

集合とか写像とか関係とかの ノート

Ver: 2019-10-09 22:29:28

はじめに

本稿について

学部低学年の人などが初めて行うセミナーでのテキストを念頭に置いて、本稿は書かれた。ただし、第 1 章は、講義初回のガイダンスなどの際に手本として教員が解説をする、もしくは、セミナーを始める前に参加者が各自で読んでおくということを想定し、セミナーで使うことは想定していない。また、第 2 章の第 2.3 節については、例が中心であるため、セミナーでは扱わず参加者が各自で読むということにするほうが良いかもしれない。

本稿では、本格的なセミナー（輪講）の練習ということを意識し、内容は学部低学年で扱えるよう、集合論に関することを中心にまとめた。目的はセミナーの練習なので、基本的な集合論の等式などを列挙することは目的とはしていない。集合論に関する詳細などは、講義や参考文献で学ぶことを想定している。

内容は網羅的ではないが、self-contained にはなっていると思う。また、証明についてはなるべく詳しく書くことを心がけた。いわゆる「行間」をどのくらいまで埋めればよいかということを知得できるよう、通常の教科書であれば「行間」となっているようなところまで書いたため、慣れた人が読むと回りくどい書き方になってしまったところもあるかと思う。

輪講において節ごとに担当を割り振れるよう、各節に定義と証明が必要な命題の両方が入るようにしたつもりである。また、発表時間が均等になるよう、各節での記述量調整したつもりであるが、極端に長いところや短いところも無いわけではない。各節の発表には凡そ 15 分から 45 分くらいかかるようになっていると思うので、90 分の講義では、2–3 人の発表が可能であり、ゆっくりと進めても全体を半期（10 回強）で終わることが出来ると思う。

初めてのセミナーを意識し、発表のためのノートをまとめやすいように、記述に気をつけたつもりである。地の文で定義をしたり定理を述べたりすることは避けた。また、例えば

$xa = ax = e$ を満たす x はただ一つであり、これを a の逆元と呼び a^{-1} と書く

というような、定義と証明しなければいけない命題が混在するような記述も避けた。

括弧については、計算順序を表す括弧もそれ以外の特別な意味で用いられる括弧（順序対を表すものや写像への代入を表すものなど）も通常は区別されずに丸括弧（）が使われる。セミ

ナーでの板書の際にも区別して書く必要はないと思うが、読み進める際の手助けになれば良いと思い本稿では区別した。前者については $(,)$ を用い、後者については $(,)$ を用いて区別して記述してある。

セミナーでの発表について

セミナーでの発表のためには、本稿の内容を論理記号 ($\implies$, $\iff$, $\therefore$, $\because$, $\forall$, $\exists$ など) を使いまとめなおすと良いと思う。その際に気をつけるべきことをいくつか挙げておく。

次の二つは異なる：

- P が成り立つことを仮定すると Q が成り立つ。
- P が成り立っているので Q が成り立つことが分かる。

前者は次の様に書かれる命題である：

$$P \implies Q$$

一方、後者は、 $P \implies Q$ と P が真であるという事実から、 Q が真であることを導いた推論である。これは通常 $\therefore$ という記号を使い次の様に書かれることが多いと思う：

$$P. \therefore Q.$$

これを矢印 $\implies$ を使って表すことも無いわけではないが、前者の意味と区別するために記号を使い分けるほうが良いと個人的には思う。

また、次の 2 つは大きく異なる：

- $x = 0$ とする。
- $x = 0$ となる。

前者は $x = 0$ という条件を仮定するということであり、後者は $x = 0$ という事実が成り立つという結論を表している。この二つをきちんと区別しなければいけない。仮定なのか結論なのか分かるようにする必要がある。後者は単に次の様に書かれることもある：

- $x = 0.$

しかし、前者のような仮定を与える文のときには、‘とする’ というような文言を省略することはない。

また、例えば、次の二つも意味が異なる。

- よって、 $x > 0$ である x に対し $P(x)$ が成り立つ。
- よって、 $x > 0$ である。 x に対し $P(x)$ が成り立つ。

‘ $x > 0$ である’ という節は、前者では連体形で x を修飾しているのに対し、後者は終止形で文が終わっており結論を述べている。文の切れ目で意味が変わってくることがあるので、句読点などにも注意しなければならない。

内容について

扱っている内容は、集合、写像、二項関係が中心である。多重集合 (bag) や二項演算、無限集合の濃度、関数や関係のグラフ、抽象単体復体、図形 (部分集合) とそれを決める方程式、包除原理などについては、書いていない。加筆するかどうかは迷っている。

目次

はじめに	i
第 1 章 準備	1
1.1 本稿で用いる記号について	1
1.2 仮定する予備知識について	2
第 2 章 集合と写像	5
2.1 集合	5
2.1.1 集合と部分集合	5
2.1.2 集合の書き表し方	7
2.1.3 空集合と冪集合	8
2.2 写像	10
2.2.1 写像とその合成	10
2.2.2 逆写像	13
2.3 “Well-defined”	15
第 3 章 集合に対する操作	19
3.1 共通部分, 和集合, 差集合	19
3.2 全体集合と補集合	23
3.3 順序対と集合の直積	27
第 4 章 写像の性質	31
4.1 全射と単射	31
4.2 像と逆像	36
第 5 章 集合族と類別	41
5.1 集合族	41
5.2 類別	44

5.2.1	類別の定義	44
5.2.2	類別の完全代表系	47
第 6 章	添字付けられた集合族と写像の族	49
6.1	添字付けられた集合族	49
6.2	直積写像	54
第 7 章	二項関係	57
7.1	二項関係の定義	57
7.2	半順序	58
7.2.1	半順序集合と全順序集合	58
7.2.2	半順序を保存する写像	59
7.2.3	最小, 極小	62
7.3	同値関係	64
7.3.1	同値関係と同値類	64
7.3.2	同値関係の例	67
7.3.3	商集合からの写像	70
7.3.4	商集合からの写像の例	73
第 8 章	有限集合	77
8.1	有限集合	77
第 9 章	非交和	81
9.1	内部 disjoint union	81
9.2	外部 disjoint union	84

第 1 章

準備

1.1 本稿で用いる記号について

まず, 本稿で用いる記号について, その定義を書いておく. 数の集合に関して, 以下の記号を用いる.

- $\mathbb{C}$ は複素数を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{R}$ は実数を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{Q}$ は有理数を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{Z}$ は (有理) 整数を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{N}$ は非負整数 (0 以上の整数) を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{Z}_{>0}$ は正の整数を全て集めた集合を表す.

また, 実数の区間に関する次の記号も用いる:

- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は 0 以上の実数を全て集めた集合を表す.
- $[a, b]$ は a 以上かつ b 以下である実数を全て集めた集合を表す.

また, 次の記号も用いる:

- $\mathbb{C}^\times$ は x に関する方程式 $ax = 1$ が複素数解をもつような複素数 a を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{R}^\times$ は x に関する方程式 $ax = 1$ が実数解をもつような実数 a を全て集めた集合を表す.
- $\mathbb{Z}^\times$ は x に関する方程式 $ax = 1$ が整数解をもつような整数 a を全て集めた集合を表す.

また, 複素数の掛け算には $\cdot$ を用い, $\times$ は用いない.

1.2 仮定する予備知識について

命題や論理についての基礎事項については、予備知識として仮定する。以下では、命題や論理記号について簡単に説明する。^{*1}

命題というのは、‘真’または‘偽’であるということが定まる‘文’のことである。いくつか例を挙げて補足をする。文でないものは命題ではない。例えば、

- 156cm

は命題ではない。これは単語ではあっても文ではないので、命題ではない。また、真偽の定まらない文は、命題ではない。例えば、

- 目覚めよ.
- 身長は何 cm ですか?

は命題ではない。これらは命令文や疑問文と呼ばれるものである。命令文や疑問文は文ではあるが、真偽が定まるわけではないので、命題ではない。また、未定義な言葉が入っているものは、真偽を決めることが出来ないので、命題ではない。例えば、

- 彼は背が高い.

という文は、‘背が高い’ということがきちんと定義されていなければ、真偽を決めることは出来ない。したがって、‘背が高い’ということがきちんと定義されていないときには、これは命題ではない。たとえば、‘背が高い’ということを‘身長が 156cm 以上’というように定義すれば、(もし‘身長’が定義されていれば)‘彼は背が高い’は命題となる。また、たとえば、

- $x = 2$.

は‘ x equals 2.’(‘ x と 2 が等しい.’) という文なので、命題である。一方で

- $x + 2$

は 2 と x を足して得られる数であり文ではないので命題ではない。

次に、与えられた命題から、新しい命題を作る方法などについて、代表的なものを紹介する。 P と Q を命題とする。‘ P ではない’は命題である。これを P の否定ということもある。 P が真のとき‘ P ではない’は偽となり; P が偽のとき‘ P ではない’は真となる。‘ P かつ Q ’は命

^{*1} ‘簡単に説明する’というのは、詳細を省き短く説明をするということである。この説明がわかりやすく簡単に理解できるということを意味しない。

題である. P と Q が共に真のとき ' P かつ Q ' は真となり; それ以外のときには ' P かつ Q ' は偽となる. ' P または Q ' は命題である. P と Q が共に偽のとき ' P かつ Q ' は偽となり; それ以外のときには ' P かつ Q ' は真となる. ' P ならば Q ' は命題である. 本稿では ' $P \implies Q$ ' と書くこともある. P が真で Q が偽のとき ' P ならば Q ' は偽となり; それ以外のときには ' P ならば Q ' は真となる. “ ' $P \implies Q$ ' かつ ' $Q \implies P$ ' ” は命題である. これを ' $P \iff Q$ ' と書くこともある. $P \iff Q$ が真であるとき, P と Q は同値であるという. “ ' Q でない' $\implies$ ' P でない' ” という命題を ' $P \implies Q$ ' という命題の対偶と呼ぶ. $P \implies Q$ の対偶と $P \implies Q$ は同値である.

Remark 1.2.1. P, Q, R を命題とする. 一般に,

$$(P \implies Q) \implies R \quad (1.1)$$

と

$$P \implies (Q \implies R) \quad (1.2)$$

とは異なる命題である. P と R が偽, Q が真であるとき, 命題 1.1 は真であり, 命題 1.2 は偽である. $\square$

変数 x が入った命題 $P(x)$ を考えることもある. x の値が決まれば $P(x)$ の真偽がきちんと定まる文ということである. これを, x に関する条件と呼ぶこともある.

本稿では ' $\exists$ ' という記号を使うことがある. ' $\exists x$ ' は ' x が存在する' という意味だと思うと良いかもしれない. 例えば, '条件 $P(x)$ を満たす x が存在する' という命題を

$$\exists x \text{ such that } P(x)$$

と書く. また '条件 $P(x)$ を満たす x がただひとつ存在する' という命題を

$$\exists! x \text{ such that } P(x)$$

とか

$$\exists! x \text{ such that } P(x)$$

と書くことがある. これは,

$$'P(x) \text{ かつ } P(y) \implies x = y' \quad \text{かつ} \quad '\exists x \text{ such that } P(x)'$$

ということである.

また本稿では ‘ $\forall$ ’ という記号を使うことがある. ‘ $\forall x$ ’ は ‘すべての x に対して’ という意味だ
 と思うと良いかもしれない. これだけでは文は完結しないことに注意する必要がある. ‘すべての
 x に対し, $P(x)$ ’ というのを,

$$\forall x, P(x)$$

と書く. ‘すべての x に対し, $P(x)$ ’ を ‘任意の x に対し, $P(x)$ ’ ということもある. X を集合
 とするとき, ‘全ての元 $x \in X$ に対して, $P(x)$ ’ という命題を,

$$\forall x \in X, P(x)$$

と書く. この命題は

$$x \in X \implies P(x)$$

と同値である. この ‘ $\forall$ ’ と ‘ $\implies$ ’ の書き換えは頻繁に行うので慣れて欲しい.

‘ $\forall$ ’ や ‘ $\exists$ ’ の入った命題の否定について考える.

$$\text{‘}\forall x, P(x)\text{’ ではない}$$

は

$$\exists x \text{ such that ‘}P(x)\text{’ ではない}$$

と同値である. ‘ $P(x)$ ではない’ を満たす x を $P(x)$ の反例と呼ぶこともある.

$$\text{‘}\exists x \text{ such that } P(x)\text{’ ではない}$$

は

$$\forall x, \text{‘}P(x)\text{’ ではない}$$

と同値である.

第 2 章

集合と写像

2.1 集合

ここでは、集合についていくつかの用語を導入する。

2.1.1 集合と部分集合

“もの”の集まりを集合と呼んだ。ただし、集合は、どんなものをもってきても、その集合の中にあるかないかはっきりと定まっているような集まりでなくてはいけない。また集合を構成している“もの”のことをその集合の元などと呼んだ。これらの事柄について次のように、ここでは定義する。

Definition 2.1.1 (集合). どんな a に対しても、“ a が A に属している”が命題となっているとき、 A を集合 (*set*) と呼ぶ。 a が A に属しているとき、 a は A の元または要素 (*element*) であるといい、 $a \in A$ (または $A \ni a$) と書く。 a が A に属さないとき、 $a \notin A$ (または $A \not\ni a$) と書く。 □

集合 A が与えられたとき、 A を構成する元の一部 (または全部) で構成される集合を考えることがある。このような集合を A の部分集合と呼ぶ。

Definition 2.1.2. 任意の $a \in A$ に対して $a \in B$ が成り立つとき、集合 A が集合 B の部分集合 (*subset*) であるという。このとき、 $A \subset B$ (または $B \supset A$) と書く。また、 A が B の部分集合ではないことを表すのに、 $A \not\subset B$ (または $B \not\supset A$) と書く。 □

Remark 2.1.3. A, B を 2 つの集合とする。このとき、“任意の $a \in A$ に対して $a \in B$ が成り立つ”という条件は、“ $a \in A$ ならば $a \in B$ ”という条件と同値である。 □

Remark 2.1.4. $a \in A$ であるとき、元 a が集合 A に含まれるということもある。 $A \subset B$ で

あるとき、集合 A は集合 B に含まれるということもある。同じ用語で違うことを意味しているので、どちらの意味なのか気をつけなければならない。文脈上明らかな場合は問題がないが、例えば、例 2.1.25 のように、 $X \in Y$ と $X \subset Y$ が両方現れる場合は、混乱や誤解を避けるため“含まれる”という言い方は避けるほうがよいかもしれない。□

Example 2.1.5. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. □

集合 A と集合 B は全く同じ元で構成されているとき、この 2 つは集合として区別がつかないので、 A と B は集合として等しいものとする。

Definition 2.1.6 (集合の相等). $A \subset B$ かつ $A \supset B$ であるとき、集合 A と集合 B は等しいとし、 $A = B$ と書く。□

Remark 2.1.7. A, B を 2 つの集合とする。このとき、“ $A \subset B$ かつ $A \supset B$ ” という条件は、“ $x \in A \iff x \in B$ ” という条件と同値である。□

定義より $A \subset B$ は $A = B$ の場合を含んでいる。 $A \neq B$ という条件を加えたものを次で定義する：

Definition 2.1.8 (真部分集合). $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるとき、集合 A は集合 B の真部分集合 (*proper subset*) であるといい、 $A \subsetneq B$ と書くことにする。^{*1} □

Proposition 2.1.9. A, B, C を 3 つの集合とする。 $A \subset B, B \subset C$ ならば $A \subset C$. □

Proof. A, B, C を 3 つの集合とし、 $A \subset B, B \subset C$ とする。このとき、

$$x \in A \implies x \in C$$

を示す。 $x \in A$ とする。このとき、 $x \in C$ であることを示す。 $A \subset B$ であるので、

$$\forall a \in A, a \in B$$

である。 $x \in A$ であるので、 $x \in B$ である。さらに $B \subset C$ なので、

$$\forall b \in B, b \in C$$

である。 $x \in B$ であるので、 $x \in C$ である。□

議論をする際に、特定の集合 Ω をひとつ決めて、その部分集合のみについて議論をすることがある。このような集合を全体集合という。例えば、平面図形を扱うときには、常に扱う図形 (つまり点の集合) は、二次元空間内の点全体からなる集合 $\mathbb{R}^2$ の部分集合である。

^{*1} A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$, A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ で表す流儀もないわけではない。

Definition 2.1.10. ある集合 Ω を固定して、考える集合全ては Ω の部分集合であるようなとき、 Ω を全体集合とか普遍集合 (*universal set*) という. $\square$

2.1.2 集合の書き表し方

集合を書き表すための記法を導入する. その集合に属する元を列挙することで集合を表すという方法がある.

Notation 2.1.11 (集合の外包的記法). 元 $a, b, c, \dots$ からなる集合を, $\{a, b, c, \dots\}$ で表す. つまり, $X = \{a, b, c, \dots\}$ であるとき, $x \in X$ は次で定義されている:

$$x \in X \iff x \text{ は } a, b, c, \dots \text{ のいずれかに等しい.}$$

 $\square$

Example 2.1.12. $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. $\square$

Exercise 2.1.13. $\{a, b\} = \{b, a\}$. $\square$

Proof. $A = \{a, b\}$, $B = \{b, a\}$ とする.

まず, $A \subset B$ を示す. $x \in A$ とする. このとき, $x \in B$ を示す. つまり,

$$x \text{ が } b, a \text{ のいずれかに等しい} \tag{2.1}$$

ことを示す. いま $x \in A$ であるので, x が a, b のいずれかに等しいので, 場合分けをして考える. まず, x が 1 番目のものと等しい場合を考える. つまり, x が a の場合について考える. このとき, $x = a$ であるので条件 (2.1) を満たす. 次に, x が 2 番目のものと等しい場合を考える. つまり, x が b の場合について考える. このとき, $x = b$ であるので条件 (2.1) を満たす. したがって, いずれの場合も, 条件 (2.1) を満たす.

次に, $A \supset B$ を示す. $x \in B$ とする. このとき, $x \in A$ を示す. つまり,

$$x \text{ が } a, b \text{ のいずれかに等しい} \tag{2.2}$$

ことを示す. いま $x \in B$ であるので, x が b, a のいずれかに等しいので, 場合分けをして考える. まず, x が 1 番目のものと等しい場合を考える. つまり, x が b の場合について考える. このとき, $x = b$ であるので条件 (2.2) を満たす. 次に, x が 2 番目のものと等しい場合を考える. つまり, x が a の場合について考える. このとき, $x = a$ であるので条件 (2.2) を満たす. したがって, いずれの場合も, 条件 (2.2) を満たす. $\square$

Exercise 2.1.14. $\{a\} = \{a, a\}$. $\square$

Proof. $A = \{a\}$, $B = \{a, a\}$ とする.

まず $A \subset B$ を示す. $x \in A$ とする. このとき, $x \in B$ となることを示す. つまり,

$$x \text{ が } a, a \text{ のいずれかに等しい} \quad (2.3)$$

ことを示す. $x \in A$ であるので, x は a に等しい. したがって条件 (2.3) を満たす.

次に $A \supset B$ を示す. $x \in B$ とする. このとき, $x \in A$ となることを示す. つまり,

$$x \text{ が } a \text{ に等しい} \quad (2.4)$$

ことを示す. $x \in B$ であるので, x は a, a のいずれかに等しい. まず, x が 1 番目のものと等しい場合を考える. つまり, x と a と等しい場合を考える. このとき $x = a$ であるので, 条件 (2.4) を満たす. 次に, x が 2 番目のものと等しい場合を考える. つまり, x と a と等しい場合を考える. このとき $x = a$ であるので, 条件 (2.4) を満たす. したがって, いずれの場合も条件 (2.4) を満たす. $\square$

考えている集合に属するための条件を記述することで集合を表すという方法もある.

Notation 2.1.15 (集合の内包的記法). A を集合とする. A の元 a のうち条件 $P(a)$ が真となるもの全てからなる集合は, $\{a \in A \mid P(a)\}$ と書く. つまり, $X = \{a \in A \mid P(a)\}$ であるとき, $x \in X$ は次で定義されている:

$$x \in X \iff x \in A \text{ かつ } P(x) \text{ は真である.}$$

$\square$

Remark 2.1.16. 全体集合 Ω が固定されているとき, 内包的記法 $\{x \in \Omega \mid P(x)\}$ を, $\{x \mid P(x)\}$ の様に書くことも多い. $\square$

Remark 2.1.17. $\{a \in A \mid P(a)\}$ と書いた時の a は, その集合のカッコ $\{, \}$ の中でのみ使われる変数である. 例えば, $\sum_{i=1}^n a_i$ と書いた時の i と同様のものだと思うと良いかもしれない. また, $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$ であるように, $\{a \in A \mid P(a)\} = \{b \in A \mid P(b)\}$ である点でも共通点がある. $\square$

Example 2.1.18. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$. $\square$

Example 2.1.19. $\mathbb{R}^\times = \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$, $\mathbb{C}^\times = \{a \in \mathbb{C} \mid a \neq 0\}$. $\square$

2.1.3 空集合と冪集合

集合が元を 1 つも含まないとき, その集合は空^{*2}であるという.

^{*2} “くう” と読む. “から” ではない.

Definition 2.1.20 (空集合). 任意の x に対し $x \notin X$ をみたすとき, 集合 X は空 (*empty*) であるという. 空である集合を空集合 (*empty set*) とよぶ. $\square$

Example 2.1.21. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ とおく. $a \notin \mathbb{R}$ であれば, A は $\mathbb{R}$ の部分集合であるので, $a \notin A$ である. また, $a \in \mathbb{R}$ であれば, $a^2 \geq 0$ であり, $a^2 < 0$ となることはないので, $a \notin A$ である. 従って, A は空である. $\square$

空集合は任意の集合の部分集合である.

Proposition 2.1.22. A と B を集合とする. B が空ならば, $B \subset A$ が成り立つ. $\square$

Proof. A と B を集合とし, B は空であるとする. $B \subset A$ を示すには,

$$x \in B \implies x \in A$$

を示せばよい. この対偶である

$$x \notin A \implies x \notin B$$

を示す. $x \notin A$ とする. このとき, B は空であるので (常に) $x \notin B$ が成り立っている. $\square$

この命題から次の命題が導かれる.

Proposition 2.1.23. 集合 X と集合 X' が共に空であるなら, $X = X'$. $\square$

Proof. 集合 X と集合 X' が共に空であるとする.

まず $X \subset X'$ を示す. A として X' , B として X を考え Proposition 2.1.22 を用いることで, $X \subset X'$ が得られる.

次に, $X' \subset X$ を示す. A として X , B として X' を考え Proposition 2.1.22 を用いることで, $X' \subset X$ が得られる.

$X \subset X'$ かつ $X' \subset X$ であるので $X = X'$. $\square$

2つの集合が両方とも空であればこれらは等しいということから, 空であるような集合はただ一つしかないことになる. この集合に記号を用意する.

Notation 2.1.24. $\emptyset$ は空集合であるとする. $\square$

Example 2.1.25. $X = \{\emptyset\}$ とする. X は空集合 $\emptyset$ を要素とする集合である. つまり $\emptyset \in X$ である. $\emptyset \in X$ となっているので, X は空ではない. つまり, $X \neq \emptyset$ である. また $\emptyset$ はどんな集合の部分集合になっているので, $\emptyset \subset X$ である. $\square$

部分集合を全てを集めてきた集合をしばしば考えることがある.

Definition 2.1.26. 集合 A の部分集合全てからなる集合を A の冪集合 (*power set*)*³ といい 2^A と書く*⁴. すなわち, 集合 X に対し,

$$X \in 2^A \iff X \subset A.$$

□

冪集合の例をみる.

Example 2.1.27. $A = \{1, 2\}$ とする. このとき, A の部分集合は $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ のみであるので, $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. □

空集合の冪集合は少し気をつけないといけない.

Example 2.1.28. 空集合 $\emptyset$ は空集合 $\emptyset$ 自身の部分集合である. 空集合 $\emptyset$ の部分集合は, それ以外にない. よって $2^\emptyset = \{\emptyset\} \neq \emptyset$. □

Proposition 2.1.9 から次は明らかである.

Proposition 2.1.29. A と B を 2 つの集合とする. $A \subset B$ ならば $2^A \subset 2^B$. □

Proof. A と B を集合とし, $A \subset B$ とする. $X \in 2^A$ とする. このとき, $X \in 2^B$ を示す. $X \in 2^A$ であるので, $X \subset A$. $X \subset A$ かつ $A \subset B$ であるので, Proposition 2.1.9 より, $X \subset B$. $X \subset B$ であるので, $X \in 2^B$. □

2.2 写像

ここでは, 写像に関するいくつかの用語を導入する.

2.2.1 写像とその合成

A, B を 2 つの集合とする. A の各元に B の元を対応させる ‘函数’ のことを写像と呼ぶ.

