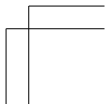
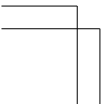
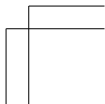
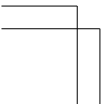
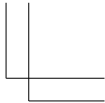
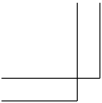


Quiver

Yasuhide NUMATA

2024 年 5 月 9 日





第 1 章

Introduction

本稿は, ‘Quiver の表現の直既約分解に関連する事項について解説する’ ことが目標である. ここでは, ‘quiver’, ‘quiver の表現’, ‘quiver の表現の直既約分解’, ‘ A_n 型 quiver の表現の応用など’ について順に概要を述べる.

1.1 Quiver (矢筒, 籐 (えびら)) とは?

(ラベルのついた) 点 (頂点) と, それらを結ぶ (ラベルのついた) 矢印 (辺) を集めたもの (図形) を Quiver と呼ぶ.

Example 1.1.1. 次は, 頂点 2 つと辺が一つからなる quiver である.

$$\bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

Example 1.1.2. 次のような, 辺がない quiver も考える.

$$\bullet_1$$

Example 1.1.3. 次のような, 多重辺を持つ quiver も考える.

$$\bullet_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \bullet_2 .$$

Example 1.1.4. 次のような, self loop を持つ quiver も考える.

$$\begin{array}{c} \bullet^1 \\ \circlearrowleft \alpha \end{array}$$

集合と写像の言葉で定義するなら,

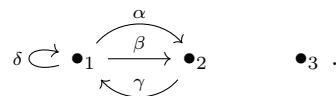
1. Q_0 : 集合 (頂点の集合)
2. Q_1 : 集合 (辺 (矢印) の集合)
3. $s: Q_1 \rightarrow Q_0$: 写像. ($s(\alpha)$ は辺 α の始点^{*1})
4. $t: Q_1 \rightarrow Q_0$: 写像. ($t(\alpha)$ は辺 α の終点^{*2})

の 4 つのデータの組 (Q_0, Q_1, s, t) が Quiver. (多重辺, セルフループを許す有向グラフと
言い方もする)

^{*1} start, source

^{*2} teminal, target

Example 1.1.5. $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = 2$, $s(\beta) = 1$, $t(\beta) = 2$, $s(\gamma) = 2$, $t(\gamma) = 1$, $s(\delta) = 1$, $t(\delta) = 1$ は次の図で表されるものとなる.



1.2 quiver の表現とは?

$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする.

1. $x \in Q_0$ に対し, $(K-)$ 線型空間 (有限次元ベクトル空間, 有限生成加群) V_x ,
2. $\alpha \in Q_1$ に対し, $(K-)$ 線型写像 $f_\alpha: V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$ が対応しているとき, その対応 $(V_\bullet, f_\bullet)$ を Q び $(K-)$ 線型空間のカテゴリへの表現と呼ぶ.

Example 1.2.1. $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$, $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = 1$ とする. つまり,



という quiver を考える. このとき, 例えば,

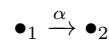
$$\begin{array}{ccc} V_1 = \mathbb{C}^2 & & \\ f_\alpha: \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

とすれば, $(V_\bullet, f_\bullet)$ は Q の表現である. 例えば,

$$\begin{array}{ccc} V_1 = \mathbb{C}^2 & & \\ f'_\alpha: \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

とすれば, $(V_\bullet, f'_\bullet)$ は Q の表現である.

Example 1.2.2. $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$, $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = 2$ とする. つまり,



という quiver を考える. このとき, 例えば,

$$\begin{array}{ccc} V_1 = \mathbb{C}^2 & & \\ V_2 = \mathbb{C}^2 & & \\ f_\alpha: \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} V_2 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

1.2 quiver の表現とは?

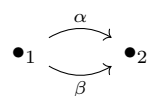
とすれば, $(V_\bullet, f_\bullet)$ は Q の表現である. 例えば,

$$\begin{array}{ccc} V_1 = \mathbb{C}^2 & & \\ V_2 = \mathbb{C}^2 & & \\ f'_\alpha: & \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} V_2 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

とすれば, $(V_\bullet, f'_\bullet)$ は Q の表現である.

Example 1.2.3. $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$, $s(\alpha) = s(\beta) = 1$, $t(\alpha) = t(\beta) = 2$ とする.

つまり



という quiver を考える. このとき, 例えば,

$$\begin{array}{ccc} V_1 = \mathbb{C}^2 & & \\ V_2 = \mathbb{C}^2 & & \\ f_\alpha: & \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} V_2 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \\ f_\beta: & \begin{array}{c} V_1 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} V_2 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

とすれば, $(V_\bullet, f_\bullet)$ は Q の表現である.

Example 1.2.4. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. このとき,

1. 各 $x \in Q_0$ に対して, $V_x = \{0\}$ (0)
2. 各 $\alpha \in Q_1$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} f_\alpha = \underline{0}: & \begin{array}{c} \{0\} \\ \Downarrow \\ 0 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} \{0\} \\ \Downarrow \\ 0 \end{array} \end{array}$$

とすると $(V_\bullet, f_\bullet)$ は Q の表現である. これを零表現と呼ぶ.

Example 1.2.5. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $(V_\bullet, f_\bullet)$, $(U_\bullet, g_\bullet)$ を Q の表現とする.

1. $x \in Q_0$ に対し, $W_\bullet = V_x \oplus U_x$
2. $\alpha \in Q_1$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} h_\alpha = f_\alpha \oplus g_\alpha: & \begin{array}{c} V_{s(\alpha)} \oplus U_{s(\alpha)} \\ \Downarrow \\ (v, u) \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} V_{t(\alpha)} \oplus U_{t(\alpha)} \\ \Downarrow \\ (f_\alpha(v), g_\alpha(u)) \end{array} \end{array}$$

とおくと, $(W_\bullet, h_\bullet)$ は Q の表現である. これを, $(V_\bullet, f_\bullet)$ と $(U_\bullet, g_\bullet)$ の直和とよび, $(V_\bullet, f_\bullet) \oplus (U_\bullet, g_\bullet)$ で表す.

1.3 Quiver の表現の構造について

Q を quiver とする. Q の表現 $(V_\bullet, f_\bullet)$ を理解するにはどうしたらよい?

一つの答え: より “小さい” 表現に分解する.

$$(V_\bullet, f_\bullet) = (V'_\bullet, f'_\bullet) \oplus (V''_\bullet, f''_\bullet)$$

みたいに直和に分解していく. $\dim(V'_x), \dim(V''_x) \leq \dim(V_x)$ なのだから, V'_x, V''_x の方が簡単に違いない. 分解を頑張ってこれ以上分解できないところまで分解して,

$$(V_\bullet, f_\bullet) = (V_\bullet^{(1)}, f_\bullet^{(1)}) \oplus (V_\bullet^{(2)}, f_\bullet^{(2)}) \oplus \dots$$

と書けたら, ‘これ以上分解できない表現達’ (直既約表現) がわかっていれば, $(V_\bullet, f_\bullet)$ はわかったことになるはず. (直既約表現の方が $(V_\bullet, f_\bullet)$ よりも簡単はず.)

問題:

1. 表現は直既約表現の直和として書けるのか?
2. 与えられた直既約表現の直和に分解する方法 (アルゴリズム)?
3. Q の直既約表現は何種類くらいあるのか? 有限個/無限個?

Item 1 について: Krull-Schmidt の定理

Item 2 について: (非アルゴリズム的^{*3}) 一般論としては Auslander-Reiten 理論が知られている. アルゴリズム的な方法は一部の Quiver に対して与えられている. (行列の行基本変形の延長)

Item 3 について: Gabriel の定理. 次は同値:

1. Q の直既約表現が有限種類しかない.
2. Q は (simply laced) Dynkin 図形に向きをつけたもの.

ただし, (simply laced) Dynkin 図形とは, A_n ($n > 0$), D_n ($n \leq 4$), E_n ($n \in \{6, 7, 8\}$) のこと:

$$\begin{array}{l} A_n : \bullet_1 - \bullet_2 - \dots - \bullet_n \\ D_n : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \dots - \bullet_{n-1} \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad \bullet_0 \\ E_6 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \dots - \bullet_{6-1} \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad \bullet_0 \\ E_7 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \dots - \bullet_{7-1} \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad \bullet_0 \\ E_8 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \dots - \bullet_{8-1} \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad \bullet_0 \end{array}$$

^{*3} 無限回のステップからなる手続きを含む

1.4 A_n 型 quiver の表現と関連する話

実は,

- $Q = \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet$ のときには, Q の表現の直既約分解はジョルダン標準形を求めることに相当する.
- $Q = \bullet \rightarrow \bullet$ のときには, Q の表現の直既約分解はランク標準形 (スミス標準形) $\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ を求めることに相当する.

これらについては前半で復習する.

1.4 A_n 型 quiver の表現と関連する話

ここでは, A_n 型 quiver の表現の応用などについて述べる.

1.4.1 A_n 型 quiver の表現について

$$Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \cdots \bullet_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \bullet_n$$

について考える. $1 \leq i \leq j \leq n$ に対し, 区間表現 $I[i, j] = (V_\bullet, f_\bullet)$ を次で定める:

1. $x \in Q_0$ に対し,

$$V_x = \begin{cases} \mathbb{C} & (i \leq x \leq j) \\ \{0\} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

2. $\alpha_k \in Q_1$ に対し,

$$f_{\alpha_k} = \begin{cases} \underline{0}: \{0\} \rightarrow \{0\} & (1 \leq k < i-1) \\ \underline{0}: \{0\} \rightarrow \mathbb{C} & (k = i-1) \\ \text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & (i \leq k < j) \\ \underline{0}: \mathbb{C} \rightarrow \{0\} & (k = j) \\ \underline{0}: \{0\} \rightarrow \{0\} & (j+1 \leq k). \end{cases}$$

つまり,

$$I[i, j]: \underbrace{0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} 0}_{i-1} \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{C}}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{C}}} \cdots \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}}_{n-(i-1)-(j-1)} \xrightarrow{0} \underbrace{0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} 0}_{j-1}.$$

実は, Q の既約表現は, $I[i, j]$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) で (同型を除き) 全部であることが知られている. つまり, Q の表現 $(V_\bullet, f_\bullet)$ は,

$$(V_\bullet, f_\bullet) = I[i_1, j_1] \oplus \cdots \oplus I[i_N, j_N]$$

という形で書ける.

1.4.2 Persistent Homology

ホモロジーとは

大雑把に述べると, 図形 X という幾何学的対象に対し, ホモロジー群 $H(X)$ という代数的対象を定めるものである. 標語的な言い方をすると, $H(X)$ は X の '穴' (の数) に着

目した不変量である。一般的には幾何学的対象よりも代数的対象の方が、同型であるかの判定などにおいて、扱いやすい。一方で、幾何学的対象から代数的対象を作るにあたって、情報が落ちており、大きさなどの情報が抜け落ちる。

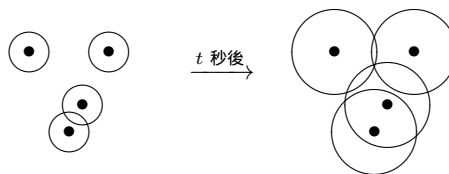
Remark 1.4.1. 模式的に書くなら以下のようなになる:

	幾何学的対象 (図形)		代数的対象 (ベクトル空間/$\mathbb{Z}$-加群).
X :	- 扱いにくい. - 生データ, 知りたい対象.	$\rightsquigarrow H(X)$:	- 扱いやすい. - データが大雑把. (大きさ等の情報がない)

パーシステントホモロジーとは

時刻 t に合わせて変化する図形 X_t を考える.

Example 1.4.2. 例えば以下のようなものを X_t をする: 中心は動かず時刻に合わせて半径が大きくなる円板たちの和集合.



このような図形を考えると、各時刻 t でのホモロジー $H(X_t)$ が得られる。つまり時刻 t に合わせて変化するホモロジー群 (ベクトル空間) が得られる。

Example 1.4.2 の様に

$$t \leq t' \implies X_t \subset X_{t'}$$

という条件をみたしていたら、包含写像

$$\begin{aligned} X_t &\hookrightarrow X_{t'} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

から、線型写像

$$H(X_{t'}) \rightarrow H(X_t)$$

を作ることができる。よって、 $t_1 < \dots < t_n$ を取ると、

$$H(X_1) \rightarrow H(X_2) \rightarrow \dots$$

という A_n 型の表現が得られる。この表現の直既約分解

$$I[i_1, j_1] \oplus \dots \oplus I[i_N, j_N]$$

を考える。 $I[i_k, j_k]$ に含まれるホモロジー類は、時刻 i_k に現れ時刻 j_k に消えることをがわる。標語的な言い方をすると、‘時刻 i_k で生まれ時刻 j_k で消える“穴”がある’ことを意味している。したがって、‘穴’の個数だけでなく、その生存時刻 (大きさ) がわかる。

1.4 A_n 型 quiver の表現と関連する話

Remark 1.4.3. このように, パラメーターによって変化するホモロジー群, (もしくはその直既約表現への分解) をパーシステントホモロジーと呼ぶ. この情報を使ってデータ解析をするというのが流行っている. 例えば, t だけではなく, 2 つのパラメータ (t, s) などに変化する図形のときには, 別の Quiver の表現がでてくることになる.

1.4.3 Leschets 性

多項式環 $A = K[x_1, \dots, x_n]$ を考える. $f \in A$ に現れる単項式が k 次のもののみであるとき, f は k 次斉次多項式であるという. A_k で k 次斉次多項式を集めた集合とする. (ただし, $0 \in A_k$ と約束する.)

$f_1, \dots, f_n \in A$ とし, いずれも斉次多項式であるとする. I を $f_1, \dots, f_n$ で生成されるイデアルとする. つまり $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_A$ とする. 剰余環 $R = A/I$ について考える. $R_k = \{ \bar{f} \in R \mid f \in A_k \}$ とおくと, R_i は K -線型空間であり, $R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k$ と書ける. 一般には R は無限次元の K -線型空間であるが, ここでは, アルチン環であることを仮定し, $R = \bigoplus_{k=0}^s A_k$, $A_s \neq \{0\}$ と書けるとする.

