線形代数学 1 に関するメモ

Yasuhide NUMATA

2024 年 12 月 15 日

第 1 章

注意など

1.1 注意

このメモは随時追記, 修正する. 必ずしも末尾に追記するとは限らない.

講義で解説する順番と必ずしも一致しない. また, 講義で解説する内容をすべてここにまとめるわけでもなく, ここでまとめた内容をすべて講義で解説するわけでもない.

忙しくなった場合には, このメモは, 更新しない予定である.

1.2 Webwork について

https://webwork.sci.hokudai.ac.jp/webwork2/2024_Hokudai2_LA1_2/

1.3 シラバス

シラバスに挙げた項目は以下の通り:

1. 行列：定義と演算（和・スカラー倍・積），行列の転置
2. 連立 1 次方程式の理論：消去法, 掃き出し法，基本変形と基本行列
3. 行列の階数：基本変形と計算
4. 逆行列, 掃き出し法
5. 行列式：定義と基本的な性質
6. 余因子行列と余因子展開，クラメールの公式
7. 2 次正方行列の固有値，固有ベクトル，対角化

1.4 参考書

このノートの末尾に挙げた参考文献のうち, [1] はシラバスに教科書として挙げたものである. [2, 3] はシラバスに参考書として挙げたものである.

[3] は大学の数学に関する講義全般について解説している本である. 講義を受ける上での注意や, 講義の前提となる集合や論理の知識についても解説がしてある. 本講義とは直接関係はないが, 図書館で借りるなどして一度最初の数章を読んでみることを勧める.

目次

第 2 章

線形代数以前の話

2.1　講義で使われる見出し

講義に出てくる言明には大きく分けて二つあります:

- 証明が必要ではないもの
- 証明が必要なもの

また講義の板書では, 言明に見出しをつけることがしばしばあります. 以下では使われる見出しについて説明します.

2.1.1　証明が必要ではない言明

言葉の持つ意味を決めることが, ‘定義’ です. つまり, ルールを決めるということです. ルールを設定するということですので, ‘定義’ 自身に証明は必要ではありません.

数学書では定義される用語をイタリック/太文字/下線で書く習慣があります. 重要だからという理由で強調されているわけではありません.

Def/Definition/定義 などの見出しが使われます.

2.1.2　証明が必要な言明

証明をして真である確認する必要がある言明は, ‘命題’ と呼ばれます. ‘主張’ や ‘事実’ と呼ぶこともあると思います.

講義では, 気分や役割により次の様に分類することが多いと思います. これらのうち, どの見出しを使うかというのは, かなり主観的です.

定理　重要なもの, まとめ的なもの など 比較的重いものに使われます.
Thm/Theorem/定理 などの見出しを使います.

補題　他の命題を示すために使うものに使われます.
Lem/Lemma/補題 などの見出しを使います.

系　他からすぐ示すことができるものに使われます.
Cor/Corollary/系 などの見出しを使います.

その他の命題　Prop/Porposition/命題 などの見出しを使います.

2.1.3　補足

また見出しとしては次のようなものも使うこともあります:

- 実例, 具体例 (‘喩え’ ではない) を述べる際に, 例/Example/E.g. などの見出しを使います.
- 補足的なことを述べる際に, 注/Rem/Remark などの見出しを使います.

2.2　集合や論理について

集合や論理についての基本的なことについては, 既知とします. もしそれらについて不安な人は, 高校の教科書の該当箇所や, [3] を参考に復習をすること.

以下の記号を用いる:

- 複素数全体のなす集合を $\mathbb{C}$ とおく.
- 実数全体のなす集合を $\mathbb{R}$ とおく.
- 有理数全体のなす集合を $\mathbb{Q}$ とおく.
- 整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}$ とおく.
- 非負整数全体のなす集合を $\mathbb{N}$ とおく.

つまり, ‘$x \in \mathbb{C}$’ は ‘x は複素数である’ ということを意味する.

2.3　体

K を集合とする. K に四則演算 (加減乗除) が定まっているとき, K は**体**[*1] (*field*) であるという. ただし, “四則演算が定まっている” とは, 次を満たしていることとする:

1. $s, t \in K$ に対し $s + t$ という K の元が定まる. (この演算を加法と呼ぶ.) さらに, 0 という (特別な) 元がある.
   $a, b, c \in K$ なら, 次が成り立つ:
   (a) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (b) $a + b = b + a$.
   (c) $0 + a = a$.
   (d) x に関する方程式
   $$a + x = 0$$
   が (K の元の) 解を持つ.
2. このとき, $a + x = 0$ の解は, a が定まればただ一つに定まるので, この解を $-a$ と書く.
   $b + (-a)$ を $b - a$ と略記する。(この演算を加法と呼ぶ.)
3. $s, t \in K$ に対し st という K の元が定まる. (この演算を乗法と呼ぶ.) さらに, 1 という (特別な) 元がある.

[*1] タイと読む.

$a, b, c \in K$ なら, 次が成り立つ:
(a) $(ab)c = a(bc)$.
(b) $ab = ba$.
(c) $1a = a$.
(d) $a \neq 0$ ならば, x に関する方程式

$$ax = 1$$

が (K の元の) 解を持つ.

4. $a \neq 0$ とする. このとき, $ax = 1$ の解は, a が定まればただ一つに定まるので, この解を a^{-1} とか $\frac{1}{a}$ と書く.
$b(\frac{1}{a})$ を $\frac{b}{a}$ と略記する。(この演算を除法と呼ぶ.)
5. $a, b, c \in K$ なら, 以下が成り立つ:
(a) $a(b + c) = ab + ac$.
(b) $0 \neq 1$.

