有限鏡映群

Yasuhide NUMATA

2025 年 1 月 23 日

第 1 章

準備

ここでは, 線形代数の基本的な事項について復習する. この原稿を通して使う基本的な用語や記号を定義することが主な目的であり, 必要最低限の準備をするため, 証明などは他の文献に任せる.

1.1 線型写像に関する用語など

本稿では, 特に断らない限り, V は n 次元ユークリッド空間を表すとし, 内積は $\langle \bullet, \bullet \rangle$ で表し, ノルムは $\| \bullet \|$ で表すとする. つまり,

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^n \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

とする, ただし, $\mathbb{R}$ は実数全体のなす集合とする. また,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in V$$

に対し,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

とし,

$$\| \alpha \| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

とする.

$\mathbf{0}$ は V の零ベクトルを表し, $\{ \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \}$ は V の標準基底であるとする. つまり,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

$\Phi \subset V$ に対し,

$$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \in \Phi \right\}$$

とおく. $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ は V の部分空間になる. これを, 生成系 Φ で生成される V の部分空間と呼ぶ.

V', V'' を V の部分空間とする.

$$V' + V'' = \{ \alpha + \beta \mid \alpha \in V', \beta \in V'' \}$$

とする. これは V の部分空間となる. $V' \cap V'' = \{ \mathbf{0} \}$ かつ $V = V' + V''$ となるとき, V は V' と V'' の (内部) 直和に分解されるといい, $V = V' \oplus V''$ とかく.

$V' \subset V$ に対し,

$$V'^{\perp} = \{ \alpha \in V \mid \forall \beta \in V', \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \}$$

とする. これは V の部分空間になる. これを V' の直交補空間と呼ぶ. V の部分空間 V' に対し, $V = V' \oplus V'^{\perp}$ である.

O ですべての成分が 0 である行列を表す. これは零行列と呼ばれる. $E_{i,j}$ で (i, j) 成分のみ 1 で他は 0 である行列を表す. これを行列単位と呼ぶ. 行列単位の積は,

$$E_{i,j} E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & j = k \\ O & j \neq k \end{cases}$$

で計算できる. $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ で対角成分が $a_1, \ldots, a_n$ である n 次正方行列を表す. つまり,

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i E_{i,i}$$

である. $E_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i}$ とおき, これを単位行列と呼ぶ. 正方行列 A に対し,

$$\det(A - tE_n)$$

は t の多項式であるが, これを A の固有多項式と呼ぶ. $A\alpha = c\alpha$ をみたす $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ があったとき, α のことを固有値 c に属する固有ベクトルと呼ぶ. 固有値 c に属する固有ベクトルを集めた集合と $\{ \mathbf{0} \}$ の和集合は, ベクトル空間になる. これを固有値 c に属する固有空間と呼ぶ. 相異なる固有値に属する固有ベクトルは一次独立である. A の固有値は $\det(A - tE_n) = 0$ の根である. n 次正方行列 A に対し, n 個の一次独立な固有ベクトルが取れることと, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ をみたす a_i と正則行列 P が取れることは同値である.

${}^tA$ で A の転置を表す. ${}^tA = A$ を満たすとき A を対称行列と呼ぶ. ${}^tA = A^{-1}$ を満たすとき A を直交行列と呼ぶ. A が直交行列であることと, A の列ベクトルが V の正規直交基底であることが同値である. 直交行列の固有値は 1 か -1 である. また, 相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.

V と V' をそれぞれベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to V'$ が次の条件を満たすとき，f は線形写像であるという:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta \in V &\implies f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) \\ \alpha \in V, c \in \mathbb{R} &\implies f(c\alpha) = cf(\alpha). \end{aligned}$$

線形写像 f, g の合成 $f \circ g$ も線形写像である．$f \circ g$ を fg と書くことにする．線形写像 $f\colon V \to V$ を V 上の線形変換と呼ぶこともある．線形写像 f が, $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle$ を満たすとき, f は内積を保つという．内積を保つ線形変換 f を直交変換と呼ぶこともある．

V を n 次元ベクトル空間, W を m 次元ベクトル空間とする．(m,n)-行列 A が与えられたとする．このとき, $\alpha \in V$ に対し, $f_A(\alpha) = A\alpha$ と定義すると $f_A(\alpha) \in W$ である．f_A は V から W への線形写像になる．逆に, V から W への線形写像 f が与えられたとする, このとき, $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ は m 項数ベクトルである．これらを並べることで, (m,n) 行列が得られるのでこれを A_f とかく．これは, A の (標準基底に関する) 表現行列とよばれる．先程と同様 $f_{A_f}(\alpha) = A_f\alpha$ と定義すると, $f_{A_f} = f$ となる．この意味で, 行列を与えることと線形写像を与えることは同じである．E_n は恒等写像, $O_{m,n}$ はすべての元を $\mathbf{0}$ に対応させる定値写像に対応する．V 上の線形変換 f に対し, $\det(f) = \det(A_f)$ とし, 線形写像 f の行列式と呼ぶことにする．線形変換でも, 行列と同様に, 固有値, 固有ベクトル, 固有空間, 固有多項式といった概念が定義できる．

$\mathbb{R}_{>0} = \{\, a \in \mathbb{R} \mid a > 0 \,\}$ とおく．また X の元 x に渡って $f(x)$ の和をとるときには $\sum_{x \in X} f(x)$ という表記を用いる．この記法は, X が有限集合であるか, $f(x)$ が高々有限個の x を除き 0 であるときに意味を持つ．

1.2 群について

ここでは, $[n] = \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}$ とする．

$$S_n = \{\, \sigma\colon [n] \to [n] \mid \sigma \text{ は全単射} \,\}$$

とおき, n 次対称群と呼ぶ．S_n の元を $[n]$ 上の置換とか順列と呼ぶ．$\sigma, \tau \in S_n$ に対し, 合成写像 $\sigma \circ \tau$ を $\sigma\tau$ と書くことにする．$\sigma\tau$ も S_n の元である．また, $\sigma, \tau, \nu \in S_n$ に対し, $(\sigma\tau)\nu = \sigma(\tau\nu)$ が成り立つ．$[n]$ 上の恒等写像を ε とここでは書くことにする．$\varepsilon \in S_n$ である．また, 任意の $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$ が成り立つ．$\sigma \in S_n$ に対し, σ の逆写像 σ^{-1} も S_n の元である．$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$ が成り立つ．これらの構造を抽象化したものが群である．

Definition 1.2.1. G を集合とする．$\bullet \cdot \bullet$ を G 上の二項演算とする．つまり, $g, h \in G$ に対し, $g \cdot h \in G$ が定まっているとする．$e \in G$ とする．$\bullet^{-1}$ を G 上の単項演算とする．つまり, $g \in G$ に対し, $g^{-1} \in G$ が定まっているとする．次の条件を満たすとき, $(G, \bullet \cdot \bullet, e, \bullet^{-1})$ を群と呼ぶ:

1. $g, h, k \in G \implies g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$.
2. $g \in G \implies g \cdot e = e \cdot g = g$.
3. $g \in G \implies g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$.

e を G の単位元と呼ぶ. $g \in G$ に対し, g^{-1} を g の逆元と呼ぶ. $(G, \bullet\cdot\bullet, e, \bullet^{-1})$ が群であることを, 単に G が群であるということもある.

Definition 1.2.2. 群 $(G, \bullet\cdot\bullet, e, \bullet^{-1})$ が次の条件を満たすとき, $(G, \bullet\cdot\bullet, e, \bullet^{-1})$ は可換群であるという:

$$g, h \in G \implies g \cdot h = h \cdot g.$$

Definition 1.2.3. G が有限集合であるとき, 群 $(G, \bullet\cdot\bullet, e, \bullet^{-1})$ は有限群であるという. G が有限群であるとき, $|G|$ で G に含まれる元の総数を表す. G が有限群でないとき, $|G| = \infty$ と書く. $|G|$ のことを G の位数と呼ぶ.

Example 1.2.4. S_n は群である. 位数 $|S_n|$ は $n!$ であるから, 有限群である.

Example 1.2.5.

$$\mathbb{Z}^\times = \{\, 1, -1 \,\}$$

とおく. このとき, $\mathbb{Z}^\times$ は通常の掛け算で群となる. $\mathbb{Z}^\times$ の単位元は 1 である. $a \in \mathbb{Z}^\times$ の逆元は $\frac{1}{a} = a$ である.

Example 1.2.6.

$$(\mathbb{Z}^\times)^n = \left\{\, (a_1, \ldots, a_n) \;\middle|\; a_n \in \mathbb{Z}^\times \,\right\}$$

とおく. $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$ と定めると, $(\mathbb{Z}^\times)^n$ は群である. $(1, \ldots, 1)$ が $(\mathbb{Z}^\times)^n$ の単位元. $a \in \mathbb{Z}^\times$ の逆元は a 自身である.

Example 1.2.7. n を正の整数とし, G を n 次正則行列を集めた集合とする. このとき, G は行列の積で群となる. E_n が G の単位元. $A \in G$ の逆元は逆行列 A^{-1} である. G は無限群である.

Example 1.2.8. V を n 次元ベクトル空間とする. G を V から V への線形写像で全単射であるものを集めた集合とする. このとき, G は写像の合成で群となる. id_V が G の単位元. $f \in G$ の逆元は逆写像 f^{-1} である. G は無限群である.

Definition 1.2.9. $(G_1, \bullet\cdot\bullet, e_1, (\bullet)^{-1})$, $(G_2, \bullet\circ\bullet, e_2, [\bullet]^{-1})$ が群であるとする. 次の条件を満たすとき, f は $(G_1, \bullet\cdot\bullet, e_1, (\bullet)^{-1})$ から $(G_2, \bullet\circ\bullet, e_2, [\bullet]^{-1})$ への群準同型写像であるという:

1. f は G_1 から G_2 への写像.
2. $g, h \in G_1 \implies f(g \cdot h) = f(g) \circ f(h)$.

f が全単射であるとき[*1] f を群同型写像と呼び, $(G_1, \bullet\cdot\bullet, e_1, (\bullet)^{-1})$ と $(G_2, \bullet\circ\bullet, e_2, [\bullet]^{-1})$ は群として同型であるという.

Definition 1.2.10. $(G, \bullet\cdot\bullet, e, \bullet^{-1})$ を群とする. $\emptyset \neq S \subset G$ に対し,

$$\langle S \rangle_{\mathbb{Z}} = \left\{\, g_1^{i_1} \cdots g_n^{i_n} \;\middle|\; n = 1, \ldots; i_j \in \mathbb{Z}; g_i \in S \,\right\}$$

[*1]

とする. ただし, $g \in G$ と $k > 0$ に対し, $g^k = \underbrace{g \cdots g}_{k}$, $g^{-k} = (g^{-1})^k$, $g^0 = e$ とする.

$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{Z}} = \{ e \}$ と約束する. $\langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ を S で生成される G の部分群と呼び, S を $\langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ の生成系であると呼ぶ.

群 $(G, \bullet \cdot \bullet, e, \bullet^{-1})$, $S \subset G$ に対し, $(\langle S \rangle_{\mathbb{Z}}, \bullet \cdot \bullet, e, \bullet^{-1})$ は群である. $S \subset S' \subset G$ なら, $\langle S \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \langle S' \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. さらに, $S \subset S' \subset \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ なら $\langle S \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle S' \rangle_{\mathbb{Z}}$ である.

Example 1.2.11. $(\mathbb{Z}^\times)^n$ の部分集合 S を

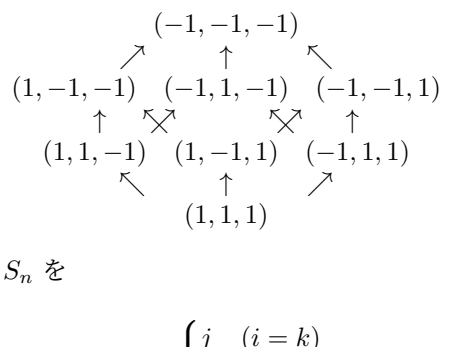
$$S = \{ (-1, 1 \ldots, 1), (1, -1, \ldots, 1), (1, 1, \ldots, -1) \}$$

とおくと, S は $(\mathbb{Z}^\times)^n$ の生成系である.

Example 1.2.12. Example 1.2.11 の例を $n = 3$ の場合について考える.

$$S = \{ s = (-1, 1, 1), s' = (1, -1, 1), s'' = (1, 1, -1) \}$$

とおくと, S は $(\mathbb{Z}^\times)^3$ の生成系である. $(\mathbb{Z}^\times)^3$ の元は S の元の積として表すことができるので, 単位元である $(1, 1, 1)$ を始点として, S の元を順次賭けていくことで, $(\mathbb{Z}^\times)^3$ の元を全て作ることができる. S の元を掛ける操作で現れるものを線で結ぶと以下のようになる:



Example 1.2.13. $\tau_{i,j} \in S_n$ を

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & (i = k) \\ i & (j = k) \\ k & (k \in \{ i, j \}) \end{cases}$$

で定義する. $\tau_{i,j}$ は i と j を入れ替える互換と呼ばれる. $T = \{ \tau_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$ とすると, T は S_n の生成系である. i と $i+1$ を入れ替える互換は隣接互換と呼ばれる.

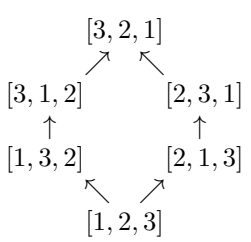
$$\begin{aligned}
\tau_{i,i+2} &= \tau_{i+1,i+2}\tau_{i,i+1}(\tau_{i+1,i+2})^{-1} \\
&= \tau_{i+1,i+2}\tau_{i,i+1}(\tau_{i+1,i+2}) \\
\tau_{i,i+3} &= \tau_{i+2,i+3}\tau_{i,i+2}(\tau_{i+2,i+3})^{-1} \\
&= \tau_{i+2,i+3}\tau_{i,i+2}(\tau_{i+2,i+3}) \\
\tau_{i,i+4} &= \tau_{i+3,i+4}\tau_{i,i+3}(\tau_{i+3,i+4})^{-1} \\
&= \tau_{i+3,i+4}\tau_{i,i+3}(\tau_{i+3,i+4}) \\
&\vdots \\
\tau_{i,i+k} &= \tau_{i+k-1,i+k}\tau_{i,i+k-1}(\tau_{i+k-1,i+k})^{-1} \\
&= \tau_{i+k-1,i+k}\tau_{i,i+k-1}(\tau_{i+k-1,i+k})
\end{aligned}$$

となるので, $\tau_{i,i+k}$ は隣接互換の積でかける. したがって, 隣接互換を集めた集合 S も S_n の生成系である.

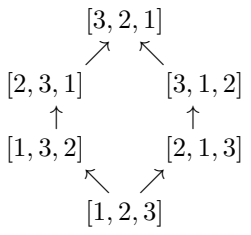
Example 1.2.14. S_3 について考える. $s = \tau_{1,2}$ を $1, 2$ を入れ替える互換, $s' = \tau_{2,3}$ を $2, 3$ を入れ替える互換とし, $S = \{ s, s' \}$ とおくと, Example 1.2.13 でみたように, $S_3 = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. $\sigma \in S_3$ の元を順列 $[\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)]$ であらわすと,

$$S_3 = \{ [1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1] \}$$

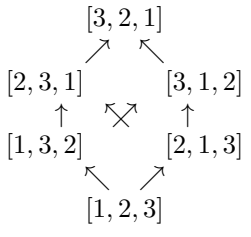
である. $\varepsilon = [1,2,3]$ が単位元である. S_3 の元は S の元の積として表すことができるので, ε を始点として, S の元を順次賭けていくことで, S_3 の元を全て作ることができる. S_3 は非可換なので, 右から掛けるということと左から掛けるということは異なるので, 気をつける必要がある. 右から S の元を掛ける操作で現れるものを線で結ぶと以下のようになる:



一方, 左から S の元を掛けて得られるものを線で結ぶと, 以下のようになる.



右からでも左からでも良いので, S の元を掛けて得られるものを線で結ぶと以下のようになる:



章末問題

1. θ を実数とする．P, α, β を次で定義する．

$$P = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

   （a）P が直交行列であることを示せ．

   （b）α は P の固有ベクトルであることを示せ．

   （c）β は P の固有ベクトルであることを示せ．

2. S_1, S_2 を次で定義する．

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   （a）S_1, S_2 が直交行列であることを示せ．

   （b）$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ は S_1 の固有ベクトルであることを示せ．

   （c）S_1, S_2 の固有値および固有空間を求めよ．

3. $0 < \theta < \pi$ とする．R を次で定義する．

$$R = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

   （a）R が直交行列であることを示せ．

   （b）R は実数の固有値を持たないことを示せ．

第 2 章

鏡映

ここでは, 鏡映と呼ばれる線形変換の定義と例を与えることを目標とする. また, 固有値などに関する基本的な性質についても紹介する.

2.1 鏡映の定義と例

$\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ に対し,

$$H_\alpha = \{ \beta \in V \mid \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \}$$

とおき, α を法ベクトルとする (中心的な) 超平面と呼ぶ. また,

$$\mathbb{R}\alpha = \{ c\alpha \mid c \in \mathbb{R} \}$$

とおく. $\mathbb{R}\alpha$ は原点を通り α を方向ベクトルとする直線である. このとき, V は,

$$V = H_\alpha \oplus \mathbb{R}\alpha$$

と (内部) 直和に分解される. つまり, 次の 2 つを満たす:

$$\begin{aligned} &V = \{ \beta + \gamma \mid \beta \in H_\alpha, \gamma \in \mathbb{R}\alpha \}, \\ &H_\alpha \cap \mathbb{R}\alpha = \{ \mathbf{0} \}. \end{aligned}$$

Definition 2.1.1. $\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ とし, $f \colon V \to V$ は線型写像であるとする. 次の 2 つの条件を満たすとき, f が α に関する鏡映であるという:

1. $f(\alpha) = -\alpha$.
2. $\beta \in H_\alpha \implies f(\beta) = \beta$.

f が α に関する鏡映であるような $\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ が存在するとき, f は鏡映であるという.

n 次正方行列は, $\alpha \in V$ に対し, $A\alpha \in V$ を対応させる V から V への線型写像であると思うことができる. 対応する線型写像が鏡映であるとき, その行列も鏡映と呼ぶことにする. 行列の言葉に定義を書き直すと以下のようになる.

Definition 2.1.2. $\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ とし, A は n 次正方行列であるとする. 次の 2 つの条件を満たすとき, A が α に関する鏡映であるという:

1. $A\alpha = -\alpha$.

2. $\beta \in H_\alpha \implies A\beta = \beta$.

Example 2.1.3.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

とし, $\alpha = \boldsymbol{e}_2$ とおくと, P は α に関する鏡映である. 実際,

$$P\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\alpha$$

である. また,

$$H_\alpha = \{\, c\boldsymbol{e}_1 \mid c \in \mathbb{R} \,\}$$

であるが,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

である.

Example 2.1.4. P は鏡映であった. もっと一般に, 実数 θ に対し,

$$P(2\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$
$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \sin(-\theta) \\ \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

とおけば, $P(2\theta)$ は $\alpha(\theta)$ に関する鏡映である. 実際,

$$H_{\alpha(\theta)} = \left\{ c\alpha(\theta + \frac{\pi}{2}) \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

であるので,

$$P(2\theta)\alpha(\theta) = -\alpha(\theta),$$
$$P(2\theta)(c\alpha(\theta + \frac{\pi}{2})) = c\alpha(\theta + \frac{\pi}{2})$$

を示せばよいが, これらは直接, 計算することで確かめることができる.

Example 2.1.5. P は鏡映であった. もっと一般に, F_k を (k,k) 成分は -1, 他の対角成分は 1 であるような n 次対角行列とする. $E_{k,l}$ で (k,l) 行列単位, つまり, (k,l) 成分のみ 1 で他は 0 であるような行列とすると,

$$F_k = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1) = E_n - 2E_{k,k}$$

である. $\alpha = \boldsymbol{e}_k$ とすると, F_k は α に関する鏡映である. $F_k\alpha = -\alpha$ となることは, 直接計算すればわかる. また, $\beta \in V$ に対し,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \beta_k$$

であるので,

$$H_\alpha = \left\{ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta_k = 0 \right\}$$

である. $\beta \in H_\alpha$ に対し, $F_k\beta = -\beta$ となることは, 直接計算すればわかる.

Example 2.1.6. $T_{k,l}$ を (k,k) 成分と (l,l) 成分は 0, 他の対角成分は 1, (k,l) 成分と (l,k) 成分は 1, 他の成分は 0 であるような n 次正方行列とする. つまり,

$$T_{k,l} = E_n - E_{k,k} - E_{l,l} + E_{l,k} + E_{k,l}$$

である. $\alpha = \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l$ とすると, $T_{k,l}$ は α に関する鏡映である. 実際,

$$T_{k,l}\alpha = T_{k,l}(e_k - e_l) = T_{k,l}e_k - T_{k,l}e_l = e_l - e_k = -(e_k - e_l) = -\alpha$$

である. また, $\beta \in V$ に対し,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \beta_k - \beta_l$$

であるので,

$$H_\alpha = \left\{ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \middle| \, \beta_k = \beta_l \right\}$$

である. $\beta \in H_\alpha$ に対し, $F_k\beta = -\beta$ となることは, 直接計算すればわかる.

Example 2.1.7. $k \neq l$ に対し, $F_{k,l} = F_kF_lT_{k,l}$ とおく. つまり $F_{k,l}$ は (k,k) 成分と (l,l) 成分は 0, 他の対角成分は 1, (k,l) 成分と (l,k) 成分は -1, 他の成分は 0 であるような n 次正方行列であり,

$$F_{k,l} = E_n - E_{k,k} - E_{l,l} - E_{k,l} - E_{l,k}$$

である. $\alpha = \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_l$ とすると, $F_{k,l}$ は α に関する鏡映である. 実際,

$$\begin{aligned} F_{k,l}\alpha &= F_kF_lT_{k,l}(\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_l) \\ &= F_kF_l(\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_l) \\ &= F_kF_l\boldsymbol{e}_k + F_kF_l\boldsymbol{e}_l \\ &= F_k\boldsymbol{e}_k - F_k\boldsymbol{e}_l \\ &= -\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l \\ &= -(\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_l) \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

となる. また, $\beta \in V$ に対し,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -\beta_k - \beta_l$$

であるので,

$$H_\alpha = \left\{ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \middle| \, \beta_k = -\beta_l \right\}$$

である. $\beta \in H_\alpha$ に対し, $F_k\beta = -\beta$ となることは, 直接計算すればわかる.

Example 2.1.8. $\alpha \in V \setminus \{ \boldsymbol{0} \}$ とする. $\beta \in V$ に対して,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

と定義する．s_α は V から V への線型写像である．また, s_α は α に関する鏡映である．実際

$$s_\alpha(\alpha) = \alpha - 2\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

であり, $\beta \in H_\alpha$ に対しては,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha = \beta - 0\alpha = \beta$$

となる,

2.2　鏡映の性質

ここでは, V から V への線型写像で鏡映であるものの性質について考える．

Lemma 2.2.1. s も s' も α に関する鏡映であるとする．このとき, $s = s'$.

Proof. $V = H_\alpha + \mathbb{R}\alpha$ であるので, $s(\alpha) = s'(\alpha)$ と, $\beta \in H_\alpha$ に対して $s(\beta) = s'(\beta)$ を示せば十分である．これらは, α に関する鏡映の定義から直接わかる． □

Lemma 2.2.1 を使うと次がすぐわかる．

Proposition 2.2.2. s を V 上の線形変換であるとする．s が α に関する鏡映であるとき, $s = s_\alpha$.

Proposition 2.2.3. $\alpha, \alpha' \in V \setminus \{\, \mathbf{0} \,\}$ とする．このとき, 次は同値:

1. $s_\alpha = s_{\alpha'}$.
2. $\alpha = c\alpha'$ となる $c \in \mathbb{R}$ が存在する．

Proof.

■ 1 $\implies$ 2:　$s_\alpha = s_{\alpha'}$ とする．このとき,

$$s_\alpha(\alpha) = -\alpha,$$
$$s_{\alpha'}(\alpha) = \alpha - 2\frac{\langle \alpha', \alpha \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle}\alpha'$$

であるので,

$$-\alpha = \alpha - 2\frac{\langle \alpha', \alpha \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle}\alpha'$$
$$\alpha = \frac{\langle \alpha', \alpha \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle}\alpha'$$

となる．

■ 2 $\implies$ 1:　$\alpha = c\alpha'$ とする．$\alpha \neq \mathbf{0}$ であるので, $c \neq 0$ である．したがって, $\alpha' = \frac{1}{c}\alpha$ である．このとき,

$$s_\alpha(\alpha') = s_\alpha(\frac{1}{c}\alpha) = \frac{1}{c}s_\alpha(\alpha) = -\frac{1}{c}\alpha = -\alpha'$$

である. $\beta \in H_{\alpha'}$ とすると,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle c\alpha', \beta \rangle = c \langle \alpha', \beta \rangle = 0$$

であるので, $\beta \in H_\alpha$ である. したがって, $s_\alpha(\beta) = \beta$ である. よって, s_α は α' に関する鏡映である. Lemma 2.2.1 より, $s_\alpha = s_{\alpha'}$ である. □

Proposition 2.2.4. *s を鏡映とする. このとき, $s^2 = \mathrm{id}_V$.*

Proof. s を α に関する鏡映とする. $s^2(\alpha) = s(-\alpha) = -s(\alpha) = -(-\alpha) = \alpha$ である. また, $\beta \in V$ に対して, $s^2(\beta) = s(\beta) = \beta$ である. よって, s は V 上の恒等写像である. □

Corollary 2.2.5. *s を鏡映とする. このとき, $s = s^{-1}$.*

Proposition 2.2.6. *s を鏡映とする. このとき, s は内積を保存する. つまり, $\lambda, \mu \in V$ に対して, $\langle s(\lambda), s(\mu) \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle$ である.*

Proof. s を α に関する鏡映とする. $\lambda, \mu \in V$ とすると, $V = H_\alpha + \mathbb{R}\alpha$ であるので,

$$\lambda = \beta_\lambda + a_\lambda \alpha, \qquad \mu = \beta_\mu + a_\mu \alpha$$

をみたす $\beta_\lambda, \beta_\mu \in H_\alpha$ と $a_\lambda, a_\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\begin{aligned}
\langle s(\lambda), s(\mu) \rangle &= \langle s(\beta_\lambda + a_\lambda \alpha), s(\beta_\mu + a_\mu \alpha) \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda - a_\lambda \alpha, \beta_\mu - a_\mu \alpha \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle + \langle \beta_\lambda, -a_\mu \alpha \rangle + \langle -a_\lambda \alpha, \beta_\mu \rangle + \langle -a_\lambda \alpha, -a_\mu \alpha \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle + 0 + 0 + \langle a_\lambda \alpha, a_\mu \alpha \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle + \langle a_\lambda \alpha, a_\mu \alpha \rangle \\
\langle \lambda, \mu \rangle &= \langle \beta_\lambda + a_\lambda \alpha, \beta_\mu + a_\mu \alpha \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle + \langle \beta_\lambda, a_\mu \alpha \rangle + \langle a_\lambda \alpha, \beta_\mu \rangle + \langle a_\lambda \alpha, a_\mu \alpha \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle + 0 + 0 + \langle a_\lambda \alpha, a_\mu \alpha \rangle \\
&= \langle \beta_\lambda, \beta_\mu \rangle + \langle a_\lambda \alpha, a_\mu \alpha \rangle
\end{aligned}$$

がなりたつ. □

Proposition 2.2.7. *t は内積を保つ線型写像であるとする. $\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ に対し, $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$.*

Proof. Lemma 2.2.1 より, $ts_\alpha t^{-1}$ が $t(\alpha)$ に関する鏡映であることを示せば十分である.

$$ts_\alpha t^{-1}(t(\alpha)) = ts_\alpha(\alpha) = t(-\alpha) = -t(\alpha)$$

である. また $\beta \in H_{t(\alpha)}$ に対して,

$$\left\langle \alpha, t^{-1}(\beta) \right\rangle = \langle t(\alpha), \beta \rangle = 0$$

であるので, $t^{-1}(\beta) \in H_\alpha$ である. したがって,

$$ts_\alpha t^{-1}(\beta) = ts_\alpha(t^{-1}(\beta)) = t(t^{-1}(\beta)) = \beta.$$

□

Proposition 2.2.8. $U \subset V$ を部分空間とし, $\alpha \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする. このとき, $\beta \in U$ に対し, $s_\alpha(\beta) \in U$ であり, $\beta \in U^\perp$ に対し, $s_\alpha(\beta) = \beta$ である. 特に, $s\colon U \to U$ を $s(\beta) = s_\alpha(\beta)$ で定めると, s は α に関する U 上の鏡映変換である.

Proof. $\alpha \in U$ であるので, $\beta \in U^\perp$ に対し, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ である. したがって, $s_\alpha(\beta) = \beta$ である.

$s_\alpha(\alpha) = -\alpha \in U$ である. また $\beta \in H_\alpha \cap U$ に対して, $s_\alpha(\beta') = \beta' \in U$ である. $\beta \in U$ に対し, $\beta = c\alpha + \beta'$ をみたす, c と $\beta' \in H_\alpha$ が存在するので, $s_\alpha(\beta) = s_\alpha(c\alpha + \beta') = cs_\alpha(\alpha) + s_\alpha(\beta') \in U$ である. □

Proposition 2.2.9. 直交変換 s に対し以下は同値*:*

1. s は鏡映である.
2. 固有値 -1 に属する固有空間の次元は 1 次元である.

Proof.

■ 1 $\implies$ 2: s が α に関する鏡映であるとする. このとき, 定義から, 固有値 -1 に属する固有空間は $\mathbb{R}\alpha$ であり, 固有値 1 に属する固有空間は H_α である. よって固有値 -1 に属する固有空間の次元は 1 次元である.

■ 2 $\implies$ 1: 固有値 -1 に属する固有空間の次元は 1 次元であるとする. このとき, 固有値 -1 に属する固有空間は $\mathbb{R}\alpha$ とかける. 直交変換の固有値は, 1 か -1 であり, 固有空間は互いに直交するので, 固有値 1 に属する固有空間は H_α である. 固有値の定義から, $s(\alpha) = \alpha$ と $\beta \in H_\alpha$ に対して $s(\beta) = \beta$ である. したがって, s は α に関する鏡映である. □

鏡映変換に関する性質を, 行列の言葉に書き直しておく.

Corollary 2.2.10. A は n 次正方行列とし, 鏡映であるとする. このとき, 次が成り立つ*:*

1. $A^2 = E_n$.
2. ${}^tA\,A = E_n$.
3. $A = A^{-1} = {}^tA$.
4. $\det(tE_n - A) = (t+1)(t-1)^{n-1}$.
5. $\det(A) = -1$.
6. $\exists P$ *such that* $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$.

Example 2.2.11. E_n は鏡映ではない. $\alpha \in V$ に対し,

$$E_n\alpha = -\alpha$$

とすると,

$$\alpha = \mathbf{0}$$

となり, $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ の元では, $E_n\alpha = -\alpha$ を満たすことがないので, E_n は鏡映ではない.

Example 2.2.12. 実数 θ に対し,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

とおくと, これは鏡映ではない.

$$R_\theta \alpha = -\alpha$$

とする. このとき,

$$(R_\theta + E_2)\alpha = \mathbf{0}$$

である.

$$\begin{aligned} \det(R_\theta + E_2) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta)+1 & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)+1 \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\theta)+1)^2 + (\sin(\theta))^2 \\ &= 2(1+\cos(\theta)) \end{aligned}$$

である. したがって, $\cos(\theta) \neq 0$ のときには, $R_\theta + E_2$ は正則であるから, $\alpha = \mathbf{0}$ のみが解となり, この場合は鏡映ではないことがわかる. また, $\cos(\theta) = 0$ のときには, $R_\theta = E_2$ であり, この場合も鏡映ではない.

Example 2.2.13. $\sigma \in S_n$ に対し, $(\sigma(1), 1)$ 成分,... $(\sigma(n), n)$ 成分は 1 で. 他の成分は 0 であるような n 次正方行列を A_σ とおく. つまり,

$$A_\sigma = \sum_{j=1}^{n} E_{\sigma(j),j} = \sum_{i=1}^{n} E_{i,\sigma^{-1}(i)}$$

である. $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対し, $A_\sigma = A_{\sigma'}$ であることと, $\sigma = \sigma'$ であることは同値である. 直接計算することで, $A_\sigma \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}$ であることがわかる. また, $\sigma, \tau \in S_n$ に対し, $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}$. $\sigma \in S_n$ に対し次は同値である:

1. σ が互換である.
2. A_σ が鏡映である.