Definition 2.2.1. A, B を 2 つの集合とする. A の各元に対して, B の元をただ 1 つ対応させる対応 f を A から B への写像 (*map, mapping*) といい

$$f: A \rightarrow B; \text{map}$$

などと書く. $a \in A$ に対して $b \in B$ が f により対応させられているとき, b を f による a の像 (*image*) という. A を f の定義域 (*domain*) といい B を f の終域 (*target*) と呼ぶ. □

*³ 冪集合と書くこともある. 冪は冪の略字

*⁴ $P(A)$ と書く流儀もある

Remark 2.2.2. f による $a \in A$ の像を $f(a)$ と書くことにすると, f が A から B への写像であるということは, 次と同値である:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B \text{ such that } f(a) = b.$$

□

Notation 2.2.3. f を集合 A から集合 B への写像とする. $a \in A$ の f による像を $f(a)$ と書くことが多い

□

Notation 2.2.4. n の f による像が $2n - 1$ であるような, $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を表すのに次のように書くことがある:

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & & \Downarrow \\ & & n \longmapsto 2n - 1 \end{array}$$

つまり, これは, $f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 3, \dots$ という写像である. スペースの都合で, $f: \mathbb{N} \ni n \mapsto 2n - 1 \in \mathbb{Z}$ と書くこともある.

また, f による n の像を $f(n)$ と書くことが多いが, ‘添字’ の様に f_n などと書くこともしばしばある. その写像ではどのような表記を用いるかということもこの表記に含めることが, しばしばある. 例えば, $f(n)$ の様な表記を用いることを強調するときには,

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & & \Downarrow \\ & & n \longmapsto f(n) = 2n - 1 \end{array}$$

などのように書き, f_n の様な表示を用いるときには,

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & & \Downarrow \\ & & n \longmapsto f_n = 2n - 1 \end{array}$$

などのように書く.

□

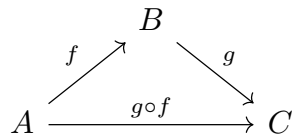
Definition 2.2.5 (写像の相等). 写像 $f: A \rightarrow B$ と $f': A' \rightarrow B'$ が次の条件をみたすとき f と f' は等しいとし, $f = f'$ と書く:

1. $A = A'$.
2. $B = B'$.
3. 任意の $x \in A$ に対し, $f(x) = f'(x)$.

□

Remark 2.2.6. 条件 3 ‘任意の $x \in A$ に対し, $f(x) = f'(x)$ ’ は, ‘ $x \in A$ ならば $f(x) = f'(x)$ ’ と同値である.

□

図 2.1 $g \circ f$

Definition 2.2.7. A から B への写像全体の集合 $\{f: A \rightarrow B; \text{写像}\}$ を B^A と書く.*5 $\square$

Definition 2.2.8. A を集合とする. A の各元 a に対し a 自身を対応させる A から A への写像を, A 上の恒等写像 (*identity map*) と呼び id_A と書く. つまり, 任意の $a \in A$ に対し $\text{id}_A(a) = a$. $\square$

Definition 2.2.9. A を集合とし $B \subset A$ とする. 各元 $b \in B$ に対し $b \in A$ を対応させる B から A への写像を, B から A への包含写像 (*inclusion map*) と呼ぶ. $\square$

Definition 2.2.10. f を集合 A から集合 B への写像とし, g を B から集合 C への写像とする. このとき A の各元 a に対し $g(f(a))$ を対応させる A から C への写像を $g \circ f$ と書き f と g の合成 (*composition*) と呼ぶ. つまり, 任意の $a \in A$ に対し, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. $\square$

Theorem 2.2.11. f を集合 B から集合 A への写像, g を集合 C から B への写像, h を集合 D から C への写像とする. このとき, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. $\square$

Proof. 3つの写像 $f: B \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$, $h: D \rightarrow C$ について考える.

まず $f \circ (g \circ h)$ と $(f \circ g) \circ h$ が, 定義域も終域も等しいことを示す. $g: C \rightarrow B$, $h: D \rightarrow C$ であるので, $g \circ h$ は D から B への写像である. また, $f: B \rightarrow A$ であるので, $f \circ (g \circ h)$ は D から A への写像である. 一方, $f: B \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$ であるので, $f \circ g$ は C から A への写像である. また, $h: D \rightarrow C$ であるので, $(f \circ g) \circ h$ は D から A への写像である. 従って $f \circ (g \circ h)$ も $(f \circ g) \circ h$ も共に D から A への写像である.

次に

$$x \in D \implies (f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$

を示す. $x \in D$ とする. このとき, $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$ となることを示す.

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) \\ &= f(g(h(x))). \end{aligned}$$

*5 $\text{Map}(A, B)$ と書くこともある.

一方,

$$\begin{aligned} \left((f \circ g) \circ h \right) (x) &= (f \circ g) (h(x)) \\ &= f(g(h(x))). \end{aligned}$$

よって $\left(f \circ (g \circ h) \right) (x) = \left((f \circ g) \circ h \right) (x)$. □

Remark 2.2.12. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ であるので, これらを区別する必要がないときには $f \circ g \circ h$ と書く. □

Proposition 2.2.13. f を集合 A から集合 B への写像とする. このとき, $\text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A = f$. □

Proof. f を集合 A から集合 B への写像とする. $f: A \rightarrow B$ であり, $\text{id}_A: A \rightarrow A$ なので $f \circ \text{id}_A$ は A から B への写像である. また $\text{id}_B: B \rightarrow B$ なので $\text{id}_B \circ f$ は A から B への写像である.

$$x \in A \implies \left(\text{id}_B \circ f \right) (x) = \left(f \circ \text{id}_A \right) (x) = f(x)$$

を示す. $x \in A$ とする. このとき, $\left(\text{id}_B \circ f \right) (x) = \text{id}_B(f(x)) = f(x)$. また, $\left(f \circ \text{id}_A \right) (x) = f(\text{id}_A(x)) = f(x)$. □

2.2.2 逆写像

ここでは, 全単射や逆写像などの用語を導入する.

Definition 2.2.14 (全単射). A と B を 2 つの集合とし, f は A から B への写像であるとする. 二つの条件

$$g \circ f = \text{id}_A, \tag{2.5}$$

$$f \circ g = \text{id}_B \tag{2.6}$$

を満たす B から A への写像 g が存在するとき, f は全単射な (*bijective*) 写像であるという.*6 全単射な写像のことを全単射 (*bijection*) と呼ぶ. □

Example 2.2.15. A を集合とする. このとき, $\text{id}_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$ であるので, id_A は全単射で

*6 ここで与える bijection の定義は標準的ではないかもしれない

ある. 例えば,

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & x \longmapsto x \end{array}$$

は全単射である. □

Example 2.2.16. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 f と g を

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & x \longmapsto 2x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & x \longmapsto \frac{x}{2} \end{array}$$

で定義する. このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x) = \frac{2x}{2} = x. \end{aligned}$$

したがって, $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$, $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ であるので, f は全単射である. □

条件 (2.5), (2.6) を満たす写像はもし存在するならただ一つ存在する. つまり次の定理が成り立つ.

Proposition 2.2.17. f は集合 A から集合 B への写像であるとする. このとき, 写像 $g: B \rightarrow A$ と写像 $g': B \rightarrow A$ が

$$g \circ f = \text{id}_A \qquad f \circ g = \text{id}_B \qquad g' \circ f = \text{id}_A \qquad f \circ g' = \text{id}_B$$

を満たすならば, $g = g'$. □

Proof. f は集合 A から集合 B への写像であるとする. 写像 $g': B \rightarrow A$ が $f \circ g' = \text{id}_B$ を満たすとする

$$g \circ f \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ \text{id}_B = g.$$

写像 $g: B \rightarrow A$ が $g \circ f = \text{id}_A$ を満たすとする

$$g \circ f \circ g' = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

よって, $g = g \circ f \circ g' = g'$. □

全単射 $f: A \rightarrow B$ に対し, 条件 (2.5), (2.6) を満たす写像はただ一つしかないので, この写像を f^{-1} と書く.

Definition 2.2.18. A と B を 2 つの集合とし, $f: A \rightarrow B$ を全単射とする. 条件

$$\begin{aligned} g \circ f &= \text{id}_A, \\ f \circ g &= \text{id}_B \end{aligned}$$

を満たす写像 g を f^{-1} とかき, f の逆写像 (*inverse mapping*) という. $\square$

Definition 2.2.19. A を集合とし, f は A から A への写像であるとする. $f \circ f = \text{id}_A$ であるとき, f は A 上の対合 (*involution*) であるという.*7 $\square$

Example 2.2.20. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & x \longmapsto -x \end{array}$$

で定義する. このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x.$$

したがって, $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ であるので, f は involution である. $\square$

Proposition 2.2.21. 写像 $f: A \rightarrow A$ が集合 A 上の involution であるとする. このとき f は全単射である. $\square$

Proof. 写像 $f: A \rightarrow A$ が集合 A 上の involution であるとする. このとき, $f \circ f = \text{id}_A$ をみ
たす. よって, f は f の逆写像である. したがって, f は全単射である. $\square$

2.3 “Well-defined”

これまで, 集合や写像といった概念を定義した. また写像の具体例である恒等写像 id_A なども定義した. これから先, 何かの定義をあたえることが頻繁にある. 与えられた‘定義’について, “その‘定義’が, 定義したいものを定義しているか?” “その‘定義’が定義として機能しているか?” ということを確認する必要がある. ‘きちんと定義できている’ときに well-defined である (*well-defined*) ということがある.

例えば, 具体的な写像 $f: A \rightarrow B$ を定義しようとしているときには, f が A から B への写像であるための条件を満たしているかを調べなければいけない. A から B への写像であるための条件が満たされているときには, “ f は (A から B への写像として) well-defined である”*8

*7 対合という和訳はあまり使われていないかもしれない

*8 “写像 $f: A \rightarrow B$ は well-defined である” という言い方のほうが一般的かもしれない. 写像 f の様いこと
で, f が写像としての条件を満たしているかということを議論しているということを強調している.

といい、もし A から B への写像でないなら、“ f は (A から B への写像としては) well-defined でない” などという。きちんと定義できているかどうかは、何かを定義しようとしているときには、いつも調べなければいけないことであるが、ほとんどの場合は明らかなのでわざわざ議論することは少ない。しかし、明らかではない場合には well-defined か否かについてきちんと議論をし証明する必要がある。

写像の定義としては well-defined ではないような具体的例をいくつか挙げる。 f が集合 A から集合 B への写像であるということは Definition 2.2.1 で定義した。 f が A から B への写像であるためには、次の3つを満たしていなければならない:

1. A の全て a に対して、 f による像が定まっていなければならない。
2. $a \in A$ の像は B の元でなければならない。
3. 各 $a \in A$ に対し $f(a)$ はただ一つ定まっていなければならない。つまり、 $x, y \in A$ に対し、

$$x = y \implies f(x) = f(y).$$

これらの条件を満たしていなければ、写像を定義したとはいえない。例えば、次は1を満たしていない。

Example 2.3.1. $f(x) = \frac{1}{x}$ と定義すると、これは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像としては well-defined ではない。つまり

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

は well-defined ではない。 f による0の像について考えると、 $\frac{1}{0}$ は未定義であり、値が定まっていないからである。□

例えば、次は2を満たしていない。

Example 2.3.2. $f(x) = \frac{1}{x}$ と定義すると、これは $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{Z}_{>0}$ への写像としては well-defined ではない。つまり

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{>0} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

は well-defined ではない。 f による2の像について考えると、 $\frac{1}{2}$ であり値はきまるが、 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{>0}$ だからである。□

Example 2.3.3. $f(x) = x$ と定義すると, これは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{Z}$ への写像としては well-defined ではない. つまり

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & \Downarrow & \\ & x & \longmapsto x \end{array}$$

は well-defined ではない. 例えば, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ であるが, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ である. f による $\frac{1}{2}$ の像について考えると, $\frac{1}{2}$ であり値はきまるが, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ だからである. $\square$

例えば, 次は 3 を満たしていない.

Example 2.3.4. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とおく. このとき,

$$\begin{array}{ccc} f : & A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \Downarrow & \\ & a & \longmapsto x^2 = a \text{ を満たす実数 } x \end{array}$$

は well-defined ではない. $x^2 = 9$ を満たす実数は 3 と -3 の両方が考えられるため, この定義にしたがって計算しようとする, $f(9)$ の値は 3 なのか -3 なのかわからない. $\square$

表記を変えて次のように定義しようとしても, やはり, 3 を満たしていない.

Example 2.3.5. $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ とおく. このとき,

$$\begin{array}{ccc} f : & A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \Downarrow & \\ & x^2 & \longmapsto x \end{array}$$

は well-defined ではない. 3^2 の f による像について考える. $3^2 = 9 = (-3)^2 \in A$ である. f による像を計算する際には, 3^2 という‘表示’ではなく, 9 という実数の像の行き先を考えることになる. この定義にしたがって計算しようとする, $f(9)$ の値は 3 なのか -3 なのかわからない. $\square$

写像として well-defined ではないものの例をいくつか見たが, well-defined な写像も見えておくことにする. Examples 2.3.1, 2.3.2 の様な場合には, 定義域や終域を変更するとうまく行く場合がある.

Example 2.3.6. $\mathbb{R}^\times = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ であった. このとき,

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^\times & \longrightarrow \mathbb{R}^\times \\ & \Downarrow & \\ & x & \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

は写像として well-defined である. また $\mathbb{R}$ の元ではない文字 $*$ を用意し, $C = \mathbb{R} \cup \{*\}$ とおく. このとき,

$$g : \begin{array}{c} C \\ \sqcup \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C \\ \sqcup \end{array}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & (\text{if } x \in \mathbb{R}^\times) \\ * & (\text{if } x = 0) \\ 0 & (\text{if } x = *) \end{cases}$$

とおけば, 写像として well-defined である. また, $g \circ g = \text{id}_C$ であるので, 全単射である. $\square$

Examples 2.3.4, 2.3.5 のような場合は, 行き先がただ一つに定まるようにうまく指定することで, well-defined になるようにできることもある.

Example 2.3.7. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とおく. このとき,

$$f : \begin{array}{c} A \\ \sqcup \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \sqcup \end{array}$$

$$a \longmapsto x^2 = a \text{ を満たす正の実数 } x$$

や

$$f : \begin{array}{c} A \\ \sqcup \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \sqcup \end{array}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

は well-defined である. $\square$

Well-defined は単に ‘ちゃんと定義できている’ という意味の言葉であるので, 具体的な写像を定義する場面以外でも議論されることがある. Well-defined という言葉は用いなかったが, これまでもいくつかそのような場面はあった. 例えば, 空である集合はただ一つしかないので, 空集合を表す記号 $\emptyset$ は well-defined である. もし空である集合が複数あるなら, $\emptyset$ と書いても, どの空集合を表すのかわからないので, well-defined ではない. Proposition 2.1.23 があるので $\emptyset$ という記号が well-defined であることがわかる. また, 全単射 $f: A \rightarrow B$ に対して, その逆写像はただ一つに定まる. つまり f さえわかれば, 自動的に逆写像は決まるので, f^{-1} という記号は well-defined である. もし f に対して複数の異なる逆写像が存在するなら, f^{-1} と書いてもどの写像のことを表しているのかわからない. f^{-1} という記号が well-defined であることを, Proposition 2.2.17 が保証している.

第 3 章

集合に対する操作

3.1 共通部分, 和集合, 差集合

集合が与えられたとき, その集合から新しい集合を作る方法について紹介する.

集合 A と集合 B の少なくとも一方に属する元を集めた集合 (Venn 図を用いて表すと, 図 3.1 となる.) を, A と B の和集合と呼ぶ.

Definition 3.1.1. A, B を 2 つの集合とする. $x \in A$ または $x \in B$ を満たす x を集めた集合を $A \cup B$ と書く. つまり,

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ または } x \in B.$$

$A \cup B$ を, A と B の和集合 (*union*) と呼ぶ.*¹

□

集合 A と集合 B に共通の元を集めた集合 (Venn 図を用いて表すと, 図 3.2 となる.) を, A と B の共通部分と呼ぶ.

Definition 3.1.2. A, B を 2 つの集合とする. $x \in A$ かつ $x \in B$ を満たす x を集めた集合を $A \cap B$ と書く. つまり,

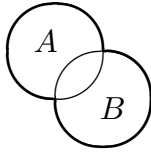
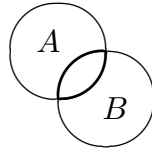
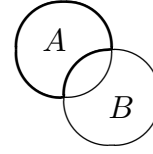
$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ かつ } x \in B.$$

$A \cap B$ を, A と B の共通部分 (*intersection*) と呼ぶ.

□

集合 A の元のうち集合 B に含まれない元を集めた集合 (Venn 図を用いて表すと, 図 3.3 となる.) を, A と B の差集合と呼ぶ.

*¹ 例えば, $A \cup B$ をどのように読めばよいかという質問をされることがあるが, ‘ A と B の和集合’ と読めばよいと思う.

図 3.1 $A \cup B$ 図 3.2 $A \cap B$ 図 3.3 $A \setminus B$

Definition 3.1.3. A, B を 2 つの集合とする. $x \in A$ かつ $x \notin B$ を満たす x を集めた集合を $A \setminus B$ と書く.*2 つまり,

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ かつ } x \notin B.$$

次の様を書くこともできる:

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}.$$

$A \setminus B$ を, A と B の差集合 (*difference*) と呼ぶ.*3

□

Example 3.1.4.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \mathbb{Z}_{>0} \cup \{0\}, \\ \mathbb{R} &= \mathbb{R}^\times \cup \{0\}, \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} &= \{x \mid x \text{ は無理数} \}, \\ \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} &= \{x \mid x \text{ は虚数} \}. \end{aligned}$$

□

これらの操作がもつ性質について, 代表的なものを紹介する.

Proposition 3.1.5 (分配則). 集合 A, B, C に対し, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

□

Proof. A, B, C を集合とする.

まず, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す. $x \in A \cap (B \cup C)$ とする. このとき, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す. つまり $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成り立つことを示す. 今, $x \in A \cap (B \cup C)$ であるので, $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ である. $x \in B$ または $x \in C$ であるので, 場合分けをして考える. $x \in B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので, $x \in A \cap B$. $x \in C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ であるので, $x \in A \cap C$. よってどちらの場合でも, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ となる.

*2 $A - B$ と書く流儀もある.

*3 集合差と呼ぶこともある.

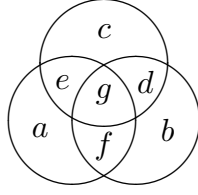


図 3.4 Proposition 3.1.5

次に, $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする. このとき, $x \in A \cap (B \cup C)$ を示す. つまり $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ と成ることを示す. いま, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であるので, $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ である. 場合分けをして考える. $x \in A \cap B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ である. $x \in B$ であるから, $x \in B \cup C$ でもある. $x \in A \cap C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ である. $x \in C$ であるから, $x \in B \cup C$ でもある. よってどちらの場合も $x \in A \cap (B \cup C)$ である. $\square$

Remark 3.1.6. Proposition 3.1.5 について, Venn 図を用いて理解をしようとするれば次のようになる. $a, b, \dots, g$ を

$$\begin{aligned} a &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \text{ かつ } x \notin C\} \\ b &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \notin A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \notin C\} \\ c &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \notin A \text{ かつ } x \notin B \text{ かつ } x \in C\} \\ d &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \notin A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\} \\ e &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \text{ かつ } x \in C\} \\ f &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \notin C\} \\ g &= \{x \in A \cup B \cup C \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\} \end{aligned}$$

とすると, 図 3.4 のようになる. $B \cup C$ は c, d, e, f, g の元からなる集合である. よって $A \cap (B \cup C)$ は e, f, g の元からなる集合である. $A \cap B$ は f, g の元からなる集合である. $A \cap C$ は e, g の元からなる集合である. よって $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ は e, f, g の元からなる集合である. $\square$

Proposition 3.1.7 (分配則). 集合 A, B, C に対し, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

Proof. A, B, C を集合とする.

まず, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示す. $x \in A \cup (B \cap C)$ とする. このとき $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示す. $x \in A \cup (B \cap C)$ であるので, $x \in A$ または $x \in B \cap C$ である. 場合分けをして考える. まず $x \in A$ の場合について考える. $x \in A$ である

ので $x \in A \cup B$ である. また, $x \in A$ であることから $x \in A \cup C$ もわかる. $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ であるので, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 次に $x \in B \cap C$ の場合について考える. $x \in B \cap C$ であるので, $x \in B$ かつ $x \in C$ である. $x \in B$ であるので, $x \in A \cup B$ である. また, $x \in C$ であるので, $x \in A \cup C$ でもある. $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ であるので, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. いずれの場合も, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ であることが分かった.

次に, $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示す. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする. このとき $x \in A \cup (B \cap C)$ を示す. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ であるので, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ である. $x \in A$ の場合とそうでない場合に分けて考える. まず $x \in A$ の場合について考える. このときは, $x \in A$ であることから, $x \in A \cup (B \cap C)$ であることがわかる. 次に $x \notin A$ の場合について考える. $x \in A \cup B$ であるので, $x \in A$ または $x \in B$ である. 今 $x \notin A$ であるので, $x \in B$ である. また $x \in A \cup C$ であるので, $x \in A$ または $x \in C$ である. 今 $x \notin A$ であるので, $x \in C$ である. よって $x \in B \cap C$ である. $x \in B \cap C$ であるので $x \in A \cup (B \cap C)$. したがっていずれの場合も $x \in A \cup (B \cap C)$. $\square$

Proposition 3.1.8. 集合 A, B, C が $A \subset C$ かつ $B \subset C$ を満たすならば, $A \cup B \subset C$. $\square$

Proof. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ とする. このとき, $A \cup B \subset C$ を示す. $x \in A \cup B$ とする. このとき, $x \in C$ を示す. $x \in A \cup B$ であるので, $x \in A$ または $x \in B$ である. まず, $x \in A$ の場合について考える. $A \subset C$ であるので,

$$\forall a \in A, a \in C$$

である. いま $x \in A$ であるので, $x \in C$ である. まず, $x \in B$ の場合について考える. $B \subset C$ であるので,

$$\forall a \in B, a \in C$$

である. いま $x \in B$ であるので, $x \in C$ である. $\square$

Exercise 3.1.9. 集合 A, B, C が $A \supset C$ かつ $B \supset C$ を満たすならば, $A \cap B \supset C$. $\square$

Proof. $A \supset C$ かつ $B \supset C$ とする. このとき, $A \cap B \supset C$ を示す. $x \in C$ とする. このとき, $x \in A \cap B$ を示す. $C \subset A$ であるので,

$$\forall a \in C, a \in A$$

である. いま, $x \in C$ であるので, $x \in A$ である. また, $C \subset B$ であるので,

$$\forall a \in C, a \in B$$

である. いま, $x \in C$ であるので, $x \in B$ である. $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので, $x \in A \cap B$. $\square$

Exercise 3.1.10. 集合 A, B に対し, $A \cap B = B$ と $A \supset B$ は同値である. $\square$

Proof. A, B を集合とする.

まず, $A \cap B = B$ ならば $B \subset A$ となることを示す. $A \cap B = B$ とする. このとき, $B \subset A$ を示す. $x \in B$ とする. このとき $x \in A$ となることを示す. $x \in B$ であり, $A \cap B = B$ であるので, $x \in A \cap B$. $x \in A \cap B$ なので, $x \in A$ かつ $x \in B$. したがって, $x \in A$.

次に, $B \subset A$ ならば $A \cap B = B$ となることを示す. $B \subset A$ とする. このとき, $A \cap B = B$ を示す. まず $A \cap B \subset B$ について考える. $x \in A \cap B$ とすると, $x \in A$ かつ $x \in B$ である. したがって, $x \in B$. 次に $A \cap B \supset B$ について考える. $x \in B$ とする. このとき, $x \in A \cap B$ を示す. $B \subset A$ であるので,

$$\forall b \in B, b \in A$$

である. $x \in B$ であるので, $x \in A$. よって, $x \in A$ かつ $x \in B$. したがって $x \in A \cap B$. $\square$

Exercise 3.1.11. 集合 A, B に対し, $A \cup B = A$ と $A \supset B$ は同値である. $\square$

Proof. A, B を集合とする.

まず, $A \cup B = A$ ならば $A \supset B$ となることを示す. $A \cup B = A$ とする. このとき, $A \supset B$ を示す. $x \in B$ とする. このとき, $x \in A$ を示す. $x \in B$ であるので, $x \in A \cup B$ である. $x \in A \cup B$ であり, $A \cup B = A$ であるので, $x \in A$.