$\bar{l} \in R_1$ とする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \times \bar{l}: R_k & \longrightarrow & R_{k+1} \\ \cup & & \cup \\ \bar{f} & \longmapsto & \bar{f}\bar{l} \end{array}$$

は K -線型写像であり,

$$R_0 \xrightarrow{\times \bar{l}} R_1 \xrightarrow{\times \bar{l}} R_1 \xrightarrow{\times \bar{l}} \dots$$

という表現が得られる. この表現の直既約分解

$$I[i_1, j_1] \oplus \dots \oplus I[i_N, j_N]$$

として,

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_N \leq j_N \leq j_{N-1} \leq \dots \leq j_1$$

となっているとき, $\bar{l}$ は R の広義 Lefschetz 元と呼ぶ.

Lefschetz 元を持つ環は, コホモロジー環などといった面白い環であることが多い.

与えられた環が Lefschetz 元を持つか? もしもつなら, Lefschetz 元は何か? という問題を考えることができる.

今後の予定

- 線型代数の復習—行列の標準形 (証明はせず事実のみを紹介する)
 - 行基本変形
 - 対角化
 - Jordan 標準形
- Quiver の表現に関する概説—直既約表現
 - 定義
 - $\bullet \rightarrow \bullet$ の表現

- (c) $\overset{\bullet}{\circ}_{\alpha}^1$ の表現
- (d) finite type/infinite type
- 3. 関連する話題.
 - (a) パーシステントホモロジー
 - (b) Lefschetz 性

目標は

- 1. 行列の対角化とかができる.
- 2. Quiver という言葉を知っている.

AR はやらない.

目次

第 1 章 Introduction 3

1.1 Quiver (矢筒, 籠 (えびら)) とは? 3

1.2 quiver の表現とは? 4

1.3 Quiver の表現の構造について 6

1.4 A_n 型 quiver の表現と関連する話 7

第 2 章 行列についての復習 13

2.1 行列の用語と記号 13

2.2 基本変形と標準形 16

2.3 連立一次方程式 18

2.4 固有値 20

2.5 正方行列の対角化 21

2.6 Jordan 標準形 23

第 3 章 ベクトル空間と線型写像 25

3.1 数ベクトル空間と行列 25

3.2 ベクトル空間と線型写像 27

3.3 表現行列 29

3.4 基底の取り替え 30

3.5 直和 33

第 4 章 ここまでのまとめ 35

4.1 行列の変形と標準形 35

第 5 章 Quiver の表現 39

5.1 ベクトル空間の同型と線型写像 39

5.2 Quiver と Quiver の射 44

5.3 Quiver の表現 45

5.4 表現の直和 48

5.5 有限表現型 50

第 6 章 多元環の加群と表現 53

6.1 Path algebra 53

6.2 Quiver with Relation 55

12	目次
参考文献	57

第2章

行列についての復習

2.1 行列の用語と記号

K を体とする. また, $K^\times = \{x \in K \mid x \neq 0\}$ とする.

$i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し, $a_{i,j} \in K$ が与えられているとする. このとき,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

のように $a_{i,j}$ を並べたものを (m, n) 行列と呼ぶ.

$$(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

のように表すこともある. この表記では, $(\)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ のカッコの外側にある添字に添字の情報が書かれている. 上段が, 行を表す添字は i であり $1, \dots, m$ の値を取りうることを表している. 下段が, 列を表す添字は j であり $1, \dots, n$ の値を取りうることを表している.

(m, n) -行列 A , (m, l) -行列 B を並べて作った $(m, n+l)$ -行列を

$$(A|B)$$

で表す.

(m, n) -行列 A , (l, n) -行列 B を並べて作った $(m, n+l)$ -行列を

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

で表す.

$(n, 1)$ -行列

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を n -項列ベクトルと呼ぶ.

$(1, n)$ -行列

$$\boldsymbol{a} = (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$$

を n -項行ベクトルと呼ぶ.

(m, n) -行列を m -項列ベクトルを並べたものとして表したもの

$$A = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n)$$

を列ベクトル表示と呼ぶ.

(m, n) -行列を n -項行ベクトルを並べたものとして表したもの

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

を行ベクトル表示と呼ぶ.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

とおき Kronecker's delta と呼ぶ.

(k, l) -成分のみ 1 で他は 0 である (m, n) -行列を行列単位と呼び

$$B_{m,n;k,l} = (\delta_{i,k} \delta_{j,l})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

とおく.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j^{(n)} &= B_{n,1;j,1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおき, n -項基本ベクトルと呼ぶ.

$$\begin{aligned} O_{m,n} &= (0)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおき, 零行列と呼ぶ.

2.1 行列の用語と記号

$$\begin{aligned}
 \text{diag}(a_1, \dots, a_n) &= (a_i \delta_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \\
 &= (a_1 e_1^{(n)} | \dots | a_n e_n^{(n)}) \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

とおき, $(a_1, \dots, a_n$ を対角成分とする) 対角行列と呼ぶ.

$$\begin{aligned}
 E_n &= \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_n) \\
 &= (\delta_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \\
 &= (e_1^{(n)} | \dots | e_n^{(n)}) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

とおき, 単位行列と呼ぶ.

$A_1, \dots, A_n$ を正方行列とする.

$$\begin{aligned}
 A_1 \oplus \dots \oplus A_n &= \text{Diag}(A_1, \dots, A_n) \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

とおき, ブロック対角行列と呼ぶ.

$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ に対し, ${}^t A = (a_{j,i})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ とおき, A の転置と呼ぶ.

Remark 2.1.1. ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

Definition 2.1.2. 以下の条件を満たすとき, B が A の逆行列であるという:

1. $BA = E_n$.
2. $AB = E_n$.

A の逆行列が存在するとき, A は正則であるという.

Remark 2.1.3. 正則行列 A に対し, その逆行列はただ一つである. そこで, A の逆行列を A^{-1} と書く.

Remark 2.1.4. A と B がともに正則であるとき, AB も正則であり, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.

Definition 2.1.5. n 次正方行列 $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$ について考え, A の 1 行目と j 列目

を忘れて得られる $(n-1)$ 次正方行列を $A^{(1,j)}$ とおく.

$$\det(A) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A^{(1,j)}) & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

と定義し, $\det(A)$ を A の行列式と呼ぶ.

Remark 2.1.6. A が正則であることと $\det(A)$ が逆数をもつことは同値である.

Remark 2.1.7. n 次正方行列 A, B と $\alpha \in K$ に対し,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A) \det(B) \\ \det(\alpha A) &= \alpha^n \det(A). \end{aligned}$$

Definition 2.1.8. n 次正方行列 $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ に対し,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$$

と定義し, $\operatorname{tr}(A)$ を A のトレースと呼ぶ.

Remark 2.1.9. n 次正方行列 A, B と $\alpha \in K$ に対し,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \\ \operatorname{tr}(\alpha A) &= \alpha \operatorname{tr}(A), \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA). \end{aligned}$$

2.2 基本変形と標準形

Definition 2.2.1. $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ を (m,n) -行列とする. $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し,

$$p_i = \min \{ j \mid a_{i,j} \neq 0 \} \cup \{ \infty \}$$

とおく. $p_i \neq \infty$ のとき, (i, p_i) を A の i 行目のピボットと呼ぶことにする.

次の条件を満たすとき, A は行階段行列であるという:

1. $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. (ただし, $\infty < \infty$ とする.)

次の条件を満たすとき, A は被約行階段行列であるという:

1. A は行階段行列.
2. $p_i \neq \infty \implies p_i$ 列目は, i 行目は 1, それ以外は 0.

Definition 2.2.2. $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ を (m,n) -行列とする.

${}^t A$ が行階段行列であるとき, A は列階段行列であるという.

${}^t A$ が被約行階段行列であるとき, A は被約列階段行列であるという.

Definition 2.2.3.

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & O_{r,n-r} \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{array} \right)$$

という (m,n) 行列を階数 r の階数標準形と呼ぶ.

2.2 基本変形と標準形

Remark 2.2.4. 階数 r の階数標準形は、被約行階段行列でもあり、被約列階段行列でもある。

Definition 2.2.5. n 次正方行列 $F_n(i; c)$, $G_n(i, j; c)$, $H_n(i, j)$ を以下で定義する:

1. $i \in \{1, \dots, n\}$, $c \in K^\times$ に対し,

$$\begin{aligned} F_n(i; c) &= E_n + (c - 1)B_{n,n}(i, i) \\ &= \text{diag}(1, \dots, 1, \underbrace{c}_i, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

2. $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $c \in K$ に対し,

$$G_n(i, j; c) = E_n + cB_{n,n}(i, j).$$

3. $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ に対し,

$$H_n(i, j) = E_n + B_{n,n}(i, j) + B_{n,n}(j, i) - B_{n,n}(i, i) - B_{n,n}(j, j).$$

これらを (K 上の) 基本行列と呼ぶ。

Proposition 2.2.6. 基本行列は正則であり,

$$\begin{aligned} F_n(i; c)^{-1} &= F_n(i; c^{-1}), \\ G_n(i, j; c)^{-1} &= G_n(i, j; -c), \\ H_n(i, j)^{-1} &= H_n(i, j). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.7. 基本行列の転置も基本行列であり

$$\begin{aligned} {}^tF_n(i; c) &= F_n(i; c), \\ {}^tG_n(i, j; c) &= G_n(j, i; c), \\ {}^tH_n(i, j) &= H_n(i, j). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.8. A を (n, l) 行列とする.

1. $F_n(i; c)A$ は “ A の i 行目を c 倍して” 得られる行列.
2. $G_n(i, j; c)A$ は “ A の i 行目に j 行目の c 倍を加えて” 得られる行列.
3. $H_n(i, j)A$ は “ A の i 行目と j 行目を入れ替えて” 得られる行列.

Remark 2.2.9. Proposition 2.2.8 の操作は行基本変形と呼ばれる。

Proposition 2.2.10. A を (m, n) 行列とする.

1. $AF_n(i; c)$ は “ A の i 列目を c 倍して” 得られる行列.
2. $AG_n(i, j; c)$ は “ A の j 列目に i 列目の c 倍を加えて” 得られる行列.
3. $AH_n(i, j)$ は “ A の i 列目と j 列目を入れ替えて” 得られる行列.

Remark 2.2.11. Proposition 2.2.10 の操作は列基本変形と呼ばれる。

Proposition 2.2.12. A を (m, n) -行列とする. A に (0 回以上, 有限回の) 行基本変形を行うことで、被約行階段行列に変形できる。

Proposition 2.2.13. A を (m, n) -行列とする. 次の条件を満たす m 次正則行列 P が存在する:

1. PA は被約行階段行列.

Proposition 2.2.14. A を (m, n) -行列とする. P, P' は m 次正則行列で, $PA, P'A$ は被約行階段行列であるとする. このとき, $PA = P'A$.

Proposition 2.2.15. A を (m, n) -行列とする. A に (0 回以上, 有限回の) 列基本変形を行うことで, 被約行階段行列に変形できる.

Proposition 2.2.16. A を (m, n) -行列とする. 次の条件を満たす n 次正則行列 P が存在する:

1. AP は被約列階段行列.

Proposition 2.2.17. A を (m, n) -行列とする. P, P' は n 次正則行列で, AP, AP' は被約列階段行列であるとする. このとき, $AP = AP'$.

Proposition 2.2.18. A を (m, n) -行列とする. A に (0 回以上, 有限回の) 行基本変形と列基本変形を行うことで, 階数標準形に変形できる.

Definition 2.2.19. A を (m, n) -行列とする. A に (0 回以上, 有限回の) 行基本変形と列基本変形を行うことで, 階数 r の階数標準形に変形できるとき, A の階数は r であるといい, $\text{rank}(A) = r$ と書く.

Remark 2.2.20. (m, n) -行列全体を考える.

1. 行基本変形で移り合う行列を '同じ' と思う同値関係を考える. つまり正則行列 P に対して $PA \sim A$ とする. このとき, 被約行階段行列全体は完全代表系になっている.
2. 列基本変形で移り合う行列を '同じ' と思う同値関係を考える. つまり正則行列 Q に対して $AQ \sim A$ とする. このとき, 被約列階段行列全体は完全代表系になっている.
3. 行基本変形と列基本変形で移り合う行列を '同じ' と思う同値関係を考える. つまり正則行列 P, Q に対して $PAQ \sim A$ とする. このとき, 階数標準形全体は完全代表系になっている.

2.3 連立一次方程式

A を (m, n) -行列とし, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m,1}$ とする. n 個の未知数

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に関する方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

2.3 連立一次方程式

を斉次連立一次方程式と呼んだ。この方程式の解の集合を $\mathcal{K}(A)$ と書くことにする。つまり、

$$\mathcal{K}(A) = \{ \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \}$$

である。

Proposition 2.3.1. (m, n) -行列 A に対し, $\mathcal{K}(A)$ はベクトル空間であり, $\dim(\mathcal{K}(A)) = n - \text{rank}(A)$.

Corollary 2.3.2. n -次正方行列 A に対し, 以下は同値:

1. $\mathcal{K}(A) = \{ \mathbf{0} \}$.
2. $\dim(\mathcal{K}(A)) = 0$.
3. $\text{rank}(A) = n$.
4. $\det(A) \neq 0$.

Corollary 2.3.3. n -次正方行列 A に対し, 以下は同値:

1. $\mathcal{K}(A) \neq \{ \mathbf{0} \}$.
2. $\dim(\mathcal{K}(A)) > 0$.
3. $\text{rank}(A) < n$.
4. $\det(A) = 0$.