$T_{i,j}$ が互換であることは示した. 逆を示す. σ が互換ではないとする. $\sigma = \varepsilon$ のとき, $A_\sigma = E_n$ であるので, これは鏡映ではない. $\sigma \neq \varepsilon$ とする. このとき $\sigma(i_1) \neq i_1$ を満たす i_1 が存在する. $\sigma(i_1) = i_2$ とおき, $\alpha = \boldsymbol{e}_{i_1} - \boldsymbol{e}_{i_2}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} A_\sigma A_\sigma \alpha &= A_\sigma A_\sigma (\boldsymbol{e}_{i_1} - \boldsymbol{e}_{i_2}) \\ &= A_\sigma (\boldsymbol{e}_{\sigma(i_1)} - \boldsymbol{e}_{\sigma(i_2)}) \\ &= \boldsymbol{e}_{\sigma\sigma(i_1)} - \boldsymbol{e}_{\sigma\sigma(i_2)} \end{aligned}$$

である. 鏡映は二乗すると単位行列となるので, $\boldsymbol{e}_{\sigma\sigma(i_1)} - \boldsymbol{e}_{\sigma\sigma(i_1)} \neq \alpha$ ならば, A_σ は鏡映ではない. $\boldsymbol{e}_{\sigma\sigma(i_1)} - \boldsymbol{e}_{\sigma\sigma(i_2)} = \boldsymbol{e}_{i_1} - \boldsymbol{e}_{i_2}$ と仮定する. このとき, $i_2 = i_1$ である. したがって, $A_\sigma \alpha = -\alpha$ である. ここで, $i \in \{ i_1, i_2 \}$ の他に $\sigma(i) = i$ となる i がなければ, σ は互換である. $j_1 \notin \{ i_1, i_2 \}$ が $\sigma(j_1) \neq j_1$ を満たすとする. $\sigma(j_1) = j_2$ とし, $\beta = \boldsymbol{e}_{j_1} - \boldsymbol{e}_{j_2}$ とおく. α のときと同じ議論で, $\sigma(j_2) \neq j_1$ であるときには, A_σ は鏡映ではないことがわかる. $\sigma(j_2) = j_1$ を仮定すると, $A_\sigma \beta = -\beta$ がなりたつ. $\{ i_1, i_2 \} \neq \{ j_1, j_2 \}$ であるので, α と β は一次独立である. したがって, A_σ の固有値 1 に属する固有空間の次元は 1 ではないので, 鏡映ではない.

x2 (2025-01-23 16:09)

章末問題

1. 実数 θ, τ に対し, 次を示せ:
   (a) $R(\theta)R(\tau) = R(\theta + \tau)$.
   (b) $P(\theta)P(\tau) = R(\theta - \tau)$.
   (c) $P(\theta)R(\tau) = P(\theta - \tau)$.
   (d) $R(\theta)P(\tau) = P(\theta - \tau)$.
2. S を次の 3 次正方行列からなる集合とする:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

各行各列にちょうど 1 つの 1 が現れそれ以外は 0 である 3 次正方行列を集めた集合である. このとき次を示せ:
(a) $A = T_{1,2}T_{2,3}$.
(b) $A' = T_{2,3}T_{1,2}$.
(c) $T_{1,3} = T_{1,2}T_{2,3}T_{1,2}$.
(d) $X, Y \in S \implies XY \in S$.
(e) $X \in S \implies X^{-1} \in S$.

第 3 章

有限鏡映群

ここでは, 有限鏡映群の定義と例を与えることを目標とする.

3.1 有限鏡映群の定義

まずは有限鏡映群の定義を与える.

Definition 3.1.1. 次の条件をみたすとき, W を V 上の鏡映群と呼ぶ:

1. $W = \langle s_1, \ldots, s_t \rangle_{\mathbb{Z}}$ をみたす V 上の鏡映変換 $s_1, \ldots, s_t$ が存在する.

また行列に対しても同様に定義をする.

Definition 3.1.2. 次の条件をみたすとき, W を鏡映群と呼ぶ:

1. $W = \langle A_1, \ldots, A_t \rangle_{\mathbb{Z}}$ をみたす鏡映 $A_1, \ldots, A_t$ が存在する.

鏡映群 W が有限集合であるとき, W を有限鏡映群と呼ぶ.

Definition 3.1.3. W を V 上の鏡映群とする. 次の条件をみたすとき, W は本質的であるという:

$$\forall \alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \},\ \exists w \in W \text{ s.t. } w(\alpha) \neq \alpha.$$

Proposition 2.2.6 から次がすぐわかる.

Proposition 3.1.4. W を V 上の鏡映群であるとする. このとき, $w \in W$ は内積を保つ.

行列のときには次の様に言い換えられる.

Proposition 3.1.5. W を鏡映群であるとする. このとき, $A \in W$ は直交行列である.

3.2 有限鏡映群の例

有限鏡映群の例を見ていく.

x2 (2025-01-23 16:09)

3.2.1　$I_2(m)$

$m > 1$ とする. Examples 2.1.4 and 2.2.12 で見た行列について考えるが, ここでは, 記号の簡略化のために

$$P_i = P\left(\frac{2i\pi}{m}\right), \qquad R_i = R\left(\frac{2i\pi}{m}\right)$$

とおく. まず, P_i, R_i の計算規則について調べておく.

Lemma 3.2.1.

$$\begin{aligned} P_i &= P_{i+m}, \\ R_i &= R_{i+m}. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2.

$$\begin{aligned} R_i R_j &= R_{i+j}, \\ R_i &= (R_1)^i. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.3.

$$\begin{aligned} (R_i)^m &= E_2, \\ (P_i)^2 &= E_2. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.4.

$$\begin{aligned} R_i P_0 &= P_i, \\ P_0 R_i &= P_{-i}. \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} R_i P_0 &= R\left(\frac{2i\pi}{m}\right) P_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{2i\pi}{m}) & -\sin(\frac{2i\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2i\pi}{m}) & \cos(\frac{2i\pi}{m}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{2i\pi}{m}) & \sin(\frac{2i\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2i\pi}{m}) & -\cos(\frac{2i\pi}{m}) \end{pmatrix} \\ &= R\left(\frac{2i\pi}{m}\right) = R_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0 R_i &= P_0 R\left(\frac{2i\pi}{m}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{2i\pi}{m}) & -\sin(\frac{2i\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2i\pi}{m}) & \cos(\frac{2i\pi}{m}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{2i\pi}{m}) & -\sin(\frac{2i\pi}{m}) \\ -\sin(\frac{2i\pi}{m}) & -\cos(\frac{2i\pi}{m}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\frac{2i\pi}{m}) & \sin(-\frac{2i\pi}{m}) \\ \sin(-\frac{2i\pi}{m}) & \cos(-\frac{2i\pi}{m}) \end{pmatrix} \\ &= P\left(-\frac{2i\pi}{m}\right) = P_{-i} \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.5.

$$\begin{aligned} P_iP_j &= R_{i-j}, \\ R_iP_j &= P_{i+j}, \\ P_iR_j &= P_{i-j}. \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} R_iP_0 &= P_i, \\ P_0R_{-j} &= P_j, \\ P_iP_j &= R_iP_0P_0R_{-j} = R_iR_{-j} = R_{i-j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0R_{-i} &= P_i, \\ R_jP_0 &= P_j, \\ R_iP_j &= R_iR_jP_0 = R_{i+j}P_0 = P_{i+j}, \\ P_iR_j &= P_0R_{-i}R_j = P_0R_{-i+j} = P_{i-j}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.6.

$$\begin{aligned} P_iP_j(P_i)^{-1} &= P_{2i-j}, \\ R_iP_j(R_i)^{-1} &= P_{2i+j}. \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} P_iP_j(P_i)^{-1} &= R_{i-j}P_i = P_{2i-j}, \\ R_iP_j(R_i)^{-1} &= P_{i+j}R_{-i} = P_{2i+j}. \end{aligned}$$

□

$D_{2\cdot m}$ を次で定義する:

$$D_{2\cdot m} = \{\, P_i, R_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\} = \{\, P_i, R_i \mid i = 0, \dots, m-1 \,\}.$$

$R_0 = E_2$ であるので, Lemma 3.2.5 から, $D_{2\cdot m}$ が群であることがわかる. Lemma 3.2.4 から, $R_iP_0 = P_i$ であるので, $R_i = P_iP_0$ である. したがって,

$$D_{2\cdot m} = \langle P_0, \dots, P_{m-1} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

であることがわかる. P_i は鏡映であったので, $D_{2\cdot m}$ は有限鏡映群である. $D_{2\cdot m}$ は位数 $2m$ の二面体群とよばれる.

Proposition 3.2.7. *$m > 1$ のとき, $D_{2\cdot m}$ は本質的である.*

Proof.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in V \setminus \{\, \mathbf{0} \,\}$$

とする. $\alpha_2 \neq 0$ のとき,

$$P_0\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \neq \alpha.$$

また $\alpha_2 = 0$ のとき, $\alpha \neq \mathbf{0}$ であることから, $\alpha_1 \neq 0$ となる. このとき,

$$P_1\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{m}) & \sin(\frac{2\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2\pi}{m}) & -\cos(\frac{2\pi}{m}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos(\frac{2\pi}{m}) \\ \alpha_1 \sin(\frac{2\pi}{m}) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 3.2.8. *$m = 1$ のとき, つまり $D_{2\cdot 1}$ は本質的ではない.*

Proof. $D_{2\cdot 1} = \{ P_0, R_0 \}$ である.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $P_0\alpha = R_0\alpha = \alpha$ である. □

Lemma 3.2.9.

$$\{ P_{k+2i}, P_{-k+2i} \mid i \in \mathbb{Z} \} = \left\{ AP_kA^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\}.$$

Proof. $P_{k+2i} \in \left\{ AP_kA^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\}$ を示す. $A = R_i$ とすれば, Lemma 3.2.6 から, $AP_kA^{-1} = P_{2i+k}$ となる. $P_{-k+2i} \in \left\{ AP_kA^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\}$ を示す. $A = P_i$ とすれば, Lemma 3.2.6 から, $AP_kA^{-1} = P_{2i-i}$ となる.

$A \in D_{2\cdot m}$ に対し, $AP_0A^{-1} \in \{ P_{k+2i} \mid i \in \mathbb{Z} \}$ を示す. $A = R_i$ のとき, Lemma 3.2.6 から, $AP_kA^{-1} = P_{2i+k}$ である. 一方, $A = P_j$ のとき, $AP_kA^{-1} = P_{2j-k}$ である. □

Proposition 3.2.10. *m が奇数であるとする. このとき,*

$$\begin{aligned} \{ P_i \mid i \in \mathbb{Z} \} &= \left\{ AP_0A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} \\ &= \left\{ AP_1A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

つまり, $\{ P_i \mid i \in \mathbb{Z} \}$ は P_0 を含む共軛類である.

Proof. $C = \left\{ AP_0A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\}$ とおく. このとき, Lemma 3.2.9 より, $C = \{ P_{2l} \mid l \in \mathbb{Z} \}$ である.

$C = \left\{ AP_0A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\}$ であるので, $AP_0A^{-1} \in \left\{ AP_0A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} \subset \{ P_i \mid i \in \mathbb{Z} \}$ である.

$P_i \in C$ を示す. i が偶数のとき, であることから, $P_i \in C$ である. i が奇数のときについて考える. $P_i = P_{i+m}$ であるが, m が奇数なので, $i + m$ は偶数である. したがって $P_i = P_{i+m} \in C$ である.

$C_k = \left\{ AP_kA^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\}$ とおく. $C = C_k$ を示す. $P_k \in C$ である. したがって, $AP_0A^{-1} = P_k$ となる $A \in D_{2\cdot m}$ が存在する.

$B \in D_{2\cdot m}$ とする. $AP_0A^{-1} = P_k$ であるので, $P_0 = A^{-1}P_kA$ である. $BP_0B^{-1} = BA^{-1}P_kAB^{-1} = (BA^{-1})P_k(BA^{-1})^{-1}$ であるので, $BP_0B^{-1} \in C_k$ である.

$B \in D_{2\cdot m}$ とする. $BP_kB^{-1} = BAP_0A^{-1}B^{-1} = (BA)P_0(BA)^{-1}$ であるので, $BP_kB^{-1} \in C$ である.

□

x2 (2025-01-23 16:09)

Proposition 3.2.11. m を偶数とする. このとき,

$$\begin{aligned}\{ P_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \} &= \left\{ AP_0A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \left\{ AP_2A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \cdots, \\ \{ P_{2i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \} &= \left\{ AP_1A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \left\{ AP_3A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \cdots, \\ \{ P_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \} &\cap \{ P_{2i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \} = \emptyset.\end{aligned}$$

つまり, $\{ P_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \}$ は P_0 を含む共軛類, $\{ P_{2i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \}$ は P_1 を含む共軛類であり, この 2 つの共軛類は異なる.

Proof. Lemma 3.2.9 から,

$$\begin{aligned}\{ P_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \} &= \left\{ AP_0A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \left\{ AP_2A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \cdots, \\ \{ P_{2i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \} &= \left\{ AP_1A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \left\{ AP_3A^{-1} \,\middle|\, A \in D_{2\cdot m} \right\} = \cdots.\end{aligned}$$

はすぐわかる.

$P_k = P_l$ とする. このとき, $E_2 = (P_k)^{-1}(P_l) = P_kP_l = R_{k-l}$ である. $R_j = E_2$ となるのは j が m の倍数であるときのみである. したがって, $k - l$ が m の倍数である. 今, m は偶数であるので, $k - l$ も偶数でなければいけない. よって, k と l の偶奇は一致する. したがって, $P_{2i} \notin \{ P_{2i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \}$ かつ, $P_{2i+1} \notin \{ P_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \}$ であるので,

$$\{ P_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \} \cap \{ P_{2i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \} = \emptyset$$

である. □

3.2.2 A_{n-1}

$W = \{ A_\sigma \mid \sigma \in S_n \}$ とおく. $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対し, $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\sigma'}$ が成り立つことは直接計算することで確かめられる. また, $A_\varepsilon = E_n$ であり, $A_\sigma^{-1} = A_{\sigma^{-1}}$ である. したがって, W は群である. さらに, $f(\sigma) = A_\sigma$ とおくと, f は S_n から W への全単射である. さらに, これは群準同型写像であるので, S_n と W は同型である.

$\tau_{i,j} \in S_n$ を i と j を入れ替える互換とする. つまり,

$$\tau(k) = \begin{cases} j & (k = i) \\ i & (k = j) \\ k & (k \notin \{ i, j \}) \end{cases}$$

とする. このとき, $A_{\tau_{i,j}} = T_{i,j}$ であり, 鏡映である. S_n は互換で生成されていたので, W は $\{ T_{i,j} \mid i \neq j \}$ で生成される. したがって, W は有限鏡映群である.

S_n は隣接互換 $\tau_{1,2}, \tau_{2,3}, \ldots, \tau_{n-1,n}$ で生成されていたので, W は $T_{1,2}, T_{2,3}, \ldots, T_{n-1,n}$ という $n - 1$ 個の行列で生成できることがわかる.

Proposition 3.2.12. $\alpha = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ とおく. このとき, 任意の $A \in W$ に対し, $A\alpha = \alpha$ となる. したがって, W は本質的ではない.

Proof. $\sigma \in S_n$ とする. このとき,

$$A_\sigma \alpha = \sum_{i=1}^{n} A_\sigma \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$$

となるが, σ は $\{1,\dots,n\}$ 上の全単射であるので,

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i = \alpha$$

となる. □

3.2.3　$A_1 \times \cdots \times A_1$

W を

$$W = \left\{ \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z}^\times \right\}$$

で定義する. このとき, W は群である. また, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{Z}^\times)^n$ に対し, $f((a_1,\dots,a_n)) = \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)$ とすると, f は $(\mathbb{Z}^\times)^n$ から W への全単射である. また, 準同型写像でもあるので, $(\mathbb{Z}^\times)^n$ と W は同型である.

また, $(-1,1,\dots,1)$,…,$(1,\dots,1,-1)$ で $(\mathbb{Z}^\times)^n$ は生成されていたので, F_1,…,F_n で W は生成される. F_k は鏡映であったので, W は有限鏡映群である.

Proposition 3.2.13. W は本質的である.

Proof. $\alpha \in V$ とする. $A = \operatorname{diag}(-1,\dots,-1) \in W$ とすると, $A\alpha = -\alpha$ である. $\alpha \neq \boldsymbol{0}$ とすると, 0 ではない第 i 成分 α_i が存在する. このとき, $-\alpha_i \neq \alpha$ であるので, $A\alpha \neq \alpha$ である. □

3.2.4　B_n

W を

$$W = \left\{ \operatorname{diag}(\boldsymbol{a})A_\sigma \,\middle|\, \boldsymbol{a} \in (\mathbb{Z}^\times)^n, \sigma \in S_n \right\}$$

で定義する.

$$\begin{aligned} A_\sigma \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma^{-1}\boldsymbol{e}_k &= A_\sigma \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)A_{\sigma^{-1}}\boldsymbol{e}_k \\ &= A_\sigma \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)\boldsymbol{e}_{\sigma^{-1}(k)} \\ &= A_\sigma(a_{\sigma^{-1}(k)}\boldsymbol{e}_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= a_{\sigma^{-1}(k)}A_\sigma\boldsymbol{e}_{\sigma^{-1}(k)} \\ &= a_{\sigma^{-1}(k)}\boldsymbol{e}_{\sigma\sigma^{-1}(k)} \\ &= a_{\sigma^{-1}(k)}\boldsymbol{e}_k \end{aligned}$$

であるので,

$$A_\sigma \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma^{-1} = \operatorname{diag}(a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,a_{\sigma^{-1}(n)})$$

である. つまり,

$$A_\sigma \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) = \operatorname{diag}(a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,a_{\sigma^{-1}(n)})A_\sigma$$

であることから,

$$(\mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)A_\tau)(\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma) = \mathrm{diag}(b_1a_{\tau^{-1}(1)},\dots,b_na_{\tau^{-1}(n)})A_{\tau\sigma} \in W$$

となる. よって, W は群である. $\mathrm{diag}(\boldsymbol{a})$ も A_σ も鏡映の積としてかけるので, $\mathrm{diag}(\boldsymbol{a})A_\sigma$ も鏡映の積としてかける. つまり, W は有限鏡映群である.

Proposition 3.2.14. W は本質的である.

Proof. $\mathrm{diag}(-1,\dots,-1) \in W$ であることからすぐわかる. □

3.2.5 D_n

W を

$$W = \left\{ \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma \;\middle|\; \sigma \in S_n, (a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{Z}^\times)^n, a_1\cdots a_n = 1 \right\}$$

とおく,

$$(\mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)A_\tau)(\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma) = \mathrm{diag}(b_1a_{\tau^{-1}(1)},\dots,b_na_{\tau^{-1}(n)})A_{\tau\sigma} \in W$$

であるが, $b_1\cdots b_n = a_1\cdots a_n = 1$ ならば $b_1a_{\tau^{-1}(1)}\cdots b_na_{\tau^{-1}(n)} = 1$ である. したがって, W は群である.

$a_1\cdots a_n = 1$ とすると, $a_i = -1$ となる i は偶数個である. $2k$ 個の i で $a_i = -1$ であるとし, $\{\, i \mid a_i = -1 \,\} = \{\, i_1,\dots,i_{2k} \,\}$ とする. このとき, $\tau = \tau_{i_1i_2}\cdots\tau_{i_{2k-1}i_{2k}}$ とおくと,

$$F_{i_1,i_2}\cdots F_{i_{2k-1},i_{2k}} = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\tau$$

である. したがって $\sigma \in S_n$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma &= \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\tau A_\tau^{-1}A_\sigma \\ &= F_{i_1,i_2}\cdots F_{i_{2k-1},i_{2k}}A_{\tau^{-1}}A_\sigma \\ &= F_{i_1,i_2}\cdots F_{i_{2k-1},i_{2k}}A_{\tau^{-1}\sigma}\end{aligned}$$

とかける. したがって, W は $\{\, F_{k,l}, T_{k,l} \mid k \neq l \,\}$ で生成される. $F_{k,l}$ も $T_{k,l}$ も鏡映であったから W は有限鏡映群である.

Proposition 3.2.15. W は本質的である.

Proof. $\alpha \in V \setminus \{\, \mathbf{0} \,\}$ とする. $\alpha \neq \mathbf{0}$ なので, 0 ではない第 k 成分 α_k が存在する.

$$F_{k,l}T_{k,l} = F_kF_lT_{k,l}T_{k,l} = F_kF_l$$

となるので, $F_kF_l \in W$ である. $-\alpha_k \neq \alpha$ であるので $F_kF_l\alpha \neq \alpha$ である. □

x2 (2025-01-23 16:09)

章末問題

1. m を正の整数とし,

$$S = \left\{ \alpha \left(\frac{i\pi}{m} \right) \,\middle|\, i \in \mathbb{Z} \right\}$$

とする. $k \in \mathbb{Z}$ に対し次を示せ:

(a) $\alpha \in S \implies P\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\alpha \in S$.

(b) $\alpha \in S \implies R\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\alpha \in S$.

2. S を次の集合とする.

$$S = \{\, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2 \,\}.$$

次を示せ:

(a) $\alpha \in S \implies T_{1,2}\alpha \in S$.

(b) $\alpha \in S \implies T_{2,3}\alpha \in S$.

第 4 章

ルート系

ここでは, 有限鏡映群の重要な情報を持っているルート系と呼ばれるものを定義し例を与えることを目標とする.

4.1 ルート系の定義

集合 $\Phi \subset V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ に対し, $R(\Phi) = \{ s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \}$ とし, $W(\Phi) = \langle R(\Phi) \rangle_{\mathbb{Z}}$ とおく. 定義から $W(\Phi)$ は鏡映群であるが, Φ が有限であっても $W(\Phi)$ は有限群とは限らない.

Lemma 4.1.1. $f \in W(\Phi)$ に対し, $f\big|_{\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}} = \mathrm{id}_{\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}}$.

Proof. $f \in W(\Phi)$ とすると, $\alpha_i \in \Phi$ を使って $f = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$ とかける. $\beta \in \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ とする. $\alpha_i \in \Phi$ に対して, $\langle \alpha_i, \beta \rangle = 0$ であるので, $s_{\alpha_i}(\beta) = \beta$ である. したがって, $f(\beta) = \beta$ である. □

Lemma 4.1.1 から次がすぐわかる.

Lemma 4.1.2. $f, f' \in W(\Phi)$ とする. $f\big|_{\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}} = f'\big|_{\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}}$ ならば, $f = f'$.

Proof. $V = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ と (内部) 直和分解できる. Lemma 4.1.1 より, $\beta \in \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ に対し, $f(\beta) = f'(\beta) = \beta$ である. また仮定より, $\beta \in \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ に対しても, $f(\beta) = f'(\beta)$ が成り立つので, $f = f'$ である. □

Definition 4.1.3. $\Phi \subset V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ とする. 以下の条件を満たすとき, Φ が V 上の広義ルート系であると呼ぶ:

1. $|\Phi| < \infty$
2. 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し, $s_\alpha(\Phi) = \{ s_\alpha(\beta) \mid \beta \in \Phi \} = \Phi$.

Definition 4.1.4. $\Phi \subset V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ を広義ルート系とする. 以下の条件を満たすとき, Φ が V 上の (被約) ルート系であると呼ぶ:

1. 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{ \alpha, -\alpha \}$.

Definition 4.1.5. $\Phi \subset V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ を被約ルート系とする. 以下の条件を満たすとき, Φ が V 上の結晶的ルート系であると呼ぶ:

1. $\alpha, \beta \in \Phi$ ならば, $2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ は整数である.

Remark 4.1.6. 本稿では, 被約ルート系のことを単にルート系と呼ぶ. 結晶的ルート系のことを単にルート系と呼ぶ流儀もある.

Proposition 4.1.7. 広義ルート系 Φ に対し, $W(\Phi)$ は有限鏡映群である.

Proof. $W(\Phi)$ が有限集合であることを示す. S_Φ を Φ 上の全単射を集めた集合とする. このとき, $|S_\Phi| = |\Phi|!$ であり, 有限集合である. $W' = \left\{ f\big|_\Phi \;\middle|\; f \in W(\Phi) \right\}$ とおく. $\alpha \in \Phi$ に対し, $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ であるので,

$$\begin{array}{rccc} s_\alpha\big|_\Phi \colon & \Phi & \longrightarrow & \Phi \\ & \cup & & \cup \\ & \beta & \longmapsto & s_\alpha(\beta) \end{array}$$

は全単射である. $f \in W(\Phi)$ とすると, $f = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$ とかけるので, $f|_\Phi$ も Φ 上の全単射である. つまり, $W' \subset S_\Phi$ であり, W' は有限集合である. ここで

$$\begin{array}{rccc} \varphi \colon & W(\Phi) & \longrightarrow & W' \\ & \cup & & \cup \\ & f & \longmapsto & f|_\Phi \end{array}$$

とおく. このとき, Lemma 4.1.2 より, φ は単射である. したがって, $W(\Phi)$ も有限集合である. □

Proposition 4.1.8. W を有限鏡映群とする. このとき, $W = W(\Phi)$ となるルート系 Φ が存在する.

Proof.

$$R = \{\, s \in W \mid s \text{ は鏡映} \,\}$$
$$\Phi = \{\, \alpha \in V \mid s_\alpha \in R, \|\alpha\| = 1 \,\}$$

とすればよい. W は鏡映群であるので, $W = \langle R \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle R(\Phi) \rangle_{\mathbb{Z}} = W(\Phi)$ である. $|\Phi| = 2\,|R| \leq 2|W| < \infty$ である. また, 定義から, $\alpha \in \Phi$ に対し, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\, \alpha, -\alpha \,\}$ が成り立つ. $\alpha \in \Phi$, $f \in W$ とすると, $f s_\alpha f^{-1} = s_{f(\alpha)}$ である. $f s_\alpha f^{-1}$ は W の元であり, $s_{f(\alpha)}$ は鏡映であるので, $s_{f(\alpha)} \in R$ がわかる. Proposition 3.1.4 より, $\|f(\alpha)\| = \|\alpha\| = 1$ であるので, $f(\alpha) \in \Phi$ である. □

4.2　ルート系の例

ここでは, ルート系の例を与える.

4.2.1　$I_2(m)$

m を正の整数とし, $D_{2\cdot m}$ について考える. Section 3.2.1 で用いた記号をここでは用いる. Examples 2.1.4 and 2.2.12 の記号を用いると,

$$P_i = P\left(\frac{2i\pi}{m}\right), \qquad R_i = R\left(\frac{2i\pi}{m}\right)$$

x2 (2025-01-23 16:09)

である. さらに,

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha\left(\frac{i\pi}{m}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\sin(-\frac{i\pi}{m})\\ \cos(-\frac{i\pi}{m})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(-\frac{i\pi}{m}+\frac{\pi}{2})\\ \sin(-\frac{i\pi}{m}+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおく. このとき, Example 2.1.4 より, P_i は α_i に関する鏡映である. $\alpha_{i+m} = -\alpha_i$ であるから, P_i は α_{i+m} に関する鏡映でもある. 一方, Example 2.2.12 より, R_i は鏡映ではない. $D_{2\cdot m} = \{ P_i, R_i \mid i \in \{ 0, 1, \ldots, m-1 \} \}$ であったので, $\Phi = \{ \alpha_i \mid i \in \{ 0, 1, \ldots, 2m-1 \} \}$ とおけば, $W(\Phi) = D_{2\cdot m}$ である. この Φ がルート系であることは, Proposition 4.1.8 の証明で構成したルート系そのものであることからわかるが, ここでは, 確認のため定義に従い調べる.

$$\begin{aligned}R_i\alpha_k &= R\left(\frac{2i\pi}{m}\right)\alpha(\frac{k\pi}{m}) = \alpha(\frac{k\pi}{m}+\frac{2i\pi}{m}) = \alpha(\frac{2i+k\pi}{m}) = \alpha_{2i+k}\\ P_0\alpha_k &= P_0\alpha(\frac{k\pi}{m})\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(-\frac{k\pi}{m})\\ \cos(-\frac{k\pi}{m})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(-\frac{k\pi}{m})\\ -\cos(-\frac{k\pi}{m})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\frac{k\pi}{m})\\ -\cos(\frac{k\pi}{m})\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\sin(-\pi+\frac{k\pi}{m})\\ \cos(-\pi+\frac{k\pi}{m})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(\frac{-(m-k)\pi}{m})\\ \cos(\frac{-(m-k)\pi}{m})\end{pmatrix} = \alpha\left(\frac{(m-k)\pi}{m}\right) = \alpha_{m-k},\\ P_i\alpha_k &= P_0R_{-i}\alpha_k = P_0\alpha_{-2i+k} = \alpha_{m+2i-k} \in \Phi\end{aligned}$$

である. また, $\mathbb{R}\alpha_i \cap \Phi = \{ \alpha_i, \alpha_{i+m} \}$ である. さらに $|\Phi| = 2m$ であるので, 有限集合であるから, Φ はルート系である. このルート系を $\Phi(I_2(m))$ とおく. $\alpha_i, \alpha_i \in \Phi$ に対し,

$$2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

は整数とは限らない. したがって, $\Phi(I_2(m))$ は一般には結晶的ではない.

Section 4.2.1 での計算から

$$\begin{aligned}R_i\alpha_k &= \alpha_{2i+k}\\ P_i\alpha_k &= \alpha_{m+2i-k}\end{aligned}$$

であるので,

$$\{ w\alpha_0 \mid w \in W \} = \{ \alpha_{2i}, \alpha_{2i+m} \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

である.

m が奇数のときには,

$$\{ w\alpha_0 \mid w \in W \} = \{ \alpha_i \mid i \in \mathbb{Z} \} = \Phi$$

となる. Proposition 3.1.4 より, $w \in W$ は内積を保つ. したがって, Proposition 2.2.7 より, $\alpha \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ に対し, $ws_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}$ となる. よって

$$\left\{ s_{w(\alpha_0)} \,\middle|\, w \in W \right\} = \left\{ ws_{\alpha_0}w^{-1} \,\middle|\, w \in W \right\}$$

である. m が奇数のときには, $\{ w\alpha_0 \mid w \in W \} = \Phi$ であるので,

$$R(\Phi) = \left\{ ws_{\alpha_0}w^{-1} \,\middle|\, w \in W \right\}$$

であることがわかる, $R(\Phi) = \{ P_i \mid i \in \mathbb{Z} \}$ であり, $P_0 = s_{\alpha_0}$ である. これは, Proposition 3.2.10 の別証になっている.

つぎに m が偶数のときについて考える.

$$\Phi_0 = \{ \alpha_{2i} \mid i \in \{ 1, \dots, m \} \}$$
$$\Phi_1 = \{ \alpha_{2i-1} \mid i \in \{ 1, \dots, m \} \}$$

とおく.

$$\{ w\alpha_0 \mid w \in W \} = \{ \alpha_{2i} \mid i \in \mathbb{Z} \} = \Phi_0$$

である. 同様に,

$$\{ w\alpha_1 \mid w \in W \} = \{ \alpha_{2i-1} \mid i \in \mathbb{Z} \} = \Phi_1$$

である. $\Phi_0 \cap \Phi_1 = \emptyset$, $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$ であるので, m が奇数のときと同様に, Proposition 3.2.11 の別証を与えることができる.

4.2.2　$A_1 \times \cdots \times A_1$

$\varepsilon_i = \boldsymbol{e}_i$ とおく.

$$\Phi = \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n, \}$$

とおく. このとき, Φ はルート系である. F_i を ε_i に関する鏡映とする. このとき F_i は $-\varepsilon_i$ に関する鏡映でもある. $F_i(\pm\varepsilon_i) = \mp\varepsilon_i$ である. $k \neq i$ に対して, $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle = 0$ であるから, $F_i(\pm\varepsilon_k) = \pm\varepsilon_k$ である. したがって, $F_i(\Phi) = \Phi$ である. また, $\mathbb{R}(\pm\varepsilon_i) \cap \Phi = \{ \varepsilon_i, -\varepsilon_i \}$ である. $|\Phi| = 2^n$ であるので, ルート系である. また, クロネッカーの δ を使って,

$$2\frac{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle}{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle} = 2 \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 2\delta_{i,j}$$

とかけるので, 結晶的である.

Section 3.2.3 であつかった鏡映群を W とすると,

$$W(\Phi) = \langle F_1, \dots, F_n \rangle_{\mathbb{Z}} = W$$

である.