Remark 2.3.1. つまり体とは, 結合則, 分配則, 可換則などが成り立つ四則演算が備わった数の集合のことである. □

Example 2.3.2. $\mathbb{C}$ は体である. □

Example 2.3.3. $\mathbb{R}$ は体である. □

Example 2.3.4. $\mathbb{Q}$ は体である. □

Remark 2.3.5. 証明は省略する. 以後これらは事実として使う. □

Remark 2.3.6. 掛け算は ab または $a \cdot b$ のように書き表す. ($\times$ は本原稿では別の意味で使うので, 掛け算の意味では用いない) □

Example 2.3.7. $2 \in \mathbb{Z}$ ではあるが $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ である. したがって $2x = 1$ は $\mathbb{Z}$ の元の解を持たない. $2 \neq 0$ であるが $2x = 1$ は $\mathbb{Z}$ の元の解を持たないので, $\mathbb{Z}$ は体ではない. □

本講義では, 体 K の元のことを数と呼ぶ. つまり, 数に対しては四則演算ができる. 特に断らない限り, 体としては何を考えても構わない.

章末問題

略解は解説 B.1.1.

問題 2.1. a を実数とする．$\sqrt{a^2} = a$ は成り立つか答えよ．

略解は解説 B.1.2.

問題 2.2. $|2 - \sqrt{5}|$ を絶対値を表す記号を使わずに書くとどうなるか答えよ．

略解は解説 B.1.3.

問題 2.3. s, u を実数とする．x に関する方程式 $x^2 - (s+u)x + su = 0$ が実数解を持つことを示せ

第 3 章

行列の定義と演算

[1] であれば, 第 2 章が関連する. また, 1.1, 1.2, 1.3 も参考になるかもしれない. [2] であれば, 1.3, 1.4 が関連する.

3.1 行列に関する基本的な用語の定義

ここでは, 行列に関連する基本的な用語を定義し, その例をいくつか紹介する.

Definition 3.1.1. 縦に m 個ずつ, 横に n 個ずつ, 全部で mn 個の数を表のように長方形に並べた次のものを (m,n)-**行列** ((m,n)-*matrix*) (m *by* n *matrix*) と呼ぶ:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

この行列を A とするとき, $a_{i,j}$ を A **の** (i,j)-**成分** ((i,j)-*entry of* A) ((i,j)-*element of* A) と呼ぶ. また, A **のサイズ** (*size of* A) は (m,n) であるといったり, A **の型** (*type of* A) は (m,n) であるという.

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

という横のならびを, A **の** i-**行目** (i-*th row of* A) と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

という縦のならびを, A **の** j-**列目** (j-*th column of* A) と呼ぶ. □

Remark 3.1.2. 数として複素数を考えているときは, 行列を複素行列と呼ぶ. □

Remark 3.1.3. 数として実数を考えているときは, 行列を実行列と呼ぶ. □

Definition 3.1.4. A, B を行列とする. 次の条件を満たすとき, A **と** B **は等しい** (A *is equal to* B) (A *equals* B) といい, $A = B$ とかく:

1. A と B の型が等しい.
2. A と B の対応する成分がそれぞれ等しい.

□

Definition 3.1.5. (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列を,

$$(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

で表すこともある. □

Definition 3.1.6. すべての成分が 0 である (m,n)-行列を, $O_{m,n}$ で表し, 零行列と呼ぶ. つまり,

$$O_{m,n} = (0)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

である. 文脈からサイズが明らかなときには, O と略記することもある. □

Definition 3.1.7. $(m,1)$-行列を, m **項数ベクトル** (*numerical vector*) とか m **項列ベクトル** (*column vector*), m **項縦ベクトル**と呼ぶことがある. □

Definition 3.1.8. $(m,1)$-行列を, m **項行ベクトル** (*row vector*) とか m **項横ベクトル** (*row vector*) と呼ぶことがある. □

3.1.1　正方行列

ここでは, 正方行列に関連する基本的な用語を定義し, その例をいくつか紹介する.

Definition 3.1.9. (n,n)-行列を n **次正方行列** (*square matrix of order n*) と呼ぶ. □

Definition 3.1.10. A を

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

とする. また, A の (i,i)-成分を A **の第** i **対角成分** (*i-th diagonal entry of A*) (*i-th main diagonal entry of A*) (*i-th diagonal element of A*) (*i-th main diagonal element of A*) と呼ぶ. □

Definition 3.1.11. A を, $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列とする.

1. 次の条件を満たすとき A は**上半三角行列** (*upper triangular matrix*) であるという:

$$i > j \implies a_{i,j} = 0$$

2. 次の条件を満たすとき A は**下半三角行列** (*lower triangular matrix*) であるという:

$$i < j \implies a_{i,j} = 0$$

3. 次の条件を満たすとき A は**対角行列** (*diagonal matrix*) であるという:

$$i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

□

Example 3.1.12. 次の行列は上半三角行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Example 3.1.13. 次の行列は下半三角行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Example 3.1.14. 次の行列は対角行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Definition 3.1.15. 対角成分がすべて等しい値である対角行列を**スカラー行列** (*scalar matrix*) と呼ぶ. □

Definition 3.1.16.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

とおく. この関数 δ は**クロネッカのデルタ** (*Kronecker delta*) と呼ばれる. □

Definition 3.1.17. (i, j)-成分が $\delta_{i,j}$ である n 次正方行列を E_n とかき, n **次単位行列** (*n-th identity matrix*) (*Einheitsmatrix*) と呼ぶ. 文脈から型が明らかなときには, E と略記する. □

Example 3.1.18. E_n は対角成分がすべて 1 である対角行列である. 例えば,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. □

3.2 行列の演算

ここでは, 行列に対する演算を定義し, その性質について紹介する. 2 次正方行列の場合について紹介したあと, 一般の場合について定義するという形式で話を進める.