つぎに $A \supset B$ ならば $A \cup B = A$ となることを示す. $A \supset B$ とする. このとき $A \cup B = A$ を示す. まず $A \cup B \subset A$ を示す. $x \in A \cup B$ とする. このとき, $x \in A$ を示す. $x \in A \cup B$ であるので, $x \in A$ または $x \in B$ である. $x \in A$ のときには, これ以上示すことはない. $x \in B$ とする. このとき, $x \in B$ であり, $A \supset B$ なので, $x \in A$ である. よっていずれの場合も $x \in A$ となる. 次に, $A \cup B \supset A$ を示す. $x \in A$ とすると, $A \cup B$ の定義から明らかに, $x \in A \cup B$ である. $\square$

3.2 全体集合と補集合

ここでは, 全体集合 Ω をひとつ固定して議論する. 与えられた集合 A に含まれない元全体からなる集合を考えることがある. これを A の補集合と呼ぶ.

Definition 3.2.1. Ω を全体集合とする. このとき $A \subset \Omega$ に対して, A^c を次で定義する:

$$\begin{aligned} A^c &= \Omega \setminus A \\ &= \{ a \in \Omega \mid a \notin A \}. \end{aligned}$$

A^c を A の補集合 (*complement*) という.*4 □

定義から明らかであるが次が成り立つ.

Lemma 3.2.2. Ω を普遍集合とし, $x \in \Omega$, $A \in 2^\Omega$ とする. このとき次が成り立つ:

1. $x \notin A$ と $x \in A^c$ は同値である.
 2. $x \in A$ と $x \notin A^c$ は同値である.
-

Proof. Ω を普遍集合とし, $x \in \Omega$, $A \in 2^\Omega$ とする.

1 について示す. まず,

$$x \notin A \implies x \in A^c$$

を示す. $x \notin A$ とする. いま $x \in A$ であるので, $x \in \Omega \setminus A$. よって $x \in A^c$.

次に,

$$x \in A^c \implies x \notin A$$

を示す. $x \in A^c$ とする. $x \in \Omega \setminus A$ であるので, 定義から $x \in \Omega$ かつ $x \notin A$. よって $x \notin A$.

次に, 2 について示す. まず,

$$x \notin A \implies x \in A^c$$

を示す. この命題の対偶は,

$$x \notin A^c \implies x \in A$$

であるので, 1 より, 成り立つことがわかる.

次に,

$$x \in A^c \implies x \notin A$$

を示す. この命題の対偶は,

$$x \in A \implies x \notin A^c$$

であるので, 1 より, 成り立つことがわかる. □

Proposition 3.2.3. Ω を普遍集合とする. $A \in 2^\Omega$ に対し, $(A^c)^c = A$. □

*4 $\complement_\Omega A$ とか $\complement A$ と書く流儀もある.

Proof. Ω を普遍集合とし, $A \in 2^\Omega$ とする.

まず $(A^c)^c \subset A$ を示す. $x \in (A^c)^c$ とする. このとき, $x \in A$ を示す. $x \in (A^c)^c$ であるので, Lemma 3.2.2 の 1 より, $x \notin A^c$. また $x \notin A^c$ であるので, Lemma 3.2.2 の 2 より, $x \in A$.

次に $(A^c)^c \supset A$ を示す. $x \in A$ とする. このとき $x \in (A^c)^c$ を示す. $x \in A$ であるので, Lemma 3.2.2 の 2 より, $x \notin A^c$. また, $x \notin A^c$ であるので, Lemma 3.2.2 の 1 より, $x \in (A^c)^c$. $\square$

Proposition 3.2.4. Ω を普遍集合とする. このとき, $\Omega^c = \emptyset$ と $\emptyset^c = \Omega$ が成り立つ. $\square$

Proof. Ω を普遍集合とする. $\Omega^c = \Omega \setminus \Omega = \{x \in \Omega \mid x \notin \Omega\}$ である. $x \in \Omega$ と $x \notin \Omega$ が同時に真になることはないので, $\Omega^c = \emptyset$. また $\Omega^c = \emptyset$ であるので, $\emptyset^c = (\Omega^c)^c$. Proposition 3.2.3 より $(\Omega^c)^c = \Omega$ である. よって $\emptyset^c = \Omega$. $\square$

Exercise 3.2.5. Ω を普遍集合とし, $A \in 2^\Omega$ とする. このとき, $A \cup A^c = \Omega$ $\square$

Proof. Ω を普遍集合とし, $A \in 2^\Omega$ とする.

まず, $A \cup A^c \subset \Omega$ を示す. $A \subset \Omega$ かつ $A^c \subset \Omega$ であるので, Proposition 3.1.8 より, $A \cup A^c \subset \Omega$.

次に $A \cup A^c \supset \Omega$ を示す. $x \in \Omega$ とする. このとき, $x \in A \cup A^c$ を示す. $x \in A$ の場合とそうでない場合に分けて考える. まず $x \in A$ の場合について考える. このときは, $x \in A$ であるので, $x \in A \cup A^c$ である. 次にそうでない場合を考える. このときは, $x \notin A$ であるので, Lemma 3.2.2 より, $x \in A^c$ である. したがって, $x \in A \cup A^c$ である. $\square$

Exercise 3.2.6. Ω を普遍集合とし, $A \in 2^\Omega$ とする. $A \cap A^c = \emptyset$. $\square$

Proof. Ω を普遍集合とし, $A \in 2^\Omega$ とする. $A \cap A^c$ が空集合であることを示す. つまり,

$$x \in \Omega \implies x \notin A \cap A^c$$

を示す. $x \in \Omega$ とする. このとき, $x \notin A \cap A^c$ を示す. $x \in A$ の場合とそうでない場合に分けて考える. まず $x \in A$ の場合について考える. このときは, $x \in A$ であるので, Lemma 3.2.2 より, $x \notin A^c$ である. $x \notin A^c$ であるので, $x \notin A \cap A^c$. 次に $x \in A$ でない場合について考える. このときは, $x \notin A$ であるので, $x \notin A \cap A^c$. $\square$

Exercise 3.2.7. Ω を普遍集合とし, $A, B \in 2^\Omega$ とする. このとき, $A \subset B$ と $A^c \supset B^c$ は同値である. $\square$

Proof. Ω を普遍集合とし, $A, B \in 2^\Omega$ とする.

まず,

$$A \subset B \implies B^c \subset A^c$$

の対偶である

$$B^c \subset A^c \text{でない} \implies A \subset B \text{でない}$$

を示す. $B^c \subset A^c$ ではないとする. このとき, $A \subset B$ ではないことを示す.

$$\forall x \in A, x \in B$$

が成り立たないことを示す. つまり, $x \in A$ かつ $x \notin B$ を満たす x が存在することを示す. $B^c \subset A^c$ ではないので, $x \in B^c$ かつ $x \notin A^c$ を満たす x が存在する. $a \in B^c$ かつ $a \notin A^c$ とする. $a \in B^c$ であるので, $a \notin B$ である. また, $a \notin A^c$ であるので, $a \in A$ である. したがって a は, $a \in A$ かつ $a \notin B$ を満たす.

次に,

$$B^c \subset A^c \implies A \subset B$$

の対偶である

$$A \subset B \text{でない} \implies B^c \subset A^c \text{でない}$$

を示す. $A \subset B$ でないとする. このとき $B^c \subset A^c$ でないことを示す.

$$\forall x \in B^c, x \in A^c$$

が成り立たないことを示すつまり $x \in B^c$ かつ $x \notin A^c$ となる x が存在することを示す. $A \subset B$ ではないので, $x \in A$ かつ $x \notin B$ を満たす x が存在する. $a \in A$ かつ $a \notin B$ とする. $a \in A$ であるので, $a \notin A^c$. $a \notin B$ であるので, $a \in B^c$. したがって, a は $a \in B^c$ かつ $a \notin A^c$ を満たす. □

次の二つの命題は, DeMorgan の法則という名前でよく知られている.

Proposition 3.2.8 (DeMorgan の法則). Ω を普遍集合とし, $A, B \in 2^\Omega$ とする. このとき, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. □

Proof. Ω を普遍集合とし, $A, B \in 2^\Omega$ とする.

まず $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ を示す. $x \in (A \cup B)^c$ とする. このとき $x \in A^c \cap B^c$ を示す. $x \in (A \cup B)^c$ であるので, $x \in \Omega$ かつ $x \notin A \cup B$ である. $x \in A$ とすると, $x \in A \cup B$ となるので, $x \notin A$ である. よって $x \in \Omega$ かつ $x \notin A$ であるので $x \in A^c$ また, $x \in B$ とする

と, $x \in A \cup B$ となるので, $x \notin B$ である. よって $x \in \Omega$ かつ $x \notin B$ であるので $x \in B^c$ したがって $x \in A^c \cap B^c$.

次に $(A \cup B)^c \supset A^c \cap B^c$ を示す. $x \in A^c \cap B^c$ とする. このとき, $x \in (A \cup B)^c$ を示す. $x \in A^c \cap B^c$ であるので, $x \in A^c$ である. つまり, $x \in \Omega$ かつ $x \notin A$ である. また, $x \in A^c \cap B^c$ であるので, $x \in B^c$ であり, $x \in \Omega$ かつ $x \notin B$ である. よって $x \notin A$ かつ $x \notin B$ である. $x \in A \cup B$ とすると $x \in A$ または $x \in B$ となるので, $x \notin A \cup B$ である. したがって, $x \in \Omega$ かつ $x \notin A \cup B$ であるので, $x \in (A \cup B)^c$ である. $\square$

Proposition 3.2.9 (DeMorgan の法則). Ω を普遍集合とし, $A, B \in 2^\Omega$ とする. このとき, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. $\square$

Proof. Ω を普遍集合とし, $A, B \in 2^\Omega$ とする.

まず $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ を示す. $x \in (A \cap B)^c$ とする. このとき $x \in A^c \cup B^c$ を示す. つまり, $x \in A^c$ または $x \in B^c$ をみたすことを示す. $x \in A^c$ のとき, 明らかに $x \in A^c \cup B^c$ である. $x \notin A^c$ とする. このとき $x \in B^c$ となることを示す. $x \in (A \cap B)^c$ であるので, $x \in \Omega$ かつ $x \notin A \cap B$ である. いま $x \notin A^c$ であるので $x \in A$ である. さらに $x \in B$ とすると $x \in A \cap B$ であるので, $x \in A \cap B$ となるため, $x \notin B$ である. つまり, $x \in B^c$ である.

次に $(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$ を示す. $x \in A^c \cup B^c$ とする. このとき, $x \in (A \cap B)^c$ を示す. $x \in A^c \cup B^c$ であるので, $x \in A^c$ または $x \in B^c$ である. $x \in A^c$ のとき, $x \notin A$ である. したがって $x \notin A \cap B$. $x \in B^c$ のとき, $x \notin B$ である. したがって $x \notin A \cap B$. いずれの場合も, $x \notin A \cap B$ であるので, $x \in (A \cap B)^c$. $\square$

3.3 順序対と集合の直積

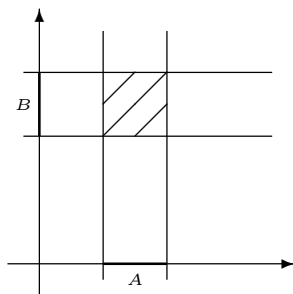
$\{1, 2\}$ から普遍集合 Ω への写像

$$\begin{array}{ccc} a & : & \{1, 2\} \longrightarrow \Omega \\ & & \Downarrow \\ & & i \longmapsto a_i \end{array}$$

を, 1 の像と 2 の像を順番に並べて,

$$(a_1, a_2)$$

の様に書き表すことがある. このように書いたものを順序対とか (順序付けられた) 組と呼ぶことがある. 順序対は $\{1, 2\}$ から集合 Ω への写像であるので, 二つの順序対 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) が等しいということは, $a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ ということである.

図 3.5 $A \times B$

Definition 3.3.1. 集合 A, B に対して,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \}$$

を A と B の直積集合 (*Cartesian product*) という. ただし (a, b) は順序対 (*ordered pair*), つまり, $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対し

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ かつ } b = b'$$

とする. □

Remark 3.3.2. A を集合とする. $a \neq a'$ のとき, $A \times A$ において $(a, a') \neq (a', a)$ である. □

Example 3.3.3. $A = [1, 2] \subset \mathbb{R}$, $B = [2, 3] \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, $A \times B$ は 3.5 の斜線部分にあたる. □

次に, この操作の計算規則について見ていく.

Proposition 3.3.4. 集合 A, B, A', B' に対し, $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$. □

Proof. A, B, A', B' を集合とする.

まず $(A \times B) \cap (A' \times B') \subset (A \cap A') \times (B \cap B')$ を示す. $x \in (A \times B) \cap (A' \times B')$ とする. このとき, $x \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ を示す. $x \in (A \times B) \cap (A' \times B')$ であるので, $x \in A \times B$ かつ $x \in A' \times B'$ である. $x \in A \times B$ であるので, $x = (a, b)$ となる $a \in A$ と $b \in B$ が存在する. $a \in A$, $b \in B$, $x = (a, b)$ とする. $x \in A' \times B'$ であるので, $x = (a', b')$ となる $a' \in A'$ と $b' \in B'$ が存在する. $a' \in A'$, $b' \in B'$, $x = (a', b')$ とする. $(a, b) = x = (a', b')$ であるので, $a = a'$ かつ $b = b'$ である. $a = a'$ であるので $a \in A$ かつ $a \in A'$ である. よって, $a \in A \cap A'$. また, $b = b'$ であるので $b \in B$ かつ $b \in B'$ である. よって, $b \in B \cap B'$. したがって, $(a, b) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$. $x = (a, b)$ であるので, $x \in (A \cap A') \times (B \cap B')$.

次に $(A \times B) \cap (A' \times B') \supset (A \cap A') \times (B \cap B')$ を示す. $(a, b) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ とする. このとき, $(a, b) \in (A \times B) \cap (A' \times B')$ を示す. $(a, b) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ であるので, $a \in A \cap A'$ かつ $b \in B \cap B'$ である. $a \in A \cap A'$ であるので $a \in A$. $b \in B \cap B'$ であるので $b \in B$. よって, $(a, b) \in A \times B$. また $a \in A \cap A'$ であるので $a \in A'$. $b \in B \cap B'$ であるので $b \in B'$. よって, $(a, b) \in A' \times B'$. したがって, $(a, b) \in (A \times B) \cap (A' \times B')$. $\square$

Corollary 3.3.5. 集合 X, Y, X' に対し, $(X \times Y) \cap (X' \times Y) = (X \cap X') \times Y$. $\square$

Proof. X, Y, X' を集合とする. $A = X, B = Y, A' = X', B' = Y$ として, Proposition 3.3.4 を用いると,

$$(X \times Y) \cap (X' \times Y) = (X \cap X') \times (Y \cap Y)$$

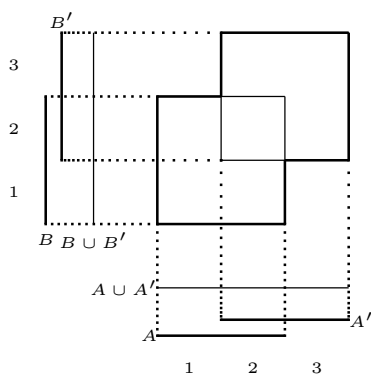
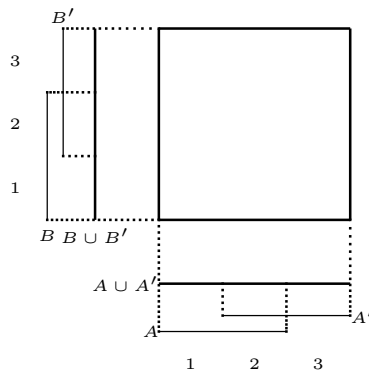
を得る. $Y \cap Y = Y$ であるので, $(X \times Y) \cap (X' \times Y) = (X \cap X') \times Y$. $\square$

Proposition 3.3.6. 集合 A, B, A' に対し, $(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$. $\square$

Proof. A, B, A' を集合とする.

まず $(A \times B) \cup (A' \times B) \subset (A \cup A') \times B$ を示す. $x \in (A \times B) \cup (A' \times B)$ とする. このとき, $x \in (A \cup A') \times B$ を示す. $x \in (A \times B) \cup (A' \times B)$ であるので, $x \in A \times B$ または $x \in A' \times B$ である. 場合分けをして考える. まず, $x \in A \times B$ の場合について考える. $x \in A \times B$ であるので, $x = (a, b)$ を満たす, $a \in A$ と $b \in B$ が存在する. $a \in A$, $b \in B$, $x = (a, b)$ とする. $a \in A$ であるので, $a \in A \cup A'$. したがって, $(a, b) \in (A \cup A') \times B$ である. つまり, $x \in (A \cup A') \times B$. 次に, $x \in A' \times B$ の場合について考える. $x \in A' \times B$ であるので, $x = (a, b)$ を満たす $a \in A'$ と $b \in B$ が存在する. $a \in A'$, $b \in B$, $x = (a, b)$ とする. $a \in A'$ であるので, $a \in A \cup A'$. したがって, $(a, b) \in (A \cup A') \times B$ である. つまり, $x \in (A \cup A') \times B$. したがって, いずれの場合も $x \in (A \cup A') \times B$.

次に $(A \times B) \cup (A' \times B) \supset (A \cup A') \times B$ を示す. $(a, b) \in (A \cup A') \times B$ とする. このとき $(a, b) \in (A \times B) \cup (A' \times B)$ を示す. $(a, b) \in (A \cup A') \times B$ であるので, $a \in A \cup A'$ かつ $b \in B$ である. $a \in A \cup A'$ であるので, $a \in A$ または $a \in A'$ である. 場合分けをして考える. まず $a \in A$ の場合について考える. $a \in A$ かつ $b \in B$ であるので, $(a, b) \in A \times B$ である. したがって, $(a, b) \in (A \times B) \cup (A' \times B)$. 次に $a \in A'$ の場合について考える. $a \in A'$ かつ $b \in B$ であるので, $(a, b) \in A' \times B$ である. したがって, $(a, b) \in (A \times B) \cup (A' \times B)$. $\square$

図 3.6 $(A \times B) \cup (A' \times B')$ 図 3.7 $(A \cup A') \times (B \cup B')$

Remark 3.3.7. 集合 A, B, A', B' に対し, $(A \times B) \cup (A' \times B') \subset (A \cup A') \times (B \cup B')$ は成り立つが, $(A \times B) \cup (A' \times B') = (A \cup A') \times (B \cup B')$ は一般には成り立たない. 例えば, $A = B = \{1, 2\}$, $A' = B' = \{2, 3\}$ とすると,

$$\begin{aligned} (A \times B) \cup (A' \times B') &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \cup \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}, \\ (A \cup A') \times (B \cup B') &= \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}. \end{aligned}$$

例えば, $(1, 3) \in (A \cup A') \times (B \cup B')$ だが, $(1, 3) \notin (A \times B) \cup (A' \times B')$. これを模式的に表すと図 3.6, 3.7 の様になる. $\square$

第 4 章

写像の性質

4.1 全射と単射

写像 $f: A \rightarrow B$ は、各 $a \in A$ の像 $f(a)$ はただ一つでなければいけないが、異なる 2 元 a, b の像が等しくても構わない。つまり $a \neq b$ であっても、 $f(a) = f(b)$ となることはある。このようなことがない写像を単射と呼ぶ。

Definition 4.1.1. A, B を二つの写像とし、 f を A から B への写像とする。

$$a_1, a_2 \in A \text{ かつ } a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad (4.1)$$

という条件を満たすとき、 f は単射な (*injective*) 写像であるという。単射な写像のことを単射 (*injection*) と呼ぶ。 $\square$

Remark 4.1.2. 条件 (4.1) は、その対偶である次と同値である：

$$a_1, a_2 \in A \text{ かつ } f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2. \quad (4.2)$$

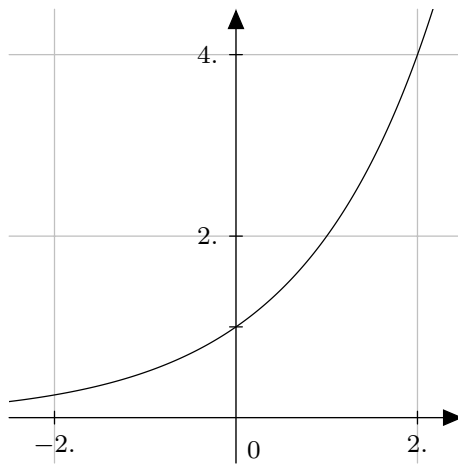
$\square$

写像 $f: A \rightarrow B$ は、 A のどの元 a にもその像 $f(a)$ が決まっていなければならないが、像として現れない B の元 b が存在しても良い。つまり、どの $a \in A$ に対しても $b \neq f(a)$ となる b が存在することがある。このようなことがない写像を全射と呼ぶ。

Definition 4.1.3. A, B を二つの写像とし、 f を A から B への写像とする。

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ such that } f(a) = b$$

という条件を満たすとき、 f は全射な (*surjective*) 写像であるという。全単射な写像を全射 (*surjection*) と呼ぶ。 $\square$

図 4.1 2^x

全射や単射の例をいくつか挙げる.

Example 4.1.4. 次の写像 f は全射ではないが単射である:

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & 2^x \end{array}.$$

□

Example 4.1.5. 次の写像 f は全射ではあるが, 単射ではない:

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x = x(x^2 - 3) \end{array}.$$

□

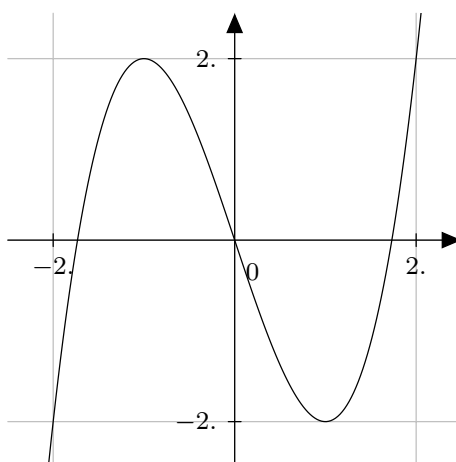
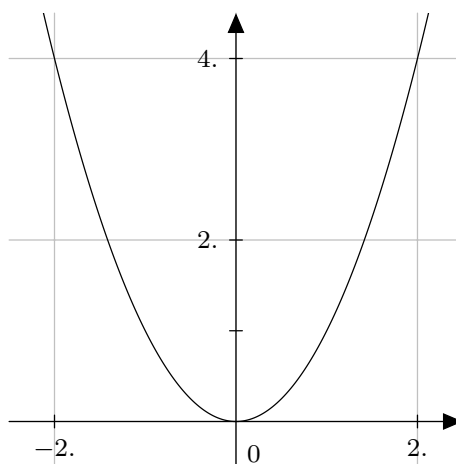
Example 4.1.6. 次の写像 f は全射でも単射でもない:

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$

□

Example 4.1.7. 次の写像 $\sin$ は全射ではあるが, 単射ではない:

$$\begin{array}{ccc} \sin & : & \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}.$$

図 4.2 $x(x^2 - 3)$ 図 4.3 x^2

しかし、次の写像 Sin は全射であり単射でもある：

$$\begin{array}{ccc} \text{Sin} & : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \\ & \cup & \cup \\ & x & \longmapsto \sin(x) \end{array}.$$

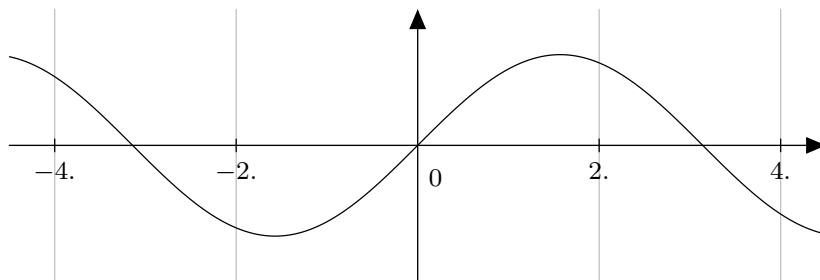
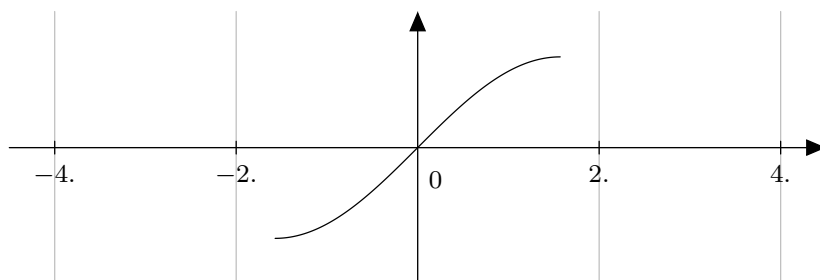
□

全単射であることから、単射であることや全射であることを導くことができる。

Proposition 4.1.8. A と B を二つの集合とし、 f を A から B への写像とする。 f が全単射なら f は単射である。 □

Proof. A と B を二つの集合とし、 f を A から B への全単射とする。

$$a_1, a_2 \in A \text{ かつ } f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

図 4.4 $\sin(x)$ 図 4.5 $\text{Sin}(x)$

を示す. $a_1, a_2 \in A$ かつ $f(a_1) = f(a_2)$ とする. このとき, $a_1 = a_2$ を示す. f は A から B への全単射であるので, 逆写像 f^{-1} が存在する. $f(a_1) = f(a_2)$ であるので, $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ である. 逆写像 f^{-1} の定義より, $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ である. よって, $f^{-1}(f(a_1)) = (f^{-1} \circ f)(a_1) = \text{id}_A(a_1) = a_1$. また, $f^{-1}(f(a_2)) = (f^{-1} \circ f)(a_2) = \text{id}_A(a_2) = a_2$. したがって, $a_1 = a_2$. $\square$

Proposition 4.1.9. A と B を二つの集合とし, f を A から B への写像とする. f が全単射なら f は全射である. $\square$

Proof. A と B を二つの集合とし, f を A から B への全単射とする.

$$b \in B \implies \exists a \in A \text{ such that } f(a) = b$$

を示す. $b \in B$ とする. このとき, $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ が存在することを示す. f は A から B への全単射であるので, 逆写像 f^{-1} が存在する. $x = f^{-1}(b)$ とおく. 逆写像 f^{-1} の定義より, $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$. したがって, $f(x) = f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b) = \text{id}_B(b) = b$. よって $x \in A$ かつ $f(x) = b$ である. $\square$

つぎに, 単射であり全射でもある写像が全単射であることを示す.