4.2.3　A_{n-1}

$\alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$ とし,

$$\Phi = \{ \alpha_{i,j} \mid i \neq j \in \{ 1, \dots, n \} \}$$

とする. $T_{i,j}$ は $\alpha_{i,j}$ に関する鏡映である. $\alpha_{i,j} = -\alpha_{j,i}$ であるので, $T_{i,j}$ は $-\alpha_{i,j}$ に関する鏡映でもある. $\tau \in S_n$ を i と j を入れ替える互換とすると,

$$T_{i,j}\alpha_{k,l} = \alpha_{\tau(k),\tau(l)}$$

であるから, $T_{i,j}(\Phi) = \Phi$ である. $\mathbb{R}\alpha_{i,j} \cap \Phi = \{ \alpha_{i,j}, \alpha_{j,i} \}$ であり, $|\Phi| = 2\binom{n}{2}$ であるので, Φ はルート系である. このルート系を $\Phi(A_{n-1})$ とおく. $\langle \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j} \rangle = 2$ であるので,

$$2\frac{\langle \alpha_{i,j}, \alpha_{k,l} \rangle}{\langle \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j} \rangle} = \langle \alpha_{i,j}, \alpha_{k,l} \rangle$$

と書け, 整数であることがわかる. したがって $\Phi(A_{n-1})$ は結晶的である. Section 3.2.2 で考えた鏡映群を W とすると,

$$W(\Phi) = \langle R(\Phi) \rangle = W$$

である.

4.2.4 B_n

$1 \leq i < j \leq n$, $\alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$, $\beta_{i,j} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$, $\varepsilon_k = \boldsymbol{e}_k$. とする.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \{ \alpha_{i,j}, -\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\
\Phi_2 &= \{ \beta_{i,j}, -\beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\
\hat{\Phi} &= \Phi_1 \cup \Phi_2 \\
\check{\Phi} &= \{ \varepsilon_k, -\varepsilon_k \mid 1 \leq k \leq n \}
\end{aligned}$$

とする.

$$\Phi = \hat{\Phi} \cup \check{\Phi}$$

とおく.

F_k は ε_k に関する鏡映である.

$$F_k\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i,j} & (k \notin \{ i, j \}) \\ \beta_{i,k} & (k = j) \\ -\beta_{j,k} & (i = k) \end{cases}$$

$$F_k\beta_{i,j} = \begin{cases} \beta_{i,j} & (k \notin \{ i, j \}) \\ \alpha_{i,k} & (k = j) \\ \alpha_{j,k} & (i = k) \end{cases}$$

$$F_k\varepsilon_i = \begin{cases} -\varepsilon_k & (i = k) \\ \varepsilon_i & (i \neq k) \end{cases}$$

であるので, $F_k(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$ かつ $F_k(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$ である.

$T_{i,j}$ は $\alpha_{i,j}$ に関する鏡映である. $\tau \in S_n$ を i と j を入れ替える互換とすると,

$$\begin{aligned}
T_{i,j}\alpha_{k,l} &= \alpha_{\tau(k),\tau(l)} \\
T_{i,j}\beta_{k,l} &= \beta_{\tau(k),\tau(l)} \\
T_{i,j}\varepsilon_k &= \varepsilon_{\tau(l)}
\end{aligned}$$

であるので, $T_{i,j}(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$ かつ $T_{i,j}(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$ である.

$F_{k,l} = F_kF_lT_{k,l}$ は, $\beta_{k,l}$ に関する鏡映である. $T_{i,j}(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$, $T_{i,j}(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$, $F_k(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$, $F_k(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$ であるので, $F_{k,l}(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$, $F_{k,l}(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$ である.

x2 (2025-01-23 16:09)

したがって, $\alpha \in \Phi$ に対し, $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ である. また, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{ \alpha, -\alpha \}$ である. $|\Phi| = 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{2} + 2n = 2n^2$ であるので, Φ はルート系である. このルート系を $\Phi(B_n)$ とおく.

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j} \rangle &= 2 \\ \langle \beta_{i,j}, \beta_{i,j} \rangle &= 2 \\ \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle &= 1 \end{aligned}$$

である. $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して, $2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ の分母は 2 または 1 であるので, 整数である. したがって, $\Phi(B_n)$ は結晶的である.

$F_{k,l} = F_k F_l T_{k,l}$ であるので, $\langle R(\Phi) \rangle_{\mathbb{Z}} = \left\langle R(\Phi_1 \cup \check{\Phi}) \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ である. したがって, Section 3.2.4 の鏡映群を W とすると, $W(\Phi) = W$ である.

4.2.5　C_n

$\Phi = \Phi(B_n)$ は, ルート系であった. $\alpha \in \Phi$ に対し, $s_\alpha(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$, $s_\alpha(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$ であり, $s_\alpha(\check{\Phi}) \cap \hat{\Phi} = \emptyset$, $s_\alpha(\hat{\Phi}) \cap \check{\Phi} = \emptyset$ である. したがって, $\check{\Phi}$ のみを定数倍しても, 再びルート系になる. 例えば, $\varepsilon'_k = 2\varepsilon_k$ とし

$$\begin{aligned} \Phi' &= \{ \varepsilon'_k, -\varepsilon'_k \mid 1 \leq k \leq n \} \\ \Phi_1 &= \{ \alpha_{i,j}, -\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\ \Phi_2 &= \{ \beta_{i,j}, -\beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\ \Phi'' &= \Phi_1 \cup \Phi_2 \end{aligned}$$

とし,

$$\Phi(C_n) = \Phi' \cup \Phi''$$

としても, $\Phi(C_n)$ はルート系である.

$$\langle \varepsilon'_i, \varepsilon'_i \rangle = 4$$

であるが, $\alpha \in \Phi$ に対し,

$$2\frac{\langle \varepsilon'_i, \alpha \rangle}{\langle \varepsilon'_i, \varepsilon'_i \rangle} = 2\frac{\langle 2\varepsilon_i, \alpha \rangle}{\langle \varepsilon'_i, \varepsilon'_i \rangle} = 4\frac{\langle \varepsilon_i, \alpha \rangle}{\langle \varepsilon'_i, \varepsilon'_i \rangle} = \langle \varepsilon_i, \alpha \rangle$$

である. したがって, $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して, $2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ は整数である. したがって, $\Phi(C_n)$ は結晶的である. また, $R(\Phi(C_n)) = R(\Phi(B_n))$ であるので, $W(\Phi(C_n)) = W(\Phi(B_n))$ でる.

4.2.6　D_n

$1 \leq i < j \leq n$ に対し, $\alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$, $\beta_{i,j} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \{ \alpha_{i,j}, -\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\ \Phi_2 &= \{ \beta_{i,j}, -\beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\ \Phi &= \Phi_1 \cup \Phi_2 \end{aligned}$$

とする. このとき, $\alpha \in \Phi$ に対して, $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ となっていた. また, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{ \alpha, -\alpha \}$ である. $|\Phi| = 2n(n-1)$ であるので, Φ はルート系である. このルート系を $\Phi(D_n)$ とおく. $\langle \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j} \rangle = 2$ であることから, $\Phi(D_n)$ は結晶的であることがわかる.

$R(\Phi) = \{ T_{i,j}, F_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$ であるので, Section 3.2.5 の鏡映群を W とすると, $W(\Phi) = W$ である.

4.2.7 G_2

$n = 3$ とする.

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j, \\ \gamma_i &= -(\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3}) \end{aligned}$$

とおき,

$$\begin{aligned} \check{\Phi} &= \{ \alpha_{i,j}, -\alpha_{i.j} \mid 1 \leq i < j \leq 3 \}, \\ \hat{\Phi} &= \{ \gamma_i, -\gamma_i \mid 1 \leq i \leq 3 \}, \\ \Phi &= \check{\Phi} \cup \hat{\Phi} \end{aligned}$$

とする.

$\tau \in S_3$ を i と j を入れ替える互換とすると,

$$T_{i,j}\gamma_k = \gamma_{\tau(k)}$$

である. したがって, $T_{i,j}(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$, $T_{i,j}(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$ である.

$\{ 1,2,3 \} = \{ i,j,k \}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \gamma_i &= -(\alpha_{i,j} + \alpha_{i,k}) = -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k \\ \langle \gamma_i, \alpha_{j,k} \rangle &= \langle -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k \rangle = 0 \\ \langle \gamma_i, \alpha_{i,j} \rangle &= \langle -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \rangle = -3 \\ \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle &= \langle \gamma_i, -\alpha_{j,i} - \alpha_{j,k} \rangle = -3 + 0 = -3 \\ \langle \gamma_i, \gamma_i \rangle &= \langle \gamma_i, -\alpha_{i,j} - \alpha_{i,k} \rangle = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} s_{\gamma_i}(\alpha_{j,k}) &= \alpha_{j,k} - 2\frac{0}{6}\gamma_i = \alpha_{j,k} \\ s_{\gamma_i}(\alpha_{i,j}) &= \alpha_{i,j} - 2\frac{-3}{6}\gamma_i = \alpha_{i,j} - \alpha_{i,j} - \alpha_{i,k} = -\alpha_{i,k} \\ s_{\gamma_i}(\gamma_j) &= \gamma_j - 2\frac{-3}{6}\gamma_i = \gamma_j + \gamma_i \\ &= -2\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_k - 2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k = 2\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i = -\gamma_k \end{aligned}$$

である. したがって, $s_{\gamma_i}(\check{\Phi}) = \check{\Phi}$, $s_{\gamma_i}(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}$ である. $\alpha \in \Phi$ に対し, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{ \alpha, -\alpha \}$ であり, $|\Phi| = 12$ であるので, Φ はルート系である. このルート系を $\Phi(G_2)$ と書く. $\{ 1,2,3 \} = \{ i,j,k \}$ とすると,

$$\langle \gamma_i, \gamma_i \rangle = \langle -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k, -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k \rangle = 4 + 1 + 1 = 6$$

である.

$$\begin{aligned} \langle \gamma_i, \alpha_{i,j} \rangle &= \langle -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \rangle = -2 - 1 = -3 \\ \langle \gamma_i, \alpha_{j,k} \rangle &= \langle -2\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k \rangle = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

となるので, $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して, $2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ は整数である. したがって, $\Phi(G_2)$ は結晶的である.

x2 (2025-01-23 16:09)

章末問題

1. Section 4.2.1 と同じ記号を用い, $\Phi = \Phi(I_2(m))$ について考える.
   (a) $\{\, \alpha_0, \alpha_{m-1} \,\}$ は, $\mathbb{R}^2$ の基底であることを示せ.
   (b) $c\alpha_0 + c'\alpha_{m-1} \in \Phi$ ならば, 次のいずれかが成り立つことを示せ:
      i. $c > 0$ かつ $c' > 0$; または
      ii. $c < 0$ かつ $c' < 0$.
   (c) $\{\, c\alpha_0 + c'\alpha_{m-1} \in \Phi \mid c > 0, c' > 0 \,\}$ を求めよ.
   (d) $\{\, c\alpha_0 + c'\alpha_{m-1} \in \Phi \mid c < 0, c' < 0 \,\}$ を求めよ.
2. Section 4.2.3 と同じ記号を用い, $\Phi = \Phi(A_2)$ について考える.
   (a) $\{\, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3} \,\}$ は, $\langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ の空間の基底であることを示せ.
   (b) $\langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ であることを示せ.
   (c) $c\alpha_{1,2} + c'\alpha_{2,3} \in \Phi$ ならば, 次のいずれかが成り立つことを示せ:
      i. $c > 0$ かつ $c' > 0$; または
      ii. $c < 0$ かつ $c' < 0$.
   (d) $\{\, c\alpha_{1,2} + c'\alpha_{2,3} \in \Phi \mid c > 0, c' > 0 \,\}$ を求めよ.
   (e) $\{\, c\alpha_{1,2} + c'\alpha_{2,3} \in \Phi \mid c < 0, c' < 0 \,\}$ を求めよ.

第 5 章

単純系

ここでは単純系と呼ばれるルート系の良い部分集合を定義する.

5.1 単純系の定義

Definition 5.1.1. Φ をルート系とし, $\Delta \subset \Phi$ とする. このとき,

$$\Phi_\Delta^+ = \Phi \cap \left\{ \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta \delta \;\middle|\; a_\delta \geq 0 \right\}$$

$$\Phi_\Delta^- = \Phi \cap \left\{ \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta \delta \;\middle|\; a_\delta \leq 0 \right\}$$

とする. 以下の条件を満たすとき Δ を Φ の単純系と呼ぶ:

1. Δ は一次独立.
2. $\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$.

また, Δ が単純系であるとき, Φ_Δ^+ を Δ に関するポジティブシステム, Φ_Δ^- を Δ に関するネガティブシステムと呼ぶ. また, Δ の元を単純ルート, Φ_Δ^+ の元を Δ に関する正ルート, Φ_Δ^- の元を Δ に関する負ルートと呼ぶ.

Remark 5.1.2. 単純ルートは正ルートである.

Remark 5.1.3. $\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$ がなりたつなら, Φ の元は Δ の元の一次結合としてかけることがわかる. また, $\Delta \subset \Phi$ であるから, $\langle\Phi\rangle_\mathbb{R} = \langle\Delta\rangle_\mathbb{R}$ である. Δ は一次独立なので, Δ は $\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}$ の基底である. とくに, $\alpha \in \Phi \subset \langle\Phi\rangle_\mathbb{R}$ に対し, $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta\delta$ と線型結合で表す方法は一意的である. したがって, $\Phi_\Delta^+ \cap \Phi_\Delta^- = \emptyset$ である.

Proposition 5.1.4. Φ をルート系とし, $\Delta \subset \Phi$ を単純系とする. $\alpha \in \Phi_\Delta^+$ ならば, $-\alpha \in \Phi_\Delta^-$ である. $\alpha \in \Phi_\Delta^-$ ならば, $-\alpha \in \Phi_\Delta^+$ である.

Proof. $\alpha \in \Phi$ とすると, $-\alpha \in \Phi$ である. $\alpha = \sum_\delta c_\delta\delta$ とかけるとすると, $-\alpha = \sum_\delta(-c_\delta)\delta$ である. $c_\delta \geq 0$ なら $-c_\delta \leq 0$ であり, $c_\delta \leq 0$ なら $-c_\delta \geq 0$ である. □

Proposition 5.1.5. Φ をルート系とし, $\Delta \subset \Phi$ を単純系とする. このとき,

$$\Phi_\Delta^+ = \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle\alpha, \varpi\rangle > 0 \,\}$$

$$\Phi_\Delta^- = \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle\alpha, \varpi\rangle < 0 \,\}$$

をみたす $\varpi \in V$ が存在する.

Proof. $\delta \in \Delta$ とする. $F_\delta = \langle \Delta \setminus \{ \delta \} \rangle_{\mathbb{R}}$ とする. Δ は基底であり一次独立であるので, $\delta \notin F_\delta$ である. $V = F_\delta \oplus (F_\delta)^\perp$ であるので, $\delta = \hat{\delta} + \check{\delta}$ をみたす $\hat{\delta} \in F_\delta$ と $\check{\delta} \in (F_\delta)^\perp$ が存在する. $\delta \notin F_\delta$ であることから, $\check{\delta} \neq \mathbf{0}$ である. このとき,

$$\left\langle \alpha, \check{\delta} \right\rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha \in \Delta \setminus \{ \delta \}) \\ \left\langle \check{\delta}, \check{\delta} \right\rangle > 0 & (\alpha = \delta) \end{cases}$$

である.

$$\varpi = \sum_{\delta \in \Delta} \check{\delta}$$

とおくと, $\alpha \in \Delta$ に対し,

$$\langle \alpha, \varpi \rangle = \left\langle \alpha, \sum_{\delta \in \Delta} \check{\delta} \right\rangle = \langle \check{\alpha}, \check{\alpha} \rangle > 0.$$

したがって, $\alpha = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta \delta$ に対し,

$$\langle \alpha, \varpi \rangle = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta \left\langle \check{\delta}, \check{\delta} \right\rangle$$

であるから, $\alpha \in \Phi_\Delta^+$ なら $\langle \alpha, \varpi \rangle > 0$ であり, $\alpha \in \Phi_\Delta^-$ なら $\langle \alpha, \varpi \rangle < 0$ である. □

Remark 5.1.6. ルート系 Φ の単純系 Δ に対し, Proposition 5.1.5 の証明中で構成した $\check{\delta}$ を使うと,

$$\left\{ \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta \delta \,\middle|\, a_\delta \geq 0 \right\} = \bigcup_{\delta \in \Delta} \left\{ \lambda \in \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} \,\middle|\, \left\langle \lambda, \check{\delta} \right\rangle \right\}$$
$$\left\{ \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta \delta \,\middle|\, a_\delta \geq 0 \right\} \subset \bigcup_{\delta \in \Delta} \left\{ \lambda \in V \,\middle|\, \left\langle \lambda, \check{\delta} \right\rangle \right\}$$

である.

Lemma 5.1.7. Φ をルート系とする. $\Pi \subset \Phi$ に対し,

$$X(\Pi) = \left\{ \sum_{\gamma \in \Pi} a_\gamma \gamma \,\middle|\, a_\gamma \geq 0, |\{ \gamma \mid a_\gamma > 0 \}| > 1 \right\}$$
$$\Delta(\Pi) = \Pi \setminus X(\Pi)$$

とおく. $\Delta \subset \Phi$ が単純系ならば,

$$\Delta = \Delta(\Phi_\Delta^+).$$

Proof. まず $\Delta(\Phi_\Delta^+) \subset \Delta$ を示す. $\alpha \in \Delta(\Phi_\Delta^+) = \Phi_\Delta^+ \setminus X(\Phi_\Delta^+)$ とする. $\alpha \in \Phi_\Delta^+$ であるので, $a_\delta \geq 0$ を使って, $\alpha = \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta \delta$ と表せる. $\alpha \notin X(\Phi_\Delta^+)$ であるので, $a_\delta \neq 0$ となる δ は唯一つに定まる. $\alpha = a_\delta \delta$ である. Φ はルート系であることから, $a_\delta \delta \in \mathbb{R}\delta = \{ \delta, -\delta \}$ であり, $\alpha = \delta \in \Delta$.

次に, $\Delta \subset \Delta(\Phi_\Delta^+) = \Phi_\Delta^+ \setminus X(\Phi_\Delta^+)$ を示す. $\alpha \in \Delta$ とする. $\alpha \in \Delta \subset \Phi_\Delta^+$ であるので, $\alpha \notin X(\Phi_\Delta^+)$ を示す. $\gamma \in \Phi_\Delta^+$ は, $c_{\gamma,\delta} \geq 0$ を使って, $\gamma = \sum_\delta c_{\gamma,\delta} \delta$ とかけるとする. この

記号の下, $a_\gamma \geq 0$ をつかって, $\alpha = \sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta} a_\gamma\gamma$ とかけているとすると, $\gamma \in \Phi^+_\Delta$ であるので,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta}\sum_{\delta\in\Delta} a_\gamma c_{\gamma,\delta}\delta \\ &= \sum_{\delta\in\Delta}(\sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta} a_\gamma c_{\gamma,\delta})\delta\end{aligned}$$

である. $\alpha \in \Delta$ であったので,

$$\begin{aligned}\alpha &= (\sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta} a_\gamma c_{\gamma,\alpha})\alpha + \sum_{\delta\in\Delta\setminus\{\,\alpha\,\}}(\sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta} a_\gamma c_{\gamma,\delta})\delta \\ \mathbf{0} &= (-1 + \sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta} a_\gamma c_{\gamma,\alpha})\alpha + \sum_{\delta\in\Delta\setminus\{\,\alpha\,\}}(\sum_{\gamma\in\Phi^+_\Delta} a_\gamma c_{\gamma,\delta})\delta\end{aligned}$$

である. Δ は $\langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}}$ の基底であるから,

$$\sum_{i=1}^{l} a_i c_{i,\delta} = \begin{cases}1 & (\alpha = \delta)\\ 0 & (\alpha \neq \delta)\end{cases}$$

である. $a_\gamma > 0$ とすると, $\alpha \neq \delta$ に対して, $c_{\gamma,\delta} = 0$. $\gamma = \sum_{\delta\in\Delta} c_{\gamma,\delta}\delta$ と書けていたので,

$$\gamma = \sum_{\delta\in\Delta} c_{\gamma,\delta}\delta = c_{\gamma,\alpha}\alpha$$

である. $\gamma \in \Phi^+_\Delta$ であるので, ルート系の定義から, $c_{\gamma,\alpha} = 1$, つまり, $\alpha = \gamma$ がわかる. よって, $\{\,\gamma \mid a_\gamma > 0\,\} = \{\,\alpha\,\}$ であり, $|\{\,\gamma \mid a_\gamma > 0\,\}| = 1$ である.

□

Theorem 5.1.8. Φ をルート系とし, $\Delta, \Delta' \subset \Phi$ を単純系とする. このとき, 次は同値*:*

1. $\Delta = \Delta'$.
2. $\Phi^+_\Delta = \Phi^+_{\Delta'}$.

Proof. $\Delta = \Delta'$ に対し $\Phi^+_\Delta = \Phi^+_{\Delta'}$ となることは定義から明白である.

$\Phi^+_\Delta = \Phi^+_{\Delta'}$ とする. このとき, Lemma 5.1.7 から, $\Delta = \Delta(\Phi^+_\Delta) = \Delta(\Phi^+_{\Delta'}) = \Delta'$ である.

□

5.2 単純系の存在

Φ をルート系とする. $M(\Phi) = V \setminus (\bigcup_{\alpha\in\Phi} H_\alpha)$ とおくと, Φ は有限集合であるので $M(\Phi) \neq \emptyset$ である. $\varpi \in M(\Phi)$ に対し,

$$\begin{aligned}\Phi^+_\varpi &= \{\,\alpha \in \Phi \mid \langle\varpi, \alpha\rangle > 0\,\}\\ \Phi^-_\varpi &= \{\,\alpha \in \Phi \mid \langle\varpi, \alpha\rangle < 0\,\}\end{aligned}$$

とおく. $\varpi \in M(\Phi)$ であるので $\Phi = \Phi^+_\varpi \cup \Phi^-_\varpi$ である. $\Pi \subset \Phi^+_\varpi$ に対し,

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\Pi = \left\{ \sum_{\delta\in\Pi} a_\delta\delta \;\middle|\; a_\delta \geq 0 \right\}$$

とおく.

$$\mathcal{S} = \left\{ \Pi \subset \Phi^+_\varpi \;\middle|\; \Phi^+_\varpi \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\Pi \right\}$$

とおく. $\Phi^+_\varpi \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\Phi^+_\varpi$ であるで, $\Phi^+_\varpi \in \mathcal{S}$ であり, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ である. そこで, $r = \min\{\, |\Pi| \mid \Pi \in \mathcal{S} \,\}$ とし, $\Delta_\varpi \in \mathcal{S}$ が $|\Delta_\varpi| = r$ をみたしているとする.

Lemma 5.2.1. $\alpha \in \Delta_\varpi$ とすると, $\alpha \notin \mathbb{R}_{\geq 0}(\Delta_\varpi \setminus \{\, \alpha \,\})$.

Proof. $\alpha \in \Delta_\varpi$ かつ $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\Delta_\varpi \setminus \{\, \alpha \,\})$ とすると, $\Delta_\varpi \setminus \{\, \alpha \,\} \in \mathcal{S}$ である. □

Lemma 5.2.2. $\lambda, \mu \in \Delta_\varpi$ かつ $\lambda \neq \mu$ なら, $\langle \lambda, \mu \rangle \leq 0$.

Proof. $\lambda, \mu \in \Delta_\varpi$ かつ $\langle \lambda, \mu \rangle > 0$ とする. このとき,

$$c = 2\frac{\langle \lambda, \mu \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle}$$

とすると, $c > 0$ である. また, $s_\lambda(\mu) = \mu - c\lambda$ である. $s_\alpha(\Phi) = \Phi = \Phi^+_\varpi \cup \Phi^-_\varpi$ である.

まず, $s_\lambda(\mu) \in \Phi^+_\varpi$ のときについて考える. $s_\lambda(\mu) = \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi} c_\gamma \gamma$, $c_\gamma \geq 0$ とする.

$$s_\lambda(\mu) = \mu - c\lambda = c_\mu \mu + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} c_\gamma \gamma$$

である. したがって,

$$\mu - c\lambda = c_\mu \mu + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} c_\gamma \gamma \tag{5.1}$$

である.

$c_\mu < 1$ のとき, eq. (5.1) を

$$\begin{aligned} \mu - c_\mu \mu &= c\lambda + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} c_\gamma \gamma \\ (1 - c_\mu)\mu &= c\lambda + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} c_\gamma \gamma \\ \mu &= \frac{c}{(1 - c_\mu)}\lambda + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} \frac{c_\gamma}{(1 - c_\mu)}\gamma \end{aligned}$$

と変形する. $1 - c_\mu > 0$ であるので, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\})$ となる. これは Lemma 5.2.1 に矛盾する.

$c > 1$ のとき, eq. (5.1) を

$$\mathbf{0} = c\lambda + (c_\mu - 1)\mu + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} c_\gamma \gamma$$

と変形する. $\Delta_\varpi \subset \Phi^+_\varpi$ であるので,

$$\left\langle c\lambda + (c_\mu - 1)\mu + \sum_{\gamma \in \Delta_\varpi \setminus \{\, \mu \,\}} c_\gamma \gamma, \varpi \right\rangle \geq \langle c\lambda, \varpi \rangle = c \langle \lambda, \varpi \rangle > 0 = \langle \mathbf{0}, \varpi \rangle$$

となり矛盾する.

次に, $s_\lambda(\mu) \in \Phi^-_\varpi$ のときについて考える. $-s_\lambda(\mu) \in \Phi^+_\varpi$ である. $-s_\lambda(\mu) = \sum_{\gamma\in\Delta_\varpi} c_\gamma\gamma$, $c_\gamma \geq 0$ とする. $s_\lambda(\mu) \in \Phi^+_\varpi$ のときと同様の計算で,

$$c\lambda - \mu = c_\lambda\lambda + \sum_{\gamma\in\Delta_\varpi\setminus\{\,\lambda\,\}} c_\gamma\gamma \tag{5.2}$$

がわかる.

$c > c_\lambda$ のとき, eq. (5.2) を

$$\lambda = = \frac{1}{(c-c_\lambda)}\mu + \sum_{\gamma\in\Delta_\varpi\setminus\{\,\lambda\,\}} \frac{c_\gamma}{(c-c_\lambda)}\gamma$$

と変形する. $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\Delta_\varpi \setminus \{\,\lambda\,\})$ となり, Lemma 5.2.1 に矛盾する.

$c \leq c_\lambda$ のとき, eq. (5.2) を

$$\mathbf{0} = \mu + (c_\lambda - c)\lambda + + \sum_{\gamma\in\Delta_\varpi\setminus\{\,\mu\,\}} c_\gamma\gamma$$

と変形する.

$$\left\langle \mu + (c_\lambda - c)\lambda + + \sum_{\gamma\in\Delta_\varpi\setminus\{\,\mu\,\}} c_\gamma\gamma, \varpi \right\rangle \geq \langle\mu,\varpi\rangle > 0 = \langle\mathbf{0},\varpi\rangle$$

となり矛盾する. □

Lemma 5.2.3. Δ_ϖ は一次独立である.

Proof. $\sum_{\delta\in\Delta_\varpi} a_\delta\delta = \mathbf{0}$ とする.

$$\Pi^+ = \{\,\delta\in\Delta_\varpi \mid a_\delta > 0\,\}$$
$$\Pi^- = \{\,\delta\in\Delta_\varpi \mid a_\delta < 0\,\}$$

とし $b_\lambda = -a_\lambda$ とする.

$$v_+ = \begin{cases} \sum_{\delta\in\Delta_\varpi} a_\delta\delta & (\Pi^+ \neq \emptyset) \\ \mathbf{0} & (\Pi^+ = \emptyset) \end{cases}$$
$$v_- = \begin{cases} \sum_{\delta\in\Delta_\varpi} a_\delta\delta & (\Pi^- \neq \emptyset) \\ \mathbf{0} & (\Pi^- = \emptyset) \end{cases}$$

とする. $v_+ - v_- = \mathbf{0}$ である. したがって $v_+ = v_-$ である. Lemma 5.2.2 より,

$$\langle v_+, v_-\rangle = \sum_{\mu\in\Pi^+}\sum_{\lambda\in\Pi^-} a_\mu b_\lambda \langle\mu,\lambda\rangle \leq 0$$

となるが, $0 \leq \langle v_+, v_+\rangle = \langle v_+, v_-\rangle \leq 0$ であるので, $\langle v_+, v_+\rangle = 0$ となる. したがって $v_+ = \mathbf{0}$. $v_- = v+ = \mathbf{0}$ であるので, すべての λ に対し, $a_\lambda = 0$ である. □

Proposition 5.2.4. Δ_ϖ は Φ の単純系であり, $\Phi^+_{\Delta_\varpi} = \Phi^+_\varpi$ である.

Proof. 定義から $\Phi^+_\varpi \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\Delta_\varpi$ であり, $\Delta_\varpi \subset \Phi$ である. したがって, $\langle\Delta_\varpi\rangle_\mathbb{R} = \langle\Phi^+\rangle_\mathbb{R} = \langle\Phi\rangle_\mathbb{R}$. Lemma 5.2.3 から, Δ_ϖ は一次独立であるので, Δ_ϖ は $\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}$ の基底である.

x2 (2025-01-23 16:09)

また, $\Delta_\varpi \subset \Phi^+_\varpi$ であるので, $\mathbb{R}_{\geq 0}\Delta_\varpi \cap \Phi^-_\varpi = \emptyset$ である. $\Phi = \Phi^+_\varpi \cup \Phi^-_\varpi$ であるので,

$$\Phi^+_{\Delta_\varpi} = \Phi^+_\varpi$$
$$\Phi^-_{\Delta_\varpi} = \Phi^-_\varpi$$

である. □

Corollary 5.2.5. *ルート系 Φ に対し, 単純系 Δ は存在する.*

Proof. $\varpi \in M(\Phi)$ とし, Δ_ϖ とすればよい. □

Remark 5.2.6. $\varpi \in M(\Phi)$ のとり方に, Δ_ϖ は依存する.

Theorem 5.2.7. *Φ をルート系とし, Δ を単純系とする. $\lambda, \mu \in \Delta$ かつ $\lambda \neq \mu$ なら, $\langle \lambda, \mu \rangle \leq 0$.*

Proof. Proposition 5.1.5 より, $\Phi^+_\Delta = \Delta^+_\varpi$ となる, ϖ がとれる. このとき, $\Delta = \Delta_\varpi$ であるので, Lemma 5.2.2 よりわかる. □

Definition 5.2.8. *Φ をルート系とする. $\mathrm{rank}(\Phi) = \dim(\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}})$ と定義し, Φ の階数と呼ぶ.*

Remark 5.2.9. Δ は $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ の基底であったので, Δ のとり方によらず, $|\Delta| = \mathrm{rank}(\Phi)$.

5.3 例

5.3.1 $I_2(m)$

$\Phi = \Phi(I_2(m))$ とし, Section 4.2.1 と同じ記号を用いる. $\Phi = \{ \alpha_i \mid i \in \{ 0, \ldots, 2m-1 \} \}$ であり, $\alpha_{i+m} = -\alpha_i$ であった. $\Delta = \{ \alpha_0, \alpha_{m-1} \}$ とする. このとき, $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\alpha_{m-1} = \alpha\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$ であったので, Δ は一次独立であり, $V = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ の基底である.

$$\eta_1 = \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\eta_2 = \alpha\left(\frac{(m-1)\pi}{m} - \frac{\pi}{2}\right) = \alpha\left(\frac{-\pi}{m} + \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくことにする. $\langle \alpha_0, \eta_1 \rangle = 0$ であるので, $\mathbb{R}\alpha_0 = H_{\eta_1}$ である. また, $\langle \alpha_{m-1}, \eta_2 \rangle = 0$ であるので, $\mathbb{R}\alpha_0 = H_{\eta_2}$ である. さらに,

$$\Lambda_1 = \{ \lambda \in V \mid \langle \lambda, \eta_1 \rangle \geq 0 \}$$
$$\Lambda_2 = \{ \lambda \in V \mid \langle \lambda, \eta_2 \rangle \geq 0 \}$$
$$\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$$

とおくと,

$$\{ a\alpha_0 + b\alpha_{m-1} \mid a \geq 0, b \geq 0 \} = \Lambda$$

である. また, $-\Lambda = \{ -\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ とすると

$$\{ a\alpha_0 + b\alpha_{m-1} \mid a \leq 0, b \leq 0 \} = -\Lambda$$

x2 (2025-01-23 16:09)

である.

$$\begin{aligned}\langle \alpha_i, \eta_1 \rangle &= \left\langle \alpha\left(\frac{i\pi}{m}\right), \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\rangle \\ &= \cos\left(\frac{i\pi}{m} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{i\pi}{m}\right) \\ \langle \alpha_i, \eta_2 \rangle &= \left\langle \alpha\left(\frac{i\pi}{m}\right), \alpha\left(\frac{-\pi}{m} + \frac{\pi}{2}\right) \right\rangle \\ &= \cos\left(\frac{i\pi}{m} - \left(\frac{-\pi}{m} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{(1+i)\pi}{m} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{(1+i)\pi}{m}\right)\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\{\, \alpha_i \mid i \in \{\, 0, 1, \ldots, m-1 \,\} \,\} &\subset \Lambda \\ \{\, \alpha_{m+i} \mid i \in \{\, 0, 1, \ldots, m-1 \,\} \,\} &\subset \Lambda\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}\Phi^+_\Delta &= \{\, \alpha_i \mid i \in \{\, 0, 1, \ldots, m-1 \,\} \,\} \\ \Phi^-_\Delta &= \{\, \alpha_{m+i} \mid i \in \{\, 0, 1, \ldots, m-1 \,\} \,\}\end{aligned}$$

であるので, $\Phi = \Phi^+_\Delta \cup \Phi^-_\Delta$ である. よって Δ は Φ の単純系である. また, $\varpi = \eta_1 + \eta_2$ とおけば,

$$\begin{aligned}\Phi^+_\Delta &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \geq 0 \,\} \\ \Phi^-_\Delta &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \leq 0 \,\}\end{aligned}$$

である.