3.2.1 和

ここでは, 行列の和と呼ばれる演算について考える. サイズが同じもの同士ならば和が定義できる. より一般には次のように定義される.

Definition 3.2.1. A は, (i, j)-成分が $a_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. B は, (i, j)-成分が $b_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. このとき, (i, j)-成分が $a_{i,j} + b_{i,j}$ である (m, n)-行列を $A + B$ とかき, A **と** B **の和** (*sum of A and B*) と呼ぶ. □

Example 3.2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

□

Example 3.2.3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

□

Remark 3.2.4. 和によって行列のサイズは変化しない. □

3.2.2 スカラー倍

ここでは, 行列のスカラー倍と呼ばれる演算について考える.

Definition 3.2.5. A を (i, j)-成分が $a_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. α を数とする. このとき, (i, j)-成分が $\alpha a_{i,j}$ である (m, n)-行列を, αA とかき, **α による A のスカラー倍** (*scalar product of α and A*) と呼ぶ. □

Example 3.2.6.

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

□

Example 3.2.7.

$$5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

□

Remark 3.2.8. スカラー倍によって行列のサイズは変化しない. □

Definition 3.2.9. $-1A$ を $-A$ と略記する. □

Definition 3.2.10. $A + (-B)$ を $A - B$ と略記する. □

Remark 3.2.11. 対角成分が α であるスカラー行列は, αE_n と表せる. □

和とスカラー倍で書けるものを一次結合と呼ぶ.

Definition 3.2.12. k 個の (m, n)-行列 $A_1, \ldots, A_k$ と数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ に対し, スカラー倍と和を使って (m, n)-行列

$$\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_k A_k$$

を与えることができる. これを **$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合** **$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の一次結合** (*linear combination of $A_1, \ldots, A_k$ with coeficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$*) と呼ぶことがある. □

Example 3.2.13. 例えば,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$A = 2E + J$$

である. このことを, A は E と J の線型結合として表せると言い表す. □

Definition 3.2.14. $A_1, \ldots, A_n$ を行列とする. $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$ が零行列となるような $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$ を満たす数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ があるとき, $(A_1, \ldots, A_n)$ は**一次従属** (*linearly dependent*) 一次従属であるという. また, $(A_1, \ldots, A_n)$ は一次従属でないとき, $(A_1, \ldots, A_n)$ は**一次独立** (*linearly independent*) であるという. □

Remark 3.2.15. 一次独立性については, 一般の行列よりも, ベクトルに対して考えることが多い. □

3.2.3 積

ここでは, 行列の積と呼ばれる演算について考える. 定義が複雑なので, 慣れないうちは注意してほしい.

A の列数と B の行数が等しいときに, A と B の積を定義できる.

Definition 3.2.16. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,k)-行列とする. B は, (i,j)-成分が $b_{i,j}$ である (k,n)-行列とする. このとき, (i,j)-成分が $\sum_{t=1}^{k} a_{i,t} b_{t,j}$ である (m,n)-行列を AB とかき, **A と B の積** (*product of A and B*) と呼ぶ. □

Remark 3.2.17. AB の (i,j) 成分は A の i 行目と B の j 列目から計算できる. □

Remark 3.2.18. AB の行数は A の行数. □

Remark 3.2.19. AB の列数は B の列数. □

Example 3.2.20. 2 次正方行列のときについて考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & db' + dd' \end{pmatrix}.$$

積の各成分がどのように計算されているかは, 次のような表を考えるとわかりやすいかもしれない:

$$
\begin{array}{cc|c:c}
 & & a' & b' \\
 & & c' & d' \\
\hline
a & b & aa' + bc' & ab' + bd' \\
\hdashline
c & d & ca' + dc' & db' + dd'
\end{array}
$$

□

Example 3.2.21.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

とすると

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 & 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である. $AB \neq BA$ である. □

Remark 3.2.22. $AB \neq BA$ となることがある. □

Example 3.2.23.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とすると

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 \\ 43 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

3.2.4　冪

ここでは, 行列の冪と呼ばれる演算について考える.

正方行列に対し次のように定義する.

Definition 3.2.24. A を n 次正方行列とする. このとき, 正整数 k に対し, A^k を次で定義する:

$$A^k = \begin{cases} AA^{k-1} & (k > 1) \\ A & (k = 1) \end{cases}$$

□

Definition 3.2.25. A を n 次正方行列とする. 変数 (不定元) t に関する多項式

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d$$

の t を A に置き換えたもの (ただし, $1 = t^0$ は E_n に置き換える), つまり,

$$a_0 E_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_d A^d$$

を $f(A)$ とかく. このような式を**行列多項式** (*matrix polynomial*) と呼ぶことがある. □

Example 3.2.26.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+0 \\ 3+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 7+6 & 2+12 \\ 21+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

である. □

正方行列の冪は一般には複雑になるが, 対角行列であれば簡単に書ける.