Remark 2.3.4. どのような A に対しても, $\mathbf{0} \in \mathcal{K}(A)$ であるので, $\mathbf{0}$ を $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の非自明な解と呼ぶ。

A を (m, n) -行列とし, $\boldsymbol{b}$ を m -項列ベクトルとする。 n 個の未知数

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に関する方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を連立一次方程式と呼んだ。 A を連立一次方程式の係数行列と呼ぶ。 $(A|\boldsymbol{b})$ を連立一次方程式の拡大係数行列と呼ぶ。この方程式の解の集合を $\mathcal{F}(A, \boldsymbol{b})$ と書くことにする。つまり、

$$\mathcal{F}(A, \boldsymbol{b}) = \{ \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \}.$$

Proposition 2.3.5. 正則行列 P に対し,

$$\mathcal{F}(A, \boldsymbol{b}) = \mathcal{F}(PA, P\boldsymbol{b}).$$

Proposition 2.3.6. $\boldsymbol{v}_0$ が $A\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{b}$ を満たすとする。このとき,

$$\mathcal{F}(A, \boldsymbol{b}) = \{ \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathcal{K}(A) \}.$$

Definition 2.3.7. $\dim(\mathcal{K}(A))$ を方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の自由度と呼ぶ。

2.4 固有値

A を n 次正方行列, $\lambda \in K$ とする.

$$V(A, \lambda) = \{ x \mid Ax = \lambda x \}$$

とおく.

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\iff Ax - \lambda x = 0 \\ &\iff (A - \lambda E_n)x = 0 \end{aligned}$$

であるので,

$$V(A, \lambda) = \mathcal{K}(A - \lambda E_n)$$

である. よって $V(A, \lambda)$ は線型空間である.

Definition 2.4.1. $\dim(V(A, \lambda)) > 0$ のとき, λ を A の固有値と呼ぶ. また $V(A, \lambda)$ を固有値 λ に属する固有空間と呼び, $v \in V(A, \lambda)$ を, 固有値 λ に属する固有ベクトルと呼ぶ.

Example 2.4.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -1\right)$$

である.

Remark 2.4.3. 与えられたベクトル x が A の固有ベクトルかどうか調べるには, Ax を計算して λx となっていることをいえば良い.

固有ベクトルを見つけるにはどうしたらよいかについて以下では考える. A の固有値 λ を探すということは, $\dim(V(A, \lambda)) > 0$ となる λ を探すということである. つまり $\dim(\mathcal{K}(A - \lambda E_n)) > 0$ となる λ を探すということである. これは $\det(A - \lambda E_n) = 0$ となる λ を探せばよい. したがって, λ に関する方程式 $\det(A - \lambda E_n) = 0$ を解くことで固有値が求められる.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が A の固有値であるときに, $V(A, \lambda_i)$ を決定するには, $(A - \lambda_i)x = 0$ という x に関する方程式の解を求めれば良い.

Proposition 2.4.4. A を n 次正方行列とし, $\det(A - \lambda E_n) = 0$ の解を (重複度を込めて) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする.

1. $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
2. $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.
3. 次が同値:

2.5 正方行列の対角化

- (a) A が正則.
 (b) 0 は A の固有値ではない.

Proposition 2.4.5. A を n 次正方行列とする.

- $\lambda \neq \lambda' \implies V(A, \lambda) \cap V(A, \lambda') = \{0\}$.
- $\lambda \neq \lambda', v \in V(A, \lambda), w \in V(A, \lambda') \implies (v, w)$ は一次独立.
- n 個の異なる固有値をもつなら, 固有値 λ に対し, $\dim(V(A, \lambda)) = 1$.
- λ が, $\det(A - \lambda E_n) = 0$ の m 重根ならば, $1 \leq \dim(V(A, \lambda)) \leq m$.

2.5 正方行列の対角化

Definition 2.5.1. A を n 次正方行列とする. 次の条件を満たすとき, A は P で対角化できるという:

- 次の条件を満たす正則行列 P と $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ が存在する:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Problem 2.5.2. どんな正方行列なら対角化できるのか?

Problem 2.5.3. 対角化可能な行列 A に対し, どうやって P と $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を見つけるか?

Proposition 2.5.4. A を n 次正方行列とし, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ とする. このとき, 以下は同値.

- P が以下を満たす:
 - P は正則.
 - $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- $P = (x_1 | \dots | x_n)$ とすると, 以下の条件を満たす:
 - $(x_1, \dots, x_n)$ は一次独立.
 - x_i は固有値 λ_i に属する A の固有ベクトル.

Proof.

■ Item 1 $\implies$ Item 2 $P = (x_1 | \dots | x_n)$ とする. $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ であるので, $AP = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 一方,

$$\begin{aligned} AP &= A(x_1 | \dots | x_n) = (Ax_1 | \dots | Ax_n), \\ P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= (x_1 | \dots | x_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 x_1 | \dots | \lambda_n x_n). \end{aligned}$$

したがって, $Ax_i = \lambda_i x_i$.

■ Item 2 $\implies$ Item 1 $(x_1, \dots, x_n)$ は一次独立であるので, $P = (x_1 | \dots | x_n)$ は正則である. また,

$$\begin{aligned} AP &= A(x_1 | \dots | x_n) \\ &= (Ax_1 | \dots | Ax_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda_1 \mathbf{x}_1 | \cdots | \lambda_n \mathbf{x}_n) \\
&= (\mathbf{x}_1 | \cdots | \mathbf{x}_n) \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\
&= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).
\end{aligned}$$

であるので, $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. □

Remark 2.5.5. 固有ベクトルによって対角化可能性がわかる.

Proposition 2.5.6. A を n 次正方行列とし, $\det(A - \lambda E_n) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda_i)^{m_i}$ とする. このとき, 以下は同値:

1. A は対角化可能.
2. n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルが存在する.
3. $\mathbb{C}^n = V(A, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(A, \lambda_l)$.
4. すべての i で, $\dim(V(A, \lambda_i)) = m_i$.
5. $\operatorname{rank}(A - \lambda_i E_n) = n - m_i$

特別な正方行列のクラスは対角化可能であることがすぐわかる.

Example 2.5.7. n 個の異なる固有値をもつ n 次正方行列は, 対角化可能である.

Example 2.5.8. n 次実対称行列は, 固有値は実数である. また, 成分が実数である n 個の固有ベクトルを互いに直交するようにとれる. したがって, 直交行列で対角化可能である. 対角化に使う直交行列は, 一旦 n 固有ベクトルを求めてから, Gram-Schmidt の直交化法により直交化することで求めることができる.

Remark 2.5.9. A が対角化可能なら得られる対角行列は成分の並び替えを除いてただ一つである.

この事実は次のように考えることもできる: n -次正方行列全体を考え, 正則行列 P に対して $P^{-1}AP \sim A$ とする同値関係を考える. このとき, 対角化可能な行列 A を含む同値類の代表元として A を対角化した行列をとることができる. ただし, 一般には対角化はできないことに注意が必要である. 今は, n -次正方行列全体を考えたが, 対角化可能な行列の集合にこの同値関係を制限して考えれば, 対角行列を使って完全代表系を与えることができる. 例えば, n 次実対称行列全体を考えたときには, 実数を成分とする対角行列で値が大きい順に並んだものの全体 $\{\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ が完全代表系になる.

Remark 2.5.10. 対角化できると, A^k を計算するのに次の様に計算することができる:

$$\begin{aligned}
P^{-1}A^kP &= P^{-1} \underbrace{A \cdots A}_k P \\
&= \underbrace{(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)}_k \\
&= (P^{-1}AP)^k \\
&= (\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^k \\
&= \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)
\end{aligned}$$

であるので, $A^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$.

2.6 Jordan 標準形

A を正方行列とする. A は対角化できるときもあれば, できないときもあった. 対角化できないときでもブロック対角にはできないだろうかという問題について考える.

Definition 2.6.1.

$$J_n(\alpha) = \alpha E_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_{n,n}(i, i+1)$$

をサイズ n , 固有値 α の Jordan cell と呼ぶ.

Remark 2.6.2. サイズが 1 の場合には, $J_1(\alpha) = \alpha E_1 = (\alpha)_{i=1}^{j=1}$ という $(1, 1)$ -行列である.

Theorem 2.6.3. A を $\mathbb{C}$ 上の正方行列とする. このとき次を満たす正則行列 P と, $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$, $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ が存在する:

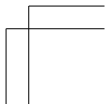
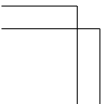
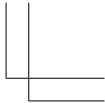
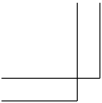
$$P^{-1}AP = \text{Diag}(J_{n_1}(\alpha_1), \dots, J_{n_l}(\alpha_l)). \quad (2.1)$$

Remark 2.6.4. Theorem 2.6.3 における Equation (2.1) の右辺を Jordan 標準形と呼ぶ. これは, Jordan cells の並び替えを許してただ一つに定まる.

この事実は次のように考えることもできる: n -次正方行列全体を考え, 正則行列 P に対して $P^{-1}AP \sim A$ とする同値関係を考える. このとき, A を含む同値類の代表元として A の Jordan 標準形をとることができる. また, Jordan cells を並び替えたものから一つずつ選ぶことで完全代表系を得ることもできる.

Remark 2.6.5. 与えられた正方行列に対し, Jordan 標準形を求めるアルゴリズムが存在するが, ここでは割愛する.

Remark 2.6.6. $(J_n(\alpha))^k$ は割と簡単に求められる. よって A^k を Jordan 標準形を通して計算することができる.



第3章

ベクトル空間と線型写像

3.1 数ベクトル空間と行列

K を体とする.

$$\begin{aligned} K^n &= \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \text{ は } n \text{ 項数ベクトル} \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \right\} \end{aligned}$$

とおき, n 次元数ベクトル空間と呼ぶ.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ に対し,}$$

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1^{(n)} + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n^{(n)}$$

とかける. また, この表記は一意的である. つまり,

$$x_1 \boldsymbol{e}_1^{(n)} + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n^{(n)} = x'_1 \boldsymbol{e}_1^{(n)} + \cdots + x'_n \boldsymbol{e}_n^{(n)} \implies x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n.$$

Definition 3.1.1. 以下の条件を満たすとき, 写像 $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ は (K -) 線型であるという:

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n, \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$.
2. $\forall \boldsymbol{x} \in K^n, \forall \alpha \in K, \varphi(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \varphi(\boldsymbol{x})$.

Definition 3.1.2. 線型写像 $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{Img}(\varphi) &= \{ \varphi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in K^n \}, \\ \text{Ker}(\varphi) &= \{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid \varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \} \end{aligned}$$

とおき, それぞれ, φ の像, φ の核と呼ぶ.

Example 3.1.3. $\text{id}_{K^n}: K^n \rightarrow K^n$ は線型.

Example 3.1.4. A を (m, n) -行列とする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \mu_A & : & K^n \longrightarrow K^m \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto A\boldsymbol{x} \end{array}$$

とおくと μ_A は線型. また $\text{Ker}(\mu_A) = \mathcal{K}(A)$ である.

Proposition 3.1.5. $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ を線型写像とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \varphi(\mathbf{e}_1^{(n)}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n &= \varphi(\mathbf{e}_n^{(n)}) \end{aligned}$$

とし, $A = (\mathbf{a}_1 | \cdots | \mathbf{a}_n)$ という (m, n) -行列を考える. このとき, $\mu_A = \varphi$.

Proof. まず $\mathbf{e}_j^{(n)}$ について考える.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_j^{(n)}) &= \mathbf{a}_j, \\ \mu_A(\mathbf{e}_j^{(n)}) &= A\mathbf{e}_j^{(n)} \\ &= A \text{ の } j \text{ 列目} \\ &= \mathbf{a}_j \end{aligned}$$

となるので $\varphi(\mathbf{e}_j^{(n)}) = \mathbf{a}_j$.

つぎに, 一般の場合について考える.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1^{(n)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n^{(n)} \in K^n$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1^{(n)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n^{(n)}) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1^{(n)}) + \cdots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n^{(n)}) \\ \mu_A(\mathbf{x}) &= \mu_A(x_1\mathbf{e}_1^{(n)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n^{(n)}) \\ &= x_1\mu_A(\mathbf{e}_1^{(n)}) + \cdots + x_n\mu_A(\mathbf{e}_n^{(n)}) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1^{(n)}) + \cdots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n^{(n)}) \end{aligned}$$

となる.

したがって, $\varphi = \mu_A$. □

Corollary 3.1.6. $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ を線型写像とする. このとき, 次を満たす (m, n) -行列 A がただ一つ存在する:

$$\varphi = \mu_A.$$

とくに $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ とすると, $a_{i,j}$ は $\varphi(\mathbf{e}_j^{(n)})$ の第 i 成分.

Proposition 3.1.7. B を (m, n) -行列, A を (l, m) -行列とする. このとき, $\mu_A \circ \mu_B = \mu_{AB}$. つまり次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\mu_{AB}} & K^l \\ & \searrow \mu_B \quad \nearrow \mu_A & \\ & K^m & \end{array}.$$

3.2 ベクトル空間と線型写像

Proof. $\mu_A \circ \mu_B(e_j^{(n)})$ の第 i 成分が, AB の (i, j) -成分と一致することを示せばよい. そのため, $\mu_A \circ \mu_B(e_j^{(n)})$ が, AB の j 列目と一致することを示す.

$$B = (b_1 | \cdots | b_l)$$

とする. $AB = (Ab_1 | \cdots | Ab_l)$ である. よって, $\mu_{AB}(e_j^l) = Ab_j$ である. 一方,

$$\begin{aligned} (\mu_A \circ \mu_B)(e_j^{(l)}) &= \mu_A(Be_j^l) \\ &= \mu_A(b_j) \\ &= Ab_j. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.8. $\mu_{E_n} = \text{id}_{K^n}$ である. A を n 次正方行列とすると以下が成り立つ:

1. A が正則であることと, μ_A が全単射であることは同値.
2. A が正則ならば, $\mu_{A^{-1}} = (\mu_A)^{-1}$.

Proof. $E_n x = x$ であることから, $\mu_{E_n} = \text{id}_{K^n}$ は明らか. また, A を正則とすると,

$$\begin{aligned} \mu_{A^{-1}} \circ \mu_A &= \mu_{A^{-1}A} = \mu_{E_n} = \text{id} \\ \mu_A \circ \mu_{A^{-1}} &= \mu_{AA^{-1}} = \mu_{E_n} = \text{id} \end{aligned}$$

となるので, μ_A は全単射であり, $\mu_{A^{-1}} = (\mu_A)^{-1}$. 一方, μ_A を全単射とすると逆写像 $(\mu_A)^{-1}$ も線型である. したがって, $\mu_B = (\mu_A)^{-1}$ をみたす B がとれるが, この B に対し,

$$\begin{aligned} \mu_{BA} &= \mu_B \circ \mu_A = \text{id} = \mu_{E_n} \\ \mu_{AB} &= \mu_A \circ \mu_B = \text{id} = \mu_{E_n} \end{aligned}$$

となり, $AB = BA = E_n$ となるので, B は A の逆行列である. よって A は正則である. □

3.2 ベクトル空間と線型写像

V の元同士の和と K の元によるスカラー倍が定義されている V を, K -ベクトル空間と呼んだ. V の加法に関する零元を 0_V と書く.