Lemma 4.1.10. $f: A \rightarrow B$ は全射かつ単射とする. このとき,

$$\forall b \in B, \exists! a \in A \text{ such that } f(a) = b.$$

□

Proof. $f: A \rightarrow B$ は全射かつ単射とし, $b \in B$ とする.

まず, $f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在することを示す. $f: A \rightarrow B$ は全射かつ単射であるので, 全射である. したがって, $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ が存在する.

次に, $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ が unique であることを示す. つまり,

$$f(a) = b \text{ かつ } f(a') = b \implies a = a'$$

を示す. $a, a' \in A$ が $f(a) = f(a') = b$ を満たすとする. このとき, $a = a'$ を示す. $f: A \rightarrow B$ は全射かつ単射であるので, 単射である. したがって, f は条件 (4.2) を満たすので, $a = a'$ である. □

各 $b \in B$ に対して $f(a) = b$ を満たす $a \in A$ はただ一つ決まるので, $b \in B$ に対して $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ を対応づける写像 $g: B \rightarrow A$ は well-defined である.

Proposition 4.1.11. $f: A \rightarrow B$ は全単射とする. $b \in B$ に対して $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ を対応づける写像を g とすると, $g = f^{-1}$. □

Proof. $f: A \rightarrow B$ は全単射とし, g は $b \in B$ に対して $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ を対応づける B から A への写像とする. このとき, g が条件

$$g \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ g = \text{id}_B$$

を満たしていれば, Proposition 2.2.17 より, f^{-1} に等しいことがわかる.

まず, $g \circ f = \text{id}_A$ を示す.

$$a \in A \implies (g \circ f)(a) = a$$

を示せばよい. $a \in A$ とする. このとき, $(g \circ f)(a) = a$ を示す. $b = f(a)$ とおく. このとき, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b)$ である. いま, $b = f(a)$ であるので, g の定義より, $g(b) = a$ である. よって, $(g \circ f)(a) = a$.

次に, $f \circ g = \text{id}_B$ を示す.

$$b \in B \implies (f \circ g)(b) = b$$

を示せばよい. $b \in B$ とする. このとき $(f \circ g)(b) = b$ を示す. $a = g(b)$ とおく. このとき g の定義から, $f(a) = b$ である. したがって, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$. □

以上をまとめると, 次がすぐ分かる.

Corollary 4.1.12. A と B を二つの集合とし, f を A から B への写像とする. f が全射かつ単射であることと f が全単射であることは同値である. $\square$

Proof. f を集合 A から集合 B への写像とする.

まず ‘ f が全射かつ単射ならば f は全単射’ について示す. f が全射かつ単射であるとする. このとき, Proposition 4.1.11 より, 逆写像 f^{-1} が存在するので, f は全単射である.

次に, ‘ f が全単射ならば f は全射かつ単射’ について示す. f が全単射であるとする. このとき, Proposition 4.1.8 より f は単射である. また Proposition 4.1.9 より f は全射でもあることが分かる. $\square$

4.2 像と逆像

写像 $f: X \rightarrow Y$ について考える. X の部分集合 A が与えられたとき, A の元 a の像 $f(a)$ として現れる Y の元を集めた集合を考えることがある. このような Y の部分集合を f による A の像とよぶ. また, Y の部分集合 B が与えられたとき, f による像 $f(a)$ が B の元であるような $a \in A$ を集めた集合を考えることもある. このような X の部分集合を f による B の逆像と呼ぶ.

Definition 4.2.1. X と Y を2つの集合とし, f を X から Y への写像とする. $A \subset X$ に対し, $f(A) = \{ f(a) \in Y \mid a \in A \}$ ^{*1} と定義し, $f(A)$ を f による A の像 (*image*) または値域 (*range*) と呼ぶ.^{*2} 集合 $B \subset Y$ に対し, $f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ と定義し, $f^{-1}(B)$ を f による B の逆像 (*inverse image*, *preimage*) と呼ぶ. $\square$

Remark 4.2.2. 逆像を表すのに $f^{-1}(B)$ と書くが, これは f の逆写像があるという意味ではない. 例えば,

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & x \longmapsto x^2 \end{array}$$

は全射でも単射でもないのに, 逆写像はない. 逆写像はないが, 逆像は定義できる. 例えば, 区間 $[0, 1]$ の逆像は

$$f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$$

^{*1} $\{ f(a) \in Y \mid a \in A \}$ は $\{ b \in Y \mid \exists a \in A \text{ such that } f(a) = b \}$ ということである.

^{*2} $f(a)$ も, $a \in A$ の ‘像’ と呼ばれているので気をつける必要がある. $f(A)$ を値域と呼んで区別するほうが良いかもしれないが, 像と呼ぶほうが一般的であるような気がするので, 本稿では像と呼ぶことにする.

となる. また $\{1\}$ や $\{0\}$ の逆像は

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{-1, 1\}, \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{0\} \end{aligned}$$

である. 一方 $f^{-1}(1)$ や $f^{-1}(0)$ は定義されない.

また, 例えば,

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \cup & \\ & & x \longmapsto x^3 \end{array}$$

は全単射であり, 逆写像 g^{-1} が存在する.

$$\begin{array}{ccc} g^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \cup & \\ & & x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$$

である. このとき,

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{8\}) &= \{2\}, \\ g^{-1}(8) &= 2 \end{aligned}$$

であり, この 2 つは異なる. □

定義から明らかであるが, 次の事実を確認しておく.

Remark 4.2.3. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $A \subset X$ とする. このとき, $y \in f(A)$ であるということは, $y = f(a)$ を満たす $a \in A$ が存在するということと同値である. したがって, 写像 f が全射であることは, $f(X) = Y$ と同値である. また, $B \subset Y$ とすると, $x \in f^{-1}(B)$ であることと, $f(x) \in B$ であることは同値である. □

像や逆像に関する性質をいくつか紹介する.

Proposition 4.2.4. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし, $A \subset X$ とする. このとき, $f^{-1}(f(A)) \supset A$. □

Proof. f は集合 X から集合 Y への写像であるとする. $A \subset X$ とし, $x \in A$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(f(A))$ となることを示す. 逆像の定義より, $f^{-1}(f(A)) = \{a \in X \mid f(a) \in f(A)\}$ であるので, $f(x) \in f(A)$ であることを示せば良い. $x \in A$ であるので, 像の定義より, $f(x) \in f(A)$ である. □

Remark 4.2.5. $f: A \rightarrow B$ と $A \subset X$ に対し, $f^{-1}(f(A)) \supset A$ であるが, 等号は一般には成

り立たない。

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \cup & \\ & x & \longmapsto x^2 \end{array}$$

について考える。 $A = \{1\}$ とすると、 $f(A) = \{1\}$ であるので、

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\} \neq A.$$

□

Proposition 4.2.6. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし、 $B \subset Y$ とする。このとき $f(f^{-1}(B)) \subset B$ 。

□

Proof. f は集合 X から集合 Y への写像であるとする。 $B \subset Y$ とし、 $y \in f(f^{-1}(B))$ とする。このとき、 $y \in B$ となることを示す。 $y \in f(f^{-1}(B))$ であるので、像の定義より、 $y = f(a)$ を満たす $a \in f^{-1}(B)$ が存在する。 $x \in f^{-1}(B)$ が $y = f(x)$ を満たすとする。 $x \in f^{-1}(B)$ であるので、逆像の定義より、 $f(x) \in B$ である。 $y = f(x)$ であるので、 $y \in B$ である。 □

Remark 4.2.7. $f: A \rightarrow B$ と $B \subset Y$ に対し、 $f(f^{-1}(B)) \subset B$ であるが、等号は一般には成り立たない。

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \cup & \\ & x & \longmapsto x^2 \end{array}$$

について考える。 $B = \{-1\}$ とすると、 $f^{-1}(B) = \emptyset$ であるので、

$$f(f^{-1}(B)) = f(\emptyset) = \emptyset \neq B.$$

□

Proposition 4.2.8. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし、 $A_1, A_2 \subset X$ とする。このとき、 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ 。

□

Proof. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし、 $A_1 \subset X, A_2 \subset X$ とする。

まず、 $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ を示す。 $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする。このとき、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ を示す。 $y \in f(A_1 \cup A_2)$ であるので、 $y = f(a)$ を満たす $a \in A_1 \cup A_2$ が存在する。 $x \in A_1 \cup A_2$ が $y = f(x)$ を満たすとする。 $x \in A_1 \cup A_2$ であるので、 $x \in A_1$ または $x \in A_2$ である。まず $x \in A_1$ の場合について考える。 $y = f(x)$ かつ $x \in A_1$ であるので、 $y \in f(A_1)$ 。よって、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ 。同様に $x \in A_2$ の場合について考える。 $y = f(x)$ かつ $x \in A_2$ であるので、 $y \in f(A_2)$ 。よって、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ 。

次に, $f(A_1 \cup A_2) \supset f(A_1) \cup f(A_2)$ を示す. $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ とする. このとき, $y \in f(A_1 \cup A_2)$ を示す. $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ であるので, $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$ である. まず $y \in f(A_1)$ の場合について考える. $y \in f(A_1)$ であるので, $y = f(a)$ となる $a \in A_1$ が存在する. $x \in A_1$ が $y = f(x)$ を満たすとする. $x \in A_1$ であるので, $x \in A_1 \cup A_2$. $y = f(x)$ かつ $x \in A_1 \cup A_2$ であるので, $y \in f(A_1 \cup A_2)$. 次に $y \in f(A_2)$ の場合について考える. $y \in f(A_2)$ であるので, $y = f(a)$ となる $a \in A_2$ が存在する. $x \in A_2$ が $y = f(x)$ を満たすとする. $x \in A_2$ であるので, $x \in A_1 \cup A_2$. $y = f(x)$ かつ $x \in A_1 \cup A_2$ であるので, $y \in f(A_1 \cup A_2)$. $\square$

Proposition 4.2.9. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $A_1, A_2 \subset X$ とする. このとき $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. $\square$

Proof. $x \in f(A_1 \cap A_2)$ とする. このとき, $x \in f(A_1) \cap f(A_2)$ を示す. $x \in f(A_1 \cap A_2)$ であるので, $x = f(a)$ となる $a \in A_1 \cap A_2$ が存在する. $x \in A_1 \cap A_2$ が $x = f(x)$ を満たすとする. $x \in A_1 \cap A_2$ であるので, $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ である. $x \in A_1$ かつ $x = f(x)$ であるので $x \in f(A_1)$. また, $x \in A_2$ かつ $x = f(x)$ であるので $x \in f(A_2)$. よって $x \in f(A_1) \cap f(A_2)$. $\square$

Remark 4.2.10. $f: X \rightarrow Y$ と, $A_1, A_2 \subset X$ に対し, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ であるが等号は一般には成り立たない. 例えば,

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & x \longmapsto x^2 \end{array}$$

について考える. $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$ とすると, $A \cap B = \{0\}$ である. したがって,

$$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}.$$

となるが,

$$f(A) \cap f(B) = \{0, 1\} \cap \{1, 0\} = \{0, 1\}$$

であるので, これらは等しくない. $\square$

Proposition 4.2.11. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. $\square$

Proof. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし, $B_1 \subset Y$, $B_2 \subset Y$ とする.

まず $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ とする. このとき $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ であるので,

$f(x) \in B_1 \cup B_2$ である. $f(x) \in B_1 \cup B_2$ であるので, $f(x) \in B_1$ または $f(x) \in B_2$ である. まず $f(x) \in B_1$ の場合について考える. $f(x) \in B_1$ であるので, $x \in f^{-1}(B_1)$ である. よって $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ である. 次に $f(x) \in B_2$ の場合について考える. $f(x) \in B_2$ であるので, $x \in f^{-1}(B_2)$ である. よって $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ である.

次に, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \supset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ とする. このとき $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ であるので, $x \in f^{-1}(B_1)$ または $x \in f^{-1}(B_2)$ である. まず $x \in f^{-1}(B_1)$ の場合について考える. $x \in f^{-1}(B_1)$ であるので $f(x) \in B_1$ である. よって, $f(x) \in B_1 \cup B_2$ であるので, $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. 次に $x \in f^{-1}(B_2)$ の場合について考える. $x \in f^{-1}(B_2)$ であるので $f(x) \in B_2$ である. よって, $f(x) \in B_1 \cup B_2$ であるので, $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. $\square$

Proposition 4.2.12. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. $\square$

Proof. f は集合 X から集合 Y への写像であるとし, $B_1 \subset Y, B_2 \subset Y$ とする.

まず, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ とする. このとき $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ であるので, $f(x) \in B_1 \cap B_2$. よって, $f(x) \in B_1$ かつ $f(x) \in B_2$ である. $f(x) \in B_1$ であるので, $x \in f^{-1}(B_1)$. また, $f(x) \in B_2$ であるので, $x \in f^{-1}(B_2)$. よって, $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

次に, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \supset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ とする. このとき $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ となることを示す. $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ であるので, $x \in f^{-1}(B_1)$ かつ $x \in f^{-1}(B_2)$. $x \in f^{-1}(B_1)$ であるので, $f(x) \in B_1$. また $x \in f^{-1}(B_2)$ であるので, $f(x) \in B_2$. よって, $f(x) \in B_1 \cap B_2$. したがって $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. $\square$

Exercise 4.2.13. Ω を普遍集合とし, $X, Y \in 2^\Omega$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $B \subset Y$ に対し, $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$. $\square$

Proof. Ω を普遍集合とし, $X, Y \in 2^\Omega$ とする. $B \subset Y$ とし f を X から Y への写像とする.

まず $f^{-1}(B^c) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^c$ を示す. $x \in f^{-1}(B^c)$ とする. このとき, $x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c$ を示す. つまり, $x \notin f^{-1}(B)$ を示す. つまり, $f(x) \notin B$ を示せば良い. いま, $x \in f^{-1}(B^c)$ であるので, $f(x) \in B^c$. したがって, $f(x) \notin B$.

まず $f^{-1}(B^c) \supset \left(f^{-1}(B)\right)^c$ を示す. $x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(B^c)$ を示す. つまり, $f(x) \in B^c$ を示す. いま $x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c$ であるので, $x \notin f^{-1}(B)$. よって, $f(x) \notin B$. したがって, $f(x) \in B^c$. $\square$

第 5 章

集合族と類別

5.1 集合族

要素が集合であるような集合を集合族と呼ぶ.

Definition 5.1.1. X を集合とする. 集合 $\mathcal{A}$ が

$$A \in \mathcal{A} \implies A \subset X$$

を満たすとき, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合族 (*family of sets*) であるという. つまり, $\mathcal{A} \subset 2^X$ を X の部分集合からなる集合族と呼ぶ. $\square$

Definition 5.1.2. $\mathcal{A}$ を空ではない^{*1} 集合族とする. このとき,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ such that } x \in A\}$$

とおき, $\mathcal{A}$ に含まれる集合の和集合 (*union*) と呼ぶ.

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

とおき, $\mathcal{A}$ に含まれる集合の共通部分 (*intersection*) と呼ぶ. $\square$

集合 X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{A}$ に対する次の 2 つの命題は定義から明らかである.

Proposition 5.1.3. X を集合とし, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる空ではない集合族とする. このとき,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset X.$$

$\square$

^{*1} $\mathcal{A} \neq \emptyset$ という意味である. $\mathcal{A} \neq \{\emptyset\}$ や $\emptyset \notin \mathcal{A}$ という意味ではない.

Proof. $\mathcal{A}$ は集合 X の部分集合からなる集合族とする. $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ とする. このとき $x \in X$ を示す. $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ であるので, $x \in A$ となる $A \in \mathcal{A}$ が存在する. $A \in \mathcal{A}$ が $x \in A$ を満たすとする. $A \in \mathcal{A}$ であるので $A \subset X$ である. $x \in A$ かつ $A \subset X$ であるので $x \in X$. $\square$

Proposition 5.1.4. X を集合とし, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる空ではない集合族とする. このとき,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \subset X.$$

$\square$

Proof. $\mathcal{A}$ は集合 X の部分集合からなる集合族とする. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ であるときについて考える. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ であるので $Q \in \mathcal{A}$ とする. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ とする. このとき, $x \in X$ を示す. $Q \in \mathcal{A}$ であるので, $x \in Q$ である. また, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合族であるので, $Q \subset X$ である. よって, $x \in X$. $\square$

Proposition 4.2.8 などと同様の命題も成り立つ.

Proposition 5.1.5. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる空ではない集合族とする. $B = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ とおくと B は Y の部分集合からなる集合族である. このとき, $f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = \bigcup_{B \in B} B$. $\square$

Proof. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる空ではない集合族とする. $B = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ とおくと, $f(A) \subset Y$ であるので B は Y の部分集合からなる集合族である.

まず, $f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) \subset \bigcup_{B \in B} B$ を示す. $y \in f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)$ とする. このとき, $y \in \bigcup_{B \in B} B$ を示す. つまり, $y \in B$ を満たす $B \in B$ が存在することを示す. つまり, $y \in f(A)$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在することを示す. $y \in f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)$ であるので, $y = f(a)$ を満たす $a \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ が存在する. $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ が $y = f(x)$ を満たすとする. $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ であるので, $x \in A$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在する. $Q \in \mathcal{A}$ が $x \in Q$ を満たすとする. いま $x \in Q$ かつ $y = f(x)$ であるので, $y \in f(Q)$. したがって, $Q \in \mathcal{A}$ かつ $y \in f(Q)$ である.

次に, $f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) \supset \bigcup_{B \in B} B$ を示す. $y \in \bigcup_{B \in B} B$ とする. このとき, $y \in f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)$ を示す. つまり, $y = f(a)$ を満たす $a \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ が存在することを示す. $y \in \bigcup_{B \in B} B$ であるので, $y \in B$ を満たす $B \in B$ が存在する. $P \in B$ が $y \in P$ を満たすとする. $B = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ であるので, $y \in f(A)$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在する. $R \in \mathcal{A}$ は $y \in f(R)$ を満たすとする. $y \in f(R)$ であるので, $y = f(a)$ を満たす $a \in R$ が存在する. $x \in R$ が $y = f(x)$ を満たすとする. $x \in R$ かつ $R \in \mathcal{A}$ であるので, $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. よって, この x は $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ かつ $y = f(x)$ を満たす. $\square$

Proposition 5.1.6. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる空ではない集合族とする. $\mathcal{B} = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ とおくと $\mathcal{B}$ は Y の部分集合からなる集合族である. このとき, $f(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A) \subset \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$. $\square$

Proof. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる空ではない集合族とする. $\mathcal{B} = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ とおくと, $f(A) \subset Y$ であるので $\mathcal{B}$ は Y の部分集合からなる集合族である. $y \in f(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)$ とする. このとき $y \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ を示す. つまり,

$$B \in \mathcal{B} \implies y \in B$$

を示す. $B \in \mathcal{B}$ とする. このとき, $y \in B$ を示す. $\mathcal{B} = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ であるので $B = f(A)$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在する. $Q \in \mathcal{A}$ が $B = f(Q)$ を満たすとする. このとき, $y \in f(Q)$ を示す. $y \in f(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)$ であるので, $y = f(a)$ を満たす $a \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ が存在する. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ が $y = f(x)$ を満たすとする. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ であるので,

$$\forall A \in \mathcal{A}, x \in A$$

が成り立つ. $Q \in \mathcal{A}$ であるので, $x \in Q$. $y = f(x)$ かつ $x \in Q$ であるので, $y \in f(Q)$. $\square$

Proposition 5.1.7. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{B}$ は Y の部分集合からなる空ではない集合族とする. $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ とおくと, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合族である. このとき, $f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. $\square$

Proof. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{B}$ は Y の部分集合からなる空ではない集合族とする. $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ とおくと, $f^{-1}(B) \subset X$ であるので, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合族である.

まず $f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ を示す. $x \in f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$ とする. このとき, $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ を示す. つまり, $x \in f^{-1}(B)$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在することを示す. $x \in f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$ であるので, $f(x) \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. $f(x) \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ であるので, $f(x) \in B$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する. $P \in \mathcal{B}$ が $f(x) \in P$ を満たすとする. $f(x) \in P$ であるので, $x \in f^{-1}(P)$. よって, $P \in \mathcal{B}$ かつ $x \in f^{-1}(P)$.

次に $f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \supset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ を示す. $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$ を示す. $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ であるので, $x \in f^{-1}(B)$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する. $P \in \mathcal{B}$ が $x \in f^{-1}(P)$ を満たすとする. $x \in f^{-1}(P)$ であるので, $f(x) \in P$. $P \in \mathcal{B}$ かつ $f(x) \in P$ であるので $f(x) \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. $f(x) \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ であるので, $x \in f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$. $\square$

Proposition 5.1.8. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{B}$ は Y の部分集合からなる空ではない集合族とする. $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ とおくと, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合族である. このとき, $f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. $\square$

Proof. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{B}$ は Y の部分集合からなる空ではない集合族とする. $\mathcal{A} = \{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$ とおくと, $f^{-1}(B) \subset A$ であるので, $\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合族である.

まず, $f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ を示す. $x \in f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B)$ とする. このとき, $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ を示す. つまり,

$$A \in \mathcal{A} \implies x \in A$$

を示す. つまり,

$$B \in \mathcal{B} \implies x \in f^{-1}(B)$$

を示す. $P \in \mathcal{B}$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(P)$ を示す. $x \in f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B)$ であるので, $f(x) \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$. $f(x) \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ であるので,

$$\forall B \in \mathcal{B}, f(x) \in B$$

が成り立つ. $P \in \mathcal{B}$ であるので, $f(x) \in P$. したがって, $x \in f^{-1}(x) \in P$.

次に, $f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B) \supset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ を示す. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B)$ を示す. そのためには, $f(x) \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ を示せば良い. つまり,

$$B \in \mathcal{B} \implies f(x) \in B$$

を示せば良い. $P \in \mathcal{B}$ とする. このとき $f(x) \in P$ を示す. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ であるので,

$$\forall B \in \mathcal{B}, x \in f^{-1}(B)$$

である. $P \in \mathcal{B}$ であるので, $x \in f^{-1}(P)$. したがって, $f(x) \in P$. □

5.2 類別

5.2.1 類別の定義

ここでは, 類別と呼ばれる特別な集合族についての用語を導入する.

Definition 5.2.1. X を集合とし $\mathcal{C} \subset 2^X$ とし, $\emptyset \notin \mathcal{C}$ とする. このとき次の2つの条件をみたすとき, $\mathcal{C}$ が X の類別 (*classification*) であるという:

1. $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.
2. $C, C' \in \mathcal{C}, C \neq C' \implies C \cap C' = \emptyset$.

□

Remark 5.2.2. 条件 2 は, その対偶である

$$C, C' \in \mathcal{C} \text{ かつ } C \cap C' \neq \emptyset \implies C = C'$$

と同値である. $\square$

Proposition 5.2.3. X を集合とし $\mathcal{C} \subset 2^A$ とする. このとき, $\mathcal{C}$ が X の類別であることと

$$\forall x \in X, \exists! C \in \mathcal{C} \text{ such that } x \in C$$

は同値である. $\square$

Proof. X を集合とし $\mathcal{C} \subset 2^A$ とする.

