されている．これに関連する話題のひとつとして，Thom 多項式の Chern 単項式の係数（あるいは Schur 多項式展開での係数）に何らかの規則性を見いだすこと，特に，特異点型の '系列' に対する Thom 多項式の closed formula がある一例えば，（次元差 ℓ を固定し適当な条件下で）$tp(A_k)$（$k=0,1,2,\cdots$）の母関数を求める問題（Kazarian [32]），あるいは，k を固定して $tp(A_k)$ を次元差 ℓ をパラメータとして記述する問題がある（$\ell\le 0$ の場合に Fehér-Rimányi [23]，Bérczi-Szenes [13]）．これらの問題には，restriction method と合わせて，同変特異点解消あるいはトーラス作用の局所化公式（Berline-Vergne, Rossmann）が使われる．tp（あるいは tp^{SM}）同士の '積公式' も（Thom-Sebastiani 公式あるいは Littlewood-Richardson 則と絡んで）興味ある題材である．また，同変 K 理論の応用として Thom 多項式を定式化することは，例えば Borho-Brylinski-MacPherson [11] にある（Joseph 多項式が tp に相当）．この文脈で同変 MacPherson 変換 C_*^G を考えることは十分意味があると思われる．C_*^G の同変交差ホモロジーへの lifting problem も興味がある．

§5 の内容は，もともとは §1 の題材 (Klein 特異点あるいは多重特異点の tp 理論) に応用することを考えてのことであったが，まだそこまで至っていない．まずは '標準的構成的関数' (およびその Chern ホモロジー類）と特異点解消との関わりを見ることが必要だろう．Batyrev [6] の弦的 Euler 標数の 'class version' として，'良い特異点' を持つ $\mathcal{X}$ と因子 Δ のペアに対する弦的 Chern 類 $c_{str}(\mathcal{X},\Delta)$

がある (de Fernex-Lupercio-Nevins-Uribe [16]; Aluffi [3]) —これは，$\mathcal{X}$ 上のある相対モティヴィック積分を経由して定まる構成的関数に MacPherson 変換 C_* を施して定義される．(14) で触れたように，$\mathcal{X} = X/G$ に対して，弦的 Chern 類 $c_{str}(X/G, 0)$ と $C_*^{orb}(X;G)(\equiv C_*^G(1\!\!1_{X;G}^{(2)}))$ は一致する．$C_*^G(1\!\!1_{X;G}^{(A\times\boldsymbol{Z})})$ $(A \neq \boldsymbol{Z})$ についても，適当な $c_{str}(X/G, \Delta)$ $(\Delta \neq 0)$ で表されることを期待したい (14) の一般化)．一方で，最近，特異多様体の加法的特性類を統合する理論として，與倉氏ら [12] により Hirzebruch 類自然変換 T_{y*} が与えられた（[57] も参照)．これは，X 上の相対モティヴィック積分に対して X のある $\boldsymbol{Q}[y]$ 係数全ホモロジー類を対応させる自然変換であり，例えば T_{y*} を $y = -1, 0$ に特殊化すれば，それぞれ，MacPherson 変換 C_* および Baum-Fulton-MacPherson の特異 GRR 写像 τ を誘導する．弦的 Chern 類もこの枠組みにおける（$y = -1$ の）特別なケースである．T_{y*} の '同変版' はまだ知られていないが，我々の同変 MacPherson 変換 C_*^G と [18] の同変特異 GRR 写像 τ^G が統合されるべきである．本小文で示す方向はこの枠組みで捉えるのが最も一般的かも知れない．

謝辞：與倉昭治氏と諏訪立雄氏からは特異多様体の特性類に関していろいろとご教示いただいた．この場を借りて感謝の意を表したい．

注　釈

1) 分野が違えば同じ意味のものに他の呼称が使われている—表現論における multidegree, equivariant multiplicities, Joseph 多項式など．