Example 3.2.1. K^n は K -ベクトル空間

Example 3.2.2. K^n は K -ベクトル空間

Example 3.2.3. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ -ベクトル空間であるが, $\mathbb{R}$ -ベクトル空間でもある.

Definition 3.2.4. V, W を K -ベクトル空間とする. 以下の条件を満たすとき, 写像 $\varphi: V \rightarrow W$ は (K) -線型であるという:

1. $\forall x, y \in V, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
2. $\forall x \in V, \forall \alpha \in K, \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

Definition 3.2.5. 線型写像 $\varphi: V \rightarrow W$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{Img}(\varphi) &= \{ \varphi(x) \mid x \in V \}, \\ \text{Ker}(\varphi) &= \{ x \in V \mid \varphi(x) = 0 \} \end{aligned}$$

とおき、それぞれ、 φ の像、 φ の核と呼ぶ。

Example 3.2.6. V を K -ベクトル空間とする。 $\text{id}_V: V \rightarrow V$ は K -線型である。

Example 3.2.7. V, W を K -ベクトル空間とし、 $\varphi: V \rightarrow W$ は K -線型であるとする。 φ が全単射であるとき、逆写像 $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$ も線型。

Example 3.2.8. V を K -ベクトル空間とし、 $v_1, \dots, v_n \in V$ とする。

$$\begin{array}{ccc} \pi_{(v_1, \dots, v_n)} & : & K^n \longrightarrow V \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \end{array}$$

とする。このとき、 $\pi_{(v_1, \dots, v_n)}$ は K -線型である。

Definition 3.2.9. $\varphi: V \rightarrow W$ を K -線型写像とする。次の条件を満たすとき、 φ を同型写像と呼ぶ：

1. 以下の条件を満たす線型写像 $\psi: W \rightarrow V$ が存在する：
 - (a) $\varphi \circ \psi = \text{id}_W$.
 - (b) $\psi \circ \varphi = \text{id}_V$.

V から W への同型写像があるとき、 V と W は同型であるといい $V \simeq W$ と書く。

Remark 3.2.10. V と W が同型ならば、 V と W はベクトル空間としては同じものだと思うことができる。

Proposition 3.2.11. V, W を K -ベクトル空間とし、 φ を V から W への写像とする。このとき以下は同値：

1. φ は K -線型同型写像である。
2. φ は K -線型写像であり全単射である。

Proposition 3.2.12. $\varphi: V \rightarrow W$ を K -線型写像とする。このとき、 φ が単射であることと、 $\text{Ker}(\varphi) = \{0_V\}$ は同値である。

Definition 3.2.13. V を K -ベクトル空間とし、 $v_1, \dots, v_n \in V$ とする。次の条件を満たすとき、 $(v_1, \dots, v_n)$ は一次独立であるという：

1. $\pi_{v_1, \dots, v_n}$ が単射。

Remark 3.2.14. V を K -ベクトル空間とし、 $v_1, \dots, v_n \in V$ とする。以下は同値である：

1. $(v_1, \dots, v_n)$ は一次独立。
2. $\text{Ker}(\pi_{v_1, \dots, v_n}) = \{0\}$.
3. $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V \implies a_1 = \dots = a_n = 0$.

Definition 3.2.15. V を K -ベクトル空間とし、 $v_1, \dots, v_n \in V$ とする。次の条件を満たすとき、 $(v_1, \dots, v_n)$ は V の生成系であるという：

3.3 表現行列

1. $\pi_{v_1, \dots, v_n}$ が全射.

Remark 3.2.16. V を K -ベクトル空間とし, $v_1, \dots, v_n \in V$ とする. 以下は同値である:

1. $(v_1, \dots, v_n)$ は V の生成系.
2. $\text{Img}(\pi_{v_1, \dots, v_n}) = V$.
3. $V = \{ a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_i \in K \}$.

Definition 3.2.17. V を K -ベクトル空間とし, $v_1, \dots, v_n \in V$ とする. 以下の条件を満たすとき, $(v_1, \dots, v_n)$ は V の基底であるという:

1. $(v_1, \dots, v_n)$ は V の生成系.
2. $(v_1, \dots, v_n)$ は一次独立.

Remark 3.2.18. V を K -ベクトル空間とし, $v_1, \dots, v_n \in V$ とする. 以下は同値である:

1. $(v_1, \dots, v_n)$ は V の基底.
2. $\pi_{v_1, \dots, v_n}$ が全単射.
3. $\pi_{v_1, \dots, v_n}$ が同型写像.

Remark 3.2.19. V を K -ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底とする. このとき, K^n と V は同型である. V の次元は n であるといい $\dim(V) = n$ と書く.

$$\begin{array}{ccc} \pi_{(v_1, \dots, v_n)} : & K^n & \longrightarrow V \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & \longmapsto a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \end{array}$$

は同型写像である. したがって, この逆写像

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_{(v_1, \dots, v_n)} = (\pi_{(v_1, \dots, v_n)})^{-1} : & V & \longrightarrow K^n \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & a_1 v_1 + \dots + a_n v_n & \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array}$$

も同型写像である. $\varepsilon_{(v_1, \dots, v_n)}(v_k) = e_k^{(n)}$ となっている.

3.3 表現行列

V, W を K -ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底, $(w_1, \dots, w_m)$ を W の基底とする. また, $\varphi: V \rightarrow W$ を K -線型写像とする. このとき,

$$\pi_{w_1, \dots, w_m}^{-1} \circ \varphi \circ \pi_{v_1, \dots, v_n}: K^n \rightarrow K^m$$

は線形写像である. K^n から K^m への線形写像なので

$$\mu_A = \pi_{w_1, \dots, w_m}^{-1} \circ \varphi \circ \pi_{v_1, \dots, v_n}$$

を満たす (m, n) 行列がとれる. 図式で表すと

$$\begin{array}{ccc}
 K^n & \xrightarrow{\mu_A} & K^m \\
 \pi_{v_1, \dots, v_m} \downarrow & & \uparrow \pi_{w_1, \dots, w_m}^{-1} \\
 V & \xrightarrow{\varphi} & W
 \end{array}$$

となる. この行列 A を, φ の基底 $(v_1, \dots, v_n)$, $(w_1, \dots, w_m)$ に関する表現行列と呼ぶ.

Remark 3.3.1. 表現行列 $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ の (i,j) -成分 $a_{i,j}$ は,

$$\pi_{w_1, \dots, w_m}^{-1} \circ \varphi \circ \pi_{v_1, \dots, v_m}(e_j^{(n)})$$

を K^m の基底 $(e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)})$ の線型結合として書いた際の $e_i^{(m)}$ の係数である. つまり, $\varphi(v_j)$ を W の基底 $(w_1, \dots, w_m)$ の線型結合として書いた際の w_i の係数である.

Proposition 3.3.2. V, W, U を K -ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底, $(w_1, \dots, w_m)$ を W の基底, $(u_1, \dots, u_l)$ を U の基底とする. このとき, 線型写像 $\varphi: V \rightarrow W$, $\psi: W \rightarrow U$ について考える. φ の $(v_1, \dots, v_n)$, $(w_1, \dots, w_m)$ に関する表現行列を A とし, ψ の $(w_1, \dots, w_m)$, $(u_1, \dots, u_l)$ に関する表現行列を B とする. このとき, $\psi \circ \varphi$ の $(v_1, \dots, v_n)$, $(u_1, \dots, u_l)$ に関する表現行列は BA となる. 図式で表すと

$$\begin{array}{ccccc}
 K^n & \xrightarrow{\mu_A} & K^m & \xrightarrow{\mu_B} & K^l \\
 \pi_{v_1, \dots, v_m} \downarrow & & \pi_{w_1, \dots, w_m}^{-1} \downarrow & & \uparrow \pi_{u_1, \dots, u_k}^{-1} \\
 V & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\psi} & U
 \end{array}$$

となる.

Remark 3.3.3. Proposition 3.3.2 は, 標語的にいうと, ‘線型写像の合成 $\psi \circ \varphi$ の表現行列は, それぞれの表現行列の積である’ となる. ただし, そのためには, φ の終域と ψ の定義域の基底を共通のもので考えなければいけない. 線型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ のような定義域と終域が等しいものを考えるときには, 自分自身の合成 $\varphi \circ \varphi: V \rightarrow V$ を考えることなどが重要になる. そういった計算のためには, 定義域と終域の基底は同じもので表現行列を考える必要がある. 定義域と終域の基底は同じものとするとき, 基底 $(v_1, \dots, v_n)$, $(v_1, \dots, v_n)$ に関する φ の表現行列というところを, 単に, 基底 $(v_1, \dots, v_n)$ に関する φ の表現行列ということがある.

表現行列から, もとの線型写像の情報を読み取ることもできる.

Proposition 3.3.4. A が φ の表現行列であるとき,

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Img}(\mu_A)) = \dim(\text{Img}(\varphi)).$$

3.4 基底の取り替え

V を K -ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n)$, $(v'_1, \dots, v'_n)$ を V の基底とする. このとき, K 線型写像

$$\pi_{v'_1, \dots, v'_n}^{-1} \circ \pi_{v_1, \dots, v_n}: K^n \rightarrow K^n$$

に対し, $\mu_P = \pi_{v'_1, \dots, v'_n}^{-1} \circ \pi_{v_1, \dots, v_n}$ を満たす n 次正方行列 P がとれる. 図式で表すと,

3.4 基底の取り替え

$$\begin{array}{ccc}
 K^n & \xrightarrow{\mu_P} & K^n \\
 \pi_{v_1, \dots, v_n} \searrow & & \nearrow \pi_{v'_1, \dots, v'_n}^{-1} \\
 & K^m &
 \end{array}$$

となる. $\pi_{v'_1, \dots, v'_n}^{-1} \circ \pi_{v_1, \dots, v_n}$ は全単射なので, P は正則. P を $(v_1, \dots, v_n)$ から $(v'_1, \dots, v'_n)$ への基底の変換行列と呼ぶ.

基底を取り替えたとき表現行列がどうなるかは, 基底の変換行列により記述できる.

Proposition 3.4.1. V を K -ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n)$ を V の基底とする. $(v_1, \dots, v_n)$ から $(v'_1, \dots, v'_n)$ への基底の変換行列を P とする. また, W を K -ベクトル空間とし, $(w_1, \dots, w_m), (w'_1, \dots, w'_m)$ を W の基底とする. $(w_1, \dots, w_m)$ から $(w'_1, \dots, w'_m)$ への基底の変換行列を Q とする. $\varphi: V \rightarrow W$ を線型写像とし, $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)$ に関する φ の表現行列を A とし, $(v'_1, \dots, v'_n), (w'_1, \dots, w'_m)$ に関する φ の表現行列を A' とする. このとき,

$$\mu_{A'} = \mu_Q \circ \mu_A \circ \mu_{P^{-1}}$$

となるので,

$$A' = QAP^{-1}$$

となる. 図式で表すと

$$\begin{array}{ccccc}
 K^n & \xrightarrow{\mu_A} & & K^m & \\
 \pi_{v_1, \dots, v_n} \searrow & & \pi_{w_1, \dots, w_m}^{-1} \nearrow & & \\
 & V & \xrightarrow{\varphi} & W & \\
 \pi_{v'_1, \dots, v'_n} \nearrow & & \pi_{w'_1, \dots, w'_m}^{-1} \searrow & & \\
 K^n & \xrightarrow{\mu_{A'}} & & K^m & \\
 \mu_P \downarrow & & & & \downarrow \mu_Q
 \end{array}$$

となる.

線型写像 $\varphi: V \rightarrow W$ に対し,

$$[\varphi] = \left\{ A \mid \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_n): V \text{ の基底} \\ (w_1, \dots, w_m): W \text{ の基底} \\ (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m) \text{ に関する } \varphi \text{ の表現行列} \end{array} \right\}$$

とおく. このとき, $[\varphi]$ はどのような集合か考えてみる. $A, A' \in [\varphi]$ とし, A は $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)$ に関する φ の表現行列, A' は $(v'_1, \dots, v'_n), (w'_1, \dots, w'_m)$ に関する φ の表現行列とする. $(v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n)$ は V の基底なので, $(v_1, \dots, v_n)$ から $(v'_1, \dots, v'_n)$ への基底の変換行列を P とする. また, $(w_1, \dots, w_m), (w'_1, \dots, w'_m)$ は W の基底なので, $(w_1, \dots, w_m)$ から $(w'_1, \dots, w'_m)$ への基底の変換行列を Q とする. このとき, $B = PAQ^{-1}$ と書ける. したがって A が φ のある基底に関する表現行列であるとする,

$$[\varphi] = \{ PAQ^{-1} \mid P, Q: \text{正則行列} \}$$

である. n 次元ベクトル空間 V と, m 次元ベクトル空間 W を固定する. $A, B \in [\varphi]$ を満たす線型写像 $\varphi: V \rightarrow W$ が存在するとき, $A \sim B$ とすると, $\sim$ は同値関係である.

$$\{ A: (m, n) \text{ 行列} \} / \sim$$

の完全代表系として,

$$\{ \text{Diag}(E_r, O_{m-r, n-r}) \mid r \in \{0, 1, \dots, \min(m, n)\} \}$$

がとれる.