$\mathcal{C}$ が X の類別であるとする. このとき,

$$x \in X \implies \exists! C \in \mathcal{C} \text{ such that } x \in C$$

を示す. $x \in X$ とする. このとき, まず $x \in C$ となる $C \in \mathcal{C}$ が存在することを示す. $x \in X$ であり, $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ であるので, $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ であるので, $C \in \mathcal{C}$ で $x \in C$ を満たすものが存在する. 次に, このような $\mathcal{C}$ の元はただ一つしかないことを示す. $C, C' \in \mathcal{C}$ が $x \in C$ と $x \in C'$ を満たすとする. このとき, $C = C'$ となることを示す. $x \in C$ かつ $x \in C'$ であるので, $x \in C \cap C'$ である. したがって, $C \cap C' \neq \emptyset$. よって Remark 5.2.2 にある通り, $C = C'$.

次に逆を示す.

$$\forall x \in X, \exists! C \in \mathcal{C} \text{ such that } x \in C$$

とする. このとき, $\mathcal{C}$ が類別であることを示す.

最初に $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. まず $X \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. $x \in X$ とすると, 仮定より $x \in C$ となる $C \in \mathcal{C}$ が存在する. したがって, $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. 次に $X \supset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. $\mathcal{C} \subset 2^X$ であるので, Proposition 5.1.3 より, $X \supset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ である.

次に,

$$C, C' \in \mathcal{C} \text{ かつ } C \cap C' \neq \emptyset \implies C = C'$$

を示す. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ かつ $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ とする. このとき, $C_1 = C_2$ を示す. $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ であるので, $x \in C_1 \cap C_2$ とする. $x \in C_1 \cap C_2$ であるので, $x \in C_1$ かつ $x \in C_2$ である. この x に対し, 仮定より, $x \in C$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ はただ一つしかないことが分かる. $x \in C_1$ かつ $x \in C_2$ であるので, $C_1 = C_2$. $\square$

Example 5.2.4. 有理整数のなす集合 $\mathbb{Z}$ について考える.

$$\begin{aligned} E &= \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は偶数 (even)} \}, \\ O &= \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は奇数 (odd)} \} \end{aligned}$$

とする. $\mathcal{C} = \{ E, O \}$ とすると, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{Z}}$ である. 各 $n \in \mathbb{Z}$ は, 偶数か奇数のいずれか一方であり, E もしくは O のいずれか一方に属する. よって, $E \cup O = \mathbb{Z}$ かつ $E \cap O = \emptyset$ である. したがって, $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Z}$ の類別である. $\square$

Example 5.2.5. $\mathbb{Z}$ について考える. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $r \in \{ 0, 1, \dots, n-1 \}$ に対し,

$$C_r^{(n)} = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ を } n \text{ で割ると余りが } r \}$$

とおく. 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し, m を n で割ると余り $r \in \{ 0, 1, \dots, n-1 \}$ はただ一つに定まる. したがって, $\{ C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \dots, C_{n-1}^{(n)} \}$ は $\mathbb{Z}$ の類別である. つまり, $\mathbb{Z} = C_0^{(n)} \cup C_1^{(n)} \cup \dots \cup C_{n-1}^{(n)}$ であり, $i \neq j$ ならば $C_i^{(n)} \cap C_j^{(n)} = \emptyset$ が成り立つ.

$n = 1$ のときには, $C_0^{(1)} = \mathbb{Z}$ であり, $\{ \mathbb{Z} \}$ という $\mathbb{Z}$ の類別を与えている.

$n = 2$ のときには, Example 5.2.4 の E と O を用いて, $C_0^{(2)} = E$, $C_1^{(2)} = O$ と書くことができる. したがって, この場合は, Example 5.2.4 で与えた類別そのものであることがわかる. $\square$

Example 5.2.6. 二次元空間 $\mathbb{R}^2$ について考える. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の元 r に対し,

$$C_r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2 \}$$

とおく. C_r は原点を中心とする半径 r の円である. したがって, $r \neq r'$ ならば $C_r \cap C_{r'} = \emptyset$ である. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおけば, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり, $(x, y) \in C_r$ となる. よって, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} C_r$. したがって, $\{ C_r \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$ は $\mathbb{R}^2$ の類別である. $\square$

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき, そこから類別を作ることができる.

Proposition 5.2.7. f を集合 X から集合 Y への写像とする. このとき,

$$\{ f^{-1}(\{ y \}) \mid y \in f(X) \}$$

は, X の類別である. $\square$

Proof. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\mathcal{C} = \{ f^{-1}(\{ y \}) \mid y \in f(X) \}$ とする.

まず, $\mathcal{C}$ に $\emptyset$ が属していないことを確認する. $C \in \mathcal{C}$ とする. このとき, $C \neq \emptyset$ を示す. $C \in \mathcal{C}$ であるので, $C = f^{-1}(\{ y \})$ をみたす $y \in f(X)$ が存在する. $b \in f(X)$ が $C = f^{-1}(\{ b \})$ を満たすとする. $b \in f(X)$ であるので, $b = f(x)$ を満たす $x \in X$ が存在する.

$a \in X$ が $b = f(a)$ を満たすとする. いま $a \in X$ かつ $f(a) = b$ であるので, $a \in f^{-1}(\{b\})$. $C = f^{-1}(\{b\})$ であるので, $C \neq \emptyset$.

次に $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. そのために, まず $X \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. $x \in X$ とする. このとき, $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. つまり, $x \in C$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在することを示す. $y = f(x)$ とおく. $y = f(x)$ であるので, $x \in f^{-1}(\{y\})$ である. $x \in f^{-1}(\{y\})$ かつ $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{C}$ であるので, $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. 次に, $X \supset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ を示す. $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ であるので, Proposition 5.1.3 より, $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset X$ である.

次に,

$$C, C' \in \mathcal{C} \text{ かつ } C \cap C' \neq \emptyset \implies C = C'$$

を示す. $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) \neq \emptyset$ とする. このとき $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$ を示す. $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) \neq \emptyset$ であるので, $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$ とする. このとき, $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$ であるので, $x \in f^{-1}(\{y\})$ かつ $x \in f^{-1}(\{y'\})$. $x \in f^{-1}(\{y\})$ であるので, $f(x) = y$. $x \in f^{-1}(\{y'\})$ であるので, $f(x) = y'$. $f(x) = y$ かつ $f(x) = y'$ であるので, $y = y'$. よって $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y'\})$. $\square$

Example 5.2.8. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^2 \\ & \Downarrow & \\ & & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & & \Downarrow \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

について考える. $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする. このとき, 逆像 $f^{-1}(\{r\})$ は, Example 5.2.6 の記号を用いて $f^{-1}(\{r\}) = C_r$ とかける. よって, この写像で定義される類別は Example 5.2.6 で定義した類別と同じものである. $\square$

5.2.2 類別の完全代表系

$\mathcal{C}$ を集合 X の類別とする. 各 $x \in X$ に対し, $x \in C$ となる $C \in \mathcal{C}$ がただ一つ存在する. x に対しこの C を対応させる写像を考えることができる.

Definition 5.2.9. $\mathcal{C}$ を集合 X の類別とする. このとき, 写像

$$\begin{array}{ccc} \pi & : & X \\ & \Downarrow & \\ & & \mathcal{C} \\ & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & C \text{ such that } x \in C \end{array}$$

を自然な全射 (canonical projection) という.*2 $\square$

*2 C_x, π などはこちらだけの記号

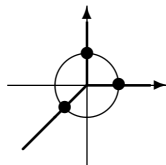


図 5.1 Example 5.2.12

類別 $\mathcal{C}$ の各 $C \in \mathcal{C}$ に対し, 1 つずつ代表を選んで作った集合を完全代表系と呼ぶ.

Definition 5.2.10. $\mathcal{C}$ を集合 X の類別とし, $\pi: X \rightarrow \mathcal{C}$ を自然な全射とする. $C \in \mathcal{C}$ に対し, $x \in C$ となる $x \in X$ を C の代表元 (representative) と呼ぶ. $R \subset X$ が次の 2 つの条件を満たす時, R を完全代表系 (a complete set of representatives) と呼ぶ:

1. $\mathcal{C} = \{ \pi(x) \mid x \in R \}$.
2. $x, y \in R$ かつ $x \neq y \implies \pi(x) \neq \pi(y)$.

□

Example 5.2.5 で扱った $\mathbb{Z}$ の類別について考える.

Example 5.2.11. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ に対し,

$$C_r^{(n)} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid m \text{ を } n \text{ で割ると余りが } r \},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \dots, C_{n-1}^{(n)} \right\}$$

とおく. このとき, $r \in \mathbb{Z}$ を含む $C \in \mathcal{C}$ は

$$\{ \dots, r-2n, r-n, r, r+n, r+2n, \dots \}.$$

である. 例えば, $\{0, 1, \dots, n-1\}$ は $\mathcal{C}$ の完全代表系である. また, $\{1, 2, \dots, n\}$ も $\mathcal{C}$ の完全代表系である. $\{-1, 0, \dots, n-2\}$ も $\mathcal{C}$ の完全代表系である. この様に, 完全代表系のとり方は複数ある. □

Example 5.2.6 で扱った同値関係についてみる.

Example 5.2.12. 二次元空間 $\mathbb{R}^2$ について考え, 原点を中心とする半径 r の円を C_r とおき, $\mathcal{C} = \{ C_r \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$ とおく. 例えば, $\{ (r, 0) \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$ は $\mathcal{C}$ の完全代表系である. また, $\{ (0, r) \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$ や $\left\{ \left(\frac{-r}{\sqrt{2}}, \frac{-r}{\sqrt{2}} \right) \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$ も完全代表系である. □

第 6 章

添字付けられた集合族と写像の族

6.1 添字付けられた集合族

数列 $\{a_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ は, 各自然数 i に数 a_i を対応させる写像だと思える. 同様に, 各自然数 i に集合 A_i を対応させることや, 自然数に限らずある集合 Λ の元 λ に集合 A_λ を対応させることがある. 例えば, 集合 Λ の元 λ に対して, 集合 $A_\lambda \subset \Omega$ を対応させる写像

$$\begin{array}{ccc} A & : & \Lambda \longrightarrow 2^\Omega \\ & & \Downarrow \\ & & \lambda \longmapsto A_\lambda \end{array}$$

を考えることがあるが, これを $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書き, Λ を添字集合とする (添字付けられた) 集合族と呼ぶことがある.

Definition 6.1.1. Λ を集合とする. Λ の各元 λ に対して, 集合 A_λ を対応させる対応を, Λ を添字集合 (*index set*) とする集合族 (*family of sets*) といい $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書く. Λ の元を *index(index)* という. $\square$

Notation 6.1.2. 添字集合が $\{1, 2, \dots, n\}$ であるとき, 集合族 $\{A_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ というかわりに $\{A_i\}_{i=1}^n$ とか $\{A_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ とも書く. 添字集合が $\mathbb{N}$ であるときには, 集合族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と書くかわりに $\{A_i\}_{i=0, 1, \dots}$ とか $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ と書くことがある. $\square$

Definition 6.1.3. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする. このとき,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{a \mid \exists \lambda \in \Lambda \text{ such that } a \in A_\lambda\}$$

と定義し, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合 (*union*) と呼ぶ. また,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{a \mid \forall \lambda \in \Lambda, a \in A_\lambda\}$$

と定義し, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の共通部分 (*intersection*) と呼ぶ. $\square$

Notation 6.1.4. 和集合 $\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$ は, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ や $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ などと書くこともある. $n = 2$ のときには, 後者の表記は, Definition 3.1.1 で定義したものに一致する. 和集合 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ は, $\bigcup_{i=0}^\infty A_i$ や $A_0 \cup A_1 \cup \dots$ などと書くこともある. 同様に, 共通部分 $\bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$ は $\bigcap_{i=1}^n A_i$ や $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ などと書くこともある. $n = 2$ のときには, 後者の表記は, Definition 3.1.2 で定義したものに一致する. また共通部分 $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ は $\bigcap_{i=0}^\infty A_i$ や $A_0 \cap A_1 \cap \dots$ などと書くこともある. $\square$

Remark 6.1.5. Notation 6.1.4 にあるように, 添字集合が $\mathbb{N}$ である集合族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, 共通部分を $\bigcap_{i=0}^\infty A_i$ と書くことがある. ∞ という記号を用いているが, この集合は, 数列や関数の極限のような ‘極限’ として定義されているものではない. 単なる $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ の別の表記法である. $\bigcap_{i=0}^\infty A_i$ は, $\{x \mid \forall i \in \mathbb{N}, x \in A_i\}$ という集合として定義されている. 和集合 $\bigcup_{i=0}^\infty A_i$ も同様である. $\square$

Propositions 3.1.5, 3.1.7 と同様の定理が集合族の和集合や共通部分にも成り立つ.

Theorem 6.1.6 (分配則). $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ を集合族とする. このとき,

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

$\square$

Proof. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ を集合族とする.

まず

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) \subset \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

を示す. $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right)$ とする. このとき, $x \in \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$ を示す. つまり, $x \in A_\lambda \cap B_\mu$ を満たす $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ が存在することを示す. $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right)$ であるので, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ かつ $x \in \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ であるので, $x \in A_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する. $i \in \Lambda$ が $x \in A_i$ を満たすとする. また $x \in \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$ であるので, $x \in B_\mu$ となる $\mu \in M$ が存在する. $j \in M$ が $x \in B_j$ を満たすとする. $i \in \Lambda$ かつ $j \in M$ であるので, $(i, j) \in \Lambda \times M$. つまり, この (i, j) は $(i, j) \in \Lambda \times M$ かつ $x \in A_i \cap B_j$ を満たす.

次に

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) \supset \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

を示す. $x \in \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$ とする. このとき, $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right)$ を示す. $x \in \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$ であるので, $x \in A_\lambda \cap B_\mu$ となる $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ が存在する. $(i, j) \in \Lambda \times M$ が $x \in A_i \cap B_j$ を満たすとする. $(i, j) \in \Lambda \times M$ であるので, $i \in \Lambda$ かつ $j \in M$ である. また $x \in A_i \cap B_j$ であるので, $x \in A_i$ かつ $x \in B_j$ である. したがって, $i \in \Lambda$ かつ $x \in A_i$ であるので, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. また $j \in M$ かつ $x \in B_j$ であるので, $x \in \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$. したがって, $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right)$. $\square$

Theorem 6.1.7 (分配則). $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ を集合族とする. このとき,

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$$

□

Proof. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ を集合族とする.

まず

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right) \subset \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$$

を示す. $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right)$ とする. このとき $x \in \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$ を示す. つまり,

$$(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M \implies x \in A_\lambda \cup B_\mu$$

を示す. $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ とする. このとき, $x \in A_\lambda \cup B_\mu$ を示す. $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right)$ であるので, $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ または $x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu$ である. 場合分けをして考える. まず $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の場合について考える. いま, $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ であるので, $\lambda \in \Lambda$. 一方, $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ であるので,

$$\forall i \in \Lambda, x \in A_i$$

である. したがって, $x \in A_\lambda$ である. よって, $x \in A_\lambda \cup B_\mu$ である. まず $x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu$ の場合について考える. いま, $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ であるので, $\mu \in M$. 一方, $x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu$ であるので,

$$\forall i \in M, x \in B_i$$

である. したがって, $x \in B_\mu$ である. よって, $x \in A_\lambda \cup B_\mu$ である. したがって, いずれの場合も, $x \in A_\lambda \cup B_\mu$ である.

次に,

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right) \supset \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$$

を示す. $x \in \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$ とする. このとき $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right)$ を示す. つまり $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ または $x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu$ であることを示す. $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の場合は, $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right)$ である. $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の場合について考える. このとき, $x \in \bigcap_{\mu \in M} B_\mu$ を示す. つまり,

$$\mu \in M \implies x \in B_\mu$$

となることを示す. $\mu \in M$ とする. このとき, $x \in B_\mu$ となることを示す. $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ であるので,

$$\forall \lambda \in \Lambda, x \notin A_\lambda$$

が成り立たない. つまり, $x \notin A_\lambda$ をみたす $\lambda \in \Lambda$ が存在する. $i \in \Lambda$ が $x \notin A_i$ をみたすとする. 一方で, $x \in \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$ であるので,

$$\forall (\lambda, \mu) \in \Lambda \times M, x \in A_\lambda \cup B_\mu$$

である. $(i, \mu) \in \Lambda \times M$ であるので, $x \in A_i \cup B_\mu$ である. つまり, $x \in A_i$ または $x \in B_\mu$ であるが, 今は $x \notin A_i$ であるので, B_μ . $\square$

また, 結合則と呼ばれる次の命題も成り立つ.

Theorem 6.1.8 (結合則). $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする. $\{I_j\}_{j \in J}$ を Λ の部分集合からなる集合族とする. $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ とすると,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} A_i \right).$$

$\square$

Proof. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{I_j\}_{j \in J}$ を集合族とし, $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j \subset \Lambda$ とする. また $j \in J$ に対し, $B_j = \bigcup_{i \in I_j} A_i$ とおく. このとき $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda = \bigcup_{j \in J} B_j$ を示す.

まず $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \subset \bigcup_{j \in J} B_j$ を示す. $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ とする. このとき, $a \in \bigcup_{j \in J} B_j$ を示す. つまり, $a \in B_j$ なる $j \in J$ が存在することを示す. $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ であるので, 和集合の定義から, $a \in A_\lambda$ を満たす $\lambda \in \Lambda'$ が存在する. $t \in \Lambda'$ が $a \in A_t$ を満たすとする. $t \in \Lambda'$ であり, $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ であるので, $t \in I_j$ を満たす $j \in J$ が存在する. $s \in J$ が $t \in I_s$ を満たすとする.

る. $t \in I_s$ かつ $a \in A_t$ であるので, $a \in \bigcup_{i \in I_s} A_i$ である. $\bigcup_{i \in I_s} A_i = B_s$ であるので, $a \in B_s$. $s \in J$ かつ $a \in B_s$ であるので, $a \in \bigcup_{j \in J} B_j$.

次に, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \supset \bigcup_{j \in J} B_j$ を示す. $a \in \bigcup_{j \in J} B_j$ とする. このとき, $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ を示す. つまり, $a \in A_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda'$ が存在することを示す. $a \in \bigcup_{j \in J} B_j$ であるので, $a \in B_j$ を満たす $j \in J$ が存在する. $s \in J$ が $a \in B_s$ を満たすとする. また $B_s = \bigcup_{i \in I_s} A_i$ であるので, $a \in B_s$ から, $s \in A_i$ となる $i \in I_s$ が存在することがわかる. $t \in I_s$ が $a \in A_t$ を満たすとする. さらに, $s \in J$ かつ $t \in I_s$ であるので, $t \in \bigcup_{j \in J} I_j$. いま $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ であるので, $t \in \Lambda'$. $t \in \Lambda'$ かつ $a \in A_t$ であるので, $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$. $\square$

Theorem 6.1.9 (結合則). $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする. $\{I_j\}_{j \in J}$ を Λ の部分集合からなる集合族とする. $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ とすると,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} A_i \right).$$

$\square$

Proof. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{I_j\}_{j \in J}$ を集合族とし, $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ とする. $j \in J$ に対し, $B_j = \bigcap_{i \in I_j} A_i$ とする.

まず $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \subset \bigcap_{j \in J} B_j$ を示す. $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ とする. このとき $x \in \bigcap_{j \in J} B_j$ を示す. つまり,

$$j \in J \implies x \in B_j$$

を示す. $j \in J$ とする. このとき, $x \in B_j$ を示す. $B_j = \bigcap_{i \in I_j} A_i$ であるので,

$$i \in I_j \implies x \in A_i$$

を示す. $i \in I_j$ とする. このとき, $x \in A_i$ となることを示す. $i \in I_j$ かつ $j \in J$ であるので, $i \in \bigcup_{j \in J} I_j$. $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ であるので, $i \in \Lambda'$. いま $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ であるので,

$$\forall \lambda \in \Lambda', x \in A_\lambda$$

である. $i \in \Lambda'$ であるので, $x \in A_i$.

次に $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \supset \bigcap_{j \in J} B_j$ を示す. $x \in \bigcap_{j \in J} B_j$ とする. このとき $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ を示す. つまり

$$\lambda \in \Lambda' \implies x \in A_\lambda$$

を示す. $\lambda \in \Lambda'$ とする. このとき $x \in A_\lambda$ となることを示す. $\lambda \in \Lambda'$ であり, $\Lambda' = \bigcup_{j \in J} I_j$ であるので, $\lambda \in I_j$ となる $j \in J$ が存在する. $s \in J$ が $\lambda \in I_s$ を満たすとする. いま

$x \in \bigcap_{j \in J} B_j$ であるので,

$$\forall j \in J, x \in B_j$$

である. $s \in J$ であるので, $x \in B_s$ である. $x \in B_s$ であり, $B_s = \bigcap_{i \in I_s} A_i$ であるので,

$$\forall i \in I_s, x \in A_i$$

である. $\lambda \in I_s$ であるので, $x \in A_\lambda$. □

6.2 直積写像

Section 3.3 では, 順序対というものを定義し, 2 つの集合の直積というものを定義した. ここでは, 順序対を一般化し, 添字付けられた集合族の直積を定義する. 添字集合 Λ から普遍集合 Ω への写像

$$\begin{array}{ccc} a & : & \Lambda \longrightarrow \Omega \\ & & \Downarrow \\ & & \lambda \longmapsto a_\lambda \end{array}$$

を $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ のように書くことにする. $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が等しいということは, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し, $a_\lambda = b_\lambda$ となるということである.

Definition 6.2.1. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を, Λ を添え字集合とする集合族とする.

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{ (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid \forall \lambda \in \Lambda, a_\lambda \in A_\lambda \}$$

と定義し, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積と呼ぶ. ただし, $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ に対し,

$$(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \iff \forall \lambda \in \Lambda, a_\lambda = b_\lambda$$

とする. 部分集合 $M \subset \Lambda$ に対して, 写像

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_M & : & \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in M} A_\lambda \\ & & \Downarrow \\ & & (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \longmapsto (a_\lambda)_{\lambda \in M} \end{array}$$

を M に関する射影 (*projection*) という. とくに $M = \{\mu\}$ のとき, $\text{pr}_{\{\mu\}}$ を pr_μ と書き, 第 μ 成分への射影 (*projection*) という. □

集合の族のように, 添字を持った写像の族というものを考えることもある.

Definition 6.2.2. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を2つの集合族とする. 集合 Λ の各元 λ に対して, 写像 $f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda$ を対応させる対応を写像の族と呼び $\{f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とか $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書く. 写像の族 $\{f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ から $\prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ への写像 $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ を

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda &: \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \\ (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\longmapsto (f_\lambda(a_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

で定義する. これを $\{f_\lambda\}$ の直積写像 (*Cartesian product of maps*) という. $\square$

Proposition 6.2.3. $\{f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{g_\lambda: B_\lambda \rightarrow C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を写像の族とするとき, $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda\right) \circ \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda\right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (g_\lambda \circ f_\lambda)$. $\square$

Proof. $\{f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{g_\lambda: B_\lambda \rightarrow C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を写像の族とし,

$$\begin{aligned} \varphi &= \prod_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda, \\ \psi &= \prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda, \\ \Phi &= \prod_{\lambda \in \Lambda} (g_\lambda \circ f_\lambda) \end{aligned}$$

とおく. このとき, $\varphi \circ \psi = \Phi$ を示す. φ は $\prod_{\lambda} B_\lambda$ から $\prod_{\lambda} C_\lambda$ への写像であり, ψ は $\prod_{\lambda} A_\lambda$ から $\prod_{\lambda} B_\lambda$ への写像である. したがって, $\varphi \circ \psi$ も Φ も $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ から $\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ への写像である. $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とする. このとき, $(\varphi \circ \psi)((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \Phi((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を示す. それぞれ定義にしたがって計算をすると次を得る:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) &= \varphi(\psi((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})) \\ &= \varphi\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda\right)((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \\ &= \varphi((f_\lambda(a_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}) \\ &= \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda\right)((f_\lambda(a_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}) \\ &= (g_\lambda(f_\lambda(a_\lambda)))_{\lambda \in \Lambda}, \\ \Phi((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) &= \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} (g_\lambda \circ f_\lambda)\right)((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \\ &= (g_\lambda \circ f_\lambda)(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \\ &= (g_\lambda(f_\lambda(a_\lambda)))_{\lambda \in \Lambda}. \end{aligned}$$

$\square$

Notation 6.2.4. 直積集合 $\prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$ は $\prod_{i=1}^n A_i$ や $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ などと書くこともある. $n = 2$ のときには, 後者の表記は, Definition 3.3.1 で定義したものに一致する. 添字集合が $\mathbb{N}$ であるときには, 直積集合 $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ は $\prod_{i=0}^{\infty} A_i$ や $A_1 \times A_2 \times \cdots$ などと書くことがある. $\square$

Remark 6.2.5. Notation 6.2.4 にあるように, 添字集合が $\mathbb{N}$ である集合族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, 共通部分を $\prod_{i=0}^{\infty} A_i$ と書くことがある. ∞ という記号を用いているが, この集合は, 数列や関数の極限のような‘極限’として定義されているものではない. 単なる $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ の別の表記法である. $\square$

第 7 章

二項関係

7.1 二項関係の定義

‘ x と y は等しい’, ‘ x より y は大きい’, ‘ x と y は合同である’ などのように, 2 つの対象を比較し, その 2 つの間に特定の関係があるか否かを議論することがある. ‘等しい’, ‘大きい’, ‘合同である’ などのような, 2 つの対象の間の関係を二項関係と呼ぶ. 二項関係は, ‘ $x = y$ ’, ‘ $x < y$ ’, ‘ $x \equiv y$ ’ などのように, 2 つの対象 x, y に関係があるということを, x と y の間に記号を書くことで表すことが多い. 新しい二項関係 $\leftarrow$ を定義するためには, $x \leftarrow y$ が成り立つ組 (x, y) を指定すれば良い. つまり $x \leftarrow y$ が成り立つ組 (x, y) 全体の集合を与えれば, $\leftarrow$ を定義したことになる. そこで, $x \leftarrow y$ が成り立つ組 (x, y) 全体の集合と, 二項関係 $\leftarrow$ を同一視する.