5.3.2 $A_1 \times \cdots \times A_1$

Section 4.2.2 で考えたルート系について考える. つまり, $\varepsilon_i = \boldsymbol{e}_i$ とし, $\Phi = \{\, \varepsilon_k, -\varepsilon_k \mid k \in \{\, 1, \ldots, n \,\} \,\}$ とおく.

$$\Delta = \{\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \,\}$$

とおくと, Δ は V の標準基底である. したがって, $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ でもある. あきらかに, $\Phi^+_\Delta = \Delta$ であり, $\Phi^+_\Delta = \{\, -\varepsilon_k \mid k \in \{\, 1, \ldots, n \,\} \,\}$ である. $\Phi = \Phi^+_\Delta \cup \Phi^-_\Delta$ であるので, Δ は Φ の単純系である. また, $\varpi = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ とすると,

$$\begin{aligned}\Phi^+_\Delta &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \geq 0 \,\} \\ \Phi^-_\Delta &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \leq 0 \,\}\end{aligned}$$

である.

5.3.3 A_{n-1}

$\Phi = \Phi(A_{n-1})$ とし, Section 4.2.3 の記号を用いる. $\alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$ であり, $\Phi = \{\, \alpha_{i,j}, -\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \,\}$ である.

$$\Delta = \{\, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{n-1,n} \,\} = \{\, \alpha_{i,i+1} \mid i \in \{\, 1, \ldots, n-1 \,\} \,\}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

とおく. $k > 0$ に対し,

$$\alpha_{i,i+k} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \cdots + \alpha_{i+k-1,i+k}$$

であるので,

$$\{\, \alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \,\} \subset \Phi_\Delta^+$$

である. したがって

$$\{\, -\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \,\} \subset \Phi_\Delta^-$$

である. $\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$ であるので, $\Phi \subset \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ である. また,

$$c_1\alpha_{1,2} + c_2\alpha_{2,3} + \cdots + c_{n-1}\alpha_{n-1,n} = \mathbf{0}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
&c_1\alpha_{1,2} + c_2\alpha_{2,3} + \cdots + c_{n-1}\alpha_{n-1,n} \\
&= c_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) + c_2(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) + \cdots + c_{n-1}(\boldsymbol{e}_{n-1} - \boldsymbol{e}_n) \\
&= c_1\boldsymbol{e}_1 + (c_2 - c_1)\boldsymbol{e}_2 + (c_3 - c_2)\boldsymbol{e}_3 + \cdots + (c_{n-1} - c_{n-2})\boldsymbol{e}_{n-1} - c_{n-1}\boldsymbol{e}_n
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{cases}
c_1 = 0 \\
-c_{n-1} = 0 \\
c_i - c_{i-1} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1)
\end{cases}$$

となる. したがって全ての i に対し $c_i = 0$ である. よって, Δ は一次独立である. したがって, Δ は $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ の基底である. Δ は Φ の単純系である.

$$\eta_{1,k} = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_k$$

とおと,

$$\langle \eta_{1,k}, \alpha_{j,j+1} \rangle = \begin{cases} 1 & (k = j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases}$$

である.

$$\begin{aligned}
\varpi &= \eta_{1,1} + \cdots + \eta_{1,n-1} \\
&= (n-1)\boldsymbol{e}_1 + (n-2)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_{n-1}
\end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
\Phi_\Delta^+ &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \geq 0 \,\} \\
\Phi_\Delta^- &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \leq 0 \,\}
\end{aligned}$$

である.

5.3.4 B_n

$\Phi = \Phi(B_n)$ とし, Section 4.2.4 の記号を用いる. $\alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$, $\beta_{i,j} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$, $\varepsilon_k = \boldsymbol{e}_k$ であった. $\{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \}$ は V の標準基底であるので, $V = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ である.

$$\Delta = \{ \alpha_{i,i+1} \mid i \in \{ 1, \dots, n-1 \} \} \cup \{ \varepsilon_n \}$$

とおく. このとき, $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < n$ に対し,

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{k,k+1} \\ \varepsilon_k &= \alpha_{i,n} + \varepsilon_n \\ \beta_{i,j} &= \alpha_{i,j} + 2\varepsilon_j \end{aligned}$$

とかけるので,

$$\{ \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \cup \{ \varepsilon_k \mid k \in \{ 1, \dots, n \} \} \subset \Phi_\Delta^+$$

である. したがって,

$$\{ -\alpha_{i,j}, -\beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \cup \{ -\varepsilon_k \mid k \in \{ 1, \dots, n \} \} \subset \Phi_\Delta^-$$

であるので, $\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$ である. したがって $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ である. また, $|\Delta| = n = \dim(V)$ であるので, Δ は $V = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ の基底である.

Section 5.3.3 と同様に,

$$\eta_{1,k} = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_k$$

とおと,

$$\langle \eta_{1,k}, \varepsilon_n \rangle = \begin{cases} 1 & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \varpi &= \eta_{1,1} + \cdots + \eta_{1,n} \\ &= n\boldsymbol{e}_1 + (n-1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + 2\boldsymbol{e}_{n-1} + \boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+ &= \{ \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \geq 0 \} \\ \Phi_\Delta^- &= \{ \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \leq 0 \} \end{aligned}$$

である.

5.3.5 C_n

$\Phi = \Phi(C_n)$ とし Section 4.2.5 の記号を用いる. $\varepsilon'_k = 2\varepsilon_k$ である.

$$\Delta = \{ \alpha_{i,i+1} \mid i \in \{ 1, \dots, n-1 \} \} \cup \{ \varepsilon'_n \}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

とおく. このとき, $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < n$ に対し,

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{k,k+1} \\ \beta_{k,n} &= \alpha_{k,n} + \varepsilon'_n \\ \beta_{i,j} &= \alpha_{i,n} + \beta_{j,n} \\ \varepsilon'_k &= \alpha_{i,n} + \beta_{i,n}\end{aligned}$$

とかけるので,

$$\{\, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \,\} \cup \{\, \varepsilon'_k \mid k \in \{\, 1, \dots, n \,\} \,\} \subset \Phi^+_\Delta$$

である. よって, $\Phi = \Phi^+_\Delta \cup \Phi^-_\Delta$ であり, $V = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ かつ $|\Delta| = n$ であるので, Δ は Φ の単純系である.

Section 5.3.4 と同様に,

$$\eta_{1,k} = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_k$$

とおと,

$$\langle \eta_{1,k}, \varepsilon'_n \rangle = \begin{cases} 2 & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である. したがって,

$$\varpi = \eta_{1,1} + \cdots + \eta_{1,n}$$

とすると,

$$\begin{aligned}\Phi^+_\Delta &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \geq 0 \,\} \\ \Phi^-_\Delta &= \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \leq 0 \,\}\end{aligned}$$

である.

5.3.6　D_n

$\Phi = \Phi(D_n)$ とし Section 4.2.6 の記号を用いる.

$$\Delta = \{\, \alpha_{i,i+1} \mid i \in \{\, 1, \dots, n-1 \,\} \,\} \cup \{\, \beta_{n-1,n} \,\}$$

とする.

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{k,k+1} \\ \beta_{j,n} &= \alpha_{k,n-1} + \beta_{n-1,n} \\ \beta_{i,j} &= \alpha_{i,n} + \beta_{j,n}\end{aligned}$$

であるので,

$$\{\, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \,\} \subset \Phi^+_\Delta$$

である. したがって,

$$\{ -\alpha_{i,j}, -\beta_{i,j} \mid 1 \le i < j \le n \} \subset \Phi_\Delta^-$$
$$\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$$

であるので, $\langle\Delta\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}} = V$ である. $|\Delta| = n = \dim(V)$ であるので, Δ は $V = \langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}}$ の基底であり, Δ は Φ の単純系である.

$$\begin{aligned}
\eta_{1,k} &= \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_k \\
\eta' &= \eta_{1,n} \\
\eta'' &= \eta_{1,n-1} - \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_{n-1} - \boldsymbol{e}_n
\end{aligned}$$

とおと, $k < n-1$ に対し,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_{1,k}, \beta_{n-1,n} \rangle &= 0 \\
\langle \eta', \beta_{n-1,n} \rangle &= 2 \\
\langle \eta'', \beta_{n-1,n} \rangle &= 0 \\
\langle \eta'', \alpha_{i,i+1} \rangle &= \begin{cases} 2 & (i = n-1) \\ 0 & (i \ne n-1) \end{cases}
\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}
\varpi &= \eta_{1,1} + \cdots + \eta_{1,n-2} + \eta' + \eta'' \\
&= \eta_{1,1} + \cdots + \eta_n - \boldsymbol{e}_n \\
&= n\boldsymbol{e}_1 + (n-1)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + 2\boldsymbol{e}_{n-1}
\end{aligned}$$

とすると,

$$\Phi_\Delta^+ = \{ \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \ge 0 \}$$
$$\Phi_\Delta^- = \{ \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \le 0 \}$$

である.

5.3.7 G_2

$\Phi = \Phi(G_2)$ とし, Section 4.2.7 の記号を用いる. $n = 3$ であり,

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j, \\
\gamma_i &= \alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3}
\end{aligned}$$

であった.

$$\Delta = \{ \alpha_{1,2}, \gamma_1 \}$$

とおく.

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\
\gamma_1 &= -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\
\gamma_1 + \alpha_{1,2} &= \alpha_{3,1} \\
\gamma_1 + 2\alpha_{1,2} &= \alpha_{3,2} \\
\gamma_1 + 3\alpha_{1,2} &= \alpha_{3,2} + \alpha_{1,2} = \gamma_2 \\
2\gamma_1 + 3\alpha_{1,2} &= \gamma_1 + \gamma_2 = -\gamma_3
\end{aligned}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

である．したがって，

$$\{\, \alpha_{1,2}, \gamma_1, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \gamma_2, -\gamma_3 \,\} \subset \Phi_\Delta^+$$
$$\{\, \alpha_{2,1}, -\gamma_1, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, -\gamma_2, \gamma_3 \,\} \subset \Phi_\Delta^-$$

である．したがって，$\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$ であり，$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ である．よって，

$$\{\, \alpha_{1,2}, \gamma_1, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \gamma_2, -\gamma_3 \,\} = \Phi_\Delta^+$$
$$\{\, \alpha_{2,1}, -\gamma_1, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, -\gamma_2, \gamma_3 \,\} = \Phi_\Delta^-$$

である．また，Δ は一次独立であるから，Δ は Φ の単純系である．

$$\eta_1 = \boldsymbol{e}_3$$
$$\eta_2 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$$

とおけば，

$$\langle \eta_1, \alpha_{1,2} \rangle = 0$$
$$\langle \eta_2, \alpha_{1,2} \rangle = 1$$
$$\langle \eta_1, \gamma_1 \rangle = 1$$
$$\langle \eta_2, \gamma_1 \rangle = 0$$

であるので，$\varpi = \eta_1 + \eta_2$ とすると，

$$\Phi_\Delta^+ = \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \geq 0 \,\}$$
$$\Phi_\Delta^- = \{\, \alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \varpi \rangle \leq 0 \,\}$$

である．

章末問題

1. $\Phi = \Phi(I_2(3))$, $\Phi' = \Phi(A_2)$ とする. このとき, 次の条件をみたす $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を与えよ:
   (a) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ に対し, $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle t(\alpha), t(\beta) \rangle$.
   (b) $\alpha \in \Phi$ に対し, $t(\sqrt{2}\alpha) \in \Phi'$.
2. $D_{2\cdot 3}$ と $\{ A_\sigma \mid \sigma \in S_3 \}$ が同型であることを示せ.

第 6 章

同型なルート系

ルート系が同型であることを定義し, 同型なルート系の例を挙げる.

6.1 ルート系の同型

Definition 6.1.1. Φ と Φ' をルート系とする. このとき, 以下を満たす f が存在するとき, Φ と Φ' は同型であるという:

1. f は $\langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}}$ から $\langle\Phi'\rangle_{\mathbb{R}}$ への線型同型写像.
2. $f(\Phi) = \Phi'$.
3. すべての $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し, $2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2\frac{\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle}{\langle f(\alpha), f(\alpha)\rangle}$.

Proposition 6.1.2. Φ と Ψ をルート系とし, f で同型が与えられているとする. Δ を Φ の単純系とすると, $f(\Delta)$ は Ψ の単純系であり, $\Psi^+_{f(\Delta)} = f(\Phi^+_\Delta)$, $\Psi^-_{f(\Delta)} = f(\Phi^-_\Delta)$ である.

Proof. f は $\langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}}$ から $\langle\Psi\rangle_{\mathbb{R}}$ への線型同型写像であるので, Δ が一次独立であることから, $f(\Delta)$ は一次独立であることがわかる. また, $\alpha = \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta\delta \in \Phi$ とすると, $f(\alpha) = \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta f(\delta)$ である. したがって,

$$
\begin{aligned}
f(\Phi^+_\Delta) &= \left\{ \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta f(\delta) \,\middle|\, a_\delta \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\delta\in f(\Delta)} a_\delta \delta \,\middle|\, a_\delta \geq 0 \right\} \\
f(\Phi^-_\Delta) &= \left\{ \sum_{\delta\in\Delta} a_\delta f(\delta) \,\middle|\, a_\delta \leq 0 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\delta\in f(\Delta)} a_\delta \delta \,\middle|\, a_\delta \leq 0 \right\} \\
\Psi = f(\Phi) &= f(\Phi^+_\Delta) \cup f(\Phi^-_\Delta)
\end{aligned}
$$

となる. $f(\Delta)$ は, Ψ の単純系であり, $\Psi^+_{f(\Delta)} = f(\Phi^+_\Delta)$, $\Psi^-_{f(\Delta)} = f(\Phi^-_\Delta)$ である. □

以下で, 同型なルート系から決まる鏡映群は同型であることを示す.

Lemma 6.1.3. $\Phi \subset V \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする．$\alpha \in \Phi$ に対し，$s_\alpha\big|_{\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}}$ は，α に関する U 上の鏡映である．また，$f \in W(\Phi)$ に対し，$f\big|_{\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}}$ は，$\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}$ 上の全単射である．

Proof. $U = \langle\Phi\rangle_\mathbb{R}$ とおくと，$V = U \oplus U^\perp$ と (内部) 直和分解できる．

まずは，$\alpha \in \Phi$ に対し，$s_\alpha\big|_U$ が U 上の全単射になることを示す．$\alpha \in \Phi$ とすると，$\alpha \in U$ であるから，$\mathbb{R}\alpha \cap U^\perp$ である．したがって，

$$V = \mathbb{R}\alpha \oplus (H_\alpha \cap U) \oplus U^\perp$$
$$U = \mathbb{R}\alpha \oplus (H_\alpha \cap U)$$

と (内部) 直和分解できる．$\beta \in \mathbb{R}\alpha$ に対し $s_\alpha(\beta) = -\beta \in \mathbb{R}\alpha \subset U$ であり，$\beta \in H_\alpha \cap U$ に対し $s_\alpha(\beta) = \beta \in H_\alpha \cap U \subset U$ である．よって，

$$s_\alpha\big|_U\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ \beta & \longmapsto & s_\alpha(\beta) \end{array}$$

は，U 上の鏡映である．したがって，U 上の全単射である．

$f \in W(\Phi)$ とすると，$\alpha_i \in \Phi$ を使って $f = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$ とかける．s_α を U に制限すると U 上の全単射であるので，f も U に制限すると U 上の全単射となる．　□

Lemma 6.1.3 より，$\left\{ w\big|_{\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}} \,\middle|\, w \in W(\Phi) \right\}$ は鏡映群であることがわかる．

Lemma 6.1.4. $\Phi \subset V \setminus \{\mathbf{0}\}$ とし，

$$W = \left\{ w\big|_{\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}} \,\middle|\, w \in W(\Phi) \right\}$$

とおく．このとき $W(\Phi)$ と W は群として同型である．

Proof. $w \in W(\Phi)$ に対し，$\varphi(w) = w\big|_{\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}}$ とおくと，φ は $W(\Phi)$ から W への全射群準同型写像である．また，Lemma 4.1.2 より，φ は単射である．したがって，$W(\Phi)$ と W は群として同型である．　□

Proposition 6.1.5. Φ と Φ' をルート系とする．このとき，Φ と Φ' が同型なら，$W(\Phi)$ と $W(\Phi')$ は群として同型である．

Proof.

$$W = \left\{ w\big|_{\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}} \,\middle|\, w \in W(\Phi) \right\},$$
$$W' = \left\{ w\big|_{\langle\Phi'\rangle_\mathbb{R}} \,\middle|\, w \in W(\Phi') \right\}$$

とおくと，W と $W(\Phi)$，W' と $W(\Phi')$ はそれぞれ群として同型であるから，W と W' が同型であることを示す．

$f\colon \langle\Phi\rangle_\mathbb{R} \to \langle\Phi'\rangle_\mathbb{R}$ で Φ と Φ' の同型が与えられているとする．このとき，f は全単射であるので f^{-1} が存在する．$w \in W$ に対し $\varphi(w) = f \circ w \circ f^{-1}$ とおくと，$\langle\Phi'\rangle_\mathbb{R}$ から $\langle\Phi'\rangle_\mathbb{R}$ への線型写像である．また，$w, w' \in W$ に対し，

$$\varphi(ww') = f \circ ww' \circ f^{-1}$$
$$\varphi(w)\varphi(w') = (f \circ w \circ f^{-1})(f \circ w' \circ f^{-1}) = f \circ ww' \circ f^{-1}$$

となる. $\alpha \in \Phi$ に対し, s_α を考える. このとき, $\beta \in \Phi$ に対し,

$$\begin{aligned}
\varphi(s_\alpha)(f(\beta)) &= (f \circ s_\alpha \circ f^{-1})(f(\beta)) \\
&= f(s_\alpha(f^{-1}(f(\beta))) \\
&= f(s_\alpha(\beta)) \\
&= f(\beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\alpha, \alpha}\alpha) \\
&= f(\beta) - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\alpha, \alpha} f(\alpha) \\
s_{f(\alpha)}(f(\beta)) &= f(\beta) - 2\frac{\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle}{f(\alpha), f(\alpha)} f(\alpha) \\
&= f(\beta) - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\alpha, \alpha} f(\alpha)
\end{aligned}$$

である. $\langle f(\Phi) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \Phi' \rangle_{\mathbb{R}}$ であることから,

$$\varphi(s_\alpha\big|_{\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}}) = s_{f(\alpha)}\big|_{\langle \Phi' \rangle_{\mathbb{R}}} \in W'$$

であることがわかる. したがって,

$$\begin{array}{rccc}
\varphi\colon & W & \longrightarrow & W' \\
& \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\
& w & \longmapsto & \varphi(w)
\end{array}$$

は準同型写像であることがわかる. また, 同様に

$$\begin{array}{rccc}
\psi\colon & W' & \longrightarrow & W \\
& \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\
& w & \longmapsto & f^{-1} \circ w \circ f
\end{array}$$

という準同型写像が定義できるが, φ と ψ は互いに逆写像であるから, W と W' は群として同型である. □

Remark 6.1.6. Φ と Ψ が同型なルート系であるとき, $W(\Phi)$ と $W(\Psi)$ は群として同型である. しかし, $W(\Phi)$ と $W(\Psi)$ は群として同型であったとしても, Φ と Ψ が同型なルート系であるとは限らない. 例えば, $\bar{\alpha} = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ とするとき, $\{\, \bar{\alpha} \mid \alpha \in \Phi \,\} = \{\, \bar{\alpha} \mid \alpha \in \Psi \,\}$ であれば, Φ と Ψ が同型でなくとも, $W(\Phi)$ と $W(\Psi)$ は群として同型となる.

6.2 例

6.2.1 $I_2(2)$, $A_1 \times A_1$

$\Phi = \Phi(I_2(2))$ とする. また, $n = 2$ とし, Section 5.3.2 で考えたルート系を Φ' とする. $\alpha_0 = \varepsilon_2$, $\alpha_1 = -\varepsilon_1$ である. また, $\alpha_2 = -\varepsilon_1$, $\alpha_3 = -\varepsilon_2$ であるので, $\Phi = \Psi$ であるから, $W(\Phi) = W(\Phi')$ である.

6.2.2 B_2, C_2, $I_2(4)$

$\Phi = \Phi(B_2)$ とし, $\Phi' = \Phi(C_2)$ とする. このとき, $f(\alpha_{1,2}) = \varepsilon'_2$, $f(\varepsilon_2) = -\alpha_{1,2}$ で定義される $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ から $\langle \Phi' \rangle_{\mathbb{R}}$ への線型写像は Φ と Φ' の同型を与える. したがって $W(\Phi) = W(\Phi')$ である.

x2 (2025-01-23 16:09)

$\Psi = \Phi(I_2(4))$ とする. $\alpha \in \Psi$ は $\|\alpha\| = 1$ を満たすので,

$$2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 2\frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

である. 一方 $\alpha_{1,2}, \varepsilon_2 \in \Phi$ について考えると,

$$2\frac{\langle \alpha_{1,2}, \varepsilon_2 \rangle}{\langle \alpha_{1,2}, \alpha_{1,2} \rangle} = -1$$
$$2\frac{\langle \varepsilon_2, \alpha_{1,2} \rangle}{\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle} = -2$$

であるので, Φ と Ψ は同型ではない. しかし, $\bar{\alpha} = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ とすると, $\Psi = \{\, \bar{\alpha} \mid \alpha \in \Phi \,\}$ である. したがって, $W(\Phi)$ と $W(\Psi)$ は同型である.

6.2.3　$I_2(3)$, A_2

$\Phi = \Phi(I_2(3))$ とし, $\Phi' = \Phi(A_2)$ と Δ' とする. $f(\alpha_0) = \alpha_{1,2}$, $f(\alpha_2) = \alpha_{2,3}$ で定義される $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ から $\langle \Phi' \rangle_{\mathbb{R}}$ への線型写像は Φ と Φ' の同型を与える. したがって $W(\Phi) = W(\Phi')$ である.

6.2.4　B_n, C_n

$\Phi = \Phi(B_n)$ とし, $\Psi = \Phi(C_n)$ とする. $n \geq 3$ ならばこれらは同型ではない. しかし, $\bar{\alpha} = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ とすると, $\{\, \bar{\alpha} \mid \alpha \in \Phi \,\} = \{\, \bar{\alpha} \mid \alpha \in \Psi \,\}$ である. したがって, $W(\Phi)$ と $W(\Psi)$ は同型である.

6.2.5　$I_2(6)$, G_2

$\nu_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\nu_2 = -\frac{3}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2$ とし,

$$\Phi^+ = \{\, \nu_1, \nu_2, \nu_2 + \nu_1, \nu_2 + 2\nu_1, , \nu_2 + 3\nu_1, 2\nu_2 + 3\nu_1 \,\}$$
$$\Phi^- = \left\{\, -\alpha \;\middle|\; \alpha \in \Phi^+ \,\right\}$$
$$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$$

とする. $\Phi' = \Phi(G_2)$ とする. Φ' の元は, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ と直交しており, $\langle \Phi' \rangle_{\mathbb{R}} = H_{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3}$ である. $f(\alpha_{1,2}) = \nu_1$, $f(\gamma_1) = \nu_2$ で定義される, $\langle \Phi' \rangle_{\mathbb{R}}$ から $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ への線型写像を考える. 直接計算することで, f が Φ' と Φ の同型を与えることが確かめられる. したがって, $W(\Phi)$ と $W(\Phi')$ は同型である. また, $\Delta = \{\, \nu_1, \nu_2 \,\}$ とおくと, これは Φ の単純系である.

また $\Psi = \Phi(I_2(3))$ とする. $\alpha \in \Psi$ は $\|\alpha\| = 1$ を満たすので,

$$2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 2\frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

である. 一方, $\nu_1, \nu_2 \in \Phi$ について考えると,

$$2\frac{\langle \nu_1, \nu_2 \rangle}{\langle \nu_1, \nu_1 \rangle} = -3$$
$$2\frac{\langle \nu_2, \nu_1 \rangle}{\langle \nu_2, \nu_2 \rangle} = -1$$

であるので, Φ と Ψ は同型ではない. しかし, $\bar{\alpha} = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ とすると, $\Psi = \{\, \bar{\alpha} \mid \alpha \in \Phi \,\}$ である. したがって, $W(\Phi)$ と $W(\Psi)$ は同型である.

章末問題

1. m を整数とし, Section 5.3.1 と同じ記号を用いる. $\Phi^+ = \{ \alpha_i \mid i \in \{ 0, \dots, m-1 \} \}$ とする. 整数 i に対し次を求めよ:
   (a) $\{ \alpha \in \Phi^+ \mid P_i\alpha \notin \Phi^+ \}$.
   (b) $\{ \alpha \in \Phi^+ \mid R_i\alpha \notin \Phi^+ \}$.
2. $\Phi^+ = \{ \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \}$ とする. 各 $\sigma \in S_3$ に対し, $\{ \alpha \in \Phi^+ \mid A_\sigma\alpha \notin \Phi^+ \}$ を求めよ.

第 7 章

転倒数

対称群 S_n の元 σ に対し, $|\{\,(i,j) \mid i<j, \sigma(i)>\sigma(j)\,\}|$ は σ の転倒数と呼ばれ, σ の符号を求める際などに使われていた. 対称群 S_n は $W(\Phi(A_{n-1}))$ と群として同型であったので, $W(\Phi(A_{n-1}))$ の元に転倒数が定義されていると思うこともできる. ここでは, 転倒数を一般の有限鏡映群にも定義することを目標とする.

7.1 転倒数

ここでは特に断らない限り, Φ をルート系とし, $\Delta \subset \Phi$ を単純系とする. また, $W = W(\Phi)$ とする.

Definition 7.1.1. $w \in W$ に対して,

$$\Phi_\Delta^+(w) = \left\{\, \alpha \in \Phi_\Delta^+ \;\middle|\; w(\alpha) \in \Phi_\Delta^- \,\right\}$$

と定義し,

$$n_{\Phi_\Delta^+}(w) = \left|\Phi_\Delta^+(w)\right|$$

とおく.

以下では, 特にことわりのない限り, $n(w) = n_{\Phi_\Delta^+}(w)$ とする.

Remark 7.1.2. $w \in W$ と $X \subset \Phi$ に対し, $w(X) = \{\, w(\alpha) \mid \alpha \in X \,\}$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned} w^{-1}(\Phi_\Delta^-) &= \left\{\, w^{-1}(\beta) \;\middle|\; \beta \in \Phi_\Delta^- \,\right\} \\ &= \left\{\, \alpha \;\middle|\; \alpha = w^{-1}(\beta), \beta \in \Phi_\Delta^- \,\right\} \\ &= \left\{\, \alpha \;\middle|\; w(\alpha) \in \Phi_\Delta^- \,\right\} \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(w) &= \left\{\, \alpha \in \Phi_\Delta^+ \;\middle|\; w(\alpha) \in \Phi_\Delta^- \,\right\} \\ &= \Phi_\Delta^+ \cap w^{-1}(\Phi_\Delta^-) \end{aligned}$$

とかける.

Proposition 7.1.3. $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Phi_\Delta^+$ とする. $\alpha \neq \beta$ ならば, $s_\alpha(\beta) \in \Phi_\Delta^+$ かつ $s_\alpha(\beta) \neq \alpha$ である.

x2 (2025-01-23 16:09)

Proof. $\beta = \sum_{\delta\in\Delta} c_\delta\delta \in \Phi^+_\Delta \setminus \{\alpha\}$ とする. $c_\delta \geq 0$ である. $\beta = c_\alpha\alpha$ とかけたとすると, Φ はルート系であるので, $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ であるから, $c_\alpha \in \{1, -1\}$ である. β は仮定より α ではなく, また $-\alpha \in \Phi^-_\Delta$ でもない. したがって, $c_\delta > 0$ をみたす $\delta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ が存在する. $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ が $c_\gamma > 0$ をみたすとする.

ルート系の定義より, $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ であるので, $s_\alpha(\beta) \in \Phi$. $c = 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ とすると,

$$\begin{aligned} s_\alpha(\beta) &= \beta - c\alpha \\ &= c_\gamma\gamma + (c_\alpha - c)\alpha + \sum_{\delta\in\Delta\setminus\{\gamma,\alpha\}} c_\delta\delta. \end{aligned}$$

$c_\gamma > 0$ であることから $s_\alpha(\beta) \in \Phi^+_\Delta$ であることがわかる. また $s_\alpha(\beta) = \alpha$ とすると, $\beta = s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ であり, $\beta \in \Phi^-_\Delta$ となるので $\beta \in \Phi^+_\Delta$ に矛盾する. □

Proposition 7.1.3 から, $\delta \in \Delta$ に対し, s_δ で負ルートになる正ルートは δ のみであることがわかる.

Corollary 7.1.4. *$\delta \in \Delta$ に対し, $s_\delta(\Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}) = \Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}$.*

Proof. $s_\delta(\Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}) \subset \Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}$ は Proposition 7.1.3 からわかる.

$s_\delta(\Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}) \supset \Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}$ を示す. $\beta \in \Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}$ とする. $\gamma = s_\delta(\beta)$ とおくと, Proposition 7.1.3 から, $\gamma \in \Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\}$ である. $s_\delta s_\delta = \mathrm{id}_V$ であるから, $\beta = s_\delta(s_\delta(\beta)) = s_\delta(\gamma)$ とかけるので, $\beta \in s_\delta(\Phi^+_\Delta \setminus \{\delta\})$. □

Corollary 7.1.5. *$\delta \in \Delta$ とする. $s_\delta(\alpha) \in \Phi^+_\Delta$ かつ $\alpha \in \Phi^-_\Delta$ ならば $\delta = -\alpha$ である.*

$\Phi^+_\Delta(\delta) = \Phi^+_\Delta \cap (s_\delta)^{-1}(\Phi^-_\Delta)$ であるので次のようにも言い換えられる.

Corollary 7.1.6. *$\delta \in \Delta$ に対し, $\Phi^+_\Delta(s_\delta) = \{\delta\}$. 特に, $n(\delta) = 1$.*

$\delta \in \Delta$ に対して $w = s_\delta$ となっている場合について $\Phi^+_\Delta(w)$ をしらべた. 次に, 一般の $w \in W$ に対して, $\Phi^+_\Delta(w)$ を調べる.