Remark 3.3.3 でコメントした通り, 定義域と終域が等しい線型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ を考えるときには, 定義域と終域で共通の基底を取ることが一般的である. この場合, Proposition 3.4.1 は次の様に変えられる.

Corollary 3.4.2. V を K -ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n)$ を V の基底とする. $(v_1, \dots, v_n)$ から $(v'_1, \dots, v'_n)$ への基底の変換行列を P とする. $\varphi: V \rightarrow V$ を線型写像とし, $(v_1, \dots, v_n)$ に関する φ の表現行列を A とし, $(v'_1, \dots, v'_n)$ に関する φ の表現行列を A' とする. このとき,

$$\mu_{A'} = \mu_P \circ \mu_A \circ \mu_{P^{-1}}$$

となるので,

$$A' = PAP^{-1}$$

となる. 図式で表すと

$$\begin{array}{ccccc} K^n & & \xrightarrow{\mu_A} & & K^n \\ & \searrow \pi_{v_1, \dots, v_n} & & \nearrow \pi_{v'_1, \dots, v'_n}^{-1} & \\ & & V \xrightarrow{\varphi} W & & \\ & \nearrow \pi_{v'_1, \dots, v'_n} & & \searrow \pi_{v_1, \dots, v_n}^{-1} & \\ K^n & & \xrightarrow{\mu_{A'}} & & K^n \end{array}$$

$\mu_P \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \mu_P$

となる.

線型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ に対し,

$$[\varphi] = \left\{ A \mid \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_n): V \text{ の基底} \\ (v_1, \dots, v_n) \text{ に関する } \varphi \text{ の表現行列} \end{array} \right\}$$

とおく. このとき, $[\varphi]$ はどのような集合か考えてみる. $A, A' \in [\varphi]$ とし, A は $(v_1, \dots, v_n)$ に関する φ の表現行列, A' は $(v'_1, \dots, v'_n)$ に関する φ の表現行列とする. $(v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n)$ は V の基底なので, $(v_1, \dots, v_n)$ から $(v'_1, \dots, v'_n)$ への基底の変換行列を P とする. このとき, $B = PAP^{-1}$ と書ける. したがって A が φ のある基底に関する表現行列であるとする,

$$[\varphi] = \{ PAP^{-1} \mid P: \text{正則行列} \}$$

である. n 次元ベクトル空間 V を固定し, $A, B \in [\varphi]$ を満たす線型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ が存在するとき, $A \sim B$ とすると, $\sim$ は同値関係である.

$$\{ A: n \text{ 次正方行列} \} / \sim$$

の完全代表系として, (並び替えによる重複を除いた) Jordan 標準形からなる集合がとれる.

3.5 直和

n 次元ベクトル空間 V と, m 次元ベクトル空間 W から $n + m$ 次元ベクトル空間を作ることを考える. 例えば,

$$K^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \right\}$$

$$K^m = \left\{ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \mid y_i \in K \right\}$$

に対して,

$$K^{n+m} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \mid \mathbf{x} \in K^n, \mathbf{y} \in K^m \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \mid x_i, y_i \in K \right\}$$

を作るというようなことを行いたい.

3.5.1 内部直和

U を K ベクトル空間とし, $V, W \subset U$ とする. また V, W も (U と同じ演算で) K ベクトル空間となっているとする. このようなとき, V と W は U の部分空間であるという. このとき, V と W の

$$V + W = \{ v + w \mid v \in V, w \in W \}$$

$$V \cap W = \{ v \mid v \in V \text{ かつ } w \in W \}$$

とおく. このとき, $V + W$ も $V \cap W$ も K ベクトル空間. 一般に

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

である. したがって,

$$\dim(V + W) \leq \dim(V) + \dim(W)$$

であり,

$$V \cap W = \{ 0_U \} \iff \dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$$

である.

Definition 3.5.1. $V \cap W = \{ 0_U \}$ であるとき, $V + W$ を V と W の (内部) 直和と呼び, $V \oplus W$ と書く.

Proposition 3.5.2. V, W を U の部分空間とし, $V \cap W = \{0_U\}$ であるとする. $(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底, $(w_1, \dots, w_m)$ を W の基底とすると, $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$ は $V \oplus W$ の基底である.

3.5.2 外部直和

V, W を K ベクトル空間とし,

$$X = \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$$

は,

$$\begin{aligned} (v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w') \\ \alpha(v, w) &= (\alpha v, \alpha w) \end{aligned}$$

という和とスカラー倍でベクトル空間となる. またその次元は, $\dim(V)$ と $\dim(W)$ である. このベクトル空間を V と W の (外部) 直和と呼び, $V \oplus W$ で表す.

Proposition 3.5.3. V, W を U の部分空間とし, $V \cap W = \{0_U\}$ であるとする. V と W の外部直和を X , V と W の内部直和を Y とする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & X \longrightarrow Y \\ & & \Downarrow \\ & & (v, w) \longmapsto v + w \end{array}$$

は同型写像である.

Proposition 3.5.4. V, W を K ベクトル空間とし, $(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底, $(w_1, \dots, w_m)$ を W の基底とする. このとき, $((v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m))$ は外部直和 $V \oplus W$ の基底である.

3.5.3 写像の直和

線型写像 $\varphi: V \rightarrow W, \varphi': V' \rightarrow W'$ が与えられたとき,

$$\begin{array}{ccc} \varphi \oplus \varphi' & : & V \oplus V' \longrightarrow W \oplus W' \\ & & \Downarrow \\ & & (v, v') \longmapsto \varphi(v) + \varphi'(v') \end{array}$$

とおき, φ と φ' の直和と呼ぶ. $\varphi \oplus \varphi'$ は線型写像である.

$(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底, $(v'_1, \dots, v'_{n'})$ を V' の基底とする. このとき, $\hat{v}_i = (v_i, 0_{V'})$, $\check{v}'_i = (0_V, v'_i)$ とおけば, $(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n, \check{v}'_1, \dots, \check{v}'_{n'})$ は $V \oplus V'$ の基底である. 同様に, $(w_1, \dots, w_m)$ を W の基底, $(w'_1, \dots, w'_{m'})$ を W' の基底とする. このとき, $\hat{w}_i = (w_i, 0_{W'})$, $\check{w}'_i = (0_W, w'_i)$ とおけば, $(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m, \check{w}'_1, \dots, \check{w}'_{m'})$ は $W \oplus W'$ の基底である. また, $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)$ に関する線型写像 φ の表現行列を A とし, $(v'_1, \dots, v'_{n'}), (w'_1, \dots, w'_{m'})$ に関する線型写像 φ' の表現行列を A' とする. このとき, 線型写像 $\varphi \oplus \varphi'$ の $(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n, \check{v}'_1, \dots, \check{v}'_{n'}), (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m, \check{w}'_1, \dots, \check{w}'_{m'})$ に関する表現行列は

$$\text{Diag}(A, A')$$

となる. $\text{Diag}(A, A')$ を $A \oplus A'$ と書くこともある.

第 4 章

ここまでのまとめ

4.1 行列の変形と標準形

$PA = B$ を満たす正則行列 P が存在するとき, $A \sim B$ とする. このとき $\sim$ は同値関係である. (m, n) 行列 A に対し, $A \sim S$ を満たす被約行階段行列 S がただ一つ存在する. つまり,

$$\{ A: (m, n) \text{ 行列} \} / \sim$$

の完全代表系として,

$$\{ S: (m, n)\text{-被約行階段行列} \}$$

を取れる.

$AP = B$ を満たす正則行列 P が存在するとき, $A \sim B$ とする. このとき $\sim$ は同値関係である. (m, n) 行列 A に対し, $A \sim S$ を満たす被約列階段行列 S がただ一つ存在する. つまり,

$$\{ A: (m, n) \text{ 行列} \} / \sim$$

の完全代表系として,

$$\{ S: (m, n)\text{-被約列階段行列} \}$$

を取れる.

$QAP = B$ を満たす正則行列 P, Q が存在するとき, $A \sim^2 B$ とする. このとき $\sim^2$ は同値関係である. (m, n) 行列 A に対し, $A \sim^2 S$ を満たす階数標準形がただ一つ存在する. つまり,

$$\{ A: (m, n) \text{ 行列} \} / \sim^2$$

の完全代表系として,

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} E_r & O_{r, n-r} \\ \hline O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{array} \right) \middle| r \in \{ 0, 1, \dots, \min(m, n) \} \right\}$$

を取れる. r が動く範囲は有限なので有限集合である. 階数標準形

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & O_{r, n-r} \\ \hline O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{array} \right)$$

は,

$$E_r \oplus O_{m-r, n-r} = \underbrace{E_1 \oplus \cdots \oplus E_1}_n \oplus O_{m-r, n-r}$$

と書くこともできる.

$P^{-1}AP = B$ を満たす正則行列 P が存在するとき, $A \sim^1 B$ とする. このとき $\sim^1$ は同値関係である. A が対角化可能であるとする. $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \sim A$ を満たす $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がとれる. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は並び替えを除いてただひと組存在する. 例えば, 考える行列として実対称行列のみを考えるならば

$$\{A: n \text{ 次実対称行列}\} / \sim^1$$

の完全代表系として,

$$\{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

が取れる. より一般には, A を n 次正方行列とすると, $A = J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_l, \lambda_l)$ をみたす $(n_1, \lambda_1), \dots, (n_l, \lambda_l)$ が存在する. これらは, 並び替えを除いてただ一組存在する.

$$\{A: n \text{ 次正方行列}\} / \sim^1$$

の完全代表系として,

$$\{J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_l, \lambda_l) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{Z}_{>0}, n_1 + \cdots + n_l = n\}$$

の部分集合をとれる. 固有値が異なると異なる同値類となるので, 無限個の代表が必要となる.

線型写像 $\varphi: V \rightarrow W$ に対し,

$$[\varphi] = \left\{ A \mid \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_n): V \text{ の基底} \\ (w_1, \dots, w_m): W \text{ の基底} \\ (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m) \text{ に関する } \varphi \text{ の表現行列} \end{array} \right\}$$

とおく. このとき, $[\varphi]$ はどのような集合か考えてみる. $(v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n)$ を V の基底とし, $(v_1, \dots, v_n)$ から $(v'_1, \dots, v'_n)$ への基底の変換行列を P とする. また, $(w_1, \dots, w_m), (w'_1, \dots, w'_m)$ を W の基底とし $(w_1, \dots, w_m)$ から $(w'_1, \dots, w'_m)$ への基底の変換行列を Q とする. $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)$ に関する φ の表現行列を A とし, $(v'_1, \dots, v'_n), (w'_1, \dots, w'_m)$ に関する φ の表現行列を A' とする. このとき, 図式

$$\begin{array}{ccccc} K^n & \xrightarrow{\mu_A} & K^n & & \\ & \searrow \pi_{v_1, \dots, v_n} & \nearrow \varepsilon_{v'_1, \dots, v'_n}^{-1} & & \\ & & V \xrightarrow{\varphi} W & & \\ & \nearrow \pi_{v'_1, \dots, v'_n} & \searrow \varepsilon_{v_1, \dots, v_n} & & \\ K^n & \xrightarrow{\mu_{A'}} & K^n & & \\ \mu_P \downarrow & & \downarrow \mu_Q & & \end{array}$$

が可換となるので, $B = PAQ^{-1}$ と書けることがわかる. したがって A が φ のある基底に関する表現行列であるとする,

$$[\varphi] = \{PAQ \mid P, Q: \text{正則行列}\}$$

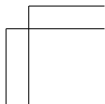
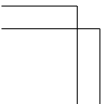
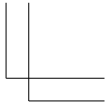
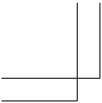
である. $A, B \in [\varphi]$ となるとき, $A \sim B$ とすると, $\sim$ は同値関係である.

$$\{ A: (m, n) \text{ 行列} \} / \sim$$

の完全代表系として,

$$\{ E_r \oplus O_{m-r, n-r} \mid r \in \{ 0, 1, \dots, \min(m, n) \} \}$$

がとれる.



第 5 章

Quiver の表現

5.1 ベクトル空間の同型と線型写像

以下では, 次の 3 つの実ベクトル空間を例として考える:

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ V' &= \{ (x \ y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \\ V'' &= \mathbb{C} = \{ x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

これらの例において, $V \neq V'$ ではある. つまり V と V' は等しくない. しかし $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ だと思えばベクトル空間としては同じものの様に見える.

状況を一般化して次の状況を考える: W と W' をベクトル空間とする. W から W' への同型写像, つまり全単射な線型写像が存在するとき, W と W' は同型であるいい $W \simeq W'$ と書くのであった. W から W' への同型写像 ν が存在するときには, W に関してベクトル空間として言えることは, ν を通して, W' に対しても言える. つまり, W と W' はベクトル空間として区別がつかない.

考えている例では, 例えば

$$\begin{aligned} \nu: \quad & \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & (x \ y) \end{array} \\ \nu': \quad & \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V'' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x \ y) & \longmapsto & x + y\sqrt{-1} \end{array} \\ \nu'': \quad & \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V'' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x + y\sqrt{-1} \end{array} \end{aligned}$$

を考えると V, V', V'' が同型であることがわかる. したがって, これらはこの同型写像を通して同じものだと思えることができる. また, V から V 自身には id_V が同型写像としてとれる. 同型写像はここに挙げたものに限らない, 例えば, 以下は id_V 以外の V から V へ

の同型写像の例である:

$$\nu''': \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

次に, 以下の 4 つの写像を考える:

$$\begin{aligned} \varphi_1: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x \end{array} \\ \varphi_2: \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x \ y) & \longmapsto & x \end{array} \\ \varphi_3: \begin{array}{ccc} V'' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x + y\sqrt{-1} & \longmapsto & x \end{array} \\ \varphi_4: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & y \end{array} \end{aligned}$$

例えば φ_1 と φ_2 は同じものなのか異なるのか?