Definition 7.1.1. A を集合とする. $A \times A$ の部分集合を A 上の二項関係 (binary relation) と呼ぶ. ^{*1} □

Notation 7.1.2. R が A 上の二項関係とする. つまり, $R \subset A \times A$ とする. このとき, $(a_1, a_2) \in R$ となることを, $a_1 R a_2$ と書く. また, $a_1 R a_2$ が成り立たないことを, $a_1 \not R a_2$ と書くことが多い. □

Example 7.1.3. 集合 A に対し, $\Delta = \{ (a, a) \in A \times A \mid a \in A \}$ を対角集合 (diagonal set) とよぶ. このとき,

$$\begin{aligned} a_1 \Delta a_2 &\iff (a_1, a_2) \in \Delta \\ &\iff a_1 = a_2. \end{aligned}$$

従って, A 上の二項関係 Δ は $=$ を $A \times A$ の部分集合として捉えたものである. □

^{*1} 二項関係のことを単に関係という事もある. もっと一般に $A_1 \times \cdots \times A_n$ の部分集合のことを関係と呼ぶこともある. 計算機に関連する用語で relational database というのがあるが, その relational は多分この意味での関係だと思う.

7.2 半順序

7.2.1 半順序集合と全順序集合

x が y 以下であるという二項関係 $\leq$ を一般化した二項関係を定義する.

Definition 7.2.1. 集合 A 上の二項関係 $\triangleleft$ が次の3つの条件を満たす時, $\triangleleft$ を A 上の半順序 (*partial order*) と呼ぶ:

1. (反射律) $\forall a \in A, a \triangleleft a$.
2. (反対称律) $a_1 \triangleleft a_2$ かつ $a_2 \triangleleft a_1 \implies a_1 = a_2$.
3. (推移律) $a_1 \triangleleft a_2$ かつ $a_2 \triangleleft a_3 \implies a_1 \triangleleft a_3$.

組 $(A, \triangleleft)$ を半順序集合 (*poset, partially ordered set*) と呼ぶ. □

Definition 7.2.2. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, $x, y \in A$ とする. $x \triangleleft y$ または $y \triangleleft x$ であるとき, x と y は比較可能であるという. $x \not\triangleleft y$ かつ $y \not\triangleleft x$ であるとき, x と y は比較不可能であるという. □

Definition 7.2.3. 任意の2元が比較可能である半順序 $\triangleleft$ を全順序 (*total order*) と呼ぶ.*2
このとき $(A, \triangleleft)$ を全順序集合 (*totally ordered set*) という. □

半順序や全順序の例を挙げる.

Example 7.2.4 ($\mathbb{R}$ 上の大小). $(\mathbb{R}, \leq)$ は半順序集合であり, さらに全順序集合でもある. また $(\mathbb{R}, \geq)$ も全順序集合でもある. しかし, $\mathbb{R}$ 上の二項関係 $<$ は半順序ではない. □

Example 7.2.5 (集合の包含). 冪集合 2^A 上の二項関係 $\subset$ は半順序である. しかし, A に2つ以上の元があれば, $(2^A, \subset)$ は全順序集合ではない. 例えば, $A = \{1, 2\}$ とすると, $\{1\}, \{2\} \in 2^A$ だが $\{1\} \subset \{2\}$ でもないし, $\{2\} \subset \{1\}$ でもない. つまり, $\{1\}$ と $\{2\}$ は比較不可能である. □

Example 7.2.6 (整除関係). $\mathbb{Z}_{>0}$ 上の二項関係 $|$ を

$$m \mid n \iff m \text{ が } n \text{ を割り切る.}$$

で定義する. $m \mid n$ であることと, m が n の約数であることは同値である. このとき $(\mathbb{Z}_{>0}, |)$ は半順序集合である. しかし $(\mathbb{Z}_{>0}, |)$ は全順序集合ではない. 例えば, $2 \nmid 3, 3 \nmid 2$. □

*2 線形順序 (*linear order*) と呼ぶこともある.

半順序集合 $(X, \triangleleft)$ と X の部分集合 A が与えられたとき, $\triangleleft$ を A 上の半順序とすることが出来る.

Lemma 7.2.7. $(X, \triangleleft)$ を半順序集合とし, $A \subset X$ とする. このとき, A 上の二項関係 $\triangleleft'$ を a_1, a_2 に対して, $a_1 \triangleleft' a_2 \iff a_1 \triangleleft a_2$ で定義すると, $\triangleleft'$ は A 上の半順序となる. $\square$

Proof. まず反射律を示す. $a \in A$ とする. このとき, $a \triangleleft' a$ を示す. $A \subset X$ であるので $a \in X$ である. よって $\triangleleft$ の反射律より, $a \triangleleft a$ である. したがって, $a \triangleleft' a$.

次に反対称律を示す. $a_1, a_2 \in A$ とし $a_1 \triangleleft' a_2$ かつ $a_2 \triangleleft' a_1$ とする. このとき $a_1 = a_2$ なることを示す. $a_1 \triangleleft' a_2$ であるので $a_1 \triangleleft a_2$. $a_2 \triangleleft' a_1$ であるので $a_2 \triangleleft a_1$. よって $a_1 \triangleleft a_2$ かつ $a_2 \triangleleft a_1$ であるので, $\triangleleft$ の反対称律より, $a_1 = a_2$.

最後に推移律を示す. $a_1, a_2, a_3 \in A$ とし $a_1 \triangleleft' a_2$ かつ $a_2 \triangleleft' a_3$ とする. このとき $a_1 \triangleleft a_3$ なることを示す. $a_1 \triangleleft' a_2$ であるので $a_1 \triangleleft a_2$. $a_2 \triangleleft' a_3$ であるので $a_2 \triangleleft a_3$. よって $a_1 \triangleleft a_2$ かつ $a_2 \triangleleft a_3$ であるので, $\triangleleft$ の推移律より, $a_1 \triangleleft a_3$. したがって, $a_1 \triangleleft' a_3$. $\square$

Remark 7.2.8. 通常は, Lemma 7.2.7 における A 上の二項関係 $\triangleleft'$ も, X 上の二項関係 $\triangleleft$ と区別せず, 単に $\triangleleft$ と書く. $\square$

Definition 7.2.9. $(X, \triangleleft)$ を半順序集合とし, $A \subset X$ とする. $(A, \triangleleft)$ を $(X, \triangleleft)$ の部分半順序集合 (*subposet*) という. $\square$

Example 7.2.10. $(\mathbb{R}, \leq)$ は全順序集合である. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ であるので, $(\mathbb{Z}, \leq)$ も全順序集合である. $(\mathbb{Z}, \leq)$ は $(\mathbb{R}, \leq)$ の subposet である. $\square$

7.2.2 半順序を保存する写像

二つの半順序集合 $(A, \triangleleft_A)$, $(B, \triangleleft_B)$ が与えられたとき, この二つの半順序集合としての構造を比較するには, 半順序の構造とコンパチブルな写像を使う.

Definition 7.2.11. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ を半順序集合とし, f を A から B への写像とする. 任意の $a_1, a_2 \in A$ に対し,

$$a_1 \triangleleft_A a_2 \implies f(a_1) \triangleleft_B f(a_2)$$

を満たすとき, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序を保存する (*order-preserving*) 写像であるという. $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ が順序を保存する写像であるとき, f を半順序集合 $(A, \triangleleft_A)$ から $(B, \triangleleft_B)$ への順序準同型写像と呼ぶ. 順序準同型写像 f が全単射で逆写像 f^{-1} も順序準同型写像であるとき, f を順序同型写像と呼ぶ. 半順序集合 $(A, \triangleleft_A)$ から半順序集合 $(B, \triangleleft_B)$ への順序同型写像が存在するとき, $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ は半順序集合として同型であるという. $\square$

Remark 7.2.12. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ は半順序集合として同型であるとき, $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ は半順序集合として同じものだと思って良い. $\square$

Example 7.2.13. 半順序集合 $(\mathbb{Z}_{>0}, |)$, $(\mathbb{Z}_{>0}, \leq)$ について考える.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{>0} \\ \cup & & \cup \\ i & \longmapsto & i \end{array}$$

という写像について考える. $f: (\mathbb{Z}_{>0}, |) \rightarrow (\mathbb{Z}_{>0}, \leq)$ は順序準同型であり全単射である. しかし, 順序同型写像ではない. 例えば, $2 \leq 3$ であるが $2 \nmid 3$ であるので, f^{-1} が順序を保存しない. $\square$

Definition 7.2.14. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ を半順序集合とし, f を A から B への写像とする. 任意の $a_1, a_2 \in A$ に対し,

$$f(a_1) \triangleleft_B f(a_2) \implies a_1 \triangleleft_A a_2$$

を満たすとき, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は order-refrecting な (order-refrecting) 写像であるという. ^{*3}また, 任意の $a_1, a_2 \in A$ に対し,

$$a_1 \triangleleft_A a_2 \implies f(a_2) \triangleleft_B f(a_1)$$

を満たすとき, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序を反転する (order-reversing) 写像であるという. $\square$

Proposition 7.2.15. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ を半順序集合とし, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は order-refrecting であるとする. このとき, 写像 $f: A \rightarrow B$ は単射である. $\square$

Proof. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ を半順序集合とし, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は order-refrecting であるとする. $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ とする. このとき, $a_1 = a_2$ を示す. $f(a_1) = f(a_2)$ であり, $\triangleleft_B$ は反射律をみたすので, $f(a_1) \triangleleft_B f(a_2)$. $f(a_1) \triangleleft_B f(a_2)$ であり, f は order-refrecting であるので, $a_1 \triangleleft_A a_2$. また, 同様に, $f(a_2) = f(a_1)$ であり, $\triangleleft_B$ は反射律をみたすので, $f(a_2) \triangleleft_B f(a_1)$. $f(a_2) \triangleleft_B f(a_1)$ であり, f は order-refrecting であるので, $a_2 \triangleleft_A a_1$. よって, $a_1 \triangleleft_A a_2$ かつ $f(a_2) \triangleleft_B f(a_1)$. $a_1 \triangleleft_A a_2$ かつ $f(a_2) \triangleleft_B f(a_1)$ であり, $\triangleleft_A$ は反対称律を満たすので, $a_1 = a_2$. $\square$

Corollary 7.2.16. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ を半順序集合とする. このとき次は同値:

1. f は A から B への全射であり, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ が order-preserving かつ order-refrecting^{*4}.

^{*3} よい訳語はないものか

^{*4} Order-preserving かつ order-refrecting な写像を順序単射と呼ぶこともある

2. $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序同型写像である.

□

Proof. $(A, \triangleleft_A)$ と $(B, \triangleleft_B)$ を半順序集合とする.

まず ‘1 $\implies$ 2’ を示す. $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ を order-refrecting な順序準同型写像とし, さらに f は A から B への全射であることも仮定する. このとき, f は全単射であり, f^{-1} も順序準同型写像であることを示す. $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ が order-refrecting であるので, Proposition 7.2.15 より, f は単射である. f が全射かつ単射であるので, Corollary 4.1.12 より, f は全単射である. よって逆写像 f^{-1} が存在する. f^{-1} が順序準同型写像であることを示す. $b, b' \in B$ とし, $b \triangleleft_B b'$ とする. このとき, $f^{-1}(b) \triangleleft_A f^{-1}(b')$ となることを示す. $x = f^{-1}(b)$, $x' = f^{-1}(b')$ とおく. $f(x) = f(f^{-1}(b)) = b$, $f(x') = f(f^{-1}(b')) = b'$ であるので, $f(x) \triangleleft_B f(x')$ である. $f(x) \triangleleft_B f(x')$ であり, f が order-refrecting であるので, $x \triangleleft_A x'$. $x = f^{-1}(b)$, $x' = f^{-1}(b')$ であつたので, $f^{-1}(b) \triangleleft_A f^{-1}(b')$.

次に ‘2 $\implies$ 1’ を示す. $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序同型写像とする. $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序同型写像であるので, f は全単射である. Corollary 4.1.12 より, f は全射である. また $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序同型写像であるので, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ は順序準同型写像である. 最後に, $f: (A, \triangleleft_A) \rightarrow (B, \triangleleft_B)$ が order-refrecting であることを示す. $a, a' \in A$ が $f(a) \triangleleft_B f(a')$ を満たすとする. 逆写像 f^{-1} は順序準同型写像であるので, $f^{-1}(f(a)) \triangleleft_A f^{-1}(f(a'))$ である. $f^{-1}(f(a)) = a$, $a' = f^{-1}(f(a'))$ であるので, $a \triangleleft_A a'$. □

Theorem 7.2.17. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とする. このとき $(A, \triangleleft)$ は $(2^A, \subset)$ のある部分半順序集合と順序同型である. □

Proof. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とする.

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & A \longrightarrow 2^A \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & a & \longmapsto \{x \in A \mid x \triangleleft a\} \end{array}$$

と定義する. $\mathcal{A} = \Phi(A) = \{\Phi(a) \mid a \in A\} \subset 2^A$ とおく. このとき, A と $\mathcal{A}$ が半順序集合として同型であることを示す. Ψ を

$$\begin{array}{ccc} \Psi & : & A \longrightarrow \mathcal{A} \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & a & \longmapsto \Phi(a) \end{array}$$

で定義する. このとき, $\Psi: (A, \triangleleft) \rightarrow (\mathcal{A}, \subset)$ が順序同型写像であることを示す. Ψ が全射であることは, Ψ の定義から明らかである. Ψ が order-preserving かつ order-refrecting であることを示す.

まず, Ψ が順序を保存することを示す. $a_1 \triangleleft a_2$ とする. このとき, $\Psi(a_1) \subset \Psi(a_2)$ となることを示す. $x \in \Psi(a_1)$ とする. このとき, $x \in \Psi(a_2)$ を示す. $x \in \Psi(a_1)$ であるので, $x \triangleleft a_1$ である. $x \triangleleft a_1$ かつ $a_1 \triangleleft a_2$ であるので, $x \triangleleft a_2$. よって, $x \in \Phi(a_2)$.

まず, Ψ が order-refrecting であることを示す. $a_1, a_2 \in A$ とし, $\Phi(a_1) \subset \Phi(a_2)$ とする. このとき, $a_1 \triangleleft a_2$ を示す. $a_1 \triangleleft a_1$ であるので, $a_1 \in \Phi(a_1)$ である. $a_1 \in \Phi(a_1)$ であり, $\Phi(a_1) \subset \Phi(a_2)$ であるので, $a_1 \in \Phi(a_2)$. $a_1 \in \Phi(a_2)$ であるので, $a_1 \triangleleft a_2$. $\square$

7.2.3 最小, 極小

半順序は, x が y 以下であるという二項関係 $\leq$ を一般化したものである. $\leq$ に倣い, 一般の半順序集合 $(A, \triangleleft)$ においても, 異なる $x, y \in A$ が $x \triangleleft y$ となっているとき, x は y よりも小さい (か等しい) とか, y は x よりも大きい (か等しい) などということがある. ここではこの言い方を踏襲し, いくつか用語を定義する.

Definition 7.2.18. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする. $x \in S$ とする. 任意の $a \in S$ に対し $x \triangleleft a$ が成り立つとき, x は S で最小 (*minimum*) であるという. $\square$

Remark 7.2.19. “任意の $a \in S$ に対し $x \triangleleft a$ が成り立つ” という条件は, “ $a \in S \implies x \triangleleft a$ ” という条件と同値である. $\square$

Definition 7.2.20. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする. $x \in S$ とする. $a \triangleleft x$ を満たす $a \in S \setminus \{x\}$ が存在しないとき, x は S で極小 (*minimal*) であるという. $\square$

Remark 7.2.21. “ $a \triangleleft x$ を満たす $a \in S$ が存在しない” という条件は, “ $a \in S \setminus \{x\} \implies a \not\triangleleft x$ ” という条件と同値である. また, これは “ $a \in S$ かつ $a \triangleleft x \implies x = a$ ” という条件と同値である. $\square$

Example 7.2.22. $(2^{\{1,2\}}, \subset)$ について考える.

S を $\{\{1\}, 2, 1, 2\} \subset 2^{\{1,2\}}$ とする.

$X = \{1\}$ とする. X の部分集合は, X と $\emptyset$ のみである. したがって, $A \subset X$ を満たす $A \in S$ は X のみであるので, X は S で極小である. しかし $\{2\} \in S$ であるが, $X \subset \{2\}$ ではないので, X は S で最小ではない.

$Y = \{2\}$ とする. Y の部分集合は, Y と $\emptyset$ のみである. したがって, $A \subset Y$ を満たす $A \in S$ は Y のみであるので, Y は S で極小である. しかし $\{1\} \in S$ であるが, $Y \subset \{1\}$ ではないので, Y は S で最小ではない.

$Z = \{1, 2\}$ とする. $\{1\} \in S$ かつ $\{1\} \subset Z$ であるので, Z は S で極小ではない. また, $\{1\} \in S$ かつ $Z \subset \{1\}$ ではないので, Z は S で最小でもない.

次に T を $\{\{1\}, 1, 2\} \subset 2^{\{1,2\}}$ とする.

$X = \{1\}$ とする. $A \subset X$ を満たす $A \in T$ は X のみであるので, X は T で極小である. また $\{1, 2\} \in T$ は, $X \subset \{1, 2\}$ を満たすので X は T で最小でもある. $\square$

Example 7.2.23. $(\mathbb{R}, \leq)$ について考える.

S を閉区間 $[0, 1]$ とする. $0 \in S$ である. $a \in S$ とすると, $0 \leq a$ である. よって, 0 は S で最小である. また, $a \in S$ かつ $0 \not\leq a$ とする. $0 \not\leq a$ ならば, $a \leq 0$ である. $0 \leq a$ かつ $a \leq 0$ であるので, $0 = a$ である. よって, 0 は S で極小である.

T を开区間 $(0, 1)$ とする. $x \in T$ とすると, $\frac{x}{2} \in T$ かつ $\frac{x}{2} < x$ となるので, x は T では極小ではない. したがって, T には極小な元は存在しない.

U を $\mathbb{Z}$ とする. このとき, $x \in U$ とすると, $x - 1 \in U$ かつ $x - 1 < x$ となるので, x は U では極小ではない. したがって, U には極小な元は存在しない. $\square$

Proposition 7.2.24. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする. $x \in S$ が S で最小ならば, x は S で極小である. $\square$

Proof. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする.

$x \in S$ が S で最小とする. このとき, x は S で極小であることを示す. つまり “ $a \in S$ かつ $a \triangleleft x \implies x = a$ ” を示す. $a \in S$ かつ $a \triangleleft x$ とする. x は S で最小であり, $a \in S$ であるので, $x \triangleleft a$ である. したがって, $a \triangleleft x$ かつ $x \triangleleft a$ であるので, $a = x$. $\square$

Remark 7.2.25. $x \in S$ が S で最小ならば, x は S で極小であるが, しかし, Example 7.2.22 にもあるように, 一般には逆は成り立たない. $\square$

Proposition 7.2.26. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする. $x \in S$ とする. x は S で極小とし, 任意の S の元は x と比較可能とする. このとき, x は S で最小である. $\square$

Proof. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする. $x \in S$ とする. x は S で極小とし, 任意の S の元は x と比較可能とする. このとき, x は S で最小であることを示す. つまり $a \in S \implies x \triangleleft a$ を示す. $a \in S$ とする. x と a は比較可能であるので, $a \triangleleft x$ または $x \triangleleft a$ である. x は S で極小であるので, $a \triangleleft x$ となるのは, $a = x$ のときのみであるが, この場合は $x \triangleleft a$ でもある. よっていずれの場合も $x \triangleleft a$ となる. $\square$

Proposition 7.2.27. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とする. $x, y \in S$ とする. x も y も S で最小ならば, $x = y$. $\square$

Proof. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, S を A の部分集合とし, $x \in S, y \in S$ とする. x も y も S で最小とする. このとき, $x = y$ となることを示す. x が S で最小なので, “ $a \in S \implies x \triangleleft a$ ” を満たす. $y \in S$ であるので, $x \triangleleft y$ である. また, 同様に y が S で最小なので, “ $a \in S \implies y \triangleleft a$ ”

を満たす. $x \in S$ であるので, $y \triangleleft x$ である. $x \triangleleft y$ かつ $y \triangleleft x$ であるので, $x = y$ である. $\square$

Remark 7.2.28. $(A, \triangleleft)$ を半順序集合とし, $S \subset A$ とする. 任意の a に対し $a \triangleleft x$ が成り立つとき, x は S の最大 (*maximum*) であるという. また, $x \triangleleft a$ を満たす $a \in X \setminus \{x\}$ が存在しないとき, x は X の極大 (*maximal*) であるという. 最大と極大に対し, 最小と極小と同様の命題が成り立つ. $\square$

7.3 同値関係

7.3.1 同値関係と同値類

ここでは, “等号” を一般化した二項関係を取り扱う.

Definition 7.3.1. 次の 3 条件を満たす集合 X 上の二項関係 $\sim$ を同値関係 (*equivalence relation*) と呼ぶ:

1. (反射律) $\forall x \in X, x \sim x$.
2. (対称律) $x_1 \sim x_2 \implies x_2 \sim x_1$.
3. (推移律) $x_1 \sim x_2$ かつ $x_2 \sim x_3 \implies x_1 \sim x_3$.

$\square$

同値関係の簡単な例を挙げる.

Example 7.3.2. 集合 X において $=$ は同値関係である. $\square$

Example 7.3.3. X を全ての三角形を集めた集合とする. 合同 “ $\equiv$ ” は X 上の同値関係である. 相似 “ $\sim$ ” は X 上の同値関係である. $\square$

Example 7.3.4. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とする. X 上の二項関係 $\sim$ を,

$$(x_1, x_2) \sim (x'_1, x'_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ such that } (x_1, x_2) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2)$$

で定義すると, $\sim$ は X 上の同値関係になる. 同様に, $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ とする. X 上の二項関係 $\sim$ を,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\sim (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}) \\ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ such that } (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= (\lambda x'_1, \lambda x'_2, \dots, \lambda x'_{n+1}) \end{aligned}$$

で定義すると, $\sim$ は X 上の同値関係になる. $\square$

Proof. $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ とする. $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in X$ と $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ に対し,

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2, \dots, \lambda x'_{n+1})$$

とし, X 上の二項関係 $\sim$ を, $x, x' \in X$ に対し,

$$x \sim x' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ such that } x = \lambda x'$$

で定義する.

まず反射律を示す. $x \in X$ とする. このとき, $x \sim x$ となることを示す. つまり, $x = \lambda x$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在することを示す. $1 \in \mathbb{R}^\times$ であり, $x = 1x$ である.

次に対称律を示す. $x \sim x'$ とする. このとき, $x' \sim x$ となることを示す. つまり, $x' = \lambda x$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在することを示す. $x \sim x'$ であるので, $x = \lambda x'$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在する. $a \in \mathbb{R}^\times$ が $x = ax'$ を満たすとする. $a \in \mathbb{R}^\times$ であるので, $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^\times$. $x = ax'$ であるので, $\frac{1}{a}x = x'$. したがって $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^\times$ かつ $x' = \frac{1}{a}x$.