Proposition 7.1.7. *$w \in W$ に対し, $n(w) = n(w^{-1})$ である.*

Proof.

$$\Phi^+_\Delta \cap w(\Phi^-_\Delta) = w(w^{-1}(\Phi^+_\Delta) \cap \Phi^-_\Delta)$$

である. また, w は全単射であるので,

$$\left|w(w^{-1}(\Phi^+_\Delta) \cap \Phi^-_\Delta)\right| = \left|w^{-1}(\Phi^+_\Delta) \cap \Phi^-_\Delta\right|.$$

また, -1 倍する操作も全単射であるから,

$$\left|w^{-1}(\Phi^+_\Delta) \cap \Phi^-_\Delta\right| = \left|-(w^{-1}(\Phi^+_\Delta) \cap \Phi^-_\Delta)\right|.$$

w^{-1} は線形写像なので,

$$-(w^{-1}(\Phi^+_\Delta) \cap \Phi^-_\Delta) = w^{-1}(\Phi^-_\Delta) \cap \Phi^+_\Delta.$$

したがって,

$$\begin{aligned} n(w^{-1}) &= \left|\Phi_\Delta^+ \cap w(\Phi_\Delta^-)\right| \\ &= \left|w(w^{-1}(\Phi_\Delta^+) \cap \Phi_\Delta^-)\right| \\ &= \left|w^{-1}(\Phi_\Delta^+) \cap \Phi_\Delta^-\right| \\ &= \left|-(w^{-1}(\Phi_\Delta^+) \cap \Phi_\Delta^-)\right| \\ &= \left|w^{-1}(\Phi_\Delta^-) \cap \Phi_\Delta^+\right| \\ &= n(w). \end{aligned}$$

□

Lemma 7.1.8. $\delta \in \Delta$, $w \in W$ とする. このとき次が成り立つ:

1. $w(\delta) \in \Phi_\Delta^+ \iff n(ws_\delta) = n(w) + 1$.
2. $w(\delta) \in \Phi_\Delta^- \iff n(ws_\delta) = n(w) - 1$.
3. $w^{-1}(\delta) \in \Phi_\Delta^+ \iff n(s_\delta w) = n(w) + 1$.
4. $w^{-1}(\delta) \in \Phi_\Delta^- \iff n(s_\delta w) = n(w) - 1$.

Proof.

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(ws_\delta) &= \Phi_\Delta^+ \cap (ws_\delta)^{-1}(\Phi_\Delta^-) \\ &= \Phi_\Delta^+ \cap (s_\delta)^{-1}w^{-1}(\Phi_\Delta^-) \\ &= \Phi_\Delta^+ \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-). \end{aligned}$$

ここで $\delta \in \Delta$ に対し,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+ &= s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) \cup \{\,\delta\,\} \\ s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) \cap \{\,\delta\,\} &= \emptyset \end{aligned}$$

であるので, $\Phi_\Delta^+ \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-)$ を調べるには,

$$\begin{aligned} s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) \\ \{\,\delta\,\} \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) \end{aligned}$$

をそれぞれ調べればよい.

まず,

$$w(\delta) \in \Phi_\Delta^+ \implies n(ws_\delta) = n(w) + 1$$

について考える. $w(\delta) = \alpha$ とおく. 仮定から $w(\delta) \in \Phi_\Delta^+$ であるので, $\alpha \in \Phi_\Delta^+$ であり, $-\alpha \in \Phi_\Delta^-$ である.

$\delta = w^{-1}(\alpha)$ であるので,

$$\begin{aligned} \delta &= s_\delta s_\delta(\delta) \\ &= s_\delta(-\delta) \\ &= s_\delta(-w^{-1}(\alpha)) \\ &= s_\delta(w^{-1}(-\alpha)) \end{aligned}$$

となる. したがって, $\delta \in s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^-))$ である. したがって,

$$\{\,\delta\,\} \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) = \{\,\delta\,\}$$

である.

一方

$$s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) = s_\delta(\Phi_\Delta^+) \setminus \{\,-\delta\,\}$$

である. $\delta = s_\delta(w^{-1}(-\alpha))$ であるので, $-\delta = s_\delta(w^{-1}(\alpha))$ となり, $-\delta \in s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^+))$ であるから, $-\delta \notin s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^-))$ である. したがって,

$$\begin{aligned} s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) &= s_\delta(\Phi_\Delta^+) \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) \\ &= s_\delta(\Phi_\Delta^+ \cap w^{-1}(\Phi_\Delta^-)) \\ &= s_\delta(\Phi_\Delta^+(w)) \end{aligned}$$

である. $\delta \notin s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\})$ であるので, $\delta \notin s_\delta(\Phi_\Delta^+(w))$ である.

したがって,

$$\begin{aligned} n(ws_\delta) &= \left|\Phi_\Delta^+(ws_\delta)\right| \\ &= \left|s_\delta(\Phi_\Delta^+(w))\right| + 1 \\ &= \left|\Phi_\Delta^+(w)\right| + 1 \\ &= n(w) + 1 \end{aligned}$$

である.

次に,

$$w(\delta) \in \Phi_\Delta^- \implies n(ws_\delta) = n(w) - 1$$

について考える. $w(\delta) = \alpha$ とおく. 仮定から $w(\delta) \in \Phi_\Delta^-$ であるので, $\alpha \in \Phi_\Delta^-$ であり, $-\alpha \in \Phi_\Delta^+$ である.

$\delta = w^{-1}(\alpha)$ であるので,

$$\begin{aligned} \delta &= s_\delta s_\delta(\delta) \\ &= s_\delta(-\delta) \\ &= s_\delta(-w^{-1}(\alpha)) \\ &= s_\delta(w^{-1}(-\alpha)). \end{aligned}$$

となる. したがって, $\delta \in s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^+))$ である. したがって, $\delta \notin s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^-))$ であるので,

$$\{\,\delta\,\} \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) = \emptyset$$

である.

一方

$$s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) = s_\delta(\Phi_\Delta^+) \setminus \{\,-\delta\,\}$$

である. $\delta \in s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^+))$ であるので, $-\delta \in s_\delta(w^{-1}(\Phi_\Delta^-))$ である. したがって,

$$\begin{aligned} s_\delta(\Phi_\Delta^+ \setminus \{\,\delta\,\}) \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-) &= (s_\delta(\Phi_\Delta^+) \cap s_\delta w^{-1}(\Phi_\Delta^-)) \setminus \{\,-\delta\,\} \\ &= s_\delta(\Phi_\Delta^+ \cap w^{-1}(\Phi_\Delta^-)) \setminus \{\,-\delta\,\} \\ &= s_\delta(\Phi_\Delta^+(w)) \setminus \{\,-\delta\,\} \end{aligned}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

である.

したがって,

$$\begin{aligned} n(ws_\delta) &= \left|\Phi^+_\Delta(ws_\delta)\right| \\ &= \left|s_\delta(\Phi^+_\Delta(w))\right| - 1 \\ &= \left|\Phi^+_\Delta(w)\right| - 1 \\ &= n(w) - 1 \end{aligned}$$

である.

$w(\delta)$ に対し, $w(\delta) \in \Phi^+_\Delta$ または $w(\delta) \in \Phi^-_\Delta$ のいずれか一つのみが成り立つので, items 1 and 2 が成り立つ.

Items 3 and 4 について考える. Proposition 7.1.7 より,

$$\begin{aligned} n(w^{-1}s_\delta) &= n((w^{-1}s_\delta)^{-1}) \\ &= n((s_\delta)^{-1}(w^{-1})^{-1}) \\ &= n(s_\delta w) \end{aligned}$$

である. したがって, Items 1 and 2 から, Items 3 and 4 が得られる. □

7.2 作用の例

7.2.1 $I_2(m)$

$\Phi = \Phi(I_2(m))$ とし, Section 5.3.1 で考えた単純系 Δ を考える. $\Delta = \{\, \alpha_0, \alpha_{m-1} \,\}$, $\Phi^+_\Delta = \{\, \alpha_i \mid i \in \{\, 0, \ldots, m-1 \,\} \,\}$, $\Phi^-_\Delta = \{\, \alpha_{m+i} \mid i \in \{\, 0, \ldots, m-1 \,\} \,\}$ であった. また, $P_i = s_{\alpha_i}$ であるが,

$$\begin{aligned} P_0\alpha_i &= \alpha_{m-i}, \\ P_{m-1}\alpha_i &= \alpha_{m-2-i} \end{aligned}$$

である. したがって, $0 < i < m$ に対して, $P_0(\alpha_i) \in \Phi^+_\Delta$ である. また, $-1 < i < m-1$ に対して, $P_{m-1}(\alpha_i) \in \Phi^+_\Delta$ である.

$n(w) = n_{\Phi^+_\Delta}(w)$ について考える. まず, $n(R_k)$ について考える.

$$R_k\alpha_i = \alpha_{i+2k}$$

であるので

$$\{\, R_k\alpha_i \mid 0 \le i < m \,\} = \{\, \alpha_{i+2k} \mid 0 \le i < m \,\} = \{\, \alpha_j \mid 2k \le j < m+2k \,\}$$

となる. $0 \le k < \frac{m}{2}$ のとき, $0 \le 2k < m+2k < 2m$ であるので,

$$\{\, R_k\alpha_i \mid 0 \le i < m \,\} \cap \Phi^-_\Delta = \{\, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m-1+2k} \,\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Phi^+_\Delta(R_k) &= \{\, \alpha_{m-2k}, \alpha_{m-2k+1}, \ldots, \alpha_{m-1} \,\} \\ n_{\Phi^+_\Delta}(R_k) &= m - 1 - (m-2k) + 1 = 2k \end{aligned}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

である. 一方, $\frac{m}{2} \leq k < m$ のとき, $m \leq 2k < m + 2k < 3m$ であるので,

$$\{ R_k\alpha_i \mid 0 \leq i < m \} \cap \Phi_\Delta^- = \{ \alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}, \ldots, \alpha_{2m-1} \}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(R_k) &= \{ \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m-1-2k} \} \\ n_{\Phi_\Delta^+}(R_k) &= 2m - 1 - 2k - 0 + 1 = 2(m-k) \end{aligned}$$

である.

また, $n(P_k)$ については,

$$P_k\alpha_i = \alpha_{m+2k-i}$$

であるので

$$\{ P_k\alpha_i \mid 0 \leq i < m \} = \{ \alpha_{m+2k-i} \mid 0 \leq i < m \} = \{ \alpha_j \mid 2k < j \leq m + 2k \}$$

となる. $0 \leq k < \frac{m}{2}$ のとき, $0 \leq 2k < m + 2k < 2m$ であるので,

$$\{ P_k\alpha_i \mid 0 \leq i < m \} \cap \Phi_\Delta^- = \{ \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+2k} \}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(P_k) &= \{ \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2k} \} \\ n_{\Phi_\Delta^+}(P_k) &= 2k + 1 \end{aligned}$$

である. 一方, $\frac{m}{2} \leq k < m$ のとき, $m \leq 2k < m + 2k < 3m$ であるので,

$$\{ P_k\alpha_i \mid 0 \leq i < m \} \cap \Phi_\Delta^- = \{ \alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}, \ldots, \alpha_{2m-1} \}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(P_k) &= \{ \alpha_{2k-m+1}, \alpha_{2k-m+2}, \ldots, \alpha_{m-1} \} \\ n(\Phi_\Delta^+(P_k)) &= (m-1) - (2k-m+1) + 1 = 2(m-k) - 1 \end{aligned}$$

である.

7.2.2　$A_1 \times \cdots \times A_1$

Section 5.3.2 で考えたルート系 Φ と単純系 Δ について考える.

$$F_i\varepsilon_j = \begin{cases} -\varepsilon_j & (i = j) \\ \varepsilon_j & (i \neq j) \end{cases}$$

であるので, $i \neq j$ に対し, $s_{\varepsilon_i}(\varepsilon_j) \in \Phi_\Delta^+$ となることは明らかである. また, $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in W(\Phi)$ に対し,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)) &= \{ \varepsilon_i \mid a_i = -1 \} \\ n_{\Phi_\Delta^+}(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)) &= |\{ i \mid a_i = -1 \}| \end{aligned}$$

である.

7.2.3 A_{n-1}

$\Phi = \Phi(A_{n-1})$ とし, Section 5.3.3 の単純系 Δ を用いる.

$$\Delta = \{ \alpha_{i,i+1} \mid 1 \leq i < n \}$$
$$\Phi^+_\Delta = \{ \alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$$

である. $k < l$ かつ $\{ k,l \} \neq \{ i,i+1 \}$ とする. このとき, $s_{\alpha_{i,i+1}}(\alpha_{k,l}) \in \Phi^+_\Delta$ であることを確かめる. $\tau \in S_n$ を i と $i+1$ を入れ替える互換とする. このとき, $s_{\alpha_{i,i+1}}(\alpha_{k,l}) = \alpha_{\tau(k),\tau(l)}$ である. したがって, $\tau(k) < \tau(l)$ を示せば良い. $j \notin \{ i,i+1 \}$ ならば, $\tau(j) = j$ であるから, $k,l \notin \{ i,i+1 \}$ のときは $\tau(k) < \tau(l)$ である. $k \in \{ i,i+1 \}$ のときは, $i+1 < l$ であるので, $\tau(k) \leq i+1 < l = \tau(l)$ である. $l \in \{ i,i+1 \}$ のときは, $k < i$ であるので, $\tau(k) = k < i \leq \tau(l)$ である. したがって, $s_{\alpha_{i,i+1}}(\alpha_{k,l}) \in \Phi^+_\Delta$ である.

$n(w) = n_{\Phi^+_\Delta}(w)$ について考える. $\sigma \in S_n$ とし, $A_\sigma \in W$ に対し, $A_\sigma(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}$ であったので, $A_\sigma(\alpha_{i,j}) = \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)}$ である. したがって,

$$\begin{aligned}\Phi^+_\Delta(A_\sigma) &= \Phi^+_\Delta \cap A_{\sigma^{-1}}(\Phi^-_\Delta) \\ &= \{ \alpha_{i,j} \mid i < j \} \cap \left\{ \alpha_{\sigma^{-1}(k),\sigma^{-1}(l)} \,\middle|\, k > l \right\} \\ &= \{ \alpha_{i,j} \mid i < j \} \cap \{ \alpha_{i,j} \mid \sigma(i) > \sigma(j) \}\end{aligned}$$

であるので,

$$n(A_\sigma) = |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j) \}|$$

である.

7.2.4 B_n

$\Phi = \Phi(B_n)$ とし, Section 5.3.4 の単純系 Δ を用いる.

$$\Delta = \{ \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{n-1,n} \} \cup \{ \varepsilon_n \}$$
$$\Phi^+_\Delta = \{ \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \cup \{ \varepsilon_k \mid 1 \leq k \leq n \}$$

である. τ を $i, i+1$ を入れ替える互換とすると

$$s_{\alpha_{i,i+1}}(\alpha_{k,l}) = \alpha_{\tau(k),\tau(l)}$$
$$s_{\alpha_{i,i+1}}(\beta_{k,l}) = \beta_{\tau(k),\tau(l)}$$
$$s_{\alpha_{i,i+1}}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{\tau(k)}$$

であるが, $\beta_{k,l} = \beta_{l,k}$ であることに注意すると, $\alpha \in \Phi^+_\Delta \setminus \{ \alpha_{i,i+1} \}$ に対し, $s_{\alpha_{i,i+1}}(\alpha) \in \Phi^+_\Delta$ となっていることが確かめられる. また, $k < l$ に対し,

$$s_{\varepsilon_n}(\alpha_{k,l}) = \begin{cases} \beta_{k,n} & (n = l) \\ \alpha_{k,l} & (n \neq l) \end{cases}$$
$$s_{\varepsilon_n}(\beta_{k,l}) = \begin{cases} \alpha_{k,n} & (n = l) \\ \beta_{k,l} & (n \neq l) \end{cases}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

$$s_{\varepsilon_n}(\varepsilon_k) = \begin{cases} -\varepsilon_n & (n = l) \\ \varepsilon_k & (n \neq l) \end{cases}$$

であるので, $\alpha \in \Phi_\Delta^+ \setminus \{ \varepsilon_n \}$ に対し, $s_{\varepsilon_n}(\alpha) \in \Phi_\Delta^+$ となっていることが確かめられる.

$n(w) = n_{\Phi_\Delta^+}(w)$ について考える. $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}^\times$, $\sigma \in S_n$ とし, $w = A_\sigma \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n) \in W$ に対し,

$$w(\alpha_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} & z_i = z_j = 1 \\ -\alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} = \alpha_{\sigma(j),\sigma(i)} & z_i = z_j = -1 \\ \beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & z_i = 1, z_j = -1 \\ -\beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & z_i = -1, z_j = 1 \end{cases}$$

$$w(\beta_{i,j}) = \begin{cases} \beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & z_i = z_j = 1 \\ -\beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & z_i = z_j = -1 \\ \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} & z_i = 1, z_j = -1 \\ -\alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} = \alpha_{\sigma(j),\sigma(i)} & z_i = -1, z_j = 1 \end{cases}$$

$$w(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{\sigma(i)} & z_i = 1 \\ -\varepsilon_{\sigma(i)} & z_i = -1 \end{cases}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(w) = {} & \{ \alpha_{i,j} \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), z_i = z_j = 1 \} \\ & \cup \{ \alpha_{i,j} \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), z_i = z_j = -1 \} \\ & \cup \{ \alpha_{i,j} \mid i < j, z_i = -1, z_j = 1 \} \\ & \cup \{ \beta_{i,j} \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), z_i = -1, z_j = 1 \} \\ & \cup \{ \beta_{i,j} \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), z_i = 1, z_j = -1 \} \\ & \cup \{ \beta_{i,j} \mid i < j, z_i = z_j = -1 \} \\ & \cup \{ \varepsilon_i \mid z_i = -1 \} \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} n(w) = {} & |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), z_i = z_j = 1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), z_i = 1, z_j = -1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), z_i = z_j = -1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), z_i = -1, z_j = 1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, z_i = -1, z_j = 1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, z_i = z_j = -1 \}| \\ & + |\{ i \mid z_i = -1 \}| \\ = {} & |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), z_i = 1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), z_i = -1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, z_i = -1 \}| \\ & + |\{ i \mid z_i = -1 \}| \\ = {} & |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), z_i = 1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), z_i = -1 \}| \\ & + |\{ (i,j) \mid i \leq j, z_i = -1 \}| . \end{aligned}$$

また, $A_\sigma \operatorname{diag}(z_1,\dots,z_n) = \operatorname{diag}(z_{\sigma^{-1}(1)},\dots,z_{\sigma^{-1}(n)})A_\sigma$ であったから, $a_i = z_{\sigma^{-1}(i)}$, つまり, $a_{\sigma(i)} = z_i$ とおき, $\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)A_\sigma \in W$ に対しても計算してみると,

$$w(\alpha_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \\ -\alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} = \alpha_{\sigma(j),\sigma(i)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \\ \beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \\ -\beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \end{cases}$$

$$w(\beta_{i,j}) = \begin{cases} \beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \\ -\beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \\ \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \\ -\alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} = \alpha_{\sigma(j),\sigma(i)} & a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \end{cases}$$

$$w(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{\sigma(i)} & a_{\sigma(i)} = 1 \\ -\varepsilon_{\sigma(i)} & a_{\sigma(i)} = -1 \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \Phi^+_\Delta(w) = {} & \{\, \alpha_{i,j} \mid i<j, \sigma(i)>\sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \,\} \\ & \cup \{\, \alpha_{i,j} \mid i<j, \sigma(i)<\sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \,\} \\ & \cup \{\, \alpha_{i,j} \mid i<j, a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \,\} \\ & \cup \{\, \beta_{i,j} \mid i<j, \sigma(i)<\sigma(j), a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \,\} \\ & \cup \{\, \beta_{i,j} \mid i<j, \sigma(i)>\sigma(j), a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \,\} \\ & \cup \{\, \beta_{i,j} \mid i<j, a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \,\} \\ & \cup \{\, \varepsilon_i \mid a_{\sigma(i)} = -1 \,\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(w) = {} & \left|\{\, (i,j) \mid i<j, \sigma(i)>\sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i<j, \sigma(i)>\sigma(j), a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i<j, \sigma(i)<\sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i<j, \sigma(i)<\sigma(j), a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i<j, a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i<j, a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, i \mid a_{\sigma(i)} = -1 \,\}\right| \\ = {} & \left|\{\, (i,j) \mid i<j, \sigma(i)>\sigma(j), a_{\sigma(i)} = 1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i<j, \sigma(i)<\sigma(j), a_{\sigma(i)} = -1 \,\}\right| \\ & + \left|\{\, (i,j) \mid i\le j, a_{\sigma(i)} = -1 \,\}\right|. \end{aligned}$$

7.2.5 C_n

$\Phi = \Phi(C_n)$ とし Section 5.3.5 の単純系 Δ を考える. $S = \{\, s_\delta \mid \delta \in \Delta \,\}$ とおく. Section 5.3.4 の単純系を Δ' とすると, $\Phi^+_\Delta = \Phi^+_{\Delta'}$ であり, $S = \{\, s_\delta \mid \delta \in \Delta' \,\}$ である. したがって, $s_\delta \in S$ に対し, $\alpha \in \Phi^+_\Delta \setminus \{\, \delta \,\}$ が $s_\delta(\alpha) \in \Phi^+_\Delta$ みたすことは, Section 7.2.4 と同様に確かめられる. また, $\Phi^+_\Delta = \Phi^+_{\Delta'}$ であるので, $n_{\Phi^+_\Delta}(w) = n_{\Phi^-_\Delta}(w)$ である.

7.2.6　D_n

$\Phi = \Phi(D_n)$ とし Section 5.3.6 で考えた単純系 Δ を考える．$\delta \in \Delta$ に対し，$\alpha \in \Phi_\Delta^+ \setminus \{ \delta \}$ が $s_\delta(\alpha) \in \Phi_\Delta^+$ みたすことを確認する．$\delta = \alpha_{i,i+1}$ については，Section 7.2.4 の議論である．$\delta = \beta_{n-1,n}$ のときについて考える．$s_{\beta_{n-1,n}} = F_{n-1}F_nT_{n-1,n}$ である．したがって $i < j$ に対し，

$$s_{\beta_{n-1,n}}(\alpha_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{i,j} & (i < j < n-1) \\ \beta_{i,n} & (i < n-1, j = n-1) \\ \beta_{i,n-1} & (i < n-1, j = n) \\ -\alpha_{n,n-1} = \alpha_{n-1,n} & (i = n-1, j = n) \end{cases}$$

$$s_{\beta_{n-1,n}}(\beta_{i,j}) = \begin{cases} \beta_{i,j} & (i < j < n-1) \\ \alpha_{i,n} & (i < n-1, j = n-1) \\ \alpha_{i,n-1} & (i < n-1, j = n) \\ -\beta_{n,n-1} & (i = n-1, j = n) \end{cases}$$

である．したがって，$\alpha \in \Phi_\Delta^+ \setminus \{ \beta_{n-1,n} \}$ ならば $s_{\beta_{n-1,n}}(\alpha) \in \Phi_\Delta^+$ をみたしている．

Section 7.2.4 での議論から，$w = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)A_\sigma \in W$ に対して，

$$w(\alpha_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \\ -\alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} = \alpha_{\sigma(j),\sigma(i)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \\ \beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \\ -\beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \end{cases}$$

$$w(\beta_{i,j}) = \begin{cases} \beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \\ -\beta_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \\ \alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} & a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \\ -\alpha_{\sigma(i),\sigma(j)} = \alpha_{\sigma(j),\sigma(i)} & a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \end{cases}$$

となるので，$n_{\Phi_\Delta^+}(w)$ は，

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta^+(w) = &\left\{ \alpha_{i,j} \,\middle|\, i < j, \sigma(i) > \sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \right\} \\ &\cup \left\{ \alpha_{i,j} \,\middle|\, i < j, \sigma(i) < \sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \right\} \\ &\cup \left\{ \alpha_{i,j} \,\middle|\, i < j, a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \right\} \\ &\cup \left\{ \beta_{i,j} \,\middle|\, i < j, \sigma(i) < \sigma(j), a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \right\} \\ &\cup \left\{ \beta_{i,j} \,\middle|\, i < j, \sigma(i) > \sigma(j), a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \right\} \\ &\cup \left\{ \beta_{i,j} \,\middle|\, i < j, a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \right\} \\ n(w) = &\left| \left\{ (i,j) \,\middle|\, i < j, \sigma(i) > \sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = 1 \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ (i,j) \,\middle|\, i < j, \sigma(i) > \sigma(j), a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = -1 \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ (i,j) \,\middle|\, i < j, \sigma(i) < \sigma(j), a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ (i,j) \,\middle|\, i < j, \sigma(i) < \sigma(j), a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ (i,j) \,\middle|\, i < j, a_{\sigma(i)} = -1, a_{\sigma(j)} = 1 \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ (i,j) \,\middle|\, i < j, a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(j)} = -1 \right\} \right| \end{aligned}$$

となる．

7.2.7 G_2

$\Phi = \Phi(G_2)$ とし, Section 5.3.7 で考えた単純系 Δ を考える.

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \\
\gamma_i &= -3\boldsymbol{e}_i + \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{e}_k \\
\Delta &= \{\, \alpha_{1,2}, \gamma_1 \,\} \\
\Phi_\Delta^+ &= \{\, \alpha_{1,2}, \gamma_1, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \gamma_2, -\gamma_3 \,\}
\end{aligned}$$

であった. Section 4.2.7 での計算をもとに計算すると,

$$\begin{aligned}
s_{\alpha_{1,2}}(\alpha_{3,1}) &= \alpha_{3,2} & s_{\alpha_{1,2}}(\alpha_{3,2}) &= \alpha_{3,1} \\
s_{\alpha_{1,2}}(\gamma_1) &= \gamma_2 & s_{\alpha_{1,2}}(\gamma_2) &= \gamma_1 \\
s_{\alpha_{1,2}}(-\gamma_3) &= -\gamma_3
\end{aligned}$$

である. どれも Φ_Δ^+ の元である. また

$$\begin{aligned}
s_{\gamma_1}(\alpha_{1,2}) &= -\alpha_{1,3} = \alpha_{3,1} & s_{\gamma_1}(\alpha_{3,1}) &= -\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} \\
s_{\gamma_1}(\alpha_{3,2}) &= \alpha_{3,2} \\
s_{\gamma_1}(\gamma_2) &= -\gamma_3 & s_{\gamma_1}(-\gamma_3) &= \gamma_2
\end{aligned}$$

であり, どれも Φ_Δ^+ の元である.

x2 (2025-01-23 16:09)

章末問題

1. Section 5.3.3 と同じ記号を用い, $\Phi = \Phi(A_2)$ について考える．このとき, $D_{2\cdot m} = \langle s_{\eta_1}, s_{\eta_2} \rangle_{\mathbb{Z}}$ を示せ.
2. m を整数とし, Section 5.3.1 と同じ記号を用いる．このとき, $\{ A_\sigma \mid \sigma \in S_3 \} = \left\langle s_{\alpha_{1,2}}, s_{\alpha_{2,3}} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ を示せ.

第 8 章

高さ関数

対称群 S_n は隣接互換のなす集合でで生成されていた. Section 5.3.3 での単純系 Δ を考えると, 単純ルートに対する鏡映は隣接互換に相当していた. ここでは, 高さと呼ばれるルートに対して決まる値を定義し, 有限鏡映群が単純ルートに対する鏡映で生成されることを示す.

8.1 高さ関数

ここでは特に断らない限り, Φ をルート系とし, $\Delta \subset \Phi$ を単純系とする. また, $\Phi^+ = \Phi^+_\Delta$ とする.

Definition 8.1.1. $\alpha = \sum_{\delta\in\Delta} c_\delta\delta$ に対し, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = \sum_{\delta\in\Delta} c_\delta$ と定義し, α の高さと呼ぶ.

しばらくの間, $R_0 = \{ s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \}$, $W_0 = \langle R_0 \rangle_{\mathbb{Z}}$ とおく.

Lemma 8.1.2. $\beta \in \Phi^+$, $h = \min\{ \mathrm{ht}_\Delta(w(\beta)) \mid w \in W_0, w(\beta) \in \Phi^+ \}$ とおく. $w \in W_0$ とする. $w(\beta) \in \Phi^+$ が $\mathrm{ht}_\Delta(w(\beta)) = h$ をみたすなら, $w(\beta) \in \Delta$.

Proof. $w(\beta) = \sum_{\delta\in\Delta} c_\delta\delta$ とする. $w(\beta) \in \Phi^+$ であるので, $c_\gamma \geq 0$ である.

$$\begin{aligned}\langle w(\beta), w(\beta)\rangle &= \left\langle w(\beta), \sum_{\delta\in\Delta} c_\delta\delta \right\rangle \\ &= \sum_{\delta\in\Delta} c_\delta \langle w(\beta), \delta\rangle\end{aligned}$$

となるが, $\langle w(\beta), w(\beta)\rangle > 0$ であるから, $\langle w(\beta), \delta\rangle > 0$ となる δ が存在する. $\alpha \in \Delta$ が $\langle w(\beta), \alpha\rangle > 0$ をみたすとする.

$w(\beta) = \alpha$ のときは $w(\beta) = \alpha \in \Delta$ である. $w(\beta) \neq \alpha$ のときについて考える. $s_\alpha(w(\beta))$ を調べる. $w(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{ \alpha \}$ だから, Proposition 7.1.3 から $s_\alpha(w(\beta)) \in \Phi^+$ がわかる. また, $s_\alpha w \in W_0$ である. 一方, $c = 2\frac{\langle w(\beta),\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}$ とすると, $c > 0$ であり, $s_\alpha(w(\beta)) = w(\beta) - c\alpha$ とかけるので,

$$\mathrm{ht}_\Delta(s_\alpha(w(\beta))) = \mathrm{ht}_\Delta(\gamma) - c < \mathrm{ht}_\Delta(\gamma) = h$$

となる. これは h の最小性に矛盾する. □

Lemma 8.1.3. $W_0(\Delta) = \Phi$

Proof. $W_0(\Delta) \subset \Phi$ は, Φ がルート系であるので明白である.

$W_0(\Delta) \supset \Phi$ について考える. $\beta \in \Phi$ とする.

$\beta \in \Phi^+$ のときについて考える. $h = \min\{ \mathrm{ht}_\Delta(w(\beta)) \mid w \in W_0, w(\beta) \in \Phi^+ \}$ とし, $w(\beta)$, $w \in W_0$ が $\mathrm{ht}_\Delta(w(\beta)) = h$ をみたすとする. $\gamma = w(\beta)$ とおくと, Lemma 8.1.2 より, $\gamma \in \Delta$ である. したがって, $\beta = w^{-1}(\gamma) \in W_0(\Delta)$ である.

$\beta \in \Phi^-$ のときは, $-\beta \in \Phi^+$ であるので, $-\beta = w(\gamma)$ をみたす $w \in W_0$ と $\gamma \in \Delta$ がとれる. $s_\gamma(\gamma) = -\gamma$ であるから, $ws_\gamma(\gamma) = -w(\gamma) = \beta$ となり $\beta \in W_0(\Delta)$ がわかる. □

Theorem 8.1.4. $W(\Phi) = W_0$

Proof. $W(\Phi) \supset W_0 = \langle R_0 \rangle_{\mathbb{Z}}$ は, $R_0 \subset W(\Phi)$ であることから, 明白である.

$W(\Phi) \subset W_0$ について考える. $\beta \in \Phi$ とする. このとき $s_\beta \in W$, $\beta \in \Phi$ だから, Lemma 8.1.3 から, $\beta = w(\alpha)$ をみたす $w \in W_0$ と $\delta \in \Delta$ がとれる. したがって,

$$s_\beta = s_{w\delta} = ws_\delta w^{-1}$$

となるが, w も s_δ も W_0 の元だから, $s_\beta \in W_0$ である. したがって, $R(\Phi) \subset W_0$ であるので, $W(\Phi) = \langle R(\Phi) \rangle_{\mathbb{Z}} \subset W_0$ である. □

8.2 例

8.2.1 $I_2(m)$

$\Phi = \Phi(I_2(m))$ とし, Section 5.3.1 で考えた単純系 Δ を考える. $\Delta = \{ \alpha_0, \alpha_{m-1} \}$, $\Phi^+_\Delta = \{ \alpha_i \mid i \in \{ 0, \ldots, m-1 \} \}$, $\Phi^+_\Delta = \{ \alpha_{m+i} \mid i \in \{ 0, \ldots, m-1 \} \}$ であった. $S = \{ P_0, P_{m-1} \}$ とする. $P_0 P_{m-1} = R_{1-m} = R_1$ である. また, $R_i = (R_1)^i$ であり, $P_i = R_i P_0$ であるから, P_i, R_i はいずれも, S の元の積として書ける. つまり $D_{2\cdot m} = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\alpha_{m-1} &= \alpha(\frac{(m-1)\pi}{m}) = \begin{pmatrix} \sin(-\frac{(m-1)\pi}{m}) \\ \cos(-\frac{(m-1)\pi}{m}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(-\frac{\pi}{m}) \\ -\cos(-\frac{\pi}{m}) \end{pmatrix} \\
\alpha_i &= \alpha(\frac{i\pi}{m}) = \begin{pmatrix} \sin(-\frac{i\pi}{m}) \\ \cos(-\frac{i\pi}{m}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sin(-\frac{i\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})}\alpha_{m-1} + (\cos(-\frac{i\pi}{m}) + \frac{\sin(-\frac{i\pi}{m})\cos(-\frac{\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})})\alpha_0 \\
&= \frac{\sin(-\frac{i\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})}\alpha_{m-1} + (\frac{\sin(-\frac{i\pi}{m})\cos(-\frac{\pi}{m}) + \cos(-\frac{i\pi}{m})\sin(-\frac{\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})})\alpha_0 \\
&= \frac{\sin(-\frac{i\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})}\alpha_{m-1} + \frac{\sin(-\frac{(1+i)\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})}\alpha_0
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_i) &= \frac{\sin(-\frac{i\pi}{m})}{-\sin(\frac{\pi}{m})} + \frac{\sin(-\frac{(1+i)\pi}{m})}{-\sin(\frac{\pi}{m})} \\
&= \frac{\sin(-\frac{i\pi}{m}) + \sin(-\frac{(1+i)\pi}{m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})} \\
&= \frac{\sin(-\frac{1}{2}(\frac{(1+i)\pi}{m} + \frac{i\pi}{m}))\cos(-\frac{1}{2}(\frac{(1+i)\pi}{m} - \frac{i\pi}{m}))}{\sin(-\frac{\pi}{m})} \\
&= \frac{\sin(-\frac{(1+2i)\pi}{2m})\cos(-\frac{\pi}{2m})}{\sin(-\frac{\pi}{m})} \\
&= \frac{\sin(-\frac{(1+2i)\pi}{2m})\cos(-\frac{\pi}{2m})}{2\sin(-\frac{\pi}{2m})\cos(-\frac{\pi}{2m})} \\
&= \frac{\sin(-\frac{(1+2i)\pi}{2m})}{2\sin(-\frac{\pi}{2m})}.
\end{aligned}$$

である. $i \in \{ 0, \ldots, m-1 \}$ で, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_i) > 0$ となる. さらに, $i \in \{ 1, \ldots, m-2 \}$ で, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_i) > 1$ となる. また, $i \in \{ m, \ldots, 2m-1 \}$ で, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_i) < 0$ となる. $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_i)$ は m のとり方によっては, 整数ではない値をとることもある.