2) 他の tp の文献では '余次元' $n - m$ のほうが用いられることが多い．

3) $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{m,n}$ を正則同型芽 $\sigma : \boldsymbol{C}^m, 0 \to \boldsymbol{C}^m, 0$ と正則写像芽 $\Xi : \boldsymbol{C}^m, 0 \to GL_n(\boldsymbol{C})$ のペア全体がなす群をとし，その $\mathcal{E}(m,n)$ への作用を $((\sigma,\Xi).f)(x) := \Xi(x)f(\sigma^{-1}(x)) : \boldsymbol{C}^m, 0 \to \boldsymbol{C}^n, 0$ で与える．簡単な線形代数より，$f, g \in \mathcal{E}(m,n)$ に対して，$Q(f) \simeq Q(g) \iff f \in \mathcal{K}_{m,n}.g$（$f$ と g は $\mathcal{K}$-同値)．[5], [25] など参照のこと．

4) Thom 多項式と呼ばれる由来は，IHES の Thom 記念号 (no.68,1988) にある Haefliger と Teissier の解説記事によれば，Thom の colloquium talk (Strasbourg, 1957) が源であるらしい（前年の [64] において，特別な場合の $tp(A_2)$ に相当するものを計算している；尚，Thom は翌 58 年には組み合わせ Pontrjagin 類の論文も書いていて，こちらは後述の特異多様体の特性類理論へと繋がる)．当初，定理 1 は C^∞ カテゴリー（実写像芽）で与えられた ([64], [26], [15] 参照)．その際，$\bar{\eta}$ は（$\boldsymbol{Z}_2$ または整係数）基本類を持つと仮定し，Chern 類の代わりに Stiefel-Whitney 類または整係数 Pontrjagin 類を扱う．実写像芽の場合，いつ特異点型の閉包（あるいはそれらの線形和）がサイクルになるかは特異点型の隣接関係を調べないと一般には分からない．これを決めるのが所謂 Vassiliev 複体である [66]．実写像芽の $\mathcal{K}$-分類および $\mathcal{A}_e$-分類の Vassiliev 複体は，各々，実 Thom 多項式および次数 1 Vassiliev 型不変量（Arnold 不変量の一般化）の研究に繋がる（[45], [46])．

5) $(x_1, \cdots, x_{\ell+1}) \to x_1^2 + \cdots + x_{\ell+1}^2$ を標準形として持つ特異点型を指す（写像の場合は，この標準形の trivial unfolding の $\mathcal{K}$-同値類)．

6) 切断の横断性条件あるいは $\overline{\Sigma^k(\sigma)}$ が正しい余次元を持つとき (3) の形が成立する．一般には，左辺を Fulton [24] の degeneracy loci class（局所化類）に置き換える．

7) $\boldsymbol{C}^m, 0 \to \boldsymbol{C}, 0$ の $\mathcal{K}$-分類で m を動かす安定化（$f(x)$ と $f(x) + u_1^2 + \cdots + u_s^2$ を同じと見なす)．完全交叉芽の分類とは区別する．

8) ここで，$E\mathcal{K} \to B\mathcal{K}$ は普遍 $\mathcal{K}$-主束，$\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$ は（ファイバーを $\mathcal{E}$ とする）同伴束である．特異点型の分類空間として商スタック $[\mathcal{E}/\mathcal{K}]$ を考えてもよい：$f : M \to N$ が与えらたとき，これを "M でパラメトライズされた（$\mathcal{E}$ の中の）$\mathcal{K}$-軌道の族" と見なすことにより，'分類写像' $M \to [\mathcal{E}/\mathcal{K}]$ が考えられる．Borel 構成では，分類写像 $M \to \mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$ が次の写像の合成 $\rho_1 \circ jf$ で与えられる：'ジェット束' $\mathcal{E}(M,N) \to M \times N$（ファイバー $\mathcal{E}(n+\ell, n)$, 構造群 $\mathcal{K}_{n+\ell,n}$）の分類写像から誘導される写像 $\rho_1 : \mathcal{E}(M,N) \to \mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$, および, 'ジェット拡大' $jf : M \to \mathcal{E}(M,N)$ ($x \in M$ に対して 芽 $f : M, x \to N, f(x)$ を対応させる写像)．