Example 3.2.27.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 正の整数 k に対し,

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

である. 実際, この等式は $k = 1$ のときには成り立つ. また

$$A^l = \begin{pmatrix} a^l & 0 \\ 0 & b^l \end{pmatrix}$$

であるとすると

$$\begin{aligned} A^{l+1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^l & 0 \\ 0 & b^l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa^l + 0 \cdot 0 & a \cdot 0 + 0 \cdot b^l \\ 0a^l + b \cdot 0 & 0 \cdot 0 + b \cdot b^l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{l+1} & 0 \\ 0 & b^{l+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3.2.5　**転置**

ここでは, 行列の転置と呼ばれる演算について考える.

Definition 3.2.28. A は (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列であるとする. (i,j)-成分が $a_{j,i}$ である (n,m)-行列を A **の転置** (*transposed matrix of* A) とよび, ${}^tA$ で表す. □

Example 3.2.29.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

である. □

Remark 3.2.30. 転置によって (m,n)-行列は (n,m)-行列になる. □

Remark 3.2.31. A の i 行目から ${}^tA$ の i 列目が作られる. また, A の j 列目から ${}^tA$ の j 行目が作られる. □

Definition 3.2.32. A を行列とする. 次の条件を満たすとき, A は, **対称行列** (*symmetric matrix*) であるという:

$$A = {}^tA$$

□

Definition 3.2.33. A を行列とする. 次の条件を満たすとき, A は**交代行列歪対称行列** (*skew-symmetric matrix*) (*alternative matrix*) であるという:

$$-A = {}^tA.$$

□

Example 3.2.34.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると, これは対称行列である. □

Example 3.2.35.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, これは交代行列である. ∎

Proposition 3.2.36. $1+1 \neq 0$ とする. A が対称行列でありまた交代行列でもあるならば, A は零行列である. ∎

Proposition 3.2.37. $1+1 \neq 0$ とする. A を正方行列とする.

$$A' = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \qquad A'' = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

とすると, 次が成り立つ:

1. $A = A' + A''$.
2. A' は対称行列.
3. A'' は交代行列.

∎

3.2.6　連結

行列を並べて得られる行列について考える.

Definition 3.2.38. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,k)-行列とする. B は, (i,j)-成分が $b_{i,j}$ である (m,n)-行列とする. このとき,

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & (j = 1, 2, \ldots, k) \\ b_{i,j-k} & (j = 1+k, 2+k, \ldots, n+k) \end{cases}$$

とする. (i,j)-成分が $c_{i,j}$ である $(m,k+n)$-行列を $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ と書く. 表の形式で書くと

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

となるので, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ を, A **と** B **を横に並べた行列** (A **と** B **を横に連結した行列**)(*horizontal concatination of* A *and* B) と呼ぶ. ∎

Example 3.2.39.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

に対し,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

∎

Definition 3.2.40. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (k,n)-行列とする．B は, (i,j)-成分が $b_{i,j}$ である (m,n)-行列とする．このとき,

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & (i = 1, 2, \ldots, k) \\ b_{i-k,j} & (i = 1+k, 2+k, \ldots, m+k) \end{cases}$$

とする．(i,j)-成分が $c_{i,j}$ である $(k+m,n)$-行列を $\left(\frac{A}{B}\right)$ と書く．表の形式で書くと

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

となるので, $\left(\frac{A}{B}\right)$ を, A **と** B **を縦に並べた行列** (A **と** B **を縦に連結した行列**)(*vertical concatination of* A *and* B) と呼ぶ. □

Example 3.2.41.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

に対し,

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

Remark 3.2.42. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列とする．このとき,

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

という m 項列ベクトル[*1] を考える．行列 A は列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が横に並んだものであると思うことができる．つまり

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \right)$$

である．これを A **の列ベクトルによる表示**と呼ぶ. □

[*1] Definition 3.1.7 で定義したように, m 項列ベクトルとは, $(m,1)$-行列のことであった.

Remark 3.2.43. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列とする. このとき,

$$\boldsymbol{a}'_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

という m 項行ベクトルを考える. 行列 A は行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ が縦に並んだものであると思うことができる. つまり

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \hline \boldsymbol{a}'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{a}'_n \end{pmatrix}$$

である. これを A **の行ベクトルによる表示**と呼ぶ. □

3.2.7 演算の性質

ここでは, 今まで見てきた演算の性質について紹介する.

まずに, 和とスカラー倍の性質について紹介する.

Proposition 3.2.44. A, B, C はサイズの等しい行列とする. O はそれらとサイズの等しい零行列とする. α, β は数とする. このとき, 次が成り立つ:

証明は Proofs A.2.5 to A.2.12.

1. 和に関するもの Proof A.2.5.
   (a) $(A+B)+C = A+(B+C)$ Proof A.2.6.
   (b) $O+A = A$ Proof A.2.7.
   (c) $A+(-A) = O$ Proof A.2.8.
   (d) $A+B = B+A$ Proof A.2.9.
2. スカラー倍に関するもの
   (a) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ Proof A.2.10.
   (b) $1A = A$ Proof A.2.11.
3. 和とスカラー倍に関するもの
   (a) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ Proof A.2.12.
   (b) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

□

Remark 3.2.45. Item 1a ($(A+B)+C = A+(B+C)$) があるので, $A+B+C$ を $(A+B)+C$ と思っても $A+(B+C)$ と思っても等しいので差し支えない. $(A+B)+C$ を $A+B+C$ と略記する. □

Remark 3.2.46. Item 2a ($(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$) があるので, $\alpha\beta A$ を $(\alpha\beta)A$ と思っても $\alpha(\beta A)$ と思っても等しいので差し支えない. $\alpha(\beta A)$ を $\alpha\beta A$ と略記する. □

次に, 積の性質について紹介する.