8.2.2 $A_1 \times \cdots \times A_1$

Section 5.3.2 で考えたルート系 Φ と単純系 Δ について考える. $\Phi^+_\Delta = \Delta$ である. したがって, $\Phi^-_\Delta = \{ -\delta \mid \delta \in \Delta \}$ である. よって, $\delta \in \Phi^+_\Delta$ に対し $\mathrm{ht}_\Delta(\delta) = 1$, $-\delta \in \Phi^-_\Delta$ に対し $\mathrm{ht}_\Delta(\delta) = -1$ である. また, $s_\alpha = s_{-\alpha}$ であったから,

$$\begin{aligned}
R(\Phi) &= \{ s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \} \\
&= \{ s_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+_\Delta \} \\
&= \{ s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \}
\end{aligned}$$

である. $W(\Phi) = \langle R(\Phi) \rangle_{\mathbb{Z}}$ であったので, $W(\Phi)$ は $\{ s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \}$ で生成される.

8.2.3 A_{n-1}

$\Phi = \Phi(A_{n-1})$ とし, Section 5.3.3 の単純系 Δ を用いる. $S = \{ T_{i,i+1} \mid i \in \{ 1, \ldots, n-1 \} \} = \{ s_\delta \mid \delta \in \Delta \}$ とする. $i < j$ に対し,

$$T_{i,i+1} T_{i+1,i+2} \cdots T_{j-2,j-1} \alpha_{j-1,j} = \alpha_{i,j}$$

である. つまり, $\alpha_{i,j}$ に対し, $w(\alpha_{j-1,j}) = \alpha_{i,j}$ をみたす $w \in \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ がとれる. したがって, Propositions 2.2.7 and 3.1.4 から,

$$T_{i,j} = s_{\alpha_{i,j}} = s_{w(\alpha_{j-1,j})} = w s_{\alpha_{j-1,j}} w^{-1} = w T_{j-1,j} w^{-1}$$

とかけるので, $T_{i,j} \in \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. $R(\Phi) = \{ T_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$ であるので, $W(\Phi) = \langle R(\Phi) \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. これは, 対称群 S_n が隣接互換で生成されているという事実に対応する.

x2 (2025-01-23 16:09)

$k > 0$ に対し,

$$\begin{aligned}\alpha_{i,i+k} &= \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \cdots + \alpha_{i+k-1,i+k}\\ \alpha_{i,i-k} &= -\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i+2} - \cdots - \alpha_{i+k-1,i+k}\end{aligned}$$

であるから, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) = j - i$ とかける. 実際,

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\, \alpha_{i,j} \mid j = i+1 \,\} = \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = 1 \,\}\\ \Phi_\Delta^+ &= \{\, \alpha_{i,j} \mid j > i \,\} = \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}_\Delta(\alpha) > 0 \,\}\\ \Phi_\Delta^- &= \{\, \alpha_{i,j} \mid j < i \,\} = \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}_\Delta(\alpha) < 0 \,\}\end{aligned}$$

となっている. この場合, $\alpha \in \Phi$ に対し $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha)$ は整数である. また,

$$\left|\left\{\, \alpha \in \Phi_\Delta^+ \,\middle|\, \mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = h \,\right\}\right| = n - h$$

である.

$\alpha_{i,j} \in \Phi_\Delta^+$ は, 次のように 2 通りに書くことができる:

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= \alpha_{i,j} + \alpha_{i,i+1}\\ &= \alpha_{i,j-1} + \alpha_{j-1,j}.\end{aligned}$$

そこで, Φ_Δ^+ の元を以下のように並べる:

$$\begin{array}{cccccc}
\alpha_{1,n} & \alpha_{1,n-1} & \cdots & \alpha_{1,4} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,2}\\
\alpha_{2,n} & \alpha_{2,n-1} & \cdots & \alpha_{2,4} & \alpha_{2,3} & \\
\alpha_{3,n} & \alpha_{2,n-1} & \cdots & \alpha_{3,4} & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
\alpha_{n-2,n} & \alpha_{n-2,n-1} & & & & \\
\alpha_{n-1,n} & & & & &
\end{array}$$

このとき, 各行の一番最後のものが, Δ の元であり, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = 1$ である. α が β の一つ左にある場合, もしくは α が β の一つ上にある場合, Δ の元を β に足すことで α が得られる. したがって, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = \mathrm{ht}_\Delta(\beta) + 1$ である.

8.2.4　B_n

$\Phi = \Phi(B_n)$ とし, Section 5.3.4 の単純系 Δ を用いる.

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{n-1,n} \,\} \cup \{\, \varepsilon_n \,\}\\ \Phi_\Delta^+ &= \{\, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \mid 1 \le i < j \le n \,\} \cup \{\, \varepsilon_k \mid 1 \le k \le n \,\}\end{aligned}$$

である. $S = \{\, s_\delta \mid \delta \in \Delta \,\}$ とする. $W(\Phi) = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ を確かめる. $\Phi(A_{n-1}) \subset \Phi(B_n)$ であり, いま考えている Δ は Section 8.2.3 で考えた $\Phi(A_{n-1})$ の単純系を含んでいるので, $1 \le i < j \le n$ に対し, $s_{\alpha_{i,j}} \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ であることがわかる. また,

$$s_{\alpha_{i,n}}(\varepsilon_n) = \varepsilon_i$$

となるので, Propositions 2.2.7 and 3.1.4 から,

$$s_{\varepsilon_i} = s_{s_{\alpha_{i,n}}(\varepsilon_n)} = s_{\alpha_{i,n}} s_{\varepsilon_n} s_{\alpha_{i,n}}^{-1}$$

となる. したがって, $s_{\varepsilon_i} \in \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. さらに, $i < j$ に対し,

$$s_{\varepsilon_j}(\alpha_{i,j}) = \beta_{i,j}$$

であるから, 同様に, Propositions 2.2.7 and 3.1.4 から, $s_{\beta_{i,k}} \in \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ がわかる. $R(\Phi) \subset \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ であるから, $W(\Phi) = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である.

このとき, $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < n$ に対し,

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{k,k+1} \\
\varepsilon_k &= \alpha_{k,n} + \varepsilon_n \\
\beta_{i,j} &= \alpha_{i,j} + 2\varepsilon_j
\end{aligned}$$

とかけていたので,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) &= j - i \\
\mathrm{ht}_\Delta(\varepsilon_k) &= \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{k,n}) + \mathrm{ht}_\Delta(\varepsilon_n) \\
&= n - k + 1 \\
\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,j}) &= \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) + \mathrm{ht}_\Delta(2\varepsilon_j) \\
&= j - i + 2(n - j + 1) \\
&= 2n - j - i + 2 \\
&= (n - j + 1) + (n - i + 1)
\end{aligned}$$

である. したがって $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha)$ は整数である. $\alpha \in \Phi_\Delta^+$ に対し, 確かに $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) > 0$ である. $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) = 1$ となるのは $j = i + 1$ のときのみであり, $\mathrm{ht}_\Delta(\varepsilon_k) = 1$ となるのは $k = n$ のときのみであることもわかる. また $\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,j}) > 1$ である.

Φ_Δ^+ の元は次を満たしている:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \alpha_{i,j} + \alpha_{i,i+1} \\
&= \alpha_{i,j-1} + \alpha_{j-1,j}. \\
\varepsilon_i &= \alpha_{i,n} + \varepsilon_n \\
&= \varepsilon_{i+1} + \alpha_{i,i+1}. \\
\beta_{i,n} &= \varepsilon_i + \varepsilon_n \\
&= \beta_{i+1,n} + \alpha_{i,i+1}. \\
\beta_{i,j} &= \beta_{i,j+1} + \alpha_{j,j+1} \\
&= \beta_{i+1,j} + \alpha_{i,i+1}.
\end{aligned}$$

そこで, Φ_Δ^+ の元を以下のように並べる:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,n} & & \varepsilon_1 & & \alpha_{1,n} & \cdots & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,2} \\
& \beta_{2,3} & \cdots & \beta_{2,n} & & \varepsilon_2 & & \alpha_{2,n} & \cdots & \alpha_{2,3} & \\
& & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
& & & \beta_{n-1,n} & & \varepsilon_{n-1} & & \alpha_{n-1,n} & & & \\
& & & & & \varepsilon_n & & & & &
\end{array}$$

このとき, 各行の一番最後のものが, Δ の元であり, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = 1$ である. α が β の一つ左にある場合, もしくは α が β の一つ上にある場合, Δ の元を足すことで β から α を得ることができる. よって $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = \mathrm{ht}_\Delta(\beta) + 1$ である.

8.2.5　C_n

$\Phi = \Phi(C_n)$ とし Section 5.3.5 の単純系 Δ を考える．$S = \{ s_\delta \mid \delta \in \Delta \}$ とおく．Section 5.3.4 の単純系を Δ' とすると，$S = \{ s_\delta \mid \delta \in \Delta' \}$ である．したがって，$W(\Phi) = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ であることも，Section 8.2.4 と同様に確かめられる．

$1 \le i < j \le n$, $1 \le k < n$ に対し，

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{k,k+1} \\
\beta_{k,n} &= \alpha_{k,n} + \varepsilon'_n \\
\beta_{i,j} &= \alpha_{i,n} + \beta_{j,n} \\
\varepsilon'_k &= \alpha_{i,n} + \beta_{i,n}
\end{aligned}$$

とかける．したがって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) &= j - i \\
\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{k,n}) &= \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{k,n}) + \mathrm{ht}_\Delta(\varepsilon'_n) \\
&= n - k + 1 \\
\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,j}) &= \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,n}) + \mathrm{ht}_\Delta(\beta_{j,n}) \\
&= n - i + n - j + 1 = 2n - i - j + 1 \\
\mathrm{ht}_\Delta(\varepsilon'_k) &= \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,n}) + \mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,n}) \\
&= n - i + n - i + 1 = 2n - 2i + 1
\end{aligned}$$

である．したがって $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha)$ は整数である．$\alpha \in \Phi^+_\Delta$ に対し，確かに $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) > 0$ である．$\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) = 1$ となるのは $j = i+1$ のときのみであり，$\mathrm{ht}_\Delta(\varepsilon_k) = 1$ となるのは $k = n$ のときのみであることもわかる．また $\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,j}) > 1$ である．

Φ^+_Δ の元は次を満たしている:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \alpha_{i,j} + \alpha_{i,i+1} \\
&= \alpha_{i,j-1} + \alpha_{j-1,j}. \\
\beta_{n-1,n} &= \alpha_{n-1,n} + \varepsilon'_n. \\
\beta_{i,n} &= \alpha_{i,n} + \varepsilon'_n \\
&= \beta_{i+1,n} + \alpha_{i,i+1} \\
\varepsilon'_i &= \beta_{i,i+1} + \alpha_{i,i+1} \\
\beta_{i,i+1} &= \varepsilon'_{i+1} + \alpha_{i,i+1} \\
&= \beta_{i+1,n} + \alpha_{i,i+1}. \\
\beta_{i,j} &= \beta_{i,j+1} + \alpha_{j,j+1} \\
&= \beta_{i+1,j} + \alpha_{i,i+1}.
\end{aligned}$$

そこで，Φ^+_Δ の元を以下のように並べる:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varepsilon'_1 & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,n} & \alpha_{1,n} & \cdots & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,2} \\
& \varepsilon'_2 & \beta_{2,3} & \cdots & \beta_{2,n} & \alpha_{2,n} & \cdots & \alpha_{2,3} & \\
& & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\
& & & \varepsilon'_{n-1} & \beta_{n-1,n} & \alpha_{n-1,n} & & & \\
& & & & \varepsilon'_n & & & &
\end{array}$$

このとき, 各行の一番最後のものが, Δ の元であり, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = 1$ である. α が β の一つ左にある場合, もしくは α が β の一つ上にある場合, Δ の元を β に加えることで, α が得られる. よって, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = \mathrm{ht}_\Delta(\beta) + 1$ である.

8.2.6 D_n

$\Phi = \Phi(D_n)$ とし Section 5.3.6 で考えた単純系 Δ を考える. $S = \{ s_\delta \mid \delta \in \Delta \}$ とする.

$W(\Phi) = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ であることを確認する. $s_{\alpha_{1,2}}, \ldots, s_{\alpha_{n-1,n}} \in S$ であるので $s_{\alpha_{i,j}} \in \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. また, $s_{\alpha_{i,j}}(\beta_{n-1,n}) \in \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ は Section 8.2.4 と同様に確かめられる.

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{k,k+1} \\
\beta_{i,n} &= \alpha_{i,n-1} + \beta_{n-1,n} \\
\beta_{i,j} &= \alpha_{i,n} + \beta_{j,n}
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) = j - i \\
&\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,n}) = \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,n-1}) + \mathrm{ht}_\Delta(\beta_{n-1,n}) = n - 1 - i + 1 = n - i = 2n - i - n \\
&\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,j}) = \mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,n}) + \mathrm{ht}_\Delta(\beta_{j,n}) = n - i + n - j = 2n - i - j
\end{aligned}$$

である. したがって, $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha)$ は整数である. また, $\alpha \in \Phi_\Delta^+$ に対し, 確かに $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha) > 0$ である. $\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,j}) = 1$ となるのは $j = i + 1$ のときのみであり, $\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,j}) = 1$ となるのは $i = n - 1, j = n$ のときのみであることもわかる.

さらに,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{i,i+h}) &= h \\
\mathrm{ht}_\Delta(\beta_{i,2n-i-h}) &= h
\end{aligned}$$

ともかけるので,

$$\begin{aligned}
&\{ \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = h \} \\
&= \{ \alpha_{i,i+h} \mid i \in \{ 1, \ldots, n-h \} \} \cup \{ \beta_{i,2n-i-h} \mid 1 \le i < 2n - i - h \le n \} \\
&= \{ \alpha_{i,i+h} \mid i \in \{ 1, \ldots, n-h \} \} \cup \left\{ \beta_{i,2n-i-h} \,\middle|\, \min\{ 1, n-h \} \le i < \frac{2n-h}{2} \right\}
\end{aligned}$$

である. したがって, $\{ \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}_\Delta(\alpha) = h \}$ は, $1 \le h < n$ のときには,

$$\{ \alpha_{i,i+h} \mid i \in \{ 1, \ldots, n-h \} \} \cup \left\{ \beta_{i,2n-i-h} \,\middle|\, n - h \le i < n - \frac{h}{2} \right\}$$

であり, $n \le h$ のときには,

$$\left\{ \beta_{i,2n-i-h} \,\middle|\, 1 \le i < n - \frac{h}{2} \right\}$$

である.

8.2.7　G_2

$\Phi = \Phi(G_2)$ とし, Section 5.3.7 で考えた単純系 Δ を考える.

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \\
\gamma_i &= -3\boldsymbol{e}_i + \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{e}_k \\
\Delta &= \{\, \alpha_{1,2}, \gamma_1 \,\} \\
\Phi^+_\Delta &= \{\, \alpha_{1,2}, \gamma_1, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \gamma_2, -\gamma_3 \,\}
\end{aligned}$$

であった. Section 4.2.7 での計算をもとに計算すると,

$$\begin{aligned}
s_{\gamma_1}(\alpha_{1,2}) &= \alpha_{3,1} \\
s_{\alpha_{1,2}} s_{\gamma_1}(\alpha_{1,2}) = s_{\alpha_{1,2}}(\alpha_{3,1}) &= \alpha_{3,2} \\
s_{\alpha_{1,2}}(\gamma_1) &= \gamma_2 \\
s_{\gamma_1} s_{\alpha_{1,2}}(\gamma_1) = s_{\gamma_1}(\gamma_2) &= -\gamma_3
\end{aligned}$$

となる. したがって, $\left\{\, s_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \Phi^+_\Delta \,\right\} \subset \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である. よって, $W(\Phi) = \langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ である.

Section 5.3.7 での計算から,

$$\begin{aligned}
\alpha_{3,1} &= \gamma_1 + \alpha_{1,2} \\
\alpha_{3,2} &= \gamma_1 + 2\alpha_{1,2} \\
\gamma_2 &= \gamma_1 + 3\alpha_{1,2} \\
-\gamma_3 &= 2\gamma_1 + 3\alpha_{1,2}
\end{aligned}$$

であったので,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{1,2}) = \mathrm{ht}_\Delta(\beta_1) &= 1 \\
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{3,1}) &= 2 \\
\mathrm{ht}_\Delta(\alpha_{3,2}) &= 3 \\
\mathrm{ht}_\Delta(\gamma_2) &= 4 \\
\mathrm{ht}_\Delta(-\gamma_3) &= 5
\end{aligned}$$

であることがわかる.

章末問題

1. $D_{2\cdot m}$ について考える.
   (a) $D_{2\cdot m} = \langle \{ P_1, P_{m-1} \} \rangle$ を示せ.
   (b) $\min \{ l \mid P_i = S_1 S_2 \cdots S_l, S_i \in \{ P_1, P_{m-1} \} \}$ を求めよ.
   (c) $\min \{ l \mid R_i = S_1 S_2 \cdots S_l, S_i \in \{ P_1, P_{m-1} \} \}$ を求めよ.
2. 各 $\sigma \in S_n$ に対し, $\min \{ l \mid A_\sigma = S_1 S_2 \cdots S_l, S_i \in \{ T_{1,2}, T_{2,3} \} \}$ を求めよ.

第 9 章

長さ関数

有限鏡映群は単純ルートに対応する鏡映で生成されている. 有限鏡映群の元を単純ルートに対応する鏡映の積として書いたときの長さについてここでは考える.

9.1 長さ関数

Φ をルート系, Δ を単純系, $\Phi^+ = \Phi^+_\Delta$, $\Phi^- = \Phi^-_\Delta$, $W = W(\Phi)$ とする.

Definition 9.1.1. $w \in W$ に対し,

$$\ell_\Delta(w) = \min\{\, l \mid \delta_1, \dots, \delta_l \in \Delta, w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l} \,\}.$$

とおき, w の長さと呼ぶ. ただし, $\ell_\Delta(\mathrm{id}) = 0$ とする.

Definition 9.1.2. $w \in W$ に対し,

$$w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{\ell_\Delta(w)}}, \quad (\delta_i \in \Delta)$$

となる積の形を簡約表示と呼ぶ.

Proposition 9.1.3. $w \in W$ に対し, 次が成り立つ:

1. $\ell_\Delta(w) = 0 \iff w = \mathrm{id}$.
2. $\ell_\Delta(w) = 1 \iff \exists \delta \in \Delta$ *such that* $w = s_\delta$.
3. $\ell_\Delta(w) = \ell_\Delta(w^{-1})$.
4. $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l}$ $(\delta_i \in \Delta)$ であるとき, $\det(w) = (-1)^l$. 特に, $\det(w) = (-1)^{\ell_\Delta(w)}$.

Proof. Items 1 and 2 は $\ell_\Delta(w)$ の定義から明らか.

Item 3 について考える. $w = s_1 \cdots s_l$, $s_i = s_{\delta_i}$, $\delta_i \in \Delta$ とすると, $s_i^2 = \mathrm{id}$ であるので,

$$\begin{aligned} w^{-1} &= s_l^{-1} \cdots s_1^{-1} \\ &= s_l \cdots s_1 \end{aligned}$$

である. したがって, $\ell_\Delta(w) \geq \ell_\Delta(w^{-1})$. また, w^{-1} からはじめて, 同様に $\ell_\Delta(w) \leq \ell_\Delta(w^{-1})$.

Item 4 について考える. $w = s_1 \cdots s_l$, $s_i = s_{\delta_i}$, $\delta_i \in \Delta$ とすると,

$$\begin{aligned}\det(w) &= \det(s_1 \cdots s_l) \\ &= \det(s_1) \cdots \det(s_l) \\ &= (-1)^l.\end{aligned}$$

□

Remark 9.1.4. $\alpha \in \Phi$ に対し, $\det(s_\alpha) = -1$ であるから, $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r} = s_{\alpha'_1} \cdots s_{\alpha'_l}$ となる $\alpha_i, \alpha'_i \in \Phi$ に対し, $\det(w) = (-1)^r = (-1)^l$ となり, l と r の偶奇は等しいことがわかる.

w の表示を簡約にするにはどうしたらよいかについて考える.

Lemma 9.1.5. $w \in W$, $\alpha \in \Phi$ とし, $\beta = w(\alpha)$ とする. このとき, $s_\beta w s_\alpha = w$

Proof. Propositions 2.2.7 and 3.1.4 から,

$$s_\beta = w s_\alpha w^{-1}$$

であるので,

$$s_\beta w = w s_\alpha$$

である. したがって,

$$s_\beta w s_\alpha = w s_\alpha s_\alpha = w.$$

□

Lemma 9.1.6. $\delta_1, \ldots, \delta_r \in \Delta$ とし, $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_r}$ とする. $1 \leq k \leq l \leq r$ に対し, $w_{k,l} = s_{\delta_k} s_{\delta_{k+1}} \cdots s_{\delta_l}$ とし, $k > l$ のときには $w_{k,l} = \mathrm{id}$ と約束する. $\delta_i = w_{i+1,j-1}(\delta_j)$ を満たす $1 \leq i < j \leq r$ に対し,

$$w = w_{1,i-1} w_{i+1,j-1} w_{j+1,r}$$

である.

Proof. Lemma 9.1.5 を用いれば,

$$w_{i,j} = s_{\delta_i} w_{i,j} s_{\delta_j} = w_{i+1,j-1}$$

が言えるので,

$$w = w_{1,i-1} w_{i+1,j-1} w_{j+1,r}$$

である. □

Lemma 9.1.7. $\delta_1, \ldots, \delta_r \in \Delta$ とし, $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_r}$ とする. また, $w_{k,l} = s_{\delta_k} s_{\delta_{k+1}} \cdots s_{\delta_l}$ とする, ただし, $k > l$ のときには $w_{k,l} = \mathrm{id}$ と約束する. $w_{1,j-1}(\delta_j) \in \Phi^-$ ならば,

$$w = w_{1,i-1} w_{i+1,j-1} w_{j+1,r}$$

となる, $1 \leq i < j$ が存在する.

Proof. $\delta_j \in \Delta$ であるので, $w_{j-1,j-1}\delta_j = \delta_j \in \Phi^+$ である. したがって

$$\left\{ i \in \{ 1, \dots, j \} \,\middle|\, w_{i,j-1}(\delta_j) \in \Phi^+ \right\} \neq \emptyset$$

であるので,

$$i = \min \left\{ i \in \{ 1, \dots, j \} \,\middle|\, w_{i,j-1}(\delta_j) \in \Phi^+ \right\} - 1$$

とおく. 一方, $w_{1,j-1}(\delta_j) \in \Phi^-$ であるので, $1 \leq i$ である. このとき, $\alpha = w_{i+1,j-1}(\delta_j)$ とおくと,

$$\alpha \in \Phi^+$$
$$s_{\delta_i}(\alpha) \in \Phi^-$$

である. $s_{\delta_i}(\alpha) \in \Phi^-$ かつ $\alpha \in \Phi^+$ となるのは, $\alpha = \delta_i$ のときのみであるので, $w_{i+1,j-1}(\delta_j) = \alpha = \delta_i$ である. したがって, Lemma 9.1.6 より,

$$w = w_{1,i-1} w_{i+1,j-1} w_{j+1,r}$$

である. □

Proposition 9.1.8. $\delta_1, \dots, \delta_r \in \Delta$ とし, $w_{k,l} = s_{\delta_k} s_{\delta_{k+1}} \cdots s_{\delta_l}$ とする, ただし, $k > l$ のときには $w_{k,l} = \mathrm{id}$ と約束する. $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_r}$ とおく. $r > n_{\Phi^+}(w)$ ならば,

$$w = w_{1,i-1} w_{i+1,j-1} w_{j+1,r}$$

となる, $1 \leq i < j \leq r$ が存在する.

Proof. Lemma 7.1.8 から,

$$w_{1,l-1}(\delta_l) \in \Phi^+ \implies n_{\Phi^+}(w_{1,l}) = n_{\Phi^+}(w_{1,l-1}) + 1$$
$$w_{1,l-1}(\delta_l) \in \Phi^- \implies n_{\Phi^+}(w_{1,l}) = n_{\Phi^+}(w_{1,l-1}) - 1$$

である. $n_{\Phi^+}(w) < r$ であることから,

$$1 = n_{\Phi^+}(w_{1,1}) < n_{\Phi^+}(w_{1,2}) < n_{\Phi^+}(w_{1,3}) < \cdots < n_{\Phi^+}(w_{1,j-2}) < n_{\Phi^+}(w_{1,j-1}) > n_{\Phi^+}(w_{1,j})$$

となる $j \leq r$ が存在する. このとき, $w_{1,j-1}(\delta_j) \in \Phi^-$ である. したがって, Lemma 9.1.7 より,

$$w = w_{1,i-1} w_{i+1,j-1} w_{j+1,r}$$

である.

□

Corollary 9.1.9. $w \in W$ に対し, $n(w) = \ell_\Delta(w)$.

Proof. $\delta_i \in \Delta$ とし, $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_r}$ であるとする.

$r > n(w)$ なら, Proposition 9.1.8 より, $\delta'_i \in \Delta$ をつかって, $w = s_{\delta'_1} \cdots s_{\delta'_{r-2}}$ とできる したがって, $\ell_\Delta(w) \leq n(w)$ である.

x2 (2025-01-23 16:09)

一方で, Lemma 7.1.8 より, $w \in W$, $\delta \in \Delta$ に対し $n(ws_\delta) \leq n(w) + 1$ である. したがって,

$$\begin{aligned} n(w) &= n(s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{r-1}} s_{\delta_r}) \\ &\leq n(s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{r-1}}) + 1 \\ &\vdots \\ &\leq r. \end{aligned}$$

□

したがって, Lemma 7.1.8 は $\ell_\Delta(w)$ に読み替えられる.

Theorem 9.1.10. *$\delta \in \Delta$, $w \in W$ とする. このとき次が成り立つ:*

1. $w(\delta) \in \Phi^+ \iff \ell_\Delta(ws_\delta) = \ell_\Delta(w) + 1$.
2. $w(\delta) \in \Phi^- \iff \ell_\Delta(ws_\delta) = \ell_\Delta(w) - 1$.
3. $w^{-1}(\delta) \in \Phi^+ \iff \ell_\Delta(s_\delta w) = \ell_\Delta(w) + 1$.
4. $w^{-1}(\delta) \in \Phi^- \iff \ell_\Delta(s_\delta w) = \ell_\Delta(w) - 1$.

Remark 9.1.11. Proposition 9.1.8 を繰り返し用いるだけで必ず簡約表示にたどり着く.

Remark 9.1.12. $\ell_\Delta(w) = n(w) = \left|\Phi^+_\Delta(w)\right|$ であるので, $\ell_\Delta(w)$, つまり簡約表示の長さ, は, $\Phi^+_\Delta(w)$ を使って求められる. $\Phi^+_\Delta(w) \subset \Phi^+_\Delta$ であるから, $\ell_\Delta(w) \leq \left|\Phi^+_\Delta\right| = \frac{1}{2}|\Phi|$ である.

Definition 9.1.13. $\ell_\Delta(w) = \frac{1}{2}|\Phi|$ となる $w \in W$ を W の最長元と呼ぶ.

Proposition 9.1.14. *$\delta_i \in \Delta$ とし, $w_k = s_{\delta_1} s_{\delta_2} \cdots s_{\delta_k}$ とする, ただし, $w_0 = \mathrm{id}$ と約束する. $w = w_r^{-1}$ とする. α_k を,*

$$\alpha_k = w_{k-1}(\delta_k)$$

とする. このとき,

$$\Phi^+(w) = \{\, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \,\}$$

である. とくに, $r = \ell_\Delta(w)$ ならば, 次が成り立つ:

1. $\Phi^+(w) = \{\, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \,\}$.
2. $i \neq j$ ならば $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Proof. $\beta \in \Phi^+(w)$ とする. 定義から, $w_0^{-1}(\beta) = \beta \in \Phi^+$ かつ $w_r^{-1}(\beta) = w(\beta) \in \Phi^-$ である. したがって, $w_{i-1}^{-1}(\beta) \in \Phi^+$ かつ $w_i^{-1}(\beta) \in \Phi^-$ をみたす $1 \leq i \leq r$ が存在する.

$$w_i^{-1}(\beta) = (w_{i-1}s_{\delta_i})^{-1}(\beta) = (s_{\delta_i})^{-1}(w_{i-1})^{-1}(\beta) = s_{\delta_i}(w_{i-1})^{-1}(\beta)$$

である. $(w_{i-1})^{-1}(\beta) \in \Phi^+$ かつ $s_{\delta_i}(w_{i-1})^{-1}(\beta) \in \Phi^-$ であるので, Corollary 7.1.5 より, $\delta_i = (w_{i-1})^{-1}(\beta)$ である. したがって, $\beta = w_{i-1}(\delta_i) = \alpha_i$ である.

$r = \ell_\Delta(w)$ のときについて考える. Corollary 9.1.9 より,

$$r = \ell_\Delta(w) = n(w) = \left|\Phi^+(w)\right|$$

x2 (2025-01-23 16:09)

である. 一方で, $\Phi^+(w) \subset \{ \alpha_1, \dots, \alpha_r \}$ であるので,

$$\left|\Phi^+(w)\right| \leq |\{ \alpha_1, \dots, \alpha_r \}| \leq r$$

である. よって, $|\{ \alpha_1, \dots, \alpha_r \}| = r$ であるが, このとき, α_k は相異なる.

□

Proposition 9.1.15. $\delta_i \in \Delta$ とし, $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_r}$ とする. $r = \ell_\Delta(w)$ とする. $\alpha \in \Delta$ が $\ell_\Delta(ws_\alpha) < \ell_\Delta(w)$ をみたすとき,

$$ws_\alpha = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{i-1}} s_{\delta_{i+1}} \cdots s_{\delta_r}$$

をみたす i が存在する.

Proof. $\ell_\Delta(ws_\alpha) \leq \ell_\Delta(w)$ であるので, Theorem 9.1.10 から, $w(\alpha) \in \Phi^-$ であることがわかる.

また, $\delta_{r+1} = \alpha$ とおくと, $s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_r}(\delta_{r+1}) \in \Phi^-$ であるから, Lemma 9.1.7 より, $s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{r+1}}$ には,

$$s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{r+1}} = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{i-1}} s_{\delta_{i+1}} \cdots s_{\delta_r}$$

をみたす i が存在する. □

Corollary 9.1.16. $w \in W$, $\delta \in \Delta$ とする. このとき次は同値:

1. $\ell_\Delta(ws_\delta) < \ell_\Delta(w)$
2. $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_{i-1}} \cdot s_{\delta_{i+1}} \cdots s_{\delta_r} \cdot s_\delta$ が簡約表示であるような, $\delta_i \in \Delta$ がとれる.