9) 本質的な点は，trivial unfolding を対応させる写像 $\mathcal{E}(m,n) \to \mathcal{E}(m+s, n+s)$ がすべての $\mathcal{K}$-軌道に横断的であることにある [45]．

10) 例 2 で見てみよう．E の k-次元部分空間から成る Grassmann 束 $p : Gr_k(E) \to M$ の全空間上にベクトル束 $\mathrm{Hom}(\xi, p^*F)$（ξ は tautological 束）を考え，その切断 s を，k-次元部分空間 $\lambda \subset E_x$ に対して制限写像 $s := \sigma_x|_\lambda : \lambda \to F_x$ を対応させるものとする（σ が横断性条件を満たす $\Leftrightarrow$ s が零切断と横断的)．s の零集合は '特異点解消' $p : s^{-1}(0) \to \overline{\Sigma^k(\sigma)}$ を与える．そこで $c_{top}(\mathrm{Hom}(\xi, p^*F))$ の pushforward $p_!$ による像を計算して (3) 式が導かれる．（尚，横断性条件を外して考える場合，Fulton による局所化類 ([24]) は，*'localized c_{top}'* の pushforward 像として

定義される）．この一般化については [55], [15], [24], [4] など参照．

11) どのような分類でも良いが，ここでの‘単純特異点型’とは，有限個の軌道としか交わらないような管状近傍を持つ軌道のことを指す（モダリティが 0）．例えば例 2 の Σ^k や例 3 の表にあるものなど．

12) $\mathcal{K}$-有限特異点型 τ に対して，固定部分群 G_τ の‘極大 compact (reductive) 群’は $GL_{n+\ell} \times GL_n$ の部分群として存在する（Wall [68]）．

13) すべての τ について $c_{top}(E_\tau) \neq 0$ であれば，$H^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{E} - \bar{\eta}) \simeq \oplus_{\tau<\eta} H^*_{\mathcal{K}}(\tau)$ となり，線形方程式 (4) は唯一解を持つ [22]．

14) $\dim X = n$ とする．TM の n-次元平面の Grassmann 束 $Gr_n(TM)$ に X_{reg} を自然に埋め込んで閉包を取ったものを $\widehat{X}$ で記し，射影 $Gr_n(TM) \to M$ を制限することにより双有理射 $\pi : \widehat{X} \to X$ を得る．これを X の Nash blow-up という．$Gr_n(TM)$ 上の tautological 束を $\widehat{X}$ に制限したものを $\widehat{TX}$ と記し，Nash 接束と呼ぶ（$\widehat{X}$ 上のベクトル束であることに注意）．

15) 歴史的には，まず複素解析的な場合において所謂 Schwartz 類が，X 上の‘radial stratified ベクトル枠場’の位相的障害類として定義された（[58]）．Sullivan による実代数多様体の Stiefel-Whitney 特性類 [59] を経て，MacPherson [37] は所謂 Grothendieck-Deligne 予想の解決として C_* を与えた（ちなみに $C_*(X)$ の実代数多様体版は Sullivan の Whitney 類に一致する）．$C_*(X)$ と Schwartz 類が一致することは Brasselet-Schwartz [13] による．Kennedy [34] は，$\mathcal{F}(X)$ を $\mathcal{L}(X)$（錐的 Lagrange サイクル群）に置き換えることで代数幾何的な C_* の定式化を与えた．尚，X が被約でなくても，C_* は X_{red} に対するものとして定義する．

16) S を非特異曲線で $s_0 \in S$ とする．写像 $f : X \to S$（$X_0 = f^{-1}(s_0)$，$s_0 \in S$，の変形）に対して，specialization $sp_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_0)$，$sp_A : A_*(X) \to A_*(X_0)$ が自然に定義され，$sp_A \circ C_* = C_* \circ sp_{\mathcal{F}}$ が成り立つ．