φ_1 と φ_2 の定義域はそれぞれ V と V' であり, $V \neq V'$ であるから, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ である. しかし一方で $V \simeq V'$ であるからベクトル空間としては見分けがつかない. 定義域が等しくないからといって, φ_1 と φ_2 は異なるといってよいのか?

状況を一般化して次の状況を考える: U, U', W, W' を K ベクトル空間とする. また, $\varphi: U \rightarrow W, \varphi': U' \rightarrow W'$ を線型写像とする. 次の条件をみたす ν_1, ν_2 が存在するとき, $\varphi \sim_2 \varphi'$ と, ここでは, 書くことにする:

1. $\nu_1: U \rightarrow U'$ は同型写像.
2. $\nu_2: W \rightarrow W'$ は同型写像.
3. $\varphi' \circ \nu_1 = \nu_2 \circ \varphi$.

つまり, 図式

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \nu_1 \downarrow \cong & & \nu_2 \downarrow \cong \\ U' & \xrightarrow{\varphi'} & W' \end{array}$$

が可換となる同型 ν_1, ν_2 があるとき, $\varphi \sim_2 \varphi'$ とする. $\varphi \sim_2 \varphi'$ であるとき, φ に関して線型写像と言えることは, φ' についても言える. つまり線型写像として区別がつかない.

今考えている例においては, $\text{id}_{\mathbb{R}}$ が $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への同型写像であるので, 以下のようになる: $\varphi_2 \circ \nu = \text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi_1$ であるので, $\varphi_1 \sim_2 \varphi_2$. $\varphi_3 \circ \nu' = \text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi_1$ であるので, $\varphi_1 \sim_2 \varphi_3$. $\varphi_4 \circ \nu'' = \text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi_1$ であるので, $\varphi_1 \sim_2 \varphi_4$.

$\varphi \sim_2 \varphi'$ となるときに表現行列はどうなっているか調べる. $\varphi: U \rightarrow W, \varphi': U' \rightarrow W'$ とし, $\varphi \sim_2 \varphi'$ とする. $\nu_1: U \rightarrow U', \nu_2: W \rightarrow W'$ を $\varphi' \circ \nu_1 = \nu_2 \circ \varphi$ を満たす同型写像とする. $U \simeq U', W \simeq W'$ である. $(u_1, \dots, u_n)$ を U の基底, $(u'_1, \dots, u'_n)$ を U' の基底, $(w_1, \dots, w_m)$ を W の基底, $(w'_1, \dots, w'_m)$ を W' の基底とする. A を

5.1 ベクトル空間の同型と線型写像

$(u_1, \dots, u_n), (w_1, \dots, w_m)$ に関する φ の表現行列, A' を $(u'_1, \dots, u'_n), (w'_1, \dots, w'_m)$ に関する φ' の表現行列とする. P を $(u_1, \dots, u_n), (u'_1, \dots, u'_n)$ に関する ν_1 の表現行列, Q を $(w_1, \dots, w_m), (w'_1, \dots, w'_m)$ に関する ν_2 の表現行列とする. このとき, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 K^n & \xrightarrow{\mu_A} & K^m \\
 \downarrow \mu_P & \nearrow \nu_1 & \downarrow \nu_2 \\
 & U \xrightarrow{\varphi} W & \\
 \downarrow \mu_P & \nearrow \nu_1 & \downarrow \nu_2 \\
 & U' \xrightarrow{\varphi'} W' & \\
 \downarrow \mu_P & \nearrow \nu_1 & \downarrow \nu_2 \\
 K^n & \xrightarrow{\mu_{A'}} & K^m
 \end{array}$$

が可換となる. したがって,

$$\begin{aligned}
 \mu_{A'} &= \mu_Q \circ \mu_A \circ \mu_P^{-1} \\
 &= \mu_{QAP^{-1}}
 \end{aligned}$$

をみたすので, $A' = QAP^{-1}$ となる. 逆に, φ の表現行列 A と φ' の表現行列 A' に対し, $A' = QAP^{-1}$ を満たす正則行列 Q, P が取れば, 図式を可換にする ν_1, ν_2 を与えることができ, $\varphi \sim_2 \varphi'$ がわかる. まとめると以下ようになる:

Proposition 5.1.1. 線型写像 $\varphi: U \rightarrow W$ と $\varphi': U' \rightarrow W'$ に対し以下は同値:

1. $\varphi \sim_2 \varphi'$
2. 以下の条件を満たす P, Q, A, A' が存在する:
 - (a) P, Q は正則行列.
 - (b) A は φ の表現行列.
 - (c) A' は φ' の表現行列.
 - (d) $QAP = A'$.

正則行列 P, Q に対して, $QAP \sim^2 A$ で定義される, 行列に対する同値関係 $\sim^2$ を思い出すと, 以下の様にも書くことができる.

Proposition 5.1.2. $\varphi: U \rightarrow W$ と $\varphi': U' \rightarrow W'$ を線型写像とする. φ の表現行列 A と φ' の表現行列 A' に対し以下は同値:

1. $\varphi \sim_2 \varphi'$
2. $A \sim^2 A'$.

したがって $[\varphi]_2 = \{ \varphi' \mid \varphi \sim_2 \varphi' \}$, $[A]^2 = \{ A' \mid A \sim^2 A' \}$ とすると, φ の表現行列 A に対し, 次が成り立つ:

$$\{ A' \mid A' \text{ はある } \varphi' \in [\varphi]_2 \text{ の表現行列} \} = [A]^2.$$

さらに, $\varphi: U \rightarrow W$ に対し, U の基底と W の基底をうまく取ると, φ の表現行列は $E_r \oplus O_{m-r, n-r}$ という形で書けることがわかる.

次に、定義域と終域が等しい場合を考える。以下の 3 つの写像を考える:

$$\begin{aligned}\psi_1: \quad & \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{array} \\ \psi_2: \quad & \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix} \end{array} \\ \psi_3: \quad & \begin{array}{ccc} V'' & \longrightarrow & V'' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x + y\sqrt{-1} & \longmapsto & x - y\sqrt{-1} \end{array}\end{aligned}$$

例えば φ_1 と φ_2 は同じものなのか異なるのか? ここでもベクトル空間の同型で移り合うものは同一視して考えたい。ただし、今は、定義域と終域が等しいので、定義域同士を移りあうための同型写像と終域同士を移りあうための同型写像は同じもを用いるのが妥当である。

状況を一般化して次の状況を考える: U, U' を K ベクトル空間とする。また、 $\varphi: U \rightarrow U$, $\varphi': U' \rightarrow U'$ を線型写像とする。次の条件をみたす ν が存在するとき、 $\varphi \sim_1 \varphi'$ と、ここでは、書くことにする:

1. $\nu: U \rightarrow U'$ は同型写像。
2. $\varphi' \circ \nu = \nu \circ \varphi$ 。

つまり、図式

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \nu \downarrow \cong & & \nu \downarrow \cong \\ U' & \xrightarrow{\varphi'} & U' \end{array}$$

が可換となる同型 ν があるとき、 $\varphi \sim_1 \varphi'$ とする。 $\varphi \sim_1 \varphi'$ であるとき、 φ に関して線型写像として言えることは、 φ' についても言える。つまり線型写像として区別がつかない。

今考えている例においては、以下のようになる: $\psi_2 \circ \nu = \nu \circ \psi_1$ であるので、 $\psi_1 \sim_2 \psi_2$ 。 $\psi_3 \circ \nu' = \nu' \circ \psi_1$ であるので、 $\psi_1 \sim_2 \psi_3$ 。

$\varphi \sim_1 \varphi'$ となるときに表現行列はどうなっているか調べる。 $\varphi: U \rightarrow U$, $\varphi': U' \rightarrow U'$ とし、 $\varphi \sim_1 \varphi'$ とする。 $\nu: U \rightarrow U'$ を $\varphi' \circ \nu = \nu \circ \varphi$ を満たす同型写像とする。 $U \simeq U'$ である。 $(u_1, \dots, u_n)$ を U の基底、 $(u'_1, \dots, u'_n)$ を U' の基底とする。 A を $(u_1, \dots, u_n)$ に関する φ の表現行列、 A' を $(u'_1, \dots, u'_n)$ に関する φ' の表現行列とする。 P を $(u_1, \dots, u_n)$, $(u'_1, \dots, u'_n)$ に関する ν の表現行列、とする。このとき、図式

$$\begin{array}{ccccc} K^n & & \xrightarrow{\mu_A} & & K^n \\ & \searrow \cong & & \nearrow \cong & \\ & U & \xrightarrow{\varphi} & U & \\ & \downarrow \nu & & \downarrow \nu & \\ & U' & \xrightarrow{\varphi'} & U' & \\ & \nearrow \cong & & \searrow \cong & \\ K^n & & \xrightarrow{\mu_{A'}} & & K^n \end{array}$$

μ_P μ_P

5.1 ベクトル空間の同型と線型写像

が可換となる。したがって、

$$\begin{aligned}\mu_{A'} &= \mu_P \circ \mu_A \circ \mu_P^{-1} \\ &= \mu_{PAP^{-1}}\end{aligned}$$

をみたすので、 $A' = PAP^{-1}$ となる。逆に、 φ の表現行列 A と φ' の表現行列 A' に対し、 $A' = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 P が取れば、図式を可換にする ν を与えることができ、 $\varphi \sim_1 \varphi'$ がわかる。まとめると以下ようになる:

Proposition 5.1.3. 線型写像 $\varphi: U \rightarrow U$ と $\varphi': U' \rightarrow U'$ に対し以下は同値:

1. $\varphi \sim_1 \varphi'$
2. 以下の条件を満たす P, A, A' が存在する:
 - (a) P は正則行列.
 - (b) A は φ の表現行列.
 - (c) A' は φ' の表現行列.
 - (d) $PAP^{-1} = A'$.

正則行列 P に対して、 $PAP^{-1} \sim^1 A$ で定義される、行列に対する同値関係 $\sim^1$ を思い出すと、以下の様にも書くことができる。

Proposition 5.1.4. $\varphi: U \rightarrow U$ と $\varphi': U' \rightarrow U'$ を線型写像とする。 φ の表現行列 A と φ' の表現行列 A' に対し以下は同値:

1. $\varphi \sim_1 \varphi'$
2. $A \sim^1 A'$.

したがって $[\varphi]_1 = \{ \varphi' \mid \varphi \sim_1 \varphi' \}$, $[A]^1 = \{ A' \mid A \sim^1 A' \}$ とすると、 φ の表現行列 A に対し、次が成り立つ:

$$\{ A' \mid A' \text{ はある } \varphi' \in [\varphi]_1 \text{ の表現行列} \} = [A]^1.$$

さらに、 $\varphi: U \rightarrow U$ に対し、 U の基底をうまく取ると、 φ の表現行列は Jordan 標準形で書けることがわかる。

Remark 5.1.5. 例えば、

$$\begin{array}{ccc} \psi_4: & V' & \longrightarrow V \\ & \Downarrow & \\ & (x \ y) & \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

の場合は、 $V' \sim V$ ではあるが $V \neq V'$ であるので、定義域と終域の基底を共通に取することは原理的にできない。したがって、 $\sim_1$ という同値関係を考えることもできない。定義域と終域の次元が等しいため、表現行列は正方行列であるが、この場合、 $PAP^{-1} \sim^1 A$ により定まる $\sim^1$ という同値関係を考えるのは不自然であり、 $PAQ \sim^2 A$ により定まる $\sim^2$ という同値関係を考えるべきである。たまたま、次元が等しく行列が正方行列になっているのか、定義域と終域が本当に一致しているから正方行列になっているのか、によって考える標準形が変わってくることに注意が必要である。

5.2 Quiver と Quiver の射

Definition 5.2.1. 以下を満たすとき, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を Quiver と呼ぶ.

1. Q_0 : 集合 (頂点の集合)
2. Q_1 : 集合 (辺 (矢印) の集合)
3. $s: Q_1 \rightarrow Q_0$: 写像. ($s(\alpha)$ は辺 α の始点^{*1})
4. $t: Q_1 \rightarrow Q_0$: 写像. ($t(\alpha)$ は辺 α の終点^{*2})

Remark 5.2.2. 本稿の目的は quiver の表現について説明することである. Quiver の表現を考えるときには, quiver を一つ固定して考えることが多い. 本稿でも表現を考えるときには, quiver は固定されており, 複数の quiver が出てくることはおそくない. したがって quiver の間の射などを考える必要は, 本稿を読む上では必要ないかもしれないが, 一応念の為以下で説明しておく.

Definition 5.2.3. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ を Quiver とする. このとき, 以下の条件を満たすとき, $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ を Q から Q' への射と呼ぶ:

1. $\varphi_0: Q_0 \rightarrow Q'_0$.
2. $\varphi_1: Q_1 \rightarrow Q'_1$.
3. $s' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ s$.
4. $t' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ t$.

φ が Q から Q' への射であることを, $\varphi: Q \rightarrow Q'$ のように書く.

Quiver の射の定義に現れる条件 Item 3 は次の図式が可換になるということである:

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{s} & Q_0 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ Q'_1 & \xrightarrow{s'} & Q'_0 \end{array}$$

これは, Q の辺 $\alpha \in Q_1$ に対し, Q' の辺 $\varphi_1(\alpha)$ の始点 $s'(\varphi_1(\alpha))$ は, α の始点 $s(\alpha)$ の φ_0 による像 $\varphi_0(s(\alpha))$ であることを意味する. 同様に, Quiver の射の定義に現れる条件 Definition 5.2.3 は次の図式が可換になるということである:

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{t} & Q_0 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ Q'_1 & \xrightarrow{t'} & Q'_0 \end{array}$$

これは, Q の辺 $\alpha \in Q_1$ に対し, Q' の辺 $\varphi_1(\alpha)$ の終点 $t'(\varphi_1(\alpha))$ は, α の終点 $t(\alpha)$ の φ_0 による像 $\varphi_0(t(\alpha))$ であることを意味する.