9.2 例

9.2.1 $I_2(m)$

$\Phi = \Phi(I_2(m))$ とし, Section 5.3.1 で考えた単純系 Δ を考える. $\Delta = \{ \alpha_0, \alpha_{m-1} \}$ であった. $S = \{ P_0, P_{m-1} = P_{-1} \}$ とする. S の元の積を考えたとき, $P_0P_0 = \mathrm{id}$, $P_{-1}P_{-1} = \mathrm{id}$ であるので, 同じ元が並んだ場合は簡約表示ではない. したがって, 簡約表示は, 以下のいずれかになる:

$$\begin{aligned}
&P_0P_{-1}P_0P_{-1}\cdots P_0P_{-1}\\
&P_{-1}P_0P_{-1}P_0\cdots P_{-1}P_0\\
&P_0P_{-1}P_0P_{-1}\cdots P_0P_{-1}P_0\\
&P_{-1}P_0P_{-1}P_0\cdots P_{-1}P_0P_{-1}.
\end{aligned}$$

$n_{\Phi^+_\Delta}(w)$ については, Section 7.2.1 の議論から,

$$\begin{aligned}
n(R_k) &= n(R_{-k}) = 2k\\
n(P_k) &= n(P_{-1-k}) = 2k+1
\end{aligned}$$

であることがわかっている.

$$\begin{aligned}
P_0P_{-1} &= R_1\\
P_{-1}P_0 &= R_{-1}
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}(P_0P_{-1})^k &= R_k\\ (P_{-1}P_0)^k &= R_{-k}\\ (P_0P_{-1})^kP_0 &= R_kP_0 = P_k\\ (P_{-1}P_0)^kP_{-1} &= R_{-k}P_{-1} = P_{-k-1}\end{aligned}$$

である. したがって, $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$ に対し,

$$\begin{aligned}R_k &= (P_0P_{-1})^k\\ R_{-k} &= (P_{-1}P_0)^k\\ P_k &= (P_0P_{-1})^kP_0\\ P_{-k} &= (P_{-1}P_0)^kP_{-1}\end{aligned}$$

は簡約表示である.

$\left|\Phi^+_\Delta\right| = \frac{1}{2}|\Phi| = m$ である. $m = 2M$ のとき, $R_M = R_{-M}$ であるが, $\ell_\Delta(R_M) = \ell_\Delta(R_M) = m$ がなりたつので, この元が最長である. $m = 2M+1$ のとき, $P_M = P_{-M}$ であるが, $\ell_\Delta(R_M) = \ell_\Delta(R_M) = m$ がなりたつので, この元が最長である.

9.2.2　$A_1 \times \cdots \times A_1$

Section 5.3.2 で考えたルート系 Φ と単純系 Δ について考える. Section 7.2.2 での議論から, $w = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in W(\Phi)$ に対し, $n_{\Phi^+_\Delta}(w) = |\{\, i \mid a_i = -1 \,\}|$ であった. $l = n(w)$, $\{\, i \mid a_i = -1 \,\} = \{\, i_1, \ldots, i_l \,\}$ とする. このとき, $\ell_\Delta(w) = n_{\Phi^+_\Delta}(w) = l$ であり, $w = F_{i_1} \cdots F_{i_l}$ であるので, これが w の簡約表示である.

9.2.3　A_{n-1}

$\Phi = \Phi(A_{n-1})$ とし, Section 5.3.3 の単純系 Δ を用いる. $W = W(\Phi)$ とする. Section 7.2.3 での計算により, $\sigma \in S_n$, $w = A_\sigma \in W$ に対し,

$$\ell_\Delta(w) = n_{\Phi^+_\Delta}(w) = |\{\, (i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j) \,\}|$$

である.

また, $\omega_0 \in S_n$ を

$$\omega_0(i) = n + 1 - i$$

で定義する. このとき,

$$A_{\omega_0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ & \vdots & & \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. $w_0 = A_{\omega_0}$ とおくと, $w_0(\alpha_{i,j}) = \alpha_{j,i} = -\alpha_{i,j}$ であるので, $\Phi^+_\Delta(w) = \Phi^+_\Delta$ である. したがって, $\ell(w_0) = \frac{1}{2}|\Phi| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ であり, w_0 は最長である.

9.2.4 B_n

$\Phi = \Phi(B_n)$ とし, Section 5.3.4 の単純系 Δ を用いる. $w_0 = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1) = -E_n$ とすると, $\Phi^+_\Delta(w_0) = \Phi^+_\Delta$ である. したがって, $\ell_\Delta(w_0) = \frac{1}{2}|\Phi| = n^2$ であり, 最長である.

9.2.5 C_n

$\Phi = \Phi(C_n)$ とし, Section 5.3.5 の単純系 Δ を用いる. $W(\Phi) = W(\Phi(B_n))$ であるが, Section 9.2.4 であつかった単純系を Δ' とすると, $\{ s_\delta \mid \delta \in \Delta \} = \{ s_\delta \mid \delta \in \Delta' \}$ であるので, $w \in W(\Phi)$ に対し, $\ell_\Delta(w) = \ell_{\Delta'}(w)$ である.

9.2.6 D_n

$\Phi = \Phi(D_n)$ とし, Section 5.3.6 の単純系 Δ を用いる. $W = W(\Phi)$ とする. n が偶数のとき, $w_0 = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1) \in W$ である. $w_0(\alpha_{i,n}) = -\beta_{i,n}$, $w_0(\beta_{i,n}) = -\alpha_{i,n}$ である. したがって, $\Phi^+_\Delta(w_0) = \Phi^+_\Delta$ であるので, $\ell_\Delta(w_0) = \frac{1}{2}|\Phi| = n^2$ であり, 最長である. n が奇数のとき, $w_0 = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, 1) \in W$ である. $\Phi^+_\Delta(w_0) = \Phi^+_\Delta$ である. したがって, $\ell_\Delta(w_0) = \frac{1}{2}|\Phi| = n^2$ であり, 最長である.

9.2.7 G_2

$\Phi = \Phi(G_2)$ とし, Section 5.3.7 で考えた単純系 Δ を考える. $s = s_{\alpha_{1,2}}$, $s' = s_{\gamma_1}$ とすると, Section 7.2.7 で計算したとおり,

$$
\begin{aligned}
s's(\alpha_{1,2}) &= -s'(\alpha_{1,2}) = -(\alpha_{3,1}) \\
s's(\alpha_{3,1}) &= s'(\alpha_{3,2}) = \alpha_{3,2} \\
s's(\alpha_{3,2}) &= s'(\alpha_{3,1}) = \alpha_{1,2} \\
s's(\gamma_1) &= s'(\gamma_2) = -\gamma_3 \\
s's(\gamma_2) &= s'(\gamma_1) = -\gamma_1 \\
s's(-\gamma_3) &= s'(-\gamma_3) = \gamma_2
\end{aligned}
$$

である.

$$
\begin{aligned}
(s's)^3(\alpha_{1,2}) &= (s's)^2(-(\alpha_{3,1})) = (s's)(-(\alpha_{3,2})) = -\alpha_{1,2} \\
(s's)^3(\alpha_{3,1}) &= (s's)^2(\alpha_{3,2}) = -\alpha_{3,1} \\
(s's)^3(\alpha_{3,2}) &= (s's)^2(\alpha_{1,2}) = -\alpha_{3,2} \\
(s's)^3(\gamma_1) &= (s's)^2(-\gamma_3) = (s's)(\gamma_2) = -\gamma_1 \\
(s's)^3(\gamma_2) &= (s's)^2(-\gamma_1) = (s's)(\gamma_3) = -\gamma_2 \\
(s's)^3(-\gamma_3) &= (s's)^2(\gamma_2) = (s's)(-\gamma_1) = \gamma_3
\end{aligned}
$$

となるので, $(s's)^3$ が最長元である.

章末問題

1. $\Phi = \Phi(A_2)$ とし, Section 5.3.3 の単純系 Δ を用いる. $W = W(\Phi)$ とする. 各 i に対し, $\{\, A_\sigma \in W \mid \ell_\Delta(A_\sigma) = i \,\}$ を求めよ.
2. $\Phi = \Phi(A_2)$ とし, Section 5.3.3 の単純系 Δ を用いる.
   (a) 各 $\sigma \in S_3$ に対し, $\{\, \delta \in \Delta \mid \ell_\Delta(A_\sigma s_\delta) > \ell_\Delta(A_\sigma) \,\}$ を求めよ.
   (b) 各 $\sigma \in S_3$ に対し, $\{\, \delta \in \Delta \mid \ell_\Delta(s_\delta A_\sigma) > \ell_\Delta(A_\sigma) \,\}$ を求めよ.

第 10 章

Bruhat order

有限鏡映群は単純ルートに対応する鏡映で生成されている. 単純ルートに対応する鏡映の積によって誘導される半順序についてここでは定義する.

10.1 Bruhat order

Φ をルート系とし, Δ を単純系とし, $W = W(\Phi)$ とする.
$W_l = \{ w \in W \mid \ell_\Delta(w) = l \}$ とおき, W_l を求めることを考える.

Lemma 10.1.1. $W_{l+1} \subset \{ ws_\delta \mid w \in W_l, \delta \in \Delta \}$ である.

Proof. $w \in W_{l+1}$ とする. このとき, $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l} s_{\delta_{l+1}}$ を満たす $\delta_i \in \Delta$ が存在するはずである. $w' = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l}$ とおく. もし $\ell_\Delta(w') < l$ なら, $w' = s_{\delta'_1} \cdots s_{\delta'_k}$, $k < l$ をみたす $\delta'_i \in \Delta$ がとれるが, $w = w' s_{l+1} = s_{\delta'_1} \cdots s_{\delta'_k} s_{\delta_{l+1}}$ とかける. したがって, $\ell_\Delta(w) < l+1$ となるので, $w \in W_{l+1}$ に矛盾する. したがって, $w' \in W_l$ である. □

Corollary 10.1.2. $0 < l < \frac{1}{2}|\Phi|$ に対し, $W_{l+1} = \{ ws_\delta \mid w \in W_l, \delta \in \Delta \} \setminus W_{l-1}$.

$W_0 = \{ \mathrm{id} \}$, $W_1 = \{ s_\delta \mid \delta \in \Delta \}$ であるので, $W_{l+1} = \{ ws_\delta \mid \delta \in \Delta \} \setminus W_{l-1}$ を計算していくことで, すべての l に対し, W_l が求められる.

Definition 10.1.3. $u, w \in W$ が次を満たすとき, $u \underset{\mathrm{R}}{\leq} w$ とする: つぎを満たす $\delta_1, \ldots, \delta_l \in \Delta$, k が存在する:

1. $0 \leq k \leq l = \ell(w)$.
2. $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l}$.
3. $u = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_k}$.

$\underset{\mathrm{R}}{\leq}$ を右弱順序と呼ぶ.

Proposition 10.1.4. W は $\underset{R}{\leq}$ で ℓ_Δ をランク関数とする半順序集合になる.

Proposition 10.1.5. $\ell_\Delta(u) + 1 = \ell_\Delta(w)$ であるとき次は同値:

1. $u \underset{L}{\leq} w$
2. $us_\delta = w$ となる $\delta \in \Delta$ が存在する.

x2 (2025-01-23 16:09)

Definition 10.1.6. $u, w \in W$ が次を満たすとき, $u \underset{\mathrm{L}}{\leq} w$ とする: つぎを満たす $\delta_1, \ldots, \delta_l \in \Delta$, k が存在する:

1. $0 \leq k \leq l = \ell(w)$.
2. $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l}$.
3. $u = s_{\delta_k} \cdots s_{\delta_l}$.

$\underset{\mathrm{R}}{\leq}$ を右弱順序と呼ぶ.

Proposition 10.1.7. W は $\underset{L}{\leq}$ で ℓ_Δ をランク関数とする半順序集合になる.

Proposition 10.1.8. $\ell_\Delta(u) + 1 = \ell_\Delta(w)$ であるとき次は同値:

1. $u \underset{L}{\leq} w$
2. $s_\delta u = w$ となる $\delta \in \Delta$ が存在する.

Remark 10.1.9. $w \in W$ に対し, $\varphi(w^{-1}) \in W$ とおくと, w は W 上の全単射であり, $w, w' \in W$ に対し以下は同値:

1. $w \underset{\mathrm{L}}{\leq} v$
2. $\varphi(w) \underset{\mathrm{R}}{\leq} \varphi(v)$

Definition 10.1.10. $u, w \in W$ が次を満たすとき, $u \leq w$ とする: つぎを満たす $\delta_1, \ldots, \delta_l \in \Delta$, $i_1, \ldots, i_k$ が存在する:

1. $i_1 < \cdots < i_k \leq l$.
2. $l = \ell(w)$.
3. $w = s_{\delta_1} \cdots s_{\delta_l}$.
4. $u = s_{\delta_{i_1}} \cdots s_{\delta_{i_k}}$.

$\leq$ を強ブリュア順序と呼ぶ.

Proposition 10.1.11. W は $\leq$ で ℓ_Δ をランク関数とする半順序集合になる.

Proposition 10.1.12. $\ell_\Delta(u) + 1 = \ell_\Delta(w)$ であるとき次は同値:

1. $u \leq w$
2. $s_\delta u = w$ または $s_\delta u = w$ となる $\delta \in \Delta$ が存在する.

10.2 例

10.2.1 $I_2(m)$

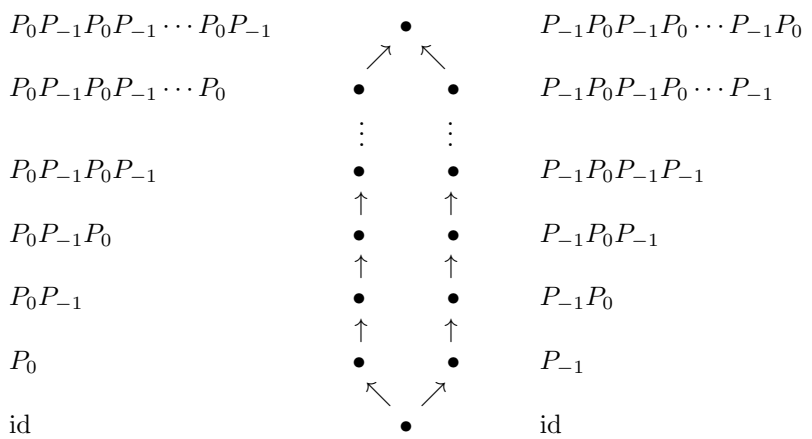
$\Phi = \Phi(I_2(m))$ とし, Section 5.3.1 で考えた単純系 Δ を考える. $W = W(\Phi)$ とし, $W_l = \{\, w \in W \mid \ell_\Delta(w) = l \,\}$ とすると, Section 9.2 での議論から,

$$W_{2k} = \left\{\, (P_0 P_{-1})^k, (P_{-1} P_0)^k \,\right\}$$
$$W_{2k+1} = \left\{\, (P_0 P_{-1})^k P_0, (P_{-1} P_0)^k P_{-1} \,\right\}$$

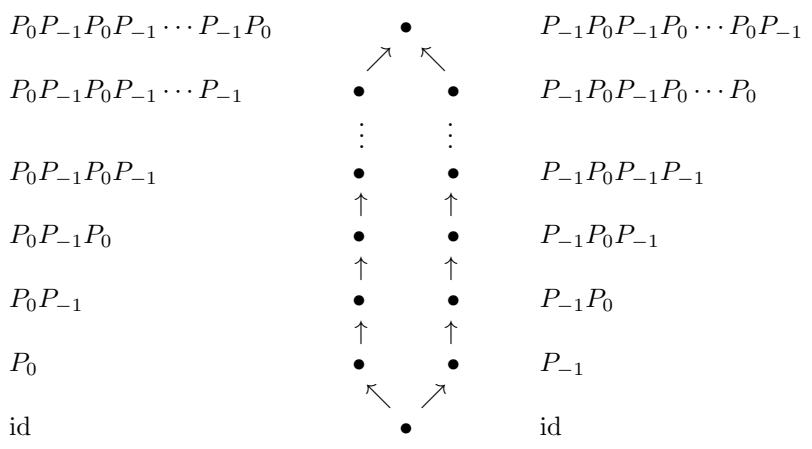
である.

$$\mathrm{id} \underset{\mathrm{R}}{\leq} P_0 \underset{\mathrm{R}}{\leq} P_0P_{-1} \underset{\mathrm{R}}{\leq} P_0P_{-1}P_0 \underset{\mathrm{R}}{\leq} \cdots$$
$$\mathrm{id} \underset{\mathrm{R}}{\leq} P_{-1} \underset{\mathrm{R}}{\leq} P_{-1}P_0 \underset{\mathrm{R}}{\leq} P_{-1}P_0P_{-1} \underset{\mathrm{R}}{\leq} \cdots$$

であるが, $\ell_\Delta(u)+1=\ell_\Delta(w)$ かつ $u \underset{\mathrm{R}}{\leq} w$ となるところに線を引いたものを考える. これを, $\underset{\mathrm{R}}{\leq}$ の Hasse 図と呼ぶ. m が偶数のときは, 次のようになる:



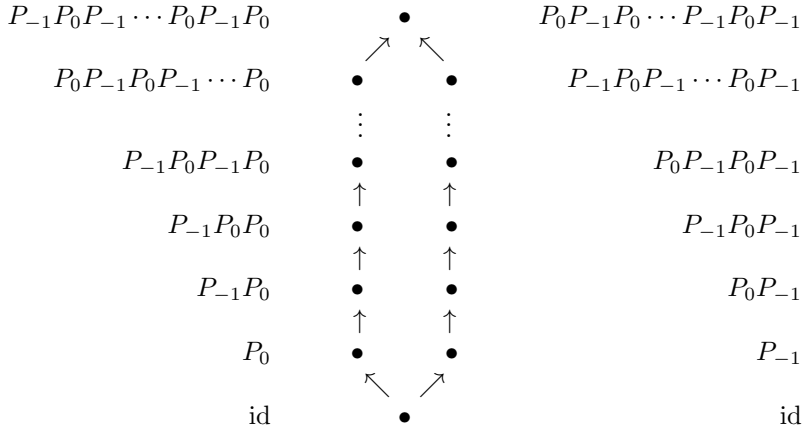
m が奇数のときは, 次のようになる:



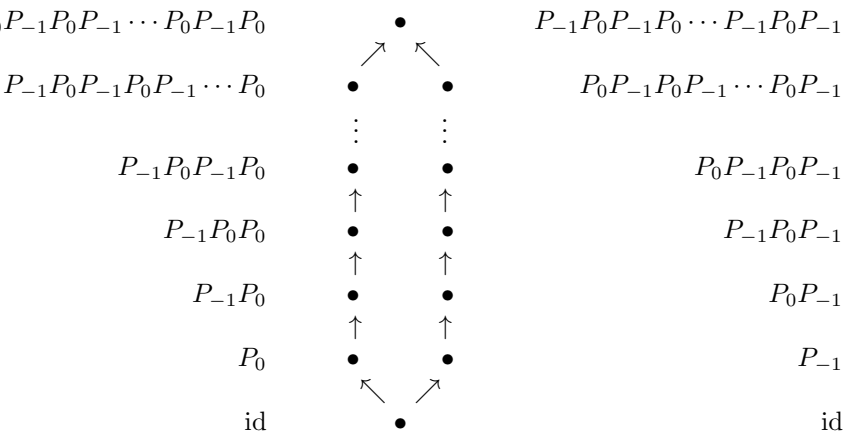
また,

$$\mathrm{id} \underset{\mathrm{L}}{\leq} P_0 \underset{\mathrm{L}}{\leq} P_{-1}P_0 \underset{\mathrm{L}}{\leq} P_0P_{-1}P_0 \underset{\mathrm{L}}{\leq} \cdots$$
$$\mathrm{id} \underset{\mathrm{L}}{\leq} P_{-1} \underset{\mathrm{L}}{\leq} P_0P_{-1} \underset{\mathrm{L}}{\leq} P_{-1}P_0P_{-1} \underset{\mathrm{L}}{\leq} \cdots$$

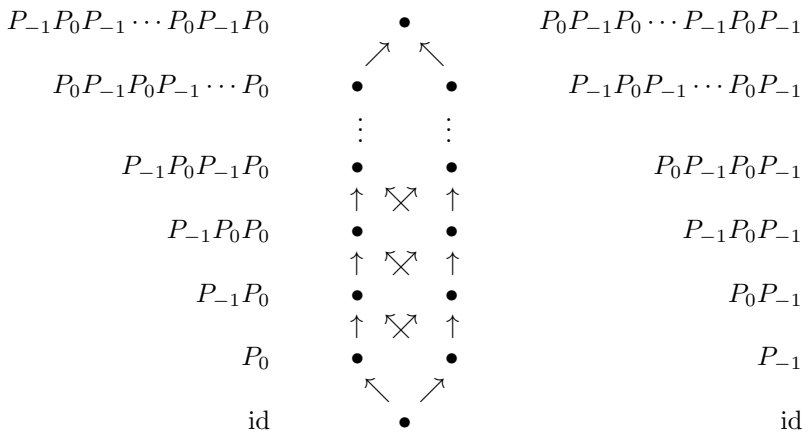
であるので, $\underset{\mathrm{L}}{\leq}$ についても同様に書くと, m が偶数のときは, 次のようになる:



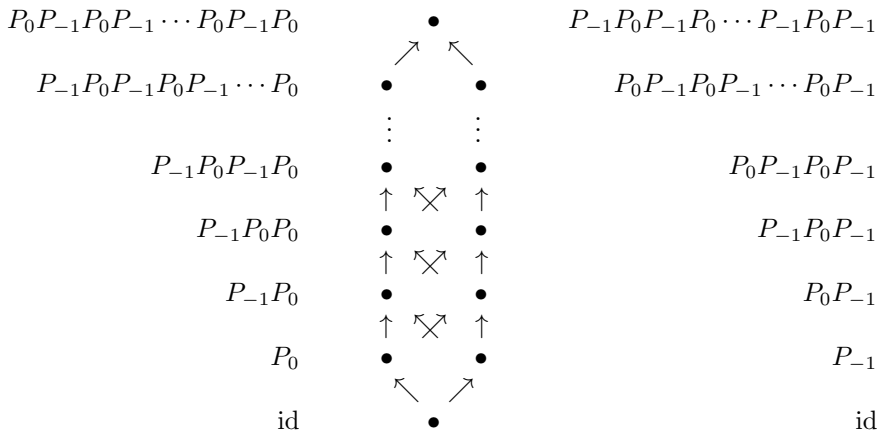
m が奇数のときは, 次のようになる:



また, $\leq$ については, $\ell_\Delta(u) < \ell_\Delta(w)$ ならば, $u \leq w$ となるので, m が偶数なら,



m が奇数なら,



である.

10.2.2 $A_1 \times \cdots \times A_1$

Section 5.3.2 で考えたルート系 Φ と単純系 Δ について考える.

$$W(\Phi) = \left\{ \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z}^\times \right\}$$

である.

$$\begin{aligned} &\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) \\ &= \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

であるので, $W(\Phi)$ は可換群である. したがって, $w, u \in W(\Phi)$ に対し, 次は同値である:

1. $u \underset{\mathrm{L}}{\leq} w$.
2. $u \underset{\mathrm{R}}{\leq} w$.
3. $u \leq w$.

$W(\Phi)$ の元 $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ に対し, $\{\, i \mid a_i = 1 \,\}$ を対応させる写像 f を考えると, f は $W(\Phi)$ から $2^{\{\, 1, \ldots, n \,\}}$ への全単射である. また $u \leq w$ であることと $f(u) \subset f(w)$ が同値である.

x2 (2025-01-23 16:09)

章末問題

1. $W(\Phi(A_1 \times A_1 \times A_1))$ に関し, $\leq$ の Hasse 図をかけ.
2. $W(\Phi(A_2))$ に関し, $\leq$ の Hasse 図をかけ.
3. $W(\Phi(A_2))$ に関し, $\underset{\mathrm{R}}{\leq}$ の Hasse 図をかけ.
4. $W(\Phi(A_2))$ に関し, $\underset{\mathrm{L}}{\leq}$ の Hasse 図をかけ.

付録 A

線形代数の復習

ここでは, ベクトル空間と内積についての事実を復習する. 証明は他の文献に譲る. また, 復習とは書いたものの, 通常とは異なるまとめ方になっているので, わかりにくい. ここの内容を読まずとも本文は読めるし, ここの内容を理解したからと言って本文が読みやすくなるわけでもない. 基本的には本文とは無関係である. また, ここでの記号の使い方は本文とは異なる.

A.1 抽象実ベクトル空間と線形写像

抽象実ベクトル空間や線型写像についてまとめている. 線型写像 $f\colon V \to W$ の転置について, $W^* \to V^*$ として canonical に得られるもの (ここでは ${}^t f$ と書いている) と, 内積を決めることにより $W \to V$ として得られるもの (ここでは $f^\top$ と書いている) についてまとめた.

A.1.1 双対空間と線型写像の転置

和と実数によるスカラー倍が備わった空間を実ベクトル空間と呼ぶ.

Definition A.1.1. V を集合とし, $+, \cdot$ を二項演算

$$\begin{array}{rccc} \bullet+\bullet\colon & V\times V & \longrightarrow & V \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & (v,w) & \longmapsto & v+w \\ \bullet\cdot\bullet\colon & \mathbb{R}\times V & \longrightarrow & V \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & (a,w) & \longmapsto & a\cdot w \end{array}$$

とし, 0_V とする. 以下の条件を満たすとき, $(V,+,\cdot,0_V)$ を実ベクトル空間と呼ぶ:

1. $v,w,u \in V$ に対し以下が成り立つ:
   (a) $(v+w)+u = v+(w+u)$.
   (b) $v+w = w+v$.
   (c) $v+0_V = v$.
   (d) $v+(-1)\cdot v = 0_V$.
2. $v \in V$, $a,b \in \mathbb{R}$ に対し以下が成り立つ:
   (a) $(ab)\cdot v = a\cdot(b\cdot v)$.

(b) $1 \cdot v = v$.

3. $v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対し以下が成り立つ:
   (a) $(a+b) \cdot v = (a \cdot v) + (b \cdot v)$.
   (b) $a \cdot (v+w) = (a \cdot v) + (a \cdot w)$.

Remark A.1.2. $(V, +, \cdot, 0_V)$ が実ベクトル空間であるとき,

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (1-1) \cdot v \\ &= 1 \cdot v + (-1) \cdot v \\ &= v + (-1) \cdot v = 0_V \end{aligned}$$

であるので, 任意の $v \in V$ に対し, $0v = 0_V$ である.

Remark A.1.3. 以下では, 文脈上誤解が生じないときには, $(V, +, \cdot, 0_V)$ が実ベクトル空間であることを単に V がベクトル空間であるといい, 0_V のことを単に 0 と書いたりする. また, スカラー倍の際 $\cdot$ を省略し, $a \cdot v$ を av の様に書くこともある.

Remark A.1.4. $(-1)v$ を $-v$, $w + (-v)$ を $w - v$ のように略記する.

和とスカラー倍とコンパチブルな写像を線形写像と呼ぶ.

Definition A.1.5. $(V, +, \cdot, 0_V)$, $(W, \oplus, \odot, 0_W)$ を実ベクトル空間とし, f を V から W への写像とする. 以下の条件を満たすとき, f は $(V, +, \cdot, 0_V)$ から $(W, \oplus, \odot, 0_W)$ への ($\mathbb{R}$ 上の) 線形写像であるという:

1. $v, v' \in V \implies f(v+v') = f(v) \oplus f(v')$.
2. $a \in \mathbb{R}$, $v \in V \implies f(a \cdot v) = a \odot f(v)$.

Remark A.1.6. 以下では, 文脈上誤解が生じないときには, f は $(V, +, \cdot, 0_V)$ から $(W, \oplus, \odot, 0_W)$ への ($\mathbb{R}$ 上の) 線形写像であることを, 単に V から W への線形写像であるという. また, 本来であれば, 線形写像 $f\colon (V, +, \cdot, 0_V) \to (W, \oplus, \odot, 0_W)$ などと書き表すべきであるが, 線形写像 $f\colon V \to W$ などと書く.

Remark A.1.7. V を実ベクトル空間とする. V 上の恒等写像 id_V は線形写像である.

Definition A.1.8. 実ベクトル空間 V, W に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{\, f\colon V \to W\colon \text{線形} \,\}$$

とおく.

Remark A.1.9. 線形写像の合成は線形である. つまり,

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, U) \implies g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, U).$$

Definition A.1.10. V, W をベクトル空間とし, $f\colon V \to W$ を線形写像とする. 次の条件を満たすとき, f は V から W への (線形) 同型写像であるという:

- 次の条件を満たす線形写像 $g\colon W \to V$ が存在する:

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_V, \\ f \circ g &= \mathrm{id}_W . \end{aligned}$$

また, V から W への同型写像が存在するとき, V と W は (線形) 同型であるといい $V \simeq W$ と書く. つまり $V \simeq$ と次は同値である:

- 次の条件を満たす線形写像 $f\colon V \to W$ と $g\colon W \to V$ が存在する:

$$g \circ f = \mathrm{id}_V,$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_W .$$

Remark A.1.11. V と W が同型であるとき, V で成り立つことは同型写像 f を通して W に翻訳できるので, V と W はベクトル空間として同じものであると思える.

Remark A.1.12. 線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射であるとき, f の逆写像 f^{-1} も線形である. したがって, $f\colon V \to W$ が同型写像であることと, $f\colon V \to W$ が全単射な線形写像であることは同値である.

Example A.1.13. 数ベクトルのなす集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

は実ベクトル空間である.

Example A.1.14. 複素数のなす集合

$$\mathbb{C} = \left\{ x + y\sqrt{-1} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

は実ベクトル空間である. これは, 複素 (数) 平面と呼ばれる.

Example A.1.15. 実数のなす集合 $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ は実ベクトル空間である.

Definition A.1.16. $(V, +, \cdot, 0_V)$, $(W, +, \cdot, 0_W)$ をベクトル空間とする. $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ に対し, 写像 $f + g$ を次で定義する:

$$\begin{array}{rccc} f+g\colon & V & \longrightarrow & W \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & v & \longmapsto & f(v)+g(v) \end{array} .$$

$a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ に対し, 写像 $a \cdot f$ を次で定義する:

$$\begin{array}{rccc} a\cdot f\colon & V & \longrightarrow & W \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & v & \longmapsto & a\cdot f(v) \end{array} .$$

また, 写像 $\underline{0_W}$ を次で定義する:

$$\begin{array}{rccc} \underline{0_W}\colon & V & \longrightarrow & W \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & v & \longmapsto & 0_W \end{array} .$$

Proposition A.1.17. ベクトル空間 $(V, +, \cdot, 0_V)$, $(W, +, \cdot, 0_W)$ に対し, $\underline{0_W} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ である. $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, $a \in \mathbb{R}$ に対し, $f + g, a \cdot f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ である. また, $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W), +, \cdot, \underline{0_W})$ は実ベクトル空間である.

Remark A.1.18. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ がベクトル空間であるので, 和とスカラー倍は分配則などを満たす. さらに, 合成とは以下を満たす: $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, U)$, $a \in \mathbb{R}$ に対し,

1. $(g+g')\circ f = g\circ f + g'\circ f$,
2. $g\circ(f+f') = g\circ f + g\circ f'$,
3. $c(g\circ f) = (cg)\circ f = g\circ(cf)$.

Definition A.1.19. V をベクトル空間とする.

$$\begin{aligned} V^* &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R}) \\ &= \{\, \varphi\colon V\to\mathbb{R}\colon \text{線形写像} \,\} \end{aligned}$$

とおき, ベクトル空間 V^* を V の双対空間と呼ぶ.

V, W をベクトル空間とし, f を V から W への線形写像とする. $\varphi\in W^*$ とすると, φ は W から $\mathbb{R}$ への線形写像であるので,

$$\begin{array}{rccc} \varphi\circ f\colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & v & \longmapsto & \varphi(f(v)) \end{array}$$

は線形である. つまり, $\varphi\circ f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R}) = V^*$ である. よって, 写像

$$\begin{array}{rccc} \Phi_f\colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi\circ f \end{array}$$

が定義できる.

Lemma A.1.20. V, W をベクトル空間とし, f を V から W への線形写像とし,

$$\begin{array}{rccc} \Phi_f\colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi\circ f \end{array}$$

とすると, $\Phi_f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*,V^*)$.

Proof. $\varphi,\psi\in W^*$ に対し,

$$\begin{aligned} \Phi_f(\varphi+\psi) &= (\varphi+\psi)\circ f\in W^* \\ \Phi_f(\varphi)+\Phi_f(\psi) &= \varphi\circ f+\psi\circ f\in W^* \end{aligned}$$

である. $v\in V$ に対し,

$$\begin{aligned} (\Phi_f(\varphi+\psi))(v) &= ((\varphi+\psi)\circ f)(v) \\ &= (\varphi+\psi)(f(v)) \\ &= \varphi(f(v))+\psi(f(v)) \\ (\Phi_f(\varphi)+\Phi_f(\psi))(v) &= (\varphi\circ f+\psi\circ f)(v) \\ &= (\varphi\circ f)(v)+(\psi\circ f)(v) \\ &= \varphi(f(v))+\psi(f(v)) \end{aligned}$$

となるので[*1], $\Phi_f(\varphi+\psi) = \Phi_f(\varphi)+\Phi_f(\psi)$.