17) 一般に，algebraic space の範疇で存在する．この主束が，トポロジーにおける普遍束 $X \times_G EG \to BG$ の“代数的有限次元近似”と見なされる．

18) 同変 Chow 群と同様に $\iota_* \circ p^*$ による帰納的極限 $\lim \mathcal{F}(X_U)$ が定義できるが，これは $\mathcal{F}^G(X)$ とほとんど同じと見なしてよい（その差は“無限余次元の台を持つ構成的関数”の分だけ）．

19) 尚，$A^*(BG)$ の具体的な計算例は Totaro [65], Edidin-Graham [17] を参照されたい．代数幾何の文脈における‘分類写像’の議論は Totaro [65] を参照．

20) つまり，形式的ベキ級数環 $\boldsymbol{Q}[[Z]](Z = zD)$ における対数関数と合わせて，$D^n (n = 0, 1, \cdots)$ で生成される（$\odot$ を積とする）$\boldsymbol{Q}$-代数における指数関数を考えている（e.g., $exp(zD) = 1 + zD + z^2/2! \cdot D \odot D + \cdots$）．

文　献

[1] P. Aluffi, *Chern classes for singular hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 3989–4026.

[2] P. Aluffi, *Inclusion-Exclusion and Segre classes*, Communications in Algebra 31 (2003), 3619-3630.

[3] P. Aluffi, *Modification systems and integration in their Chow groups*, Selecta Math. 11 (2005), 155-202.

[4] Y. Ando, On Thom polynomials of the singularities D_k and E_k, Jour. Math. Soc. Japan, vol.48, (1996), 593–606.

[5] V. I. Arnold, S. Gusein-Zade, A. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*, Monographs Math. 82, Birkhäuser, (1985).

[6] V. Batyrev, *Non-archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs*, J. Eur. Math. Soc. 1 (1999), 5–33.

[7] P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson, *Riemann-Roch for singular varieties*, Publ. Math. IHES, 45 (1975), 101–145.

[8] G. Berczi and A. Szenes, *Thom polynomials of Morin singularities*, arXiv: math.AT/0608285.

[9] S. Boissière, *Chern classes of the tangent bundle on the Hilbert schemes of points on the affine plane*, Jour. Alg. Geom. 14 (2005), 761–787.

[10] S. Boissière and M. Nieper-Wisskirchen, *Generating series in the cohomology of Hilbert schemes of points on surfaces*, arXiv: math.AG/0610837.

[11] W. Borho, J-L. Brylinski and R. MacPherson, *Nilpotent orbits, primitive ideals, and characteristic classes*, Progress in Math. vol. 78, Birkhäuser (1989).

[12] J. P. Brasselet, J. Schürmann and S. Yokura, *Hirzebruch classes and motivic Chern classes for singular spaces*, arXiv:math.AG/0503492.

[13] J. P. Brasselet and M. H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe*, Astérisque 82–83 (1981), 93–148.

[14] J. P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *Milnor classes of local complete intersections*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 1351–1371.

[15] J. Damon, *Thom Polynomials for Contact Class Singularities*, Dissertation, Harvard University (1972).

[16] T. de Fernex, E. Lupercio, T. Nevins, B. Uribe, *Stringy Chern classes of singular varieties*, math.AG/0407314, to appear in Advances in Math.

[17] D. Edidin and W. Graham, *Equivariant intersection theory*, Invent. Math. 131 (1998), 595–634.

[18] D. Edidin and W. Graham, *Riemann-Roch for equivariant Chow groups*, Duke Math. Jour. 102 (2000), 567–594.

[19] L. Ernström, T. Ohmoto and S. Yokura, *Topological Radon transformations*, Jour. Pure and Applied Algebra 120 (1997), 235–254.

[20] L. Fehér and R. Rimányi, *Classes of degeneracy loci for quivers: the Thom polynomial point of*

view, Duke Math. 114 (2002), 193–213.