Proposition 3.2.47. A, A' を (m,n)-行列, B, B' を (n,k)-行列, C を (k,l)-行列, α を数とする. このとき, 次が成り立つ:

証明は Proofs A.2.13 to A.2.19.

1. 積に関するもの Proof A.2.13.
   (a) $(AB)C = A(BC)$

Proof A.2.14.

Proof A.2.15.
(b) $AE_n = A$

(c) $E_mA = A$

Proof A.2.16.
2. 積と和に関するもの

Proof A.2.17.
(a) $(A + A')B = AB + A'B$

(b) $A(B + B') = AB + AB'$

Proof A.2.18.
3. 積とスカラー倍に関するもの

Proof A.2.19.
(a) $(\alpha A)B = \alpha(AB)$

(b) $\alpha(AB) = A(\alpha B)$

□

Remark 3.2.48. Item 1a があるので, ABC を $A(BC)$ と思っても $(AB)C$ と思っても差し障りない. $A(BC)$ を ABC と略記する. □

Remark 3.2.49. Item 3a があるので, $\alpha\beta A$ を $(\alpha\beta)A$ と思っても $\alpha(\beta A)$ と思っても差し障りない. $(\alpha\beta)A$ を $\alpha\beta A$ と略記する. □

Remark 3.2.50. A を (m, n) 行列, B を (n, k) 行列, r を数とする. このとき, $rB = (rE_n)B$ である. しがって,

$$AB + rB = (A + rE_n)B$$

となる. 行列と数の和 $A + r$ は定義されておらず, 右辺は, $(A + r)B$ ではないことに注意すること.

同様に, $rA = A(rE_n)$ である. しがって,

$$AB + rA = A(B + rE_n)$$

となる. □

零行列との積や 0 によるスカラー倍は次のようになる.

証明は Proof A.2.20.

Proposition 3.2.51. A を (m, n)-行列とする.

$$\begin{aligned} 0A &= O_{m,n} \\ AO_{n,k} &= O_{m,k} \\ O_{k,m}A &= O_{k,n}. \end{aligned}$$

□

冪に関しては指数法則が成り立つ.

証明は Proofs A.2.21 and A.2.22.

Proposition 3.2.52. A を正方行列, k, k' を正の整数とする. このとき,

Proof A.2.21.
1. $A^kA^{k'} = A^{k+k'}$

Proof A.2.22.
2. $(A^k)^{k'} = A^{kk'}$

□

証明は Proof A.2.23.

Proposition 3.2.53. A を正方行列, α を数, k を正の整数とする. このとき,

$$(\alpha A)^k = \alpha^k A^k$$

□

Remark 3.2.54. 正方行列 A, B によっては,

$$AB \neq BA$$

となることが起こる. この場合には,

$$(AB)^k \neq A^k B^k$$

である. □

次に転置の性質について紹介する.

Proposition 3.2.55. A, A' を (m, n)-行列 B を (n, k)-行列, α を数とする. このとき次が成り立つ:

証明は Proofs A.2.1 to A.2.4.

1. ${}^t({}^tA) = A$ (Proof A.2.1.)
2. ${}^t(A + A') = {}^tA + {}^tA'$ (Proof A.2.2.)
3. ${}^t(\alpha A) = \alpha({}^tA)$ (Proof A.2.3.)
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (Proof A.2.4.)

□

Remark 3.2.56. 積の順序が入れ替わることに注意する. □

最後に連結と積の性質について紹介する.

Proposition 3.2.57. A を (m, n) 行列, B を (n, k) 行列, B' を (n, k') 行列とする. このとき,

$$A\left(\begin{array}{c|c} B & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AB & AB' \end{array}\right).$$

□

Proposition 3.2.58. A を (m, n) 行列, A' を (m', n) 行列, B を (n, k) 行列とする. このとき,

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline A' \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{c} AB \\ \hline A'B \end{array}\right).$$

□

章末問題

略解は解説 B.2.1.

問題 3.1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 次は何か:

1. A のサイズ.
2. A の $(1, 2)$-成分.
3. A の 2-行目.
4. A の 2-列目.
5. A の転置 ${}^{t}A$.

略解は解説 B.2.2.

問題 3.2. 以下の行列をそれぞれ具体的に書け. ただし, δ を Kronecker のデルタとする.

1. (i, j)-成分が $5i + j - 5$ である $(2, 2)$-行列 A.
2. このとき (i, j)-成分が $2^{i}\delta_{i,j}$ である $(2, 2)$-行列 A.
3. (i, j)-成分が $\delta_{i,2}\delta_{j,1}$ である $(2, 2)$-行列 A.

略解は解説 B.2.3.

問題 3.3. 次の条件を満たす a, b, c, d を求めよ:

$$\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 4+c & 5d-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2b+5 \\ 6 & -4d+8 \end{pmatrix}$$

略解は解説 B.2.4.

問題 3.4. 次の行列が対称行列となるような a を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix}$$

略解は解説 B.2.5.

問題 3.5. 次の行列が交代行列となるような a, b を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

略解は解説 B.2.6.

問題 3.6. 次を求めよ:

1. $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2$

問題 3.7.　次を求めよ: 略解は解説 B.2.7.

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n$$

問題 3.8.　次を求めよ: 略解は解説 B.2.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

問題 3.9.　次を満たす a, b を求めよ: 略解は解説 B.2.9.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

第 4 章

正則行列と行基本変形

ここでは正則行列に関連する事項について説明をする.