最後に推移律を示す. $x \sim x', x' \sim x''$ とする. このとき, $x \sim x''$ を示す. つまり, $x = \lambda x''$ となる $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在することを示す. $x \sim x'$ であるので, $x = \lambda x'$ となる $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在する. $a \in \mathbb{R}^\times$ が $x = ax'$ を満たすとする. $x' \sim x''$ であるので, $x' = \lambda x''$ となる $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在する. $b \in \mathbb{R}^\times$ が $x' = bx''$ を満たすとする. $x = ax', x' = bx''$ であるので, $x = abx''$ である. また $a \in \mathbb{R}^\times$ かつ $b \in \mathbb{R}^\times$ であるので, $ab \in \mathbb{R}^\times$ である. したがって, $ab \in \mathbb{R}^\times$ かつ $x = abx''$. $\square$

Definition 7.3.5. $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする. $x \in X$ に対し, 集合 $\{y \in X \mid x \sim y\}$ を x の同値類 (equivalence class) と呼ぶ.*5 また, $C \in 2^X$ がある $x \in X$ の同値類と等しいとき, C は $\sim$ に関する同値類 (equivalence class) であるという. $\sim$ に関する全ての同値類からなる集合を, X の $\sim$ による商集合 (quotient set) と呼び, $X/\sim$ と書く. すなわち, $X/\sim = \{\{y \in X \mid x \sim y\} \mid x \in X\}$ である. $\square$

集合 X の同値関係 $\sim$ による商集合が類別であることを示す.

Proposition 7.3.6. $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする. $X/\sim$ は X の類別である. $\square$

Proof. $\sim$ を集合 X 上の同値関係とし, $x \in X$ に対して, $C(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$ とおく. $X/\sim$ とする.

$x \in X$ とする. $x \sim x$ であるので, $x \in C(x)$ である. したがって $C(x) \neq \emptyset$. よって $\emptyset \notin X/\sim$

最初に $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$ を示すそのために, まず $X \subset \bigcup_{x \in X} C(x)$ を示す. $a \in X$ とする. このとき, $a \in \bigcup_{x \in X} C(x)$ を示す. つまり, $a \in C(x)$ となる, $x \in X$ が存在することを示す.

*5 x を含む同値類を $[x]$ とか $\bar{x}$ と書くことも多い.

す. $\sim$ の反射律から $a \sim a$ であるので, $a \in C(a)$ である. $a \in X$ かつ $a \in C(a)$ であるので, $a \in \bigcup_{x \in X} C(x)$. 次に, $X \supset \bigcup_{x \in X} C(x)$ を示す. 任意の $x \in X$ に対し, $C(x) \subset X$ であるので, $\bigcup_{x \in X} C(x) \subset X$ である.

次に

$$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \implies C(x) = C(y)$$

を示す. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ とする. このとき, $C(x) = C(y)$ となることを示す. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ であるので, $z \in C(x) \cap C(y)$ とする. $z \in C(x) \cap C(y)$ であるので, $z \in C(x)$ かつ $z \in C(y)$. $z \in C(x)$ なので $x \sim z$. 同様に $z \in C(y)$ なので $y \sim z$. $y \sim z$ であるので $z \sim y$. $x \sim z$ かつ $z \sim y$ であるので $x \sim y$. ここで, $C(x) \subset C(y)$ を示す. $a \in C(x)$ とする. このとき, $a \in C(y)$ を示す. $a \in C(x)$ であるので, $a \sim x$. $a \sim x$ であり $x \sim y$ なので $a \sim y$. したがって $a \in C(y)$. 次に, x と y の役割を入れ替えて同様の議論のすることで, $C(x) \supset C(y)$ を示す. $a \in C(y)$ とする. このとき, $a \in C(x)$ を示す. $a \in C(y)$ であるので, $a \sim y$. $a \sim y$ であり $x \sim y$ なので $a \sim x$. したがって $a \in C(x)$. $\square$

逆に類別が与えられると, その類別から同値関係を定義できることを示す.

Proposition 7.3.7. $\mathcal{C}$ を集合の類別とする. このとき X 上の二項関係 $\sim$ を

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists C \in \mathcal{C} \text{ such that } x_1 \in C \text{ かつ } x_2 \in C$$

で定義すると $\sim$ は同値関係になる. $\square$

Proof. まず反射律を示す. $x \in X$ とする. このとき, $x \sim x$ となることを示す. $\mathcal{C}$ は X の類別なので, $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. $x \in X$ であるので, $x \in C$ をみたす $C \in \mathcal{C}$ が存在する. したがって, $C \in \mathcal{C}$ であり, $x \in C$ かつ $x \in C$ であるので, $x \sim x$.

次に, 対称律を示す. $x_1 \sim x_2$ とする. このとき, $x_2 \sim x_1$ となることを示す. $x_1 \sim x_2$ であるので, $x_1 \in C$ かつ $x_2 \in C$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する. $C_0 \in \mathcal{C}$ が $x_1 \in C_0$ かつ $x_2 \in C_0$ を満たすとする. このとき, $C_0 \in \mathcal{C}$ であり, $x_2 \in C_0$ かつ $x_1 \in C_0$ であるので, $x_2 \sim x_1$.

最後に, 推移律を示す. $x_1 \sim x_2$ かつ $x_2 \sim x_3$ とする. このとき, $x_1 \sim x_3$ を示す. $x_1 \sim x_2$ であるので, $x_1 \in C$ かつ $x_2 \in C$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する. $C_1 \in \mathcal{C}$ が $x_1 \in C_1$ かつ $x_2 \in C_1$ を満たすとする. $x_2 \sim x_3$ であるので, $x_2 \in C$ かつ $x_3 \in C$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する. $C_3 \in \mathcal{C}$ が $x_2 \in C_3$ かつ $x_3 \in C_3$ を満たすとする. $x_2 \in C_1$ かつ $x_2 \in C_3$ であるので, $x_2 \in C_1 \cap C_3$ である. $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$ であり, $\mathcal{C}$ が X の類別であるので, $C_1 = C_3$. $\square$

Remark 7.3.8. Propositions 7.3.6, 7.3.7 より, 類別を与えることと同値関係を与えることは同じであることが分かる. $\square$

7.3.2 同値関係の例

Example 5.2.4 で与えた類別を同値関係として与える.

Example 7.3.9. $\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\sim$ を

$$m \sim n \iff m - n \text{ は偶数}$$

と定義すれば $\sim$ は同値関係である. このとき,

$$\begin{aligned} C(0) &= \{ m \mid m \sim 0 \} = \{ m \mid m \text{ は偶数} \}, \\ C(1) &= \{ m \mid m \sim 1 \} = \{ m \mid m - 1 \text{ は偶数} \} = \{ m \mid m \text{ は奇数} \}. \end{aligned}$$

したがって, Example 5.2.4 の記号を用いると, $C(0) = E$, $C(1) = O$ である. m を偶数とする. このとき, $m \in C(m) \cap C(0)$ である. Proposition 7.3.6 より, 類別を $\{ C(m) \mid m \in \mathbb{Z} \}$ は $\mathbb{Z}$ の類別であるので, $C(m) = C(0)$. また, m が奇数なら $m \in C(m) \cap C(1)$ なので $C(m) = C(1)$. したがって, $\{ C(m) \mid m \in \mathbb{Z} \} = \{ C(0), C(1) \} = \{ E, O \}$ であり, この同値関係で得られる類別は, Example 5.2.4 の類別である. $\square$

Example 5.2.5 で与えた類別を同値関係として与える.

Example 7.3.10. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\overset{n}{\sim}$ を

$$l \sim m \iff n \mid (l - m)$$

と定義する. ただし, $\mid$ は Example 7.2.6 の記号であり, $n \mid (l - m)$ は n は $l - m$ を割り切るという意味である. このとき, $\overset{n}{\sim}$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である. m を n で割った余りを $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ とする. このとき, Example 5.2.5 で用いた記号を用いると, $C(m) = C(r) = C_r^{(n)}$ となる.

$$\{ C(m) \mid m \in \mathbb{Z} \} = \{ C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \dots, C_{n-1}^{(n)} \}$$

であり, これは Example 5.2.5 で与えた $\mathbb{Z}$ の類別である. この $\mathbb{Z}$ の類別を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書くことが多い. $\square$

Proposition 5.2.7 では, 写像から決まる類別を与えた. これを同値関係として書くと次のようになる.

Theorem 7.3.11. f を集合 X から集合 Y への写像とする. このとき, X 上に二項関係 $\overset{f}{\sim}$ を,

$$x_1 \overset{f}{\sim} x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

で定義すると $\stackrel{f}{\sim}$ は X 上の同値関係になる. □

Proof. f を集合 X から集合 Y への写像とし,

$$x_1 \stackrel{f}{\sim} x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

であるとする.

まず反射律について示す. $x \in X$ とする. このとき $x \stackrel{f}{\sim} x$ を示す. このとき, $f(x) = f(x)$ であるので $x \stackrel{f}{\sim} x$.

次に対称律について示す. $x_1 \stackrel{f}{\sim} x_2$ とする. このとき $x_2 \sim x_1$ を示す. $x_1 \stackrel{f}{\sim} x_2$ であるので $f(x_1) = f(x_2)$. $f(x_1) = f(x_2)$ であるので $f(x_2) = f(x_1)$. $f(x_2) = f(x_1)$ であるので $x_2 \sim x_1$.

最後に推移律を示す. $x_1 \stackrel{f}{\sim} x_2$ かつ $x_2 \stackrel{f}{\sim} x_3$ とする. このとき, $x_1 \stackrel{f}{\sim} x_3$ を示す. $x_1 \stackrel{f}{\sim} x_2$ であるので $f(x_1) = f(x_2)$. $x_2 \stackrel{f}{\sim} x_3$ であるので $f(x_2) = f(x_3)$. $f(x_1) = f(x_2)$ かつ $f(x_2) = f(x_3)$ であるので, $f(x_1) = f(x_3)$. $f(x_1) = f(x_3)$ であるので $x_1 \stackrel{f}{\sim} x_3$ □

Example 5.2.6 で与えた類別について考える.

Example 7.3.12. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup &\quad \cup \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

を考え, この写像から決まる $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ について考える. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

である. Example 5.2.5 で用いた記号を使うと, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を含む同値類は $C_{\sqrt{x^2+y^2}}$ である. □

Example 7.3.4 で扱った例について同値類と商集合の完全代表系について考える.

Example 7.3.13. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とし, X 上の二項関係 $\sim$ を,

$$(x_1, x_2) \sim (x'_1, x'_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ such that } (x_1, x_2) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2)$$

で定義すると, $\sim$ は X 上の同値関係である. (x_1, x_2) を含む $\sim$ による同値類は, $\mathbb{R}^2$ 内の原点と (x_1, x_2) を通る直線から原点を抜いたものである. したがって, $X / \sim$ の完全代表系は, $\mathbb{R}^2$ 内の直線からひとつずつ原点以外の点を代表としてとってきたものである. 従って例えば $R_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ かつ } x_2 \geq 0 \text{ かつ } x_1 > -1\}$ は $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$ の完全代表系である. □

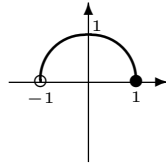


図 7.1
Example
7.3.13 R_1

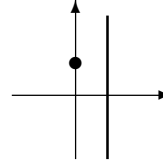


図 7.2
Example
7.3.13 R_2

Example 7.3.14. 実数を成分とする $m \times n$ 行列全体のなす集合を $M_{m,n}(\mathbb{R})$ と書き, n 次正則行列を集めてきた部分集合 $\{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \mathbb{R}^\times\}$ を $GL(n, \mathbb{R})$ と書く. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して,

$$PA = X$$

を満たす被約階段行列 $X \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ と正則行列 $P \in GL(m, \mathbb{R})$ が存在することが知られている. またこのとき X は P の選び方によらず, A のみによって決まることが知られている. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して,

$$A \sim B \iff \exists P \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ such that } B = PA$$

と定義すると, $\sim$ は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 上の同値関係である. このとき,

$$\{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid X \text{ は被約階段行列である.}\}$$

は $M_{m,n}(\mathbb{R}) / \sim$ の完全代表系である. $m = 1, n = 2$ の場合について考える. つまり $A, B \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$A \sim B \iff \exists P \in GL(1, \mathbb{R}) \text{ such that } B = PA$$

という同値関係を考える.

$$\begin{aligned} GL(1, \mathbb{R}) &= \{(\lambda) \mid \lambda \neq 0\} \\ M_{1,2}(\mathbb{R}) &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

であるので, $\mathbb{R}^2$ 上の次の同値関係を考えていることと同値である:

$$A \sim B \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ such that } B = \lambda A.$$

明らかに $(0, 0)$ を含む同値類は $(0, 0)$ のみからなる集合である. 従って, $\mathbb{R}^2 / \sim = \{\{(0, 0)\}\} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim)$. よって $\mathbb{R}^2 / \sim$ の完全代表系は, $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$ の完全代表系と $\{(0, 0)\}$ の和集合である. $M_{1,2}$ の元で, 階数が 0 である被約階段行列は $(0, 0)$

のみである, 階数が 1 である被約階段行列は $a \in \mathbb{R}$ を使って $(1, a)$ とかけるものか, $(0, 1)$ のいずれかである. したがって,

$$\{(0, 0)\} \cup \{(0, 1)\} \cup \{(1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{R}^2 / \sim$ の完全代表系である. また,

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{X \in M_{1,2}(\mathbb{R}) \mid X \text{ の階数は } 1\}$$

であるので $R_2 \{(0, 1)\} \cup \{(1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ は $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$ の完全代表系である. 図示すると, 図 7.2 となる. $\square$

7.3.3 商集合からの写像

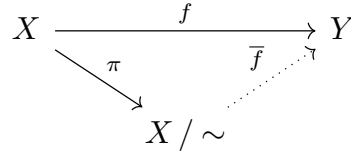
商集合からの写像について考える. つまり各同値類に対し何かを対応させる写像を考える. この様な写像を定義する際に, 同値類の代表に対して操作をし写像を定義しようとすることがある. この様なときには, それが well-defined かどうかは明らかではないことが多い. とくに, Section 2.3 であげた写像が満たすべき条件のうち, 条件 3 について議論をしなければいけないことが多い. Examples 5.2.5, 7.3.10 で扱った例を使って説明する. 記号は基本的にこれらと同じ物を用いる.

まず, well-defined ではない例を挙げ, 何が問題となるのか確認する.

Example 7.3.15. $\mathbb{Z}$ の $\equiv^m$ による商集合 $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ について考える. Example 5.2.5 では, $C_i^{(m)}$ を $0 \leq i < m$ に対してのみ定義していたが, ここでは, $i \in \mathbb{Z}$ の $\equiv^m$ での同値類を $C_i^{(m)}$ と書くことにする. 2 つの商集合 $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} / 8\mathbb{Z}$ を考える. このとき, $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z} / 8\mathbb{Z}$ への写像 φ を定義したい. 例えば, φ を, $C_i^{(2)} \in \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ に対し $\varphi(C_i^{(2)}) = C_i^{(8)}$ となるように定義することは出来るかということについて議論する. 実は, この様に定義することはできない. この理由について述べる. 0 も 2 も共に偶数であるので, $C_0^{(2)} = C_2^{(2)}$ である. したがって, φ による像は一致しなければならない. φ による像を計算すると, $\varphi(C_0^{(2)}) = C_0^{(8)}$, $\varphi(C_2^{(2)}) = C_2^{(8)}$ である. $C_0^{(4)}$ は 8 の倍数を集めた集合であり, $C_2^{(4)}$ は 8 で割ると 2 あまる整数を集めた集合である. $0 \in C_0^{(8)}$ かつ $0 \notin C_2^{(8)}$ であるので $C_0^{(8)} \neq C_2^{(8)}$ となってしまう. つまり, $C_0^{(2)} = C_2^{(2)}$ の像をうまく一意的に定められていない. したがって, これでは $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z} / 8\mathbb{Z}$ への写像 φ を定義できていないことになる. $\square$

次に, well-defined である例を挙げる.

Example 7.3.16. 記号などは先程の例と同じ物を使い, $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z} / 8\mathbb{Z}$ への写像 φ を定義することを考える. φ を, $C_i^{(2)} \in \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ に対し $\varphi(C_i^{(2)}) = C_{4i}^{(8)}$ となるように定義すること

図 7.3 $\bar{f} \circ \pi = f$

は出来るかということについて議論する. Section 2.3 であげた写像が満たすべき条件のうち, 条件 1, 2 を満たすことは明らかなので, 条件 3 についてのみ議論する. $C_i^2 = C_j^2$ であるときに, それらの φ による像が一致しているか確認する. $C_i^2 = C_j^2$ とする. このとき, $C_{4i}^{(8)} = C_{4j}^{(8)}$ となることを示す. つまり $4i$ の $\equiv^8$ での同値類と $4j$ の $\equiv^8$ での同値類が等しいことを示す. このためには, $4i \equiv^8 4j$ を示せば良い. つまり, 8 が $4i - 4j$ を割り切ることを示す. $C_i^2 = C_j^2$ であるので, $i \equiv^2 j$ である. つまり, 2 は $i - j$ を割り切る. $k \in \mathbb{Z}$ が $i - j = 2k$ を満たすとする. このとき, $4i - 4j = 4(i - j) = 4 \cdot 2k = 8k$ となるので, 8 が $4i - 4j$ を割り切る. $\square$

Theorem 7.3.17. f を集合 X から Y への写像とし, X 上の同値関係 $\sim$ が

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

を満たしているとする. X から $X/\sim$ への自然な全射を π とする. このとき, 次の条件をみたす写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ がただ一つ存在する:

$$\bar{f} \circ \pi = f$$

□

Remark 7.3.18. Theorem 7.3.17 の $\bar{f}$ に対する条件を可換図式で表すと図 7.3 の様になる. $\square$

Proof. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と X 上の同値関係 $\sim$ が

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2) \tag{7.1}$$

を満たしているとする. X から $X/\sim$ への自然な全射を π とする. $x \in X$ に対し, $\pi(x)$ は x の $\sim$ での同値類である.

まず $\bar{f} \circ \pi = f$ となる写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ が存在することを示す. $\xi \in X/\sim$ とする. $\bar{f}(\xi)$ を定義したい. $x \in \xi$ とする. このとき, $\bar{f}(\xi)$ を $f(x) \in Y$ で定義することを考える. これが well-defined であることを示す. $x, x' \in \xi$ とする. このとき, $f(x) = f(x')$ となることを示せば良い. ξ は $\sim$ による同値類であり, $x, x' \in \xi$ であるので, $x \sim x'$. $x \sim x'$ であるので (7.1) より $f(x) = f(x')$. したがって, ξ に対し, $f(x)$ は ξ を代表する x のとり方によらない. よって

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow \pi & & \uparrow \iota \\
 X / \sim & \xrightarrow{\tilde{f}} & f(X)
 \end{array}$$

図 7.4 $f = \iota \circ \tilde{f} \circ \pi$

$x \in \xi$ となる ξ に対し, $\bar{f}(\xi) = f(x)$ とすると, これは well-defined である. 次にこの様に定めた写像 $\bar{f}$ が $\bar{f} \circ \pi = f$ を満たすことを示す. f も $\bar{f} \circ \pi$ も X から Y への写像であるので,

$$x \in X \implies (\bar{f} \circ \pi)(x) = f(x)$$

を示す. $x \in X$ とする. このとき, $\pi(x)$ は x の $\sim$ による同値類であるので, $x \in \pi(x)$ である. したがって, $(\bar{f} \circ \pi)(x) = \bar{f}(\pi(x)) = f(x)$ なので $\bar{f} \circ \pi = f$.

次に $\bar{f} \circ \pi = f$ となる写像 $\bar{f}: X / \sim \rightarrow Y$ がただ一つであることを示す. g を $g \circ \pi = f$ をみたす $X / \sim$ から Y へのもうひとつの写像とする. このとき, $\bar{f} = g$ を示す. $\bar{f}$ も g も $X / \sim$ から Y への写像であるので,

$$\xi \in X / \sim \implies \bar{f}(\xi) = g(\xi)$$

を示す. $\xi \in X / \sim$ とする. このとき $\xi = \pi(x)$ となる $x \in X$ が存在する. $a \in X$ が $\xi = \pi(a)$ を満たすとする. このとき $\bar{f}(\xi) = f(a)$ である. 一方, $g(\xi)$ も, $g \circ \pi = f$ を使うと, $g(\xi) = g(\pi(a)) = (g \circ \pi)(a) = f(a)$ となる. よって $\bar{f}(\xi) = g(\xi)$. $\square$

Theorem 7.3.11 で与えた同値関係について次のことが言える.

Theorem 7.3.19. f を集合 X から集合 Y への写像とし, $\sim^f$ を,

$$x_1 \sim^f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

で定義される X 上の同値関係とする. ι を $f(X)$ から Y への包含写像とし, π を X から $X / \sim^f$ への自然な全射とする. このとき, $f = \iota \circ \tilde{f} \circ \pi$ をみたす全単射 $\tilde{f}: X / \sim^f \rightarrow f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ が存在する. 従って, $X / \sim^f$ と $f(X)$ は集合として同一視出来る. $\square$

Remark 7.3.20. Theorem 7.3.19 の $\tilde{f}$ に対する条件を可換図式で表すと図 7.4 の様になる. $\square$

Proof. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し,

$$x_1 \sim^f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

とする. ι を $f(X)$ から Y への包含写像, π を X から $X / \sim^f$ への自然な全射とする.

Theorem 7.3.17 より, $\bar{f} \circ \pi = f$ をみたす $\bar{f}: X / \sim \rightarrow Y$ がただ一つ存在する. $\bar{f}$ の定義から, $\bar{f}(X / \sim) = f(X)$. そこで, $\tilde{f}$ を

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} & : & X / \sim \longrightarrow f(X) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \xi & \longmapsto \bar{f}(\xi) \end{array}$$

と定義する.

まず $\tilde{f}$ が $f = \iota \circ \tilde{f} \circ \pi$ を満たすことを確認する. f も $\iota \circ \tilde{f} \circ \pi$ も X から Y の写像であるので,

$$x \in X \implies f(x) = (\iota \circ \tilde{f} \circ \pi)(x)$$

を示せばよい. $x \in X$ とする. このとき

$$\begin{aligned} (\iota \circ \tilde{f} \circ \pi)(x) &= \iota(\tilde{f}(\pi(x))) \\ &= \iota(\bar{f}(\pi(x))) \\ &= \iota(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である.

次に, $\tilde{f}$ が全単射である事を示す. $\tilde{f}$ が全射であることは $\bar{f}$ の定義から明らかなので, $\tilde{f}$ が単射であることを示す. $\xi_1, \xi_2 \in X / \sim$, $\tilde{f}(\xi_1) = \tilde{f}(\xi_2)$ とする. このとき, $\xi_1 = \xi_2$ となることを示す. $x_1 \in \xi_1, x_2 \in \xi_2$ とする. このとき, $\xi_1 = \pi(x_1)$, $\xi_2 = \pi(x_2)$. $\bar{f}$ の定義から,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi_1) &= \bar{f}(\xi_1) = \bar{f}(\pi(x_1)) = f(x_1) \\ \tilde{f}(\xi_2) &= \bar{f}(\xi_2) = \bar{f}(\pi(x_2)) = f(x_2) \end{aligned}$$

である. $\bar{f}(\xi_1) = \bar{f}(\xi_2)$ であるので, $f(x_1) = f(x_2)$. よって, $\sim$ の定義から, $x_1 \sim x_2$ である. ξ_1 は x_1 の $\sim$ による同値類であり, ξ_2 は x_2 の $\sim$ による同値類であるので, $\xi_1 = \xi_2$ $\square$

7.3.4 商集合からの写像の例

ここでは商集合からの写像についていくつかの例をみる.

Example 7.3.21. Y を $\mathbb{R}^2$ 内の原点 $(0,0)$ を通る直線を全て集めた集合とし, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対し, $L(x_1, x_2)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の原点 $(0,0)$ と (x_1, x_2) を通る直線とする. つまり, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対し,

$$L(x_1, x_2) = \{ \lambda(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

とおき,

$$Y = \{ L(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \} \}$$

とする. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ とし, 写像 f を

$$\begin{array}{ccc} f & : & X \longrightarrow Y \\ & & \Downarrow \\ & & (x_1, x_2) \longmapsto L(x_1, x_2) \end{array}$$

で定義する. このとき, Theorem 7.3.11 の同値関係 $\sim^f$ について考える.

$(x_1, x_2) \sim^f (x'_1, x'_2)$ ならば, $(x_1, x_2) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2)$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在する. なぜなら, $(x_1, x_2) \sim^f (x'_1, x'_2)$ とすると, $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x'_2)$ となり, $L(x_1, x_2) = L(x'_1, x'_2)$ となる. したがって, $(x_1, x_2) \in L(x'_1, x'_2)$ であるので, $(x_1, x_2) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2)$ となる $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する. $a \in \mathbb{R}$ が $(x_1, x_2) = (ax'_1, ax'_2)$ を満たすとする. $a = 0$ とすると, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ となるが, これは $(x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ であることに矛盾する. よって $a \neq 0$ である. $a \in \mathbb{R}^\times$ かつ $(x_1, x_2) = (ax'_1, ax'_2)$ である.