[21] L. Fehér and R. Rimányi, *Schur and Schubert polynomials as Thom polynomials – cohomology of moduli spaces*, Cent. Eur. J. Math. 1 (2003), 418–434.

[22] L. Fehér and R. Rimányi, *Calculation of Thom polynomials and other cohomological obstructions for group actions*, Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 2002), Contemp. Math. 354, Amer. Math. Soc., (2004), 69–93.

[23] L. Fehér and R. Rimányi, *On the structure of Thom polynomials of singularities*, to appear in Bulletin London Math. Soc.

[24] W. Fulton, *Intersection Theory*, second edition, Springer-Verlag, (1998).

[25] 福田拓生, 微分可能写像の特異点理論, 「数学」34 (1982), 116–139.

[26] A. Haefliger and A. Kosinski, *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables*, Séminaire H. Cartan, ENS., 1956/57, Exposé no. 8.

[27] B. Iversen, *Critical points of an algebraic function*, Invent. Math., 12 (1971), 210–224.

[28] F. Hirzebruch and T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, Math. Ann. 286 (1990), 255–260.

[29] M. E. Kazarian, *Characteristic Classes of Singularity Theory*, Arnold-Gelfand Math. Seminars “Geometry and Singularity Theory”, Birkhäuser (1997), 325–340.

[30] M. E. Kazarian, *Thom polynomials for Lagrange, Legendre and critical point function singularities*, Proc. London Math. Soc. (3) 86 (2003), 707–734.

[31] M. E. Kazarian, *Multisingularities, cobordisms and enumerative geometry*, Russian Math. Survey 58:4 (2003), 665–724 (Uspekhi Mat. nauk 58, 29–88).

[32] M. E. Kazarian, *Thom polynomials*, to appear in Proc. conf. “Singularity Theory and its application” (Sapporo, 2003), ed. S. Izumiya et al.

[33] M. E. Kazarian and S. Lando, *Towards the intersection theory on Hurwitz spaces*, Izv. Math. 68 (2004), 935–964.

[34] G. Kennedy, *MacPherson's Chern classes of singular algebraic varieties*, Comm. Algebra 18(9) (1990), 2821–2839.

[35] G. Kennedy, *Specialization of MacPherson's Chern classes*, Math. Scand. 66 (1990), 12–16.

[36] I. G. Macdonald, *The Poincaré polynomial of a symmetric product*, Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), 563–568.

[37] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. 100 (1974), 421–432.

[38] D. Mumford, *Towards an enumerative theory of the moduli space of curves*, Progress in Math. 36, Birkhäuser, (1983), 271–328.

[39] T. Müller, *Enumerating representations in finite wreath product*, Adv. Math. 153 (2000), 118–154.

[40] I. Nakai, Elementary topology of stratified mappings, Proc. sympo. “Singularities” (Sapporo 1998), Adv. Stud. Pure Math. 29, Kinokuniya, (2000), 221–243.

[41] T. Ohmoto, *Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.140 (2006), 115–134.

[42] T. Ohmoto, *Generating functions of orbifold Chern classes I : Symmetric Products*, arXiv:math.AG/0604583, to appear in Math. Proc. Cambridge Phil. Soc..

[43] T. Ohmoto, *Chern classes and Thom polynomials*, Proc. Trieste Singularity Summer School and Workshop (ICTP, 2005), World Scientific (2007), 464–482.

[44] T. Ohmoto, *Thom polynomial and Milnor number for isolated complete intersection singularities*, preprint (2007).

[45] T. Ohmoto, *Vassiliev complex for contact classes of real smooth map-germs*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (1994) 1–12.

[46] T. Ohmoto and F. Aicardi, *First order local invariants of apparent contours*, Topology, vol. 45 (1) (2006), 27–45.

[47] T. Ohmoto and S. Yokura, *Product formula of Milnor class*, Bull. Polish Academy of Sciences 48 (2000), 388–401.