4.1 正則行列

ここでは, 正則行列やその逆行列について説明する.
以下のように定義する:

Definition 4.1.1. A を正方行列とする. $AB = BA = E$ となる B が存在するとき, A は**正則** (**非退化**)(**非特異**)(**可逆**)(*invertible*) (*nondegenerate*) (*nonsingular*) (*regular*) であるといい, B を A **の逆行列** (*inverse matrix of* A) と呼ぶ. 正則な n 次正方行列を, n **次正則行列** (*n-th invertible matrix*) と呼ぶ.

Definition 4.1.2. A を正方行列とする. $AB = BA = E$ となる B が存在しないとき, A は**非正則** (*degenerate*) (*singular*) であるという.

Definition 4.1.3. A を正方行列とする. $AB = BA = E$ となる B が存在しないとき, A は**非正則** (*degenerate*) (*singular*) であるという.

Proof. どんな正方行列 B に対しても, $O_{n,n}B = O_{n,n} \neq E_n$. □

Proposition 4.1.4. A を n 次正則行列とする. このとき, A の逆行列は唯一つ存在する. つまり, B と C が,

証明は Proof A.3.1.

$$
\begin{aligned}
AB = BA = E_n, \\
AC = CA = E_n
\end{aligned}
$$

を満たすなら, $B = C$.

Remark 4.1.5. 正則行列 A に対し, 逆行列は唯一つに定まるので, この行列を A^{-1} と書く.

Example 4.1.6.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

は正則であり,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

Proof.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Example 4.1.7. 単位行列 E_n は正則であり, $E_n^{-1} = E_n$.

Proof. $A = E_n$, $B = E_n$ とすれば, $AB = E_n E_n = E_n$, $BA = E_n E_n = E_n$. □

Example 4.1.8. 零行列 $O_{n,n}$ は非正則.

つぎに, 逆行列に関する性質を紹介する.

証明は Proofs A.3.2 to A.3.6.

Proposition 4.1.9. X, Y を n 次正則行列とする. r を逆数を持つ数 (つまり $r \neq 0$) とする. l を正の整数とする. このとき次が成り立つ:

1. X^{-1} も正則. $(X^{-1})^{-1} = X$.
2. ${}^tX$ も正則. $({}^tX)^{-1} = {}^t(X^{-1})$.
3. rX も正則. $(rX)^{-1} = \frac{1}{r}X^{-1}$.
4. XY も正則. $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.
5. X^l も正則. $(X^l)^{-1} = (X^{-1})^l$.

Proof A.3.2.

Proof A.3.3.

Proof A.3.4.

Proof A.3.5.

Proof A.3.6.

Remark 4.1.10. Item 2 があるので, $({}^tX)^{-1}$ を ${}^tX^{-1}$ と略記する.

正則行列に対しては, 冪を整数全体に拡張する.

Definition 4.1.11. n 次正則行列 A と $l > 0$ に対し, A^{-l} で $(A^{-1})^l$ を表す. また $A^0 = E_n$ とする.

このように拡張された冪に対しても, 指数法則が成り立つ.

証明は Proofs A.3.7 and A.3.8.

Proposition 4.1.12. 正則行列 A と整数 l, k に対し,

1. $A^{l+k} = A^l A^k$
2. $A^{lk} = (A^l)^k$

が成り立つ.

Proof A.3.7.

Proof A.3.8.

明は Proofs A.3.9 and A.3.10.

Proposition 4.1.13. A を n 次正方行列とする．X を零行列ではない (n,m) 行列とする．Y を零行列ではない (m,n) 行列とする．このとき, 以下が成り立つ:

1. $AX = O_{n,m}$ ならば, A は正則ではない. Proof A.3.9.
2. $YA = O_{m,n}$ ならば, A は正則ではない. Proof A.3.10.

□

Proposition 4.1.13 から, 以下がすぐわかる.

Corollary 4.1.14. 零行列ではない n 次正方行列 A, B が $AB = O_{n,n}$ を満たすならば, A も B も正則ではない. □ 証明は Proof A.3.11.

Corollary 4.1.15. $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列 A が $a_{n,1} = a_{n,2} = \cdots = a_{n,n} = 0$ を満たすならば, A は非正則である. □ 証明は Proof A.3.12.

4.2 基本変形と基本行列

行に関する以下の操作を行基本変形と呼ぶ.

Definition 4.2.1. A を (m,n)-行列とする．以下に挙げた A に対する操作を**行基本変形** (*elementary row operation*) と呼ぶ:

1. $1 \leq k \leq m$ とし, 数 a は逆数をもつとする (つまり $a \neq 0$ とする)．A の k 行目を a 倍する.
2. $k \neq l$ とし, c を数とする．A の k 行目に, l 行目を c 倍したものを足す.
3. $1 \leq k < l \leq m$ とする．A の k 行目と l 行目を入れ替える.

□

列に関する以下の操作を列基本変形と呼ぶ.

Definition 4.2.2. A を (m,n)-行列とする．以下に挙げた A に対する操作を**列基本変形** (*elementary colomn operation*) と呼ぶ:

1. $1 \leq k \leq m$ とし, 数 a は逆数をもつとする (つまり $a \neq 0$ とする)．A の k 列目を a 倍する.
2. $k \neq l$ とし, c を数とする．A の l 列目に, k 列目を c 倍したものを足す.
3. $1 \leq k < l \leq m$ とする．A の k 列目と l 列目を入れ替える.

□

以下の正方行列を基本行列と呼ぶ.