Example 5.2.4.

$$Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

^{*1} start, source

^{*2} teminal, target

5.3 Quiver の表現

$$Q' = \bullet_{1'} \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xleftarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet_{2'}$$

とする. $\varphi_1(\alpha) = \alpha_1$, $\varphi_0(1) = 1'$, $\varphi_0(2) = 2'$ とすると (φ_0, φ_1) は Q から Q' への射である.

$\psi_1(\alpha_1) = \psi_1(\alpha_2) = \alpha$, $\psi_0(1') = 1$, $\psi_0(2') = 2$ とすると (φ_0, φ_1) は Q' から Q への射である.

Example 5.2.5.

$$Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

$$Q' = \bullet_{1'} \xrightarrow{\alpha'} \bullet_{2'}$$

とする. $\varphi_1(\alpha) = \alpha'$, $\varphi_0(1) = 1'$, $\varphi_0(2) = 1'$ とすると (φ_0, φ_1) は Q から Q' への射である.

一方, Q' から Q への射はない. Q'_1 から Q_1 への写像は $\psi_1(\alpha') = \alpha$ に限られる. また, Q'_0 から Q_0 への写像も $\psi_0(1') = 1$ に限られる. しかし $\psi(\alpha') = \alpha$ の終点は 2 であり, 1 ではない.

Example 5.2.6. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. このとき, $(\text{id}_{Q_0}, \text{id}_{Q_1})$ は Q から Q への射である. これを id_Q と書く.

Example 5.2.7. Q, Q', Q'' を quiver とする. Q から Q' への射 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ と, Q' から Q'' への射 $\varphi' = (\varphi'_0, \varphi'_1)$ に対し, $(\varphi'_0 \circ \varphi_0, \varphi'_1 \circ \varphi_1)$ は, Q から Q'' への射となる. これを $\varphi' \circ \varphi$ と書く.

Definition 5.2.8. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ を Quiver とする. 以下の条件を満たす φ, ψ が存在するとき, Q と Q' は同型であるという:

1. φ は Q から Q' への射.
2. ψ は Q' から Q への射.
3. $\psi \circ \varphi = \text{id}_Q$.
4. $\varphi \circ \psi = \text{id}_{Q'}$.

5.3 Quiver の表現

Definition 5.3.1. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. 各 $x \in Q_0$ に対し, K -ベクトル空間 V_x が定まっているとする. 各 $\alpha \in Q_1$ に対し, 線型写像 $f_\alpha: V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$ が定まっているとする. このとき, この対応の組 $(V_\bullet, f_\bullet)$ を Q の表現と呼ぶ.

Definition 5.3.2. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. Q の表現 $(V_\bullet, f_\bullet)$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \dim(V_\bullet, f_\bullet) & : & Q_0 \longrightarrow \mathbb{N} \\ & & \cup \\ & & x \longmapsto \dim(V_x) \end{array}$$

という写像を $(V_\bullet, f_\bullet)$ の次元ベクトルと呼ぶ.

Example 5.3.3. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. このとき,

1. $x \in Q_0$ に対し, $V_0 = \{0\}$
2. $\alpha \in Q_1$ に対し, $f_\alpha = 0: \{0\} \rightarrow \{0\}$

とすると, $(V_\bullet, f_\bullet)$ は Q の表現である. この表現を Q の零表現と呼んだりする. $(V_\bullet, f_\bullet)$ が零表現なら, 次元ベクトル $\dim(V_\bullet, f_\bullet)$ は零ベクトルである. つまり, どの $x \in Q_0$ に対しても, $\dim(V_\bullet, f_\bullet)(x) = 0$ である. 逆に, 次元ベクトル $\dim(V_\bullet, f_\bullet)$ が零ベクトルであるような表現は零表現しかないこともすぐわかる.

Remark 5.3.4. K を体とし, $\text{Mat}(K)$ を K の元を成分とする行列全体の集合とする.

1. $d: Q_0 \rightarrow \mathbb{N}$.
2. $A: Q_1 \rightarrow \text{Mat}(K)$, ただし A_α は $(d(t(\alpha)), d(s(\alpha)))$ -行列.

という写像の組 (d, A) を考えることで,

1. $x \in Q_0$ に対し, $V_x = K^{d(x)}$,
2. $\alpha \in Q_1$ に対し, $f_\alpha = \mu_{A_\alpha}$

で定義される表現 $(f_\bullet, V_\bullet)$ が得られる. 写像 d は次元ベクトル $\dim(f_\bullet, V_\bullet)$ である. 有限次元 K ベクトル空間は, K^d と同型であるので, 数ベクトル空間だけ考えるのでもある意味で十分である. 数ベクトル空間だけ考えるのであれば, この写像の組 (d, A) を Q の表現だと思ってもよい. また, Q_0 が1点集合のときには, 写像 A は行列束 (matrix pencil) と呼ばれるものである. 写像 A のことをここでは一般化された行列束とよぶことにする.

Definition 5.3.5. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $(V_\bullet, f_\bullet), (V'_\bullet, f'_\bullet)$ を Q の表現とする. $x \in Q_0$ に対し, 線型写像 $\nu_x: V_x \rightarrow V'_x$ が定まっているとする. 次の条件を満たすとき, $\nu = (\nu_\bullet)$ を $(V_\bullet, f_\bullet)$ から $(V'_\bullet, f'_\bullet)$ への準同型写像と呼ぶ:

1. 各 $\alpha \in Q_1$ に対し, $\nu_{t(\alpha)} \circ f_\alpha = f'_\alpha \circ \nu_{s(\alpha)}$.

Remark 5.3.6. $(V_\bullet, f_\bullet)$ から $(V'_\bullet, f'_\bullet)$ への準同型写像の満たすべき条件 Item 1 は, 各 $\alpha \in Q_1$ に対し, 次の図式が可換になるということである:

$$\begin{array}{ccc} V_{s(\alpha)} & \xrightarrow{f} & V_{t(\alpha)} \\ \nu_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow \nu_{t(\alpha)} \\ V'_{s(\alpha)} & \xrightarrow{f'} & V'_{t(\alpha)} \end{array}$$

Example 5.3.7. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とし, $V = (V_\bullet, f_\bullet)$ を Q の表現とする. $x \in Q_0$ に対し, 線型写像 $\text{id}_{V_x}: V_x \rightarrow V_x$ を対応させると, これは, V から V への準同型写像である. これを id_V で表す.

Example 5.3.8. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とし, $V = (V_\bullet, f_\bullet)$, $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$, $V'' = (V''_\bullet, f''_\bullet)$ を Q の表現とする. また, $\nu = (\nu_\bullet)$ を V から V' への準同型写像, $\nu' = (\nu'_\bullet)$ を V' から V'' への準同型写像とする. $x \in Q_0$ に対し, $\nu_x \circ \nu'_x$ を対応させると, これは, V から V'' への準同型写像である. これを $\nu' \circ \nu$ で表す.

Definition 5.3.9. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$, $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$ を Q の表現とする. 以下の条件をみたす ν と ν' が存在するとき, V と V' は同型であるとい

5.3 Quiver の表現

い $V \simeq V'$ とかく:

1. ν は V から V' への準同型写像.
2. ν' は V' から V への準同型写像.
3. $\nu' \circ \nu = \text{id}_V$.
4. $\nu \circ \nu' = \text{id}_{V'}$.

Remark 5.3.10. 数ベクトル空間のみを考えると、以下のように考えることができる: Q を, quiver とする. $(d, A), (d', A')$ を次元ベクトルと行列束の組として与えられた Q の表現とする. このとき, 以下の条件を満たす写像 $A: Q_0 \rightarrow \text{Mat}(K)$ が, (d, A) から (d', A') への準同型写像である:

1. $x \in Q_0$ に対し, P_x は $(d'(x), d(x))$ -行列.
2. $\alpha \in Q_1$ に対し, $A_\alpha P_{s(\alpha)} = P_{t(\alpha)} A'_\alpha$.

すべての P_x が正則であるような準同型写像がとれるとき, (d, A) と (d', A') は同型である.

Example 5.3.11.

$$Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

とする. このとき, Q の表現とは,

$$V_1 \xrightarrow{f_\alpha} V_2$$

であり, 線型写像を 1 つ与えることと同じである. $(V_\bullet, f_\bullet)$ から $(V_\bullet, f_\bullet)$ への準同型写像 ν は

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & V_2 \\ \nu_1 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \\ V'_1 & \xrightarrow{f'_\alpha} & V'_2 \end{array}$$

を可換にする ν_1, ν_2 の組である. ν_1, ν_2 が全単射であるときに, $(V_\bullet, f_\bullet) \simeq (V_\bullet, f_\bullet)$ である. したがって, この Q においては, $(V_\bullet, f_\bullet) \simeq (V_\bullet, f_\bullet)$ であることと, 線型写像として $f_\alpha \sim_2 f'_\alpha$ であることが同値である.

Example 5.3.12.

$$Q = \overset{\bullet}{\circ}_\alpha$$

とする. このとき, Q の表現とは,

$$V_1 \xrightarrow{f_\alpha} V_1$$

であり, 定義域と終域が等しい線型写像を 1 つ与えることと同じである.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & V_1 \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ V'_1 & \xrightarrow{f'_\alpha} & V'_1 \end{array}$$

を可換にする線型写像 ν をあたえることが, $(V_\bullet, f_\bullet)$ から $(V_\bullet, f_\bullet)$ への準同型写像を与えることとなる. ν が全単射であるときに, $(V_\bullet, f_\bullet) \simeq (V_\bullet, f_\bullet)$ である. したがって, この Q においては, $(V_\bullet, f_\bullet) \simeq (V_\bullet, f_\bullet)$ であることと, 線型写像として $f_\alpha \sim_1 f_\alpha$ であることが同値である.

5.4 表現の直和

Definition 5.4.1. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$, $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$ を Q の表現とする. このとき,

1. $x \in Q_0$ に対し, $W_x = V_x \oplus V'_x$
2. $\alpha \in Q_1$ に対し, $g_\alpha = f_\alpha \oplus f'_\alpha$

とおくと, $(W_\bullet, g_\bullet)$ は Q の表現である. この表現を V と V' の直和と呼び, $V \oplus V'$ で表す. また, V や V' を $V \oplus V'$ の直和因子と呼ぶ.

Remark 5.4.2. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$, $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$ を Q の表現とする. このとき, $V \oplus V'$ の次元ベクトル $\dim(V \oplus V')$ は, 直和因子の次元ベクトルの和 $\dim(V) + \dim(V')$ となる. つまり, $\dim(V \oplus V')(x) = \dim(V)(x) + \dim(V')(x)$

Definition 5.4.3. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$ を Q の表現とする. 零表現ではない表現 $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$, $V'' = (V''_\bullet, f''_\bullet)$ を使って $V \simeq V' \oplus V''$ と書けるとき, V は V' と V'' に直和分解できるという.

Definition 5.4.4. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$ を Q の表現とする. 次の条件をみたすとき, V は直既約表現であるという:

1. $V \simeq V' \oplus V''$ ならば, V' または V'' は零表現.

Remark 5.4.5. 直既約表現とは直和分解できない表現のこと.

Remark 5.4.6. 部分表現が自明なものしかないものを, 単純表現という. 直既約であることと単純であることは一般に異なる. 本稿では直既約の方に興味がある.

然るべき K に対して以下が成り立つことが知られている:

Proposition 5.4.7 (Krull–Remak–Schmidt の定理). $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$ を Q の表現とする. このとき, V を直既約表現に直和直和分解できる. すなわち,

$$V \simeq V^1 \oplus \cdots \oplus V^n$$

をみたす直既約表現 V^i が存在する. また, この分解は同型と並び替えを除いて一意である. つまり, 直既約表現 V^i と W^i が

$$V^1 \oplus \cdots \oplus V^n \simeq W^1 \oplus \cdots \oplus W^m$$

を満たすならば, $m = n$ であり, $V^i \simeq V^{\sigma(i)}$ をみたす $\sigma \in S_n$ がとれる.

Remark 5.4.8. 一般の表現を考えることは難しくとも, 直既約表現という (少なくとも次

5.4 表現の直和

元は小さく) わかりやすいであろう表現に分解すると考えやすくなることがあるだろう.

Example 5.4.9.

$$Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

とし, Q の表現について考える. Q の表現は線型写像を与えることと同じであった.

$$\begin{array}{ccc} I_{1,1}: & K & \longrightarrow \{0\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ & x & \longmapsto 0 \end{array}$$

という表現を考える. 次元ベクトルを $(\dim(V_1), \dim(V_2))$ の形式で表すと, $\dim(I_{1,1}) = (1, 0)$ である. したがって, $I_{1,1} = V \oplus V'$ と書けたとすると, $\dim(V)$ または $\dim(V')$ のいずれかは零ベクトルである. これは V または V' のいずれかは零表現であることを意味するので, $I_{1,1}$ は直既約表現である. また, 次元ベクトルが $(1, 0)$ の表現は $I_{1,1}$ しかない. 同様に,

$$\begin{array}{ccc} I_{2,2}: & \{0\} & \longrightarrow K \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ & 0 & \longmapsto 0 \end{array}$$

も直既約表現であり, 次元ベクトルが $(0, 1)$ の表現は $I_{2,2}$ しかない. 次に,

$$\begin{array}{ccc} I_{1,2}: & K & \longrightarrow K \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ & x & \longmapsto x \end{array}$$

という表現について考える. $I_{1,2} = (I_\bullet, \iota_\bullet)$ とする. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$, $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$ が $I_{1,2} \simeq V \oplus V'$ を満たしており, この同型が $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ で与えられているとする. $\dim(I_{1,2}) = (1, 1)$ であるので, $\dim(V_1) = 1$, $\dim(V'_1) = 0$ と仮定する. $1 \in I_1 = K$ とする. このとき, $\iota_\alpha(1) = 1 \in I_2$ であり $\iota_\alpha(1) \neq 0$ である. $\nu_2: I_2 \rightarrow V_2 \oplus V'_2$ は同型写像であるので, $\nu_2(\iota_\alpha(1))$ は $V_2 \oplus V'_2$ 零元ではない. 一方, $\nu_1: K \rightarrow V_1 \oplus V'_1$ は同型写像であるが, $V'_1 = \{0\}$ であるので, $\nu_1(x) \in V_1$ である. また, ν が表現の準同型であることから, $f_\alpha(\nu_1(x)) = \nu_2(\iota_\alpha(1))$ であることがわかり, V_2 には零元以外の元が存在することがわかる. したがって, $\dim(V_2) = 1$, $\dim(V'_2) = 0$ となり V' は零表現であることがわかる. したがって, $I_{1,2}$ は直既約表現である.