[48] T. Ohmoto, T. Suwa and S. Yokura, *A Remark on Chern Classes of Local Complete Intersections*, Proc. Japan Acad. 73A (1997), 93–95.

[49] A. Parusiński and P. Pragacz, *Chern-Schwartz-MacPherson classes and the Euler characteristic of degeneracy loci and special divisors*, Jour. Amer. Math. Soc. 8 (1995), no. 4, 793–817.

[50] A. Parusiński and P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles*, Jour. Alg. Geom. 10 (2001), 63–79.

[51] P. Pragacz and A. Weber, *Positivity of Schur function expansion of Thom polynomials*, arXiv: math.AG/0605308.

[52] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Proceedings of Liverpool Singularities I, Springer Lecture Notes Math. 192 (1971), 286–307.

[53] R. Rimányi, *Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities*, Invent. Math. 143 (2001), 499-521.

[54] R. Rimányi and A. Szücs, *Pontrjagin-Thom-type construction for maps with singularities - the nice dimensions*, Topology, vol.37, (1998), 1177–1191.

[55] F. Ronga, *Le calcule des classes duals singularités de Boardman d'ordre deux*, Comment. Math. Helv. 47 (1972),15–35.

[56] J. Schürmann, *A generalized Verdier-type*

Riemann-Roch theorem for Chern-Schwartz-MacPherson classes, arXiv:math.AG/0202175.

[57] J. Schürmann and S. Yokura, *A survey of characteristic classes of singular spaces,* in "SINGULARITY THEORY" (ed. by D. Chéniot et al), (Proc. Marseille Singularity School and Conference 2005), World Scientific （2007）, 865–952. (arXiv:math.AG/0202175).

[58] M. H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris t.260 (1965), 3262-3264, 3535–3537.

[59] D. Sullivan, *Combinatorial invariants of analytic spaces*, Springer Lecture Notes in Math. 192 (1970), 165–168.

[60] T. Suwa, *Classes de Chern des intersections complètes locales*, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1996), 67–70.

[61] 諏訪立雄, 特異多様体の特性類,「数学」52 - 4 (2000), 376 - 393.

[62] T. Suwa, *Characteristic classes of coherent sheaves on singular varieties*, (Singularities - Sapporo, 1998) Advanced Studies in Pure Math. 29 (2000), 279–297.

[63] H. Tamanoi, *Generalized orbifold Euler characteristic of symmetric products and equivariant Morava K-Theory*, Alg. Geom. Topology 1 (2001), 115–141.

[64] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier 6 (1955–56), 43–87.

[65] B. Totaro, *The Chow Ring of a Classifying Space*, Proc. Symposia in Pure Math. 67 (1999), 249–281.

[66] V. A. Vassilyev, *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Gordon and Breach, 1988.

[67] J. L. Verdier *Spécialization des classes de Chern*, Astérisque 82–83 (1981), 149–159.

[68] C. T. C. Wall, *A second note on symmetry of singularities*, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 347–354.

[69] K. Wohlfahrt, *Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe*, Arch. math. (Basel) 29 (1977), 455-457.

[70] S. Yokura, *On a Verdier-type Riemann-Roch for Chern-Schwartz-MacPherson class*, Topology and Its Application 94 (1999), 315–327.

[71] S. Yokura, *On characteristic classes of complete intersections,* "Algebraic Geometry - Hirzebruch 70", Contemp. Math. Amer. Math. Soc. 241 (1999).

[72] S. Yokura, *Chern classes of pro-algebraic varieties and motivic measures*, arXiv: AG/0606352.

[73] Y. Yomdin, *The structure of strata $\mu = const$ in a critical set of a complete intersction singularity*, "Singularities", Arcata, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. 40, Part 2 (1983), 663–666.

[74] T. Yoshida, *Classical Problems in Group Theory (I): Enumerating subgroups and homomorphisms*, Sugaku Expositions, Amer. Math. Soc. 9 (1996), 169–188.

(年 月 日提出)

(おおもと　とおる・北海道大学大学院理学研究院)