Definition 4.2.3. $B_{k,l}$ を (k,l)-成分のみ 1 で他は 0 の n 次正方行列とする．n 次正方行列 $F_n(k;c)$ $G_n(k,l;c)$ $H_n(k,l)$ を以下で定義する.

1. $k \in \{1,\ldots,n\}$ とし, 数 a は逆数を持つとする (つまり $a \neq 0$ とする)．$F_n(k;a) = E_n - B_{k,k} + cB_{k,k}$ と定義する.
2. $k,l \in \{1,\ldots,n\}$ とし, $k \neq l$ とする．数 c に対し, $G_n(k,l;c) = E_n + cB_{k,l}$ と定義する.

3. $k, l \in \{1, \dots, n\}$ とし, $k \neq l$ とする. $H_n(k,l) = E_n - B_{k,k} - B_{l,l} + B_{k,l} + B_{l,k}$ と定義する.

ここで定義された, $F_n(k;c)$, $G_n(k,l;c)$, $H_n(k,l)$ を基本行列と呼ぶ. □

基本行列を左からかける操作と行基本変形が以下の様に対応している.

証明は Proofs A.3.15 to A.3.17.

Lemma 4.2.4. A を (m,n)-行列とする.

Proof A.3.15.

1. $k \in \{1, \dots, n\}$ とし, a を数とする. $F(k;a)A$ は A の k 行目を a 倍した行列である.

Proof A.3.16.

2. $k, l \in \{1, \dots, n\}$ とし, $k \neq l$ とする. 数 c に対し, $G(k,l;c)A$ は A の k 行目に l 行目の c 倍を加えた行列である.

Proof A.3.17.

3. $k, l \in \{1, \dots, n\}$ とし, $k \neq l$ とする. このとき, $H(k,l)A$ は A の k 行目と l 行目を入れ替えた行列である.

□

基本行列を右からかける操作と列基本変形が以下の様に対応している.

証明は Proofs A.3.18 to A.3.20.

Lemma 4.2.5. A を (m,n)-行列とする.

Proof A.3.18.

1. $k \in \{1, \dots, n\}$ とし, a を数とする. $AF(k;a)$ は A の k 列目を a 倍した行列である.

Proof A.3.19.

2. $k, l \in \{1, \dots, n\}$ とし, $k \neq l$ とする. 数 c に対し, $AG(k,l;c)$ は A の l 列目に k 列目の c 倍を加えた行列である.

Proof A.3.20.

3. $k, l \in \{1, \dots, n\}$ とし, $k \neq l$ とする. このとき, $AH(k,l)$ は A の k 列目と l 列目を入れ替えた行列である.

□

証明は Proofs A.3.21 to A.3.23.

Proposition 4.2.6. 基本行列は正則である.

Proof A.3.21.

1. $F(i;c)^{-1} = F(i;\frac{1}{c})$.

Proof A.3.22.

2. $G(i,j;c)^{-1} = G(i,j;-c)$.

Proof A.3.23.

3. $H(i,j)^{-1} = H(i,j)$.

□

Remark 4.2.7. Lemma 4.2.4 から, A に行基本変形を行うことは, A に基本行列を左からかけることであり, 逆に A に基本行列を左からかけることは, A に行基本変形を行うことであることがわかる.

また, 基本行列は正則行列であり, その逆行列もまた基本行列である. このことは, A に行基本変形を行って B が得られたときには, B 行基本変形を行って A にすることもできるということを意味する. □

4.3 階段行列

行基本変形を行うことで '0 の多い行列' に変形できる. その端的なものとして, 階段行列がある.

Definition 4.3.1. A を (i, j)-成分が $a_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. $0 \leq r \leq m$ とする. A と r が次の条件を満たすとき, A は**階数 r の階段行列** (*row echelon form of rank r*) であるという:

1. $r < i \leq m$ ならば, $a_{i,j} = 0$.
2. $1 \leq i \leq r$ ならば, 次の条件を満たす j_i がとれる:
   (a) $1 \leq j < j_i$ ならば $a_{i,j} = 0$.
   (b) $a_{i,j_i} \neq 0$.
3. $j_1, \ldots, j_r$ は次を満たす:

$$1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$$

□

階段行列の定義に現れる j_i は,

$$j_i = \min \{ k \mid a_{i,k} \neq 0 \}$$

と書くこともできる. これを i **行目のピボット** (*pivot in i-th row*) と呼ぶこともある.

階段行列のうち特別な形のものを被約行階段行列と呼ぶ.

Definition 4.3.2. A を (i, j)-成分が $a_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. A が次の条件を満たすとき, A は**階数 r の被約行階段行列** (**階数 r の簡約行階段行列**)(*reduced row echelon form of rank r*) であるという:

1. A は階数 r の階段行列である.
2. $1 \leq i \leq r$ に対し $j_i = \min \{ k \mid a_{i,k} \neq 0 \}$ とおく. このとき次が成り立つ.
   (a) $a_{i,j_i} = 1$
   (b) $l \neq a_{l,j_i} = 0$

被約行階段行列のことを単に被約階段行列と呼ぶことにする. □

被約階段行列は, pivot の列では, pivot 以外の成分は 0, pivot のみ 1, という条件をみたす階段行列である.

サイズが小さいときに被約階段行列の例を見る.

Example 4.3.3. $(2, 2)$-行列の場合について考える.

階数が 0 の被約階段行列は, 1 行目と 2 行目の成分は 0 ということなので, すべて 0 である

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のみである.

階数が 1 の被約階段行列は, 2 行目が 0 ということなので,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と, 数 a をつかって

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる行列の 2 種類があり, これらで全てである.

階数が 2 の被約階段行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のみである.