逆に, $(x_1, x_2) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2)$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在するならば $(x_1, x_2) \sim^f (x'_1, x'_2)$ である. $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in X$ と $a \in \mathbb{R}^\times$ が $(x_1, x_2) = (ax'_1, ax'_2)$ をみたすとする. このとき $L(x_1, x_2) = L(x'_1, x'_2)$ であることを示せばよい. $(p_1, p_2) \in L(x_1, x_2)$ とする. このとき, $(p_1, p_2) \in L(x'_1, x'_2)$ を示す. $(p_1, p_2) \in L(x_1, x_2)$ であるので, $(\lambda x_1, \lambda x_2) = (p_1, p_2)$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在する. $b \in \mathbb{R}^\times$ が $(bx_1, bx_2) = (p_1, p_2)$ をみたすとする. $(bx_1, bx_2) = (p_1, p_2)$ かつ $(x_1, x_2) = (ax'_1, ax'_2)$ であるので, $(bax'_1, bax'_2) = (p_1, p_2)$. $ba \in \mathbb{R}^\times$ かつ $(bax'_1, bax'_2) = (p_1, p_2)$ であるので, $(p_1, p_2) \in L(x'_1, x'_2)$. 次に逆を示す. $(p_1, p_2) \in L(x'_1, x'_2)$ とする. このとき, $(p_1, p_2) \in L(x_1, x_2)$ を示す. $(x_1, x_2) = (ax'_1, ax'_2)$ であり, $a \in \mathbb{R}^\times$ であるので, $(\frac{1}{a}x_1, \frac{1}{a}x_2) = (x'_1, x'_2)$. $(p_1, p_2) \in L(x'_1, x'_2)$ であるので, $(\lambda x'_1, \lambda x'_2) = (p_1, p_2)$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在する. $b \in \mathbb{R}^\times$ が $(bx'_1, bx'_2) = (p_1, p_2)$ をみたすとする. $(\frac{1}{a}x_1, \frac{1}{a}x_2) = (x'_1, x'_2)$ かつ $(bx'_1, bx'_2) = (p_1, p_2)$ であるので, $(\frac{b}{a}x_1, \frac{b}{a}x_2) = (p_1, p_2)$. $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}^\times$ かつ $(\frac{b}{a}x_1, \frac{b}{a}x_2) = (p_1, p_2)$ であるので, $(p_1, p_2) \in L(x_1, x_2)$.

以上の議論から, $(x_1, x_2) = (\lambda x'_1, \lambda x'_2)$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が存在することと, $(x_1, x_2) \sim^f (x'_1, x'_2)$ であることが同値であることが分かった. これは, Example 7.3.4 での $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ 上の同値関係 $\sim$ の定義そのものである. つまり, $(x_1, x_2) \sim^f (x'_1, x'_2)$ であることと, $(x_1, x_2) \sim (x'_1, x'_2)$ は同値である.

明らかに f は全射であるので, Theorem 7.3.19 より $(\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}) / \sim$ と $\mathbb{R}^2$ 内の原点 $(0, 0)$ を通る直線を全て集めた集合 Y は集合として同一視出来る. この集合を射影直線 (projective line) といい, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ などと書く.

Example 7.3.4 での $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{ (0, \dots, 0) \}$ 上の同値関係 $\sim$ でも同様に議論ができる. このとき, 商集合 $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{ (0, \dots, 0) \}) / \sim$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線を集めた集合と同一視

できる. これを n 次元射影空間 (*projective space*) といい $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ などと書く. $\square$

Example 7.3.22 ($\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ を構成する方法). $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とおく. $\mathbb{Z} \times S$ 上の二項関係 $\sim$ を

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q$$

で定義する. すると $\sim$ は同値関係で, $\mathbb{Z} \times S / \sim$ は $\mathbb{Q}$ と同一視できる. $\square$

Proof. $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とし, $\sim$ は

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q$$

で定義される $\mathbb{Z} \times S$ 上の二項関係とし,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times S &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ \Downarrow & \\ (p, q) &\longmapsto \frac{p}{q} \end{aligned}$$

とする. このとき f は全射であり,

$$\begin{aligned} (p, q) \stackrel{f}{\sim} (p', q') &\iff f((p, q)) = f((p', q')) \\ &\iff \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \\ &\iff pq' = p'q \\ &\iff (p, q) \sim (p', q'). \end{aligned}$$

故に $\sim$ は同値関係であり, Theorem 7.3.19 より, $\mathbb{Z} \times S / \sim$ は $\mathbb{Q}$ と同一視できる. $\square$

Example 7.3.23 ($\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ を構成する方法). $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の二項関係 $\sim$ を

$$(p, q) \sim (p', q') \iff p + q' = p' + q$$

で定義する. すると $\sim$ は同値関係で, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ は $\mathbb{Z}$ と同一視できる. $\square$

Proof. $\sim$ を

$$(p, q) \sim (p', q') \iff p + q' = p' + q$$

で定義された $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の二項関係とし,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \Downarrow & \\ (p, q) &\longmapsto p - q \end{aligned}$$

とする. f は全射で,

$$\begin{aligned}(p, q) \stackrel{f}{\sim} (p', q') &\iff f((p, q)) = f((p', q')) \\ &\iff p - q = p' - q' \\ &\iff p + q' = p' + q \\ &\iff (p, q) \sim (p', q')\end{aligned}$$

故に $\sim$ は同値関係で, Theorem 7.3.19 より, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ と $\mathbb{Z}$ は同一視できることがわかる. □

第 8 章

有限集合

8.1 有限集合

集合に含まれる要素が有限個であるか否かによって大まかに分類することができる。

Definition 8.1.1 (有限集合). 集合 A に含まれる元の個数が有限のとき A は有限集合 (*finite set*) であるといい, 有限集合でない集合 A を無限集合 (*infinite set*) と呼ぶ. 有限集合 A に対し, A に含まれる元の個数を $\#(A)$ と書く.*¹ □

Example 8.1.2. $\mathbb{N}$ は無限集合である. □

Example 8.1.3. $\#(\emptyset) = 0$. $\#(\{1, 2, \dots, n\}) = n$. □

n 個の元からなる部分集合全体というものを考えることもある. あまり標準的ではないが, 以下のように定義する.

Definition 8.1.4. $\binom{A}{n} = \{X \in 2^A \mid \#(X) = n\}$. □

有限集合では, 含まれる元の個数がしばしば重要になる. 集合に対する操作と元の個数に関する等式をいくつか紹介する. 冪集合については次の等式が知られている.

Proposition 8.1.5. A を有限集合とすると, $\#(2^A) = 2^{\#A}$. □

Proof. $\#(A) = n$ として, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ とする. A の部分集合は各 a_i が属するか否か (2 通り) できまるので, A の部分集合の個数は

$$\underbrace{\underbrace{2}_{a_1 \text{ について}} \cdot \underbrace{2}_{a_2 \text{ について}} \cdots \underbrace{2}_{a_n \text{ について}}}_{n} = 2^n$$

*¹ $\#A$ の様に括弧を書かずに書くこともある. また, $|A|$ と書いたり, 分野によっては $\sharp(A)$ と書くこともある.

□

直積については次の等式が知られている.

Proposition 8.1.6. A, B が有限集合のとき,

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$$

である.

□

Proof. $\#(A) = m, \#(B) = n, A = \{a_1, \dots, a_m\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}$ のとき,

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}.$$

各 a_i に対し, (a_i, b) なる形の $A \times B$ の元は n 個ある. よって,

$$\#(A \times B) = \underbrace{n + \dots + n}_{m \text{ 個}} = n \cdot m.$$

□

次に n 個の元からなる部分集合の個数について紹介する. そのために, 二項係数を定義する.

Definition 8.1.7. $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{t}{n} = \frac{t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1)}{n!}$$

と定義し, 二項係数という.

□

Remark 8.1.8. $t, n \in \mathbb{N}$ かつ $t < n$ ならば, $t(t-1)(t-2) \cdots 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdots (t-n+1) = 0$ となるため, $\binom{t}{n} = 0$ である.

□

Proposition 8.1.9. 有限集合 A に対し, $\#(\binom{A}{n}) = \binom{\#(A)}{n}$.

□

Proof. $\#(A) = m$ とする. このとき n 個の相異なる A の元 $a_1, \dots, a_n$ の選び方は, $m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)$ 通りあるが, 部分集合 $\{a_1, \dots, a_n\}$ としては, 並び替えたものも同じ集合になる. 並び替えは $n!$ 通りあるので, $\#(\binom{A}{n}) = \binom{m}{n}$.

□

最後に写像全体の集合についての等式を紹介する.

Proposition 8.1.10. A, B が有限集合のとき, $\#(B^A) = \#(B)^{\#(A)}$ が成り立つ.

□

Proof. $\#(A) = m$ とし, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ とする. $\#(B) = n$ とする. f を A から B への写像とする. 各 a_i に対し, $f(a_i)$ のとり方は n 通りである. 従って,

$$\#(B^A) = \underbrace{\underbrace{n}_{f(a_1) \text{ について}} \cdot \underbrace{n}_{f(a_2) \text{ について}} \cdots \underbrace{n}_{f(a_m) \text{ について}}}_m.$$

□

Proposition 8.1.11. A と B を有限集合とする. このとき, 次は同値である.

- $\#(A) = \#(B)$.
- A から B への全単射が存在する.

□

Proof. まず ‘ A から B への全単射が存在するならば $\#(A) = \#(B)$ ’ となることを示す. $\#(A) = m$ とし, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ とする. $f: A \rightarrow B$ を全単射とする. このとき, $\#(B) = m$ を示す. $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し, $b_i = f(a_i)$ とおく. $f(A) = \{b_1, \dots, b_m\}$ である. f が単射であり, $a_1, \dots, a_m$ は相異なるので, $b_1, \dots, b_m$ は相異なる. したがって, $\#(f(A)) = m$. f は全射であるので, $B = f(A)$. したがって, $\#(B) = m$.

A, B が有限集合であるとき, $\#(A) = \#(B)$ ならば A から B への全単射が存在することを示す. $\#(A) = \#(B) = m$ とし, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ とする. このとき, A から B への全単射が存在することを示す. 各 $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し, $f(a_i) = b_i$, $g(b_i) = a_i$ とおくと, f は A から B への写像であり, g は B から A への写像である. $(f \circ g)(b_i) = f(g(b_i)) = f(a_i) = b_i$ であるので, $f \circ g = \text{id}_B$. $(g \circ f)(a_i) = g(f(a_i)) = g(b_i) = a_i$ であるので, $g \circ f = \text{id}_A$. したがって, f は全単射である. □

Proposition 8.1.12. 有限集合から無限集合への全射は存在しない. 無限集合から有限集合への単射は存在しない. □

Proof. A を有限集合とし, $\#(A) = m$ かつ $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ とする. B を無限集合とする.

A から B への写像 f を考える. $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し, $b_i = f(a_i)$ とおく. このとき, $f(A) = \{b_1, \dots, b_m\}$ であるので, $f(A)$ は有限集合であり, $\#(f(A)) \leq m$ である. B は無限集合であるので, $f(A) \neq B$. よって, f は全射ではない.

B から A への写像 f を考える. $f^{-1}(A) = B$ である. したがって, $f^{-1}(A)$ は無限集合である. また, $f^{-1}(A) = f^{-1}(\{a_1\}) \cup \dots \cup f^{-1}(\{a_m\})$ である. f が単射ならば, $\#(f^{-1}(\{a_i\})) \leq 1$ であり, $\#(f^{-1}(A)) \leq m$. しかしこれは, $f^{-1}(A)$ が無限集合であることに矛盾する. □

Remark 8.1.13. 詳細はここでは述べないが、無限集合同士の場合には注意をする必要がある。無限集合から無限集合への全単射が存在するかどうかはその集合による。たとえば、 $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ らの間には全単射があるが、 $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ の間には全単射は存在しない。 $\square$

第 9 章

非交和

9.1 内部 disjoint union

ここでは, 共通部分を持たない集合について考える.

Definition 9.1.1. X, A, B を集合とする. 次を 2 条件を満たすとき, X は A と B の内部 disjoint union (*inner disjoint union*) であるという:

1. $X = A \cup B$.
2. $A \cap B = \emptyset$.

X が A と B の内部 disjoint union であることを,

$$X = A \amalg B$$

と書いて表す^{*1}.

□

Remark 9.1.2. 定義 9.2.1 で導入される外部 disjoint union という概念と誤解の恐れがない場合には, 単に disjoint union と呼ぶ.

□

Proposition 9.1.3. A, B を有限集合とする. X が A と B の disjoint union であるとき, 次が成り立つ:

$$\#(X) = \#(A) + \#(B).$$

□

Proposition 9.1.4. A, A', X を集合とし, X が A と A' の disjoint union であるとする. $\iota: A \rightarrow X$ を, $x \in A$ に対し $\iota(x) = x$ と定義する. $\iota': A' \rightarrow X$ を, $x \in A'$ に対し $\iota'(x) = x$ と

^{*1} 板書では $X = A \sqcup B$ の様にも書くことも多いので, 最近では活字でも $X = A \sqcup B$ と書くことがある.

定義する. このとき, ι も ι' も単射である. さらに, Y を集合, f を A から Y への写像, f' を A' から Y への写像とすると, 次を満たす X から Y への写像 F がただ一つ存在する:

$$\begin{aligned} f &= F \circ \iota, \\ f' &= F \circ \iota'. \end{aligned}$$

□

Proof. A, A', X を集合とし, X が A と A' の disjoint union であるとする. $\iota: A \rightarrow X$ を, $x \in A$ に対し $\iota(x) = x$ と定義し, $\iota': A' \rightarrow X$ を, $x \in A'$ に対し $\iota'(x) = x$ と定義する.

ι が単射であることを示す. $a, b \in A$ とし, $a \neq b$ とする. このとき, $\iota(a) = a, \iota(b) = b$ であるので, $f(a) \neq f(b)$ となる. 従って, ι は単射である.

同様に, ι' が単射であることも示すことができる.

Y を集合, f を A から Y への写像, f' を A' から Y への写像とする. まず,

$$\begin{aligned} f &= F \circ \iota, \\ f' &= F \circ \iota' \end{aligned}$$

を満たす X から Y への写像 F が存在することを示す. $A \cap A' = \emptyset$ であるので, $x \in X$ とすると, $x \in A$ もしくは $x \in A'$ のいずれか一方が成り立つ. そこで, $F: X \rightarrow Y$ を次で定義する:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A) \\ f'(x) & (x \in A'). \end{cases}$$

この F が条件を満たすことを示す. $x \in A$ に対し,

$$F(\iota(x)) = F(x) = f(x)$$

であるので, $F \circ \iota = f$ である. また, $x \in A'$ に対し,

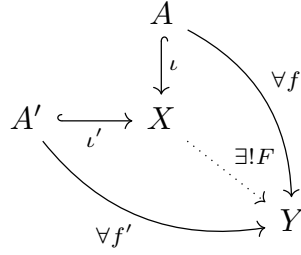
$$F(\iota'(x)) = F(x) = f'(x)$$

であるので, $F \circ \iota' = f'$ である. 次に, 条件を満たす写像の唯一性を示す. つまり, G も条件を満たす写像であるとする, $F = G$ となることを示す. G が,

$$\begin{aligned} f &= G \circ \iota, \\ f' &= G \circ \iota' \end{aligned}$$

を満たす X から Y への写像であるとする. $x \in X$ とする. $x \in A$ のときには, $\iota(x) = x$ であるので,

$$\begin{aligned} G(x) &= G(\iota(x)) = f(x) \\ F(x) &= F(\iota(x)) = f(x) \end{aligned}$$

図 9.1 $X = A \amalg A'$

となり $G(x) = F(x)$ がわかる. $x \in A'$ のときには, $\iota'(x) = x$ であるので,

$$G(x) = G(\iota'(x)) = f'(x)$$

$$F(x) = F(\iota'(x)) = f'(x)$$

となり $G(x) = F(x)$ がわかる. したがって, $G = F$ であることが分かる. $\square$

Remark 9.1.5. Proposition 9.1.4 における F に関する条件を図式を使って表すと, 図 9.1 の図式が可換となる F がただ一つ存在すると言い表すことができる. $\square$

より一般に, X という集合がある集合族の disjoint union であるということを定義できる.

Definition 9.1.6. X を集合とし, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合からなる集合族とする. 次の条件を満たすとき, X は集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の disjoint union であるという:

1. $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.
2. $\lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda' \implies A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset$.

X が集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の disjoint union であることを表すのに,

$$X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

と書くことがある^{*2}. $\square$

Remark 9.1.7. $\mathcal{C}$ が X の類別であるということと, X が $\mathcal{C}$ の (内部)disjoint union であるということは同値である. $\square$

^{*2} 板書では $X = \coprod A_\lambda$ を $X = \sqcup A_\lambda$ の様にも書くことも多いので, 最近では活字でも $\sqcup$ を使うことがある.

9.2 外部 disjoint union

Definition 9.2.1. A と B を集合とする. このとき, 集合 $A \amalg B$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} X &= \{ (1, a) \mid a \in A \} \cup \{ (2, b) \mid b \in B \} \\ &= \left(\{1\} \times A \right) \cup \left(\{2\} \times B \right). \end{aligned}$$

$A \amalg B$ を, A と B の (外部) disjoint union (*outer*) disjoint union) と呼ぶ. $\square$

Remark 9.2.2. 定義 9.1.1 では, “集合 X が, その部分集合 A と B の disjoint union である” という ‘状況’ を定義したが, 定義 9.2.1 では, “集合 A と集合 B の disjoint union” という ‘もの’ を定義した. この 2 つの用語は厳密には異なるものであるので, 区別をしたほうがわかりやすい場合がある. ここでは^{*3}, 区別が必要なときには, 前者を内部 disjoint union と呼び, 後者を外部 disjoint union と呼んで区別する. 前者は, X の内部にある A と B によって, X が disjoint union となっているという状況であるので, 内部 disjoint union と呼ぶ. 一方, 後者は, 直接は A や B を含んでいるわけではない新たな集合として, disjoint union を構成しているので, 外部 disjoint union と呼ぶ.

$X = A \amalg B$ と書いたときに, どちらの意味であるのかは文脈に依存するので注意しなければならない. 定義 9.1.1 の意味であれば, これは, X が A と B の内部 disjoint union であるという事実を表しており, $X = A \cup B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ということである. この意味では, $A \amalg B$ と単独では意味をなさず, 必ず, $X = A \amalg B$ のような等式の形になる. 定義 9.2.1 の意味であれば, A と B の外部 disjoint union という新しい集合と X が等しいということを表している. この意味での disjoint union は, $A \amalg B$ というものの自体に意味がある. $\square$

Proposition 9.2.3. A と A' を集合とする.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{ (1, a) \mid a \in A \} = \{1\} \times A, \\ \tilde{A}' &= \{ (2, a') \mid a' \in A' \} = \{2\} \times A' \end{aligned}$$

とおく. このとき, $A \amalg A'$ は $\tilde{A}$ と $\tilde{A}'$ の内部 disjoint union である. さらに写像 $\nu: A \rightarrow \tilde{A}$ を, $a \in A$ に対し, $\nu(a) = (1, a)$ と定義する. このとき, $\nu: A \rightarrow \tilde{A}$ は全単射である. また写像 $\nu': A' \rightarrow \tilde{A}'$ を, $a' \in A'$ に対し, $\nu'(a') = (2, a')$ と定義する. このとき, $\nu': A' \rightarrow \tilde{A}'$ は全単射である. $\square$

^{*3} 例えばベクトル空間では, 内部直和, 外部直和という用語は 一般に用いられるが, 集合の disjoint union については内部/外部という言葉で区別することは余り普及していないように思う

Proof. A と A' を集合とし

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \{ (1, a) \mid a \in A \} = \{ 1 \} \times A, \\ \tilde{A}' &= \{ (2, a') \mid a' \in A' \} = \{ 2 \} \times A'\end{aligned}$$

とおく. このとき, $\tilde{A}$ のどの元の第 1 成分も 1 であり, $\tilde{A}'$ のどの元の第 1 成分も 2 であるので, $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \emptyset$ である. また, 定義から $A \amalg A' = \tilde{A} \cup \tilde{A}'$ である. 従って, $A \amalg A'$ は A と A' の内部 disjoint union である.

写像 $\nu: A \rightarrow \tilde{A}$ を, $a \in A$ に対し, $\nu(a) = (1, a)$ と定義する. このとき, $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$ を, $(1, a) \in \tilde{A}$ に対し, $\pi(1, a) = a$ と定義する. このとき, π と ν は互いに逆写像であるので, ν は全単射である.

同様に, 写像 $\nu': A' \rightarrow \tilde{A}'$ を, $a \in A'$ に対し, $\nu'(a) = (2, a)$ と定義すると, ν' が全単射になることを示すことができる. $\square$

Proposition 9.2.4. A と A' を集合とする. $\nu: A \rightarrow A \amalg A'$ を, $x \in A$ に対し, $\nu(x) = (1, x)$ と定義する. また, $\nu': A' \rightarrow A \amalg A'$ を, $x \in A'$ に対し, $\nu'(x) = (2, x)$ と定義する. Y を集合, f を A から Y への写像, f' を A' から Y への写像とすると, 次を満たす X から Y への写像 F がただ一つ存在する:

$$\begin{aligned}f &= F \circ \nu, \\ f' &= F \circ \nu'.$$

$\square$

Proof. A と A' を集合とし, Y を集合, f を A から Y への写像, f' を A' から Y への写像とする.

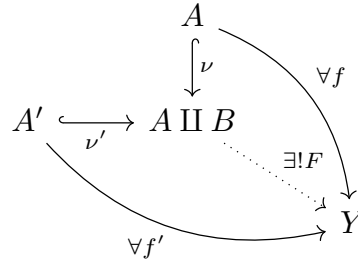
$\nu: A \rightarrow A \amalg A'$ を, $a \in A$ に対し, $\nu(a) = (1, a)$ と定義する. $\tilde{A} = \{ \nu(a) \mid a \in A \}$ とおき, $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$ を $\pi((1, a)) = a$ で定義する. $\tilde{f} = f \circ \pi$ とおく. $\tilde{f}$ は $\tilde{A}$ から Y への写像である. $\iota: \tilde{A} \rightarrow A \amalg A'$ を, $a \in A$ に対し $\iota((1, a)) = ((1, a))$ で定義し,

また, $\nu': A' \rightarrow A \amalg A'$ を, $a \in A'$ に対し, $\nu'(a) = (2, a)$ と定義する. $\tilde{A}' = \{ \nu'(a) \mid a \in A' \}$ とおき, $\pi': \tilde{A}' \rightarrow A'$ を $\pi'((2, a)) = a$ で定義する. $\tilde{f}' = f' \circ \pi'$ とおく. $\tilde{f}'$ は $\tilde{A}'$ から Y への写像である. $\iota': \tilde{A}' \rightarrow A \amalg A'$ を, $a \in A'$ に対し $\iota'((2, a)) = ((2, a))$ で定義する.

このとき, Proposition 9.2.3 から, $A \amalg A'$ は $\tilde{A}$ と $\tilde{A}'$ の内部 disjoint union である. したがって, Proposition 9.1.4 より, $F \circ \iota = \tilde{f}$, $F \circ \iota' = \tilde{f}'$ を満たす $F: A \amalg A' \rightarrow Y$ がただ一つ存在する.

この F が $F \circ \nu = f$ と $F \circ \nu' = f'$ を満たすことを示す. $a \in A$ に対し,

$$F(\nu(a)) = F((1, a)) = F(\iota(1, a)) = \tilde{f}((1, a)) = f(\pi(1, a)) = f(a)$$

図 9.2 $A \amalg A'$

となる. 従って $F \circ \nu = f$ である. 同様に $F \circ \nu' = f'$ も示すことが出来る.

つぎに, $A \amalg A'$ から Y への写像 G が $G \circ \nu = f$ と $G \circ \nu' = f'$ を満たすとする. このとき, $G = F$ となることを示す. $a \in A$ に対し,

$$G(\iota(1, a)) = G((1, a)) = G(\nu(a)) = f(a) = f(\pi((1, a))) = \tilde{f}((1, a))$$

となるので, $G \circ \nu = \tilde{f}$ である. 同様に, $a \in A'$ について考察することで, $G \circ \nu' = \tilde{f}'$ を示すことができる. $F \circ \iota = \tilde{f}$, $F \circ \iota' = \tilde{f}'$ を満たす写像 $F: A \amalg A' \rightarrow Y$ はただ一つであったので, $G = F$ である. $\square$

Remark 9.2.5. Proposition 9.2.4 における F に関する条件を図式を使って表すと, 図 9.2 の図式が可換となる F がただ一つ存在すると言い表すことができる. $\square$

より一般に, 集合族の disjoint union を定義できる.

Definition 9.2.6. $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする. このとき,

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\{\lambda\} \times A_\lambda)$$

とおき, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の disjoint union と呼ぶ. $\square$