次に階数標準形

$$R_{r;m,n} = E_r \oplus O_{m-r,n-r}$$

で表される表現を考える. つまり

$$\begin{array}{ccc} \mu_{R_{r;m,n}}: & K^m & \longrightarrow K^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ & x & \longmapsto R_{r;m,n}x \end{array}$$

で表される線型写像を考える. この表現は,

$$\underbrace{I_{1,2} \oplus \cdots \oplus I_{1,2}}_r \oplus \underbrace{I_{1,1} \oplus \cdots \oplus I_{1,1}}_{n-r} \oplus \underbrace{I_{2,2} \oplus \cdots \oplus I_{2,2}}_{m-r}$$

と同型である.

一般に, 線型写像 $f: V_1 \rightarrow V_2$ は基底をうまく取ることで, 表現行列が階数標準形になった. したがって, Q 上の表現 $(V_\bullet, f_\bullet)$ は, $I_{1,2}, I_{1,1}, I_{2,2}$ という直既約表現の直和に分解できる.

ここまでの話をまとめると,

$$Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

の表現の直既約分解を求めることは, 表現行列の階数標準形をもとめることに他ならないということになる.

Example 5.4.10.

$$Q = \overset{\bullet^1}{\underset{\alpha}{\circ}}$$

とする. このとき, Q の表現とは, 定義域と終域が等しい線型写像を 1 つ与えることと同じである. 実は Jordan cell で表される表現は直既約である. したがって, この Q において, 表現の直既約分解を求めることは, 表現行列の Jordan 標準形を求めることに他ならない.

Jordan cell で表される表現が直既約であることの証明のスケッチ: Jordan cell

$$J_n(0) = \alpha E_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_{n,n}(i, i+1)$$

で表される表現について考える. つまり,

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & J_n x \end{array}$$

という写像により決まる Q の表現 $J = (J_\bullet, j_\bullet)$ を考える. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$, $V' = (V'_\bullet, f'_\bullet)$ が $J \simeq V \oplus V'$ を満たしており, この同型が $\nu = (\nu_1)$ で与えられているとする. e_1 は固有値 α に属する固有ベクトルであり, 固有値 α の固有空間の次元は 1 であるから, $\nu_1(e_1)$ が V_1 か V'_1 のいずれかに一方に含まれることがわかる. $\nu_1(e_1) \in V_1$ に含まれているとする. e_2 は 2 次の広義固有空間に含まれるが, 次元は 2 であることから, $\nu_1(e_2)$ は $\nu_1(e_1)$ と同じ空間に含まれていないといけない. したがって $\nu_1(e_2) \in V_1$ である. 以下同様に $e_i \in V_1$ がわかるため, $\dim(V_1) = \dim(K^n)$ となり, V' は零表現であることがわかる.

この Q では直既約表現は次元ベクトルを固定したとしても無限個ある.

5.5 有限表現型

ここでは, Gabriel の定理を紹介することが目標である. 証明は, 例えば [1] を参照.

Definition 5.5.1. 次の条件を満たす $\Gamma = (Q_0, Q_1, e)$ を無向グラフと呼ぶ:

1. Q_0 : 集合 (頂点の集合)
2. Q_1 : 集合 (辺 (矢印) の集合)
3. $e: Q_1 \rightarrow 2^{Q_0}$: 写像.

4. $\alpha \in Q_1 \implies |e(\alpha)| \leq 2$. ($e(\alpha)$ は辺 α の端点^{*3}の集合)

$x \in Q_0$ を頂点といい, $\alpha \in Q_1$ を辺という. $\alpha \in Q_1$ に対し $x \in e(\alpha)$ を α の端点と呼ぶ.
 $|e(\alpha)| = 0$ となる $\alpha \in Q_1$ を self loop と呼ぶ.

Example 5.5.2.

$$A_n : \bullet_1 - \bullet_2 - \cdots - \bullet_n$$

Example 5.5.3.

$$D_n : \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \cdots - \bullet_{n-1} \\ | \\ \bullet_0 \end{array}$$

Example 5.5.4.

$$\begin{array}{c} E_6 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \cdots - \bullet_{6-1} \\ | \\ \bullet_0 \\ E_7 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \cdots - \bullet_{7-1} \\ | \\ \bullet_0 \\ E_8 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \cdots - \bullet_{8-1} \\ | \\ \bullet_0 \end{array}$$

Definition 5.5.5. $\Gamma = (Q_0, Q_1, e)$ を無向グラフとする. Q_0 で添字付けられたベクトル $t = (t_x)_{x \in Q_0}$ に対し,

$$B_\Gamma(t) = \sum_{x \in Q_0} t_x^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} t_\alpha$$

とおく. ただし, $\alpha = \{x, y\}$ ($x \neq y$) に対し $t_\alpha = t_x t_y$, $\alpha = \{x\}$ に対し $t_\alpha = t_x^2$ とする.

B_Γ は二次形式である. この二次形式に対して以下が知られている.

Lemma 5.5.6. $\Gamma = (Q_0, Q_1, e)$ を連結で self loop のない無向グラフとする. このとき, 以下は同値:

1. B_Γ が正定値.
2. Γ は以下のうちのいずれか:
 - (a) A_n ($n \leq 1$)
 - (b) D_n ($n \leq 4$)
 - (c) E_6, E_7, E_8

Definition 5.5.7. Q を quiver とする. Γ_Q で Q の矢の向きを忘れた無向グラフを考える. つまり, $e(\alpha) = \{s(\alpha), t(\alpha)\}$ で e を定義し, $\Gamma_Q = (Q_0, Q_1, e)$ とおく.

^{*3} end

Lemma 5.5.8. Q を *self loop* のない *quiver* とする. $d: Q_0 \rightarrow \mathbb{N}$ とする. $B_{\Gamma_Q}(d) \leq 0$ ならば, 次元ベクトルが d であるような Q の表現は, (同型なものを除いても) 無限個存在する.

Definition 5.5.9. Q を *quiver* とする. Q の直既約表現が同型を除いて高々有限個しかないとき, Q は有限表現型であるという.

直既約表現が有限個しかなければ, 次元ベクトルを与えたときに現れる表現も有限個しかない. したがって, 二次形式 B_{Γ_Q} がどのような次元ベクトルに対しても正の値をとるようなもののみが, 有限表現型となる.

Theorem 5.5.10 (Gabriel の定理). Q が有限表現型であることと, Q が A_n, D_n, E_n のいずれかに向きをつけたものであることは同値である.

以下でそれらの直既約表現について考える.

Example 5.5.11. A_n のときには, 区間表現になる. これは, A_n 型ルート系というもののポジティブルートというものに対応している. $\frac{1}{2}n(n-1)$ 種類のものがある.

Example 5.5.12. D_n のときも, D_n 型ルート系のポジティブルートに対応している. $n(n-1)$ 種類のものがある.

Example 5.5.13. E_6 のときも, E_6 型ルート系のポジティブルートに対応している. 36 種類のものがある.

Example 5.5.14. E_7 のときも, E_7 型ルート系のポジティブルートに対応している. 63 種類のものがある.

Example 5.5.15. E_8 のときも, E_8 型ルート系のポジティブルートに対応している. 120 種類のものがある.

第 6 章

多元環の加群と表現

6.1 Path algebra

K を体とする. K ベクトル空間の構造をもつ環 R を K 代数と呼ぶ.

Example 6.1.1. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 代数.

R を K -代数とする. K -ベクトル空間 M に分配律を満たす R による左からのスカラー倍が定義されてるとき, M を R 左加群と呼ぶ.

Definition 6.1.2. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とし, $x, y \in Q_0$ とする. 以下の条件を満たすとき, $(x|\alpha_n \cdots \alpha_1|y)$ を y から x への長さ n の path と呼ぶ:

1. $\alpha_i \in Q_1$.
2. $x = t(\alpha_n)$.
3. $y = s(\alpha_1)$.
4. $i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \implies s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$.

また, 次の条件を満たすとき, $(x|y)$ を長さ 0 の path と呼ぶ:

1. $x = y$.

Definition 6.1.3. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とし, $p = (x|\alpha_n \cdots \alpha_1|y)$, $p' = (x'|\alpha'_m \cdots \alpha'_1|y')$ を paths とする. $y = x'$ のとき, path の合成 pq を,

$$(x|\alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha'_m \cdots \alpha'_1|y')$$

で定義する.

Definition 6.1.4. Quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ に対し, Q の path をすべて集めた集合を $\mathcal{P}_Q$ で表す. $\mathcal{P}_Q$ を基底とする K ベクトル空間を $K[Q]$ で表す.

$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $p = (x|\alpha_n \cdots \alpha_1|y)$, $p' = (x'|\alpha'_m \cdots \alpha'_1|y') \in \mathcal{P}_Q$ に対し, 積 $pq \in K[Q]$ を

$$p \cdot p' = \begin{cases} pp' = (x|\alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha'_m \cdots \alpha'_1|y') & (y = x') \\ 0 & (y \neq x') \end{cases}$$

で定義する. これを双線型に拡張する. つまり,

$$\sum_i a_i p_i \sum_j b_j q_j = \sum_{i,j} a_i b_j p_i q_j$$

とする. この積で, $K[Q]$ は (1 を含むとは限らない) K 代数となる.

Remark 6.1.5. Q_0 を有限集合とする. このとき $\sum_{x \in Q_0} (x|x)$ は有限和であるので, $K[Q]$ の元である.

Remark 6.1.6. $x, y \in Q_0$ に対し,

$$(x|x) \cdot (y|y) = \begin{cases} (x|x) & (y = x) \\ 0 & (y \neq x) \end{cases}$$

であるので, 長さ 0 の path は $(x|x)$ 冪等元であり, 互いに直交している.

Remark 6.1.7. M を $K[Q]$ 加群とする. このとき,

$$\begin{aligned} V_x &= (x|x) \cdot M \\ &= \{ (x|x) \cdot v \mid v \in M \} \end{aligned}$$

とする.

$$\begin{aligned} f_\alpha : V_{s(\alpha)} &\longrightarrow V_{t(\alpha)} \\ \bigcup &\qquad \bigcup \\ v &\longmapsto (t(\alpha)|\alpha|s(\alpha)) \cdot v \end{aligned}$$

とおく. このとき, $V_M = (V_\bullet, f_\bullet)$ は Q の表現となる.

Remark 6.1.8. $V = (V_\bullet, f_\bullet)$ を Q の表現とする. このとき,

$$M_V = \bigoplus_{x \in Q_0} V_x$$

とする. $(x|x) \in \mathcal{P}_Q$ と $v \in V_{x'}$ に対し,

$$(x|\alpha|x) \cdot v = \begin{cases} v & (x = x') \\ 0 & (x \neq x') \end{cases}$$

とする. $(x|\alpha|y) \in \mathcal{P}_Q$ と $v \in V_{y'}$ に対し,

$$(x|\alpha|y) \cdot v = \begin{cases} f_\alpha(v) & (y = y') \\ 0 & (y \neq y') \end{cases}$$

とする. これにより, $K[Q]$ の M_V への作用が定義できる. つまり, M_V は $K[Q]$ -加群となる.

Remark 6.1.9. Q の表現 V から $K[Q]$ -加群 M_V が得られる. また, $K[Q]$ -加群 M から Q の表現 V_M が得られる. Q の表現全体と, $K[Q]$ -加群全体は本質的に同じである (カテゴリー同値). $K[Q]$ の構造を調べることで Q の表現がわかる.

6.2 Quiver with Relation

Definition 6.2.1. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を quiver とする. $x, y \in Q_0$ とする. $p_i = (x|\alpha_{n_i}^{(i)} \cdots \alpha_{n_i}^{(i)}|y)$ とする. $a_i \in K$ とする. このとき,

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i \in K[Q]$$

を quiver の relation と呼ぶ.

Remark 6.2.2. Quiver の relation とは, 始点と終点がそれぞれ揃っている path の線型結合ということである.

Definition 6.2.3. いくつかの relation で生成された $K[Q]$ のイデアルを I とする. このとき, $K[Q]/I$ を path algebra with relations と呼ぶ.

Remark 6.2.4.

$$\sum_{i=1}^n a_i (x|\alpha_{n_i}^{(i)} \cdots \alpha_{n_i}^{(i)}|y) \in K[Q]$$

を relation とし, イデアル I に含まれているとする. これは表現の言葉にすると,

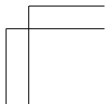
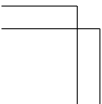
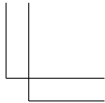
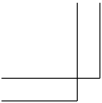
$$\sum_i a_i f_{\alpha_{n_i}^{(i)}} \circ \cdots \circ f_{\alpha_{n_i}^{(i)}} = 0$$

という線型写像の関係式を意味している.

Example 6.2.5. 次の quiver を考える:

$$\begin{array}{ccc} \bullet_1 & \xrightarrow{\alpha} & \bullet_2 \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' \\ \bullet_3 & \xrightarrow{\beta} & \bullet_4 \end{array}.$$

このとき, $(4|\beta\alpha|1) - (4|\beta'\alpha'|1)$ は, relation である. この relation を課すということは, この図式を可換にするような表現を考えるということに相当する.



参考文献

- [1] 草場公邦, 行列特論: 基礎数学選書 21, 裳華房, September 1979 (ja).