$a\in\mathbb{R}$, $\varphi\in W^*$ に対し,

$$\begin{aligned} \Phi_f(a\varphi) &= (a\varphi)\circ f\in W^* \\ a\Phi_f(\varphi) &= a(\varphi\circ f)\in W^* \end{aligned}$$

[*1] Remark A.1.18 において証明せずに紹介した事実の証明をここで与えている.

である. $v \in V$ に対し,

$$\begin{aligned}(\Phi_f(a\varphi))(v) &= ((a\varphi)\circ f)(v)\\ &= (a\varphi)(f(v))\\ &= a(\varphi(f(v))\\ (a\Phi_f(\varphi))(v) &= (a(\varphi\circ f))(v)\\ &= a((\varphi\circ f)(v))\\ &= a(\varphi(f(v)))\end{aligned}$$

となるので[*2], $\Phi_f(a\varphi) = a\Phi_f(\varphi)$. □

Definition A.1.21. V, W をベクトル空間とする. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$ に対し, ${}^tf \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, V^*)$ を,

$$\begin{array}{rccc} {}^tf: & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi\circ f \end{array}$$

で定義し, f の転置と呼ぶ.

(余談)

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*,V^*) \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & f & \longmapsto & \Phi_f = {}^tf \end{array}$$

は線形である. つまり,

$$\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W), \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, V^a st)).$$

Proof. $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$ とする. $\Phi_{f+f'}, \Phi_f + \Phi_{f'} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, V^*)$ である. $\varphi \in W^*$ に対し,

$$\begin{aligned}\Phi_{f+f'}(\varphi) &= ({}^t(f+f'))(\varphi)\\ &= \varphi\circ(f+f') \in V^*,\\ (\Phi_f + \Phi_{f'})(\varphi) &= ({}^tf + {}^tf')(\varphi)\\ &= ({}^tf)(\varphi) + ({}^tf')(\varphi)\\ &= \varphi\circ f + \varphi\circ f' \in V^*.\end{aligned}$$

$v \in V$ に対し,

$$\begin{aligned}(\Phi_{f+f'}(\varphi))(v) &= (\varphi\circ(f+f'))(v)\\ &= \varphi((f+f')(v))\\ &= \varphi(f(v)+f'(v))\\ &= \varphi(f(v)) + \varphi(f'(v)),\\ ((\Phi_f + \Phi_{f'})(\varphi))(v) &= (\varphi\circ f + \varphi\circ f')(v)\\ &= (\varphi\circ f)(v) + (\varphi\circ f')(v)\\ &= \varphi(f(v)) + \varphi(f'(v)).\end{aligned}$$

[*2] Remark A.1.18 において証明せずに紹介した事実の証明をここで与えている.

x2 (2025-01-23 16:09)

よって, $\Phi_{f+f'} = \Phi_f + \Phi_{f'}$.

$a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ とする. $\Phi_{af}, \Phi_f + \Phi_{f'} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, V^*)$ である. $\varphi \in W^*$ に対し,

$$\begin{aligned}\Phi_{af}(\varphi) &= ({}^t(af))(\varphi) = \varphi \circ (af) \in V^* \\ (a\Phi_f)(\varphi) &= a({}^t f\ (\varphi)) = a(\varphi \circ f) \in V^*.\end{aligned}$$

$v \in V$ に対し,

$$\begin{aligned}(\Phi_{af}(\varphi))(v) &= (\varphi \circ (af))(v) \\ &= \varphi(af(v)) \\ &= a\varphi(f(v)) \\ ((a\Phi_f)(\varphi))(v) &= (a(\varphi \circ f))(v) \\ &= a(\varphi \circ f)(v)) \\ &= a(\varphi(f(v))).\end{aligned}$$

よって, $\Phi_{af} = a\Phi_f$. □

A.1.2 内積空間と線型写像の転置

Definition A.1.22. V を実ベクトル空間とする.

$$\begin{array}{rccc} \langle \bullet, \bullet \rangle_V : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & (v, w) & \longmapsto & \langle v, w \rangle_V \end{array}$$

が以下の条件を満たすとき, $(V, \langle \bullet, \bullet \rangle_V)$ は (実) 内積空間であるという:

1. $a \in \mathbb{R}$, $v, w, u \in V \implies$

$$\langle v + w, u \rangle_V = \langle v, u \rangle_V + \langle w, u \rangle_V , \tag{A.1}$$
$$\langle av, u \rangle_V = a \langle v, u \rangle_V . \tag{A.2}$$

2. $v, w \in V \implies \langle v, w \rangle_V = \langle w, v \rangle_V$.
3. $v \in V$ に対し次が成り立つ:

$$v = 0_V \iff \forall w \in V, \langle v, w \rangle_V = 0 \tag{A.3}$$

4. $v \in V \implies \langle v, v \rangle_V \geq 0$.
5. $\langle v, v \rangle_V = 0 \iff v = 0_V$.

Remark A.1.23. 文脈上誤解がない場合には, $(V, \langle \bullet, \bullet \rangle_V)$ が内積空間であることを, 単に V が内積空間であると言うこともある. $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ を V の内積と呼ぶ.

Remark A.1.24. Item 2 を満たすことを $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ が対称であるという.

Remark A.1.25. Item 1 を満たすことを $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ が第一成分に関して線形であるという. Items 1 and 2 から

$$\langle u, v + w \rangle_V = \langle u, v \rangle_V + \langle u, w \rangle_V , \tag{A.4}$$
$$\langle u, av \rangle_V = a \langle u, v \rangle_V \tag{A.5}$$

がわかる. Equations (A.4) and (A.5) を満たすことを, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ が第二成分に関して線形であるという. Equations (A.1), (A.2), (A.4) and (A.5) を満たすことを, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ が双線形であるという.

Remark A.1.26. Item 2 and eq. (A.3) から,

$$v = 0_V \iff \forall w \in V, \langle w, v \rangle_V = 0 \tag{A.6}$$

がわかる. Equations (A.3) and (A.6) が成り立つことを, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ が非退化であるという.

Equation (A.3) は対偶をを取ると,

$$v \in V \setminus \{ 0_V \} \iff \exists w \in V \text{ such that } \langle v, w \rangle_V \neq 0$$

となるのでこれが条件として書かれることもある. また, Equation (A.2) から,

$$v = 0_V \implies \forall w \in V, \langle v, w \rangle_V = 0$$

が成り立つので,

$$v \in V \setminus \{ 0_V \} \implies \exists w \in V \text{ such that } \langle v, w \rangle_V \neq 0 \tag{A.7}$$

のみが条件として書かれることもある.

Item 1 から, $\langle v_0, v \rangle_V = \langle v_1, v \rangle_V$ ならば,

$$0 = \langle v_0, v \rangle_V - \langle v_1, v \rangle_V = \langle v_0 - v_1, v \rangle_V$$

となる. したがって, 任意の $v \in V$ に対して $\langle v_0, v \rangle_V = \langle v_1, v \rangle_V$ ならば, Equation (A.3) から, $v_0 - v_1 = 0_V$ となり, $v_0 = v_1$ であることがわかる. 逆は明らかであるから, Item 1 and eq. (A.3) から

$$v_0 = v_1 \iff \forall v \in V, \langle v, v_0 \rangle_V = \langle v, v_1 \rangle_V$$

がわかる.

Remark A.1.27. Item 4 を満たすことを, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ は半正定値 (positive semidefinite) であるという. Items 4 and 5 を満たすことを, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ は正定値 (positive definite) であるという.

Equation (A.2) から,

$$v = 0_V \implies \langle v, v \rangle_V = 0$$

はわかるので, Item 5 の条件の代わりに

$$\langle v, v \rangle_V = 0 \implies v = 0_V.$$

と書かれることもある. この条件の対偶は,

$$v \in V \setminus \{ 0_V \} \implies \langle v, v \rangle_V \neq 0$$

であるが, Item 4 を満たすときには,

$$v \in V \setminus \{ 0_V \} \implies \langle v, v \rangle_V > 0$$

と書くことができる.

Item 5 を認めると, Equation (A.7) の w として v 自身がとれるので, Item 3 が導かれる. そのため Item 3 が条件として省かれることも多い.

Remark A.1.28. 内積とは, 非退化正定値対称双線型形式のこと (形式というのは写像 $V \times V \to \mathbb{R}$ を意味している).

Remark A.1.29. 複素ベクトルのときには, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V : V \times V \to \mathbb{C}$ として, Item 2 の条件を,

$$v, w \in V \implies \langle v, w \rangle_V = \overline{\langle w, v \rangle_V}$$

に変更したものを考える. ただし $\overline{\bullet}$ は複素共軛を表す. この条件を満たすことを, $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ はエルミート対称であるという.

内積空間の構造とコンパチブルな写像を等長写像と呼ぶ.

Definition A.1.30. $(V, \langle\rangle_V)$, $(W, \langle\rangle_W)$ を内積空間とし, $f\colon V \to W$ を線型写像とする. 以下の条件を満たすとき, f は等長写像であるという.

$$v, v' \in V \implies \langle v, v' \rangle_V = \langle f(v), f(v') \rangle_W$$

Remark A.1.31. 以下では, 文脈上誤解が生じないときには, f は $(V, \langle\rangle_V)$ から $(W, \langle\rangle_W)$ への等長写像であることを, 単に V から W への等長写像であるという. また, 本来であれば, 等長写像 $f\colon (V, \langle\rangle_V) \to (W, \langle\rangle_W)$ などと書き表すべきであるが, 等長写像 $f\colon V \to W$ などと書く.

Definition A.1.32. V, W を内積空間とする. 線型同型写像かつ等長写像である $f\colon V \to W$ が存在するとき, V と W は内積空間として同型であるという.

Remark A.1.33. V と W が内積空間として同型であるとき, V と W は内積空間として同じものであると思える.

Remark A.1.34. 等長写像の合成は等長写像である.

Remark A.1.35. V を内積空間とする. $v \in V$ に対し,

$$\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v \rangle_V}$$

とおき, $\| \bullet \|_V$ をノルムと呼ぶ. $\|v\|_V$ は v の '長さ' に相当する. $f\colon V \to W$ を等長写像とすると,

$$\begin{aligned} \|v\|_V &= \sqrt{\langle v, v \rangle_V} \\ &= \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle_W} \\ &= \|f(v)\|_W \end{aligned}$$

となり, ノルムが f によって変化しない.

Remark A.1.36. V, W を内積空間とし, $f\colon V \to W$ を等長写像とする. $f(v) = 0_W$ とする. このとき, $\|v\|_V = \|f(v)\|_W = \|0_W\| = 0$ であるので, $v = 0_V$ であることがわかる. したがって, f は単射である.

Definition A.1.37. $(V, \langle\rangle_V)$ を内積空間とする. $O(V, \langle\rangle_V) = \{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \colon \text{等長} \,\}$ とおく. $O(V)$ を V 上の直交群と呼ぶ. また, $f \in O(V)$ を V 上の直交変換と呼ぶ.

V を内積空間であるとする. $v_0 \in V$ に対し,

$$\begin{array}{rccc} \beta_{v_0}\colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & v & \longmapsto & \langle v, v_0 \rangle_V \end{array}$$

とおく. このとき, (内積の定義 Item 1 より) β_{v_0} は線型写像である. つまり,

$$\beta_{v_0} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = V^*$$

である.

$$\begin{array}{rccc} \beta\colon & V & \longrightarrow & V^* \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & u & \longmapsto & \beta_u \end{array}$$

とおくと, (Equations (A.4) and (A.5) より) β は線型写像である. (余談: β のことを内積を第 2 成分に関してカリー化した関数ということがある.)

V は有限次元であるとする. V は有限次元であるとすると, β は同型写像である. つまり,

$$\forall \varphi \in V^*, \exists! v_0 \in V \text{ s.t. } \beta_{v_0} = \varphi$$

が成り立つ. これは, 言い換えると,

$$\forall \varphi \in V^*, \exists! v_0 \in V \text{ s.t. } \forall v \in V, \varphi(v) = \langle v, v_0 \rangle_V$$

となる.

Remark A.1.38. V が有限次元のとき, β は V と V^* の同型を与えるが, これは内積を取り替えると, 異なる同型写像となる. 内積を 1 つ決めるというのは, V と V^* の間の同型写像を 1 つ固定するということを意味する.

W を有限次元内積空間とし, V と同様に, $w_0 \in W$ に対して,

$$\begin{array}{rccc} \beta_{w_0}\colon & W & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & w & \longmapsto & \langle w, w_0 \rangle_W \end{array}$$

とする. $f\colon V \to W$ を線型写像とする. つまり, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ とする. このとき

$$\begin{array}{rccc} {}^t f\colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

と定義され ${}^t f \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ であった.

$w \in W$ とする. $\beta_w \in W^*$ であるので, ${}^t f\,(\beta_w) \in V^*$ である. V が有限次元であるので, $\beta\colon V \to V^*$ は同型写像である. したがって, $\beta_{v_0} = {}^t f\,(\beta_w)$ を満たす $v_0 \in V$ が定まる. この v_0 を,

$$f^\top(w) \in V$$

とおく.

$$\begin{array}{rccc} f^\top\colon & W & \longrightarrow & V \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & w & \longmapsto & f^\top(w) \end{array}$$

という写像が定まる. 定義から,

$$ {}^t f\ (\beta_w) = \beta_{f^\top(w)} $$

であるので, $v \in V$, $w \in W$ に対し,

$$ \begin{aligned} \langle f(v), w\rangle_W &= \beta_w(f(v)) \\ &= (\beta_w \circ f)(v) \\ &= ({}^t f\ (\beta_w))(v) \\ &= \beta_{f^\top(w)}(v) \\ &= \left\langle v, f^\top(w)\right\rangle_V \end{aligned} $$

が成り立つ. つまり,

$$ \begin{array}{rccc} f^\top\colon & W & \longrightarrow & V \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & w & \longmapsto & f^\top(w) \end{array} $$

は

$$ v \in V, w \in W \implies \langle f(v), w\rangle_W = \left\langle v, \beta_{f^\top(w)}\right\rangle_V $$

を満たす. さらに, $f^\top \in \mathrm{Hom}(W, V)$ であることもわかる. $f^\top$ も f の転置と呼ぶ.

Remark A.1.39. $f^\top\colon W \to V$ は内積による V から V^* への同型 β に依存している.

Remark A.1.40. 線型写像 $f\colon V \to W$ に対し,

$$ \begin{aligned} f\colon V \to W \text{ が等長写像} &\iff \forall v, v' \in V, \langle f(v), f(v')\rangle_W = \langle v, v'\rangle_V \\ &\iff \forall v, v' \in V, \left\langle v, f^\top(f(v'))\right\rangle_V = \langle v, v'\rangle_V \\ &\iff \forall v, v' \in V, \left\langle v, (f^\top \circ f)(v')\right\rangle_V = \langle v, v'\rangle_V \\ &\iff \forall v' \in V, (f^\top \circ f)(v') = v' \\ &\iff f^\top \circ f = \mathrm{id}_V \end{aligned} $$

である. $f\colon V \to V$ について考えると, f が等長写像であることと $f^\top = f^{-1}$ であることが同値であることがわかる.

Remark A.1.41. V, W を有限次元ベクトル空間とすると, 線型写像 $f\colon V \to W$ に対し, f の転置 ${}^t f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, V^*)$ が定まる. この転置 ${}^t f$ は内積などによらずに定まる. しかし, ${}^t f$ は W から V への写像ではない. 一方 V, W に内積があれば, $f\colon V \to W$ の転置, $f^\top \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$ が定まる. この転置 $f^\top$ は W から V への写像ではあるものの, f に対して得られる転置 $f^\top$ は内積が変われば違うものとなる.

すでに見たように, V, W に内積があれば, 内積を通じて, V と V^* の同型 β や, W と W^* の同型 β が得られる. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ を一つ固定する. このとき $f^\top \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$ であるので, $w \in W$ に対し, $f^\top(w) \in V$ である. したがって, $\beta_{f^\top(w)} \in V^*$ である. 一方, $w \in W$ であるので, $\beta_w \in W^*$ である. ${}^t f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, V^*)$ であるので,

x2 (2025-01-23 16:09)

${}^tf\,(\beta_w) \in V^*$ である. V^* の 2 つの元 $\beta_{f^\top(w)}$ と ${}^tf\,(\beta_w)$ が得られたが, $v \in V$ に対し,

$$\begin{aligned}\beta_{f^\top(w)}(v) &= \left\langle v, f^\top(w)\right\rangle_V \\ &= \langle f(v), w\rangle_W \\ ({}^tf\,(\beta_w))(v) &= (\beta_w \circ f)(v) \\ &= \beta_w(f(v)) \\ &= \langle f(v), w\rangle_W\end{aligned}$$

となるので, $\beta_{f^\top(w)} = {}^tf\,(\beta_w)$ となる. つまり図式

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f^\top} & V \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ W^* & \xrightarrow[{}^tf]{} & V^* \end{array}$$

が可換となっている.

A.2 数ベクトル空間と行列

数ベクトル空間と行列についてまとめている. m 行 n 列の行列は, 通常なら数を表の様に並べたデータとして定義されるが, ここでは, 与えられた数により定まる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像として定義している.

A.2.1 数ベクトルと行列

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

は実ベクトル空間であった. これを n 次元 (実) 数ベクトル空間と呼ぶ. $\mathbb{R}^n$ の元

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を n 項 (実) 数ベクトルと呼ぶ.

Remark A.2.1. 次元は空間に対して, 項は元に対して用いている.

すべての成分が 0 である n 項数ベクトルを $\mathbf{0}$ で表す.

Definition A.2.2. i 行目のみ 1 で他は 0 である n 項数ベクトル

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

を $\mathbb{R}^n$ の第 i 基本ベクトルといい, $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底と呼ぶ.

V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. このとき,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{v_1,\ldots,v_n}\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & V \\ & \cup\!\!\cup & & \cup\!\!\cup \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \end{array}$$

とおく. $\pi_{v_1,\ldots,v_n} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, V)$ である. 定義から, $\pi_{v_1,\ldots,v_n}(\boldsymbol{e}_i) = v_i$ である.

Definition A.2.3. V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ が単射であるとき, $(v_1, \ldots, v_n)$ は一次独立であるという.

Remark A.2.4. V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. このとき, 以下は同値:

1. $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ が単射.
2. $\mathrm{Ker}(\pi_{v_1,\ldots,v_n}) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$.
3. $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0_V \implies x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Definition A.2.5. V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ が全射であるとき, $(v_1, \ldots, v_n)$ は V の生成系であるという.

Remark A.2.6. V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. このとき, 以下は同値:

1. $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ が全射.
2. $\mathrm{Img}(\pi_{v_1,\ldots,v_n}) = V$.
3. $V = \{\, x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \mid x_i \in \mathbb{R} \,\}$.

Definition A.2.7. V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. $(v_1, \ldots, v_n)$ が一次独立であり V の生成系であるとき, $(v_1, \ldots, v_n)$ を V の基底と呼ぶ.

Remark A.2.8. V を実ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. このとき, 以下は同値:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ が V の一次独立な生成系.
2. $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ が全単射.
3. $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ が同型写像.

Remark A.2.9. $(v_1, \ldots, v_n)$ が V の基底であるとき, $\pi_{v_1,\ldots,v_n}$ は $\mathbb{R}^n$ から V への同型写像である. $\mathbb{R}^n$ と同型なベクトル空間を n 次元実ベクトル空間と呼ぶ.

Remark A.2.10. n 次元実ベクトル空間は, $\mathbb{R}^n$ と同型である. したがって, 有限次元ベクトル空間としては $\mathbb{R}^n$ を考えれば十分である.

Remark A.2.11. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, V)$ に対し, 次は同値である:

1. $\varphi = \pi_{v_1,\ldots,v_n}$
2. $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = v_1, \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n) = v_n$

言い換えると,

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & V\times\cdots\times V & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,V) \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & (v_1,\ldots,v_n) & \longmapsto & \pi_{v_1,\ldots,v_n} \end{array}$$

が全単射である.

Definition A.2.12. $(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$ に対し, $a_{i,j}\in\mathbb{R}$ を固定する. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k}x_k \end{pmatrix} \end{array}$$

という写像は線形写像である. この写像を,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

とか,

$$(a_{i,j})_{i,j}$$

など[*3]と表し, サイズが (m,n) の実行列と呼ぶ. 写像を定める係数 $a_{i,j}$ を $(a_{i,j})_{i,j}$ の (i,j)-成分と呼ぶ. 行列の和, スカラー倍, 積を, 線型写像の和, スカラー倍, 合成として定義する. 線型写像 $(a_{i,j})_{i,j}$ が同型写像であるとき, $(a_{i,j})_{i,j}$ は正則であるという.

Remark A.2.13. サイズが (m,n) の実行列のことを, 以下では (m,n)-行列と呼ぶ.

Remark A.2.14.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{x} \end{array}$$

に対応する行列は,

$$(\delta_{i,j})_{i,j}$$

である. ただし

$$\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j. \end{cases}$$

これは単位行列と呼ばれる. ここでは E_n で表す.

[*3] $(a_{i,j})_{i,j}$ という標記は, $(\quad)_{i,j}$ とカッコの外に i,j と書くことで, i が '行' に関わる添字, j が '列' に関わる添字であることを表している. $(\quad)_{j,i}$ と書いたら j が行に関わる添字, i が列に関わる添字であることを表す. したがって, $(a_{i,j})_{i,j}=(a_{j,i})_{j,i}=(a_{k,l})_{k,l}$ である.

Remark A.2.15.

$$\begin{array}{rccc} \underline{\mathbf{0}}\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \mathbf{0} \end{array}$$

に対応する行列は,

$$(0)_{i,j}$$

である. これは零行列と呼ばれる. ここでは $O_{m,n}$ で表す.

Remark A.2.16. 行列 A が "実" 行列かどうかは, A を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像として考えているか否かで (本来は) 判断するべきもの. 各成分が実数であっても, $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ と思うのであれば複素行列である.

Proposition A.2.17. $A = (a_{i,j})_{i,j}$ を (m,n)-行列, $B = (b_{i,j})_{i,j}$ を (m',n')-行列とする.

1. A と B の和は, $(m,n) = (m',n')$ であるときに定義でき,
$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}.$$
2. $c \in \mathbb{R}$ に対し,
$$cA = (ca_{i,j})_{i,j}.$$
3. A と B の積は, $n = m'$ であるときに定義でき,
$$AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})_{i,j}.$$

Remark A.2.18. $A = (a_{i,j})_{i,j}$ をサイズが (m,n) である行列とする.

$$\boldsymbol{a}^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

という m 項数ベクトルを考える.

$$\begin{array}{rccc} A\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k}x_k \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_1 \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

であるので,

$$A = \pi_{\boldsymbol{a}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{a}^{(n)}}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &= \left\{ \pi_{\boldsymbol{a}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{a}^{(n)}} \;\middle|\; \boldsymbol{a}^{(j)} \in \mathbb{R}^m \right\} \\ &= \{\, A \mid A \text{ は } (m,n)\text{-行列} \,\} \end{aligned}$$

であるので, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像は (サイズが (m,n) の) 行列だけ考えれば十分であることがわかる.

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^n)^* &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ &= \{\, A \mid (1,n)\text{-行列} \,\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1^\top &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{e}_2^\top &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{e}_n^\top &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおくと, $(\boldsymbol{e}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{e}_n^\top)$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底である. この基底を $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ の双対基底と呼ぶ.

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\boldsymbol{e}_1^\top,\ldots,\boldsymbol{e}_n^\top}\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & \cup\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\cup \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1\boldsymbol{e}_1^\top + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

は同型写像である. この同型写像を使って, $\mathbb{R}^n$ と $(\mathbb{R}^n)^*$ を同一視できる.

A.2.2 内積と直交行列

$$\begin{array}{rccc} \langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathbb{R}^n}\colon & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\cup \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{array}$$

とおき, $\mathbb{R}^n$ の標準内積とかユークリッド内積と呼ぶ.

Proposition A.2.19. $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ は内積空間である. つまり $\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の非退化な正定値対称双線型形式である.

Definition A.2.20. (m,n)-行列 $A = (a_{i,j})_{i,j}$ の転置 $A^\top$ を, $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ としての転置 $A^\top \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ として定義する.

Proposition A.2.21. (m,n)-行列 $A = (a_{i,j})_{i,j}$ に対し, $A^\top \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ であり, $A^\top = (a_{j,i})_{i,j}$ である.

Proof. $A' = (a_{j,i})_{i,j}$ とおく. $A^\top$ は $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ に対し,

$$\langle w, A(v) \rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle A^\top(w), v \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

x2 (2025-01-23 16:09)

を満たすものであったので, A' がこの等式を満たすことを示せばよい.

$$w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
\langle w, A(v)\rangle_{\mathbb{R}^m} &= \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, A(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k}x_k \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n y_l a_{l,k} x_k, \\
\langle A'(w), v\rangle_{\mathbb{R}^n} &= \left\langle A(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}), \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m a_{l,1}y_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^m a_{l,n}y_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m x_k a_{l,k} y_l \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n y_l a_{l,k} x_k.
\end{aligned}$$

□

Remark A.2.22. ${}^tA$ から $A^\top$ を定義する際, 内積を通じた V から V^* への同型 β が使われるが, この場合は,

$$\begin{array}{rccc}
\beta\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\
& \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

である.

Definition A.2.23. $(V, \langle , \rangle_V)$ を内積空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. 次の条件を満たすとき, $(v_1, \ldots, v_n)$ は正規直交系 (orthonormal system) であるという:

1. $v_i, v_j \in V \implies \langle v_i, v_j\rangle_V = \delta_{i,j}$.

Remark A.2.24. $(v_1, \ldots, v_n)$ は正規直交系であるなら, $(v_1, \ldots, v_n)$ は一次独立である.

Definition A.2.25. $(V, \langle , \rangle_V)$ を内積空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. 次の条件を満た

すとき, $(v_1, \ldots, v_n)$ は V の完備正規直交系[*4](complete orthonormal system) であるという:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ は正規直交系
2. $v \in V$ に対し次は同値:
   (a) $\forall i,\ \langle v, v_j \rangle_V = 0$.
   (b) $v = 0_V$.

Remark A.2.26.

$$v = 0_V \implies \forall i,\ \langle v, v_j \rangle_V = 0$$

は一般に成り立つので, 完備正規直交系であることの定義としては, 逆のみが書かれることもある.

Example A.2.27. $\mathbb{R}^n$ について考える.

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{i,j}$$

である. また,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_i \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = x_i$$

であるので, $\boldsymbol{e}_i$ との標準内積が 0 であることは, 第 i 成分が 0 であることを意味する. したがって, すべての i に対し $\langle v, \boldsymbol{e}_i \rangle_{\mathbb{R}^n}$ を満たす $v \in \mathbb{R}^n$ は, $\mathbf{0}$ のみであることがわかる. したがって, $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ は $(\mathbb{R}^n, \langle\rangle_{\mathbb{R}^n})$ 完備正規直交系である.

Lemma A.2.28. $(V, \langle,\rangle_V)$ を内積空間とし, $(v_1, \ldots, v_n)$ は V の完備正規直交系であるとする. このとき,

$$\pi_{v_1,\ldots,v_n} \colon \mathbb{R}^n \to V$$

は等長な線型同型写像である. つまり, $(\mathbb{R}^n, \langle\rangle_{\mathbb{R}^n})$ と $(V, \langle,\rangle_V)$ は内積空間として同じものだと思える.

Theorem A.2.29 (Gram–Schmidt の直交化法)**.** $(V, \langle,\rangle_V)$ を内積空間とし, $v_1, \ldots, v_n \in V$ とする. $(v_1, \ldots, v_n)$ が一次独立であることを仮定する. このとき, 以下の様に $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ を定義する:

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 & \bar{v}_1 &= \frac{1}{\langle v_1', v_1' \rangle_V} v_1 \\
v_2' &= v_2 - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle_V \bar{v}_1 & \bar{v}_2 &= \frac{1}{\langle v_2', v_2' \rangle_V} v_2 \\
v_3' &= v_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle v_3, \bar{v}_i \rangle_V \bar{v}_i & \bar{v}_2 &= \frac{1}{\langle v_3', v_3' \rangle_V} v_3 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

[*4] 完全正規直交系と呼ばれることが多いように思うが, 完全という語は perfect などの訳語としても用いられることもあり, complete の訳語であることを意識して完備という語を, ここでは用いる.

x2 (2025-01-23 16:09)

$$v'_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \bar{v}_i \rangle_V \, \bar{v}_i \qquad \bar{v}_k = \frac{1}{\langle v'_k, v'_k \rangle_V} v_k$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

このとき, $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ は正規直交系である.

Remark A.2.30. $(V, \langle , \rangle_V)$ を有限次元内積空間とし, $(v_1, \ldots, v_n)$ を V の基底とする. $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ を, Gram–Schmidt の直交化法で得られた正規直交系であるとする. このとき, $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ は V の完全正規直交系である. よって,

$$\pi_{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n} \colon \mathbb{R}^n \to V$$

により, $(\mathbb{R}^n, \langle \rangle_{\mathbb{R}^n})$ と $(V, \langle , \rangle_V)$ は内積空間として同じものだと思える.

Definition A.2.31.

$$O(n) = O(\mathbb{R}^n, \langle \rangle_{\mathbb{R}^n})$$

とおき, n 次直交群と呼ぶ. $O(n)$ の元を直交行列と呼ぶ.

Remark A.2.32.

$$O(n) = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{c} A \text{ は } (n,n)\text{-行列} \\ A^\top A = E_n \end{array} \right\}$$

である.

$A = (a_{i,j})_{i,j} \in O(n)$ とする.

$$\boldsymbol{a}^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

とおく. $A^\top A = E_n$ であるが, 右辺の (i,j) 成分は,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \left\langle \boldsymbol{a}^{(i)}, \boldsymbol{a}^{(j)} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

である. E_n の (i,j) 成分は $\delta_{i,j}$ であるので,

$$\left\langle \boldsymbol{a}^{(i)}, \boldsymbol{a}^{(j)} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{i,j}$$

である. つまり, $(\boldsymbol{a}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)})$ は正規直交系である.

逆に, $\mathbb{R}^n$ の正規直交系 $(\boldsymbol{a}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)})$ が与えられたとき,

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^{(j)}$$

とおけば, $A = (a_{i,j})_{i,j}$ は直交行列である.

参考文献

記号表

- $\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合.
- $\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合.
- $\mathbb{R}_{>0}$: 正の実数全体のなす集合.
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$: 非負実数全体のなす集合.
- S_n: n 次対称群.
- $\tau_{i,j}$: i, j を入れ替える互換.
- $W^{\perp}$: W の直交補空間.
- H_{α}: α と直交する部分空間.
- $\mathbb{R}\alpha$: α と原点を通る直線.
- $\langle S \rangle_{\mathbb{R}}$: S で生成される実ベクトル空間.
- $\langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$: S で生成される群.
- $\langle , \rangle$: 内積.
- $\|\|$: ノルム.
- $\det(A)$: A の行列式.
- E_n: n 次単位行列.
- $E_{i,j}$: 行列単位. ((i,j)-成分のみ 1, 他は 0 の行列)
- $T_{k,l}$: $\tau_{k,l}$ に対応する置換行列.
- F_k: 第 k 対角成分は -1, 他は 1 である対角行列.
- R_{θ}: 回転角 θ の回転行列.
- P_{θ}: 偏角 $\frac{\theta}{2}$ のベクトルに関する鏡映.
- s_{α}: α に関する鏡映.
- A_{σ}: σ に対応する置換行列.
- $\mathbf{0}$: 零ベクトル.
- $\boldsymbol{e}_k$: 基本ベクトル.
- $\alpha(\theta)$: 偏角 θ の単位ベクトル.
- $\alpha_i = \alpha(\frac{i\pi}{m})$ (ベクトル α の第 i 成分の場合もある).
- $\alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j = -\alpha_{j,i}$.
- $\beta_{i,j} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j = \beta_{j,i}$
- $\varepsilon_k = \boldsymbol{e}_k$
- $\varepsilon'_k = 2\boldsymbol{e}_k = \beta_{k,k}$
- $\gamma_k = \sum_j \alpha_{k,j}$

x2 (2025-01-23 16:09)

- $W(\Phi)$: ルート系 Φ に付随するワイル群.
- $R(\Phi)$: ルート系 Φ に対応する鏡映.