□

Example 4.3.4. $(2,3)$-行列の場合について考える.

階数が 0 の被約階段行列は, 1 行目と 2 行目の成分は 0 でないといけないので,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のみである.

階数が 1 の被約階段行列は, 2 行目の成分は 0 でないといけない.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と, 数 a をつかって

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる行列と, 数 a, b を使って

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる 3 種類の行列がある. これらで全てである.

階数が 2 の被約階段行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と, 数 a を使って表せる

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と, 数 a, b を使って表せる

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

の 3 種類がある. これらですべてである. □

Example 4.3.5. 例えば

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は階段行列ではない. したがって被約階段行列でもない.

例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は階段行列ではあるが, 被約階段行列ではない. □

Example 4.3.6. E_n は被約階段行列である. □

Example 4.3.7. $O_{n,m}$ は被約階段行列である. □

4.4 行基本変形により得られる被約階段行列

次の事実を示すことが, ここの目標である.

Theorem 4.4.1. A を行列とする. A に行基本変形を (複数回) 行って被約階段行列にすることができる. 得られる被約階段行列は A によって決まり, 変形の仕方には依らない. □

まずは, 階段行列に変形できることを構成的に証明する.

Lemma 4.4.2. A を零行列ではない (m, n) 行列とする. A の $1, \ldots, p$ 列目の成分はすべて 0 であるとする. このとき, A を, 行基本変形を用いて, $1, \ldots, p_0 - 1$ 列目の成分はすべて 0 であり, $(1, p_0)$ 成分は 0 ではなく, それ以外の p_0 列目の成分は 0 という行列に変形できる. ただし, ここで, p_0 は $p_0 > p$ を満たす. □

Proof. 構成法を与えることにより証明する.

$A \neq O_{mn}$ であるので, どこかの行には pivot が存在する.

$$p_0 = \min \{\, p \mid (i, p) \text{ は } A \text{ の pivot} \,\}$$

とおき, (i_0, p_0) が A の pivot であるとする. 定義から明らかに, $p < p_0$ である.

A の i_0 行目と 1 行目を入れ替えた行列を A' とおく. $A^{(1)}$ の (i, p_0)-成分を c_i とする. このとき, $c_1 \neq 0$ であり, $A^{(1)}$ の $1, \ldots, p_0 - 1$ 列目の成分はすべて 0 である.

$A^{(1)}$ の 2 行目に 1 行目の $\frac{-c_2}{c_1}$ 倍を加えて得られる行列を, $A^{(2)}$ とおく. このとき, $(2, p_0)$ 成分は 0 である. $A^{(2)}$ の 3 行目に 1 行目の $\frac{-c_3}{c_1}$ 倍を加えて得られる行列を, $A^{(3)}$ とおく. このとき, $(3, p_0)$ 成分は 0 である. 以下同様に, $A^{(i)}$ の $i + 1$ 行目に 1 行目の $\frac{-c_{i+1}}{c_1}$ 倍を加えて得られる行列を, $A^{(i+1)}$ とおく. このとき, $(i + 1, p_0)$ 成分は 0 である.

したがって, $A^{(m)}$ は, $1, \ldots, p_0 - 1$ 列目の成分はすべて 0 であり, $(1, p_0)$ 成分は 0 ではなく, それ以外の p_0 列目の成分は 0 という行列である. □

Theorem 4.4.3. (m, n)-行列 A を, 行基本変形を用いて階段行列に変形できる. □

Proof. 構成法を与えることで示す.

$A = O_{m,n}$ なら A は階段行列なので何もしなくてよい. そうでなければ, A に Lemma 4.4.2 を使うことで, $1, \ldots, p_1 - 1$ 列目の成分はすべて 0 であり, p_1 列目の成分は

最初の行以外は 0 であり, p_1 列目の最初の行の成分は 0 ではないという行列 $R^{(1)}$ に変形できる.

$R^{(1)}$ の 2 行目以降を $A^{(1)}$ とする．$A^{(1)} = O_{m-1,n}$ なら $R^{(1)}$ は階段行列なので何もしなくてよい．そうでなければ, $A^{(1)}$ に Lemma 4.4.2 を使うことで, $1, \dots, p_2 - 1$ 列目の成分はすべて 0 であり, p_2 列目の成分は最初の行以外は 0 であり, p_2 列目の最初の行の成分は 0 ではない行列に変形できる．$p_1 < p_2$ である．したがって, 同様の変形を $R^{(1)}$ することで, 2 行目までは pivot が $(1, p_1), (2, p_2)$ である階段行列である行列に $R^{(2)}$ 変形できる．$R^{(2)}$ の 3 行目以降を $A^{(2)}$ とすると, $1, \dots, p_2$ 列目の成分はすべて 0 である.

$A^{(2)} = O_{m-2,n}$ なら $R^{(2)}$ は階段行列なので何もしなくてよい．そうでなければ, $A^{(2)}$ に Lemma 4.4.2 を使うことで, $1, \dots, p_3 - 1$ 列目の成分はすべて 0 であり, p_3 列目の成分は最初の行以外は 0 であり, p_3 列目の最初の行の成分は 0 ではない行列に変形できる．$p_1 < p_2 < p_3$ である．したがって, 同様の変形を $R^{(2)}$ することで, 2 行目までは pivot が $(1, p_1), (2, p_2), (3, p_3)$ である階段行列である行列に $R^{(3)}$ 変形できる．$R^{(3)}$ の 4 行目以降を $A^{(3)}$ とすると, $1, \dots, p_3$ 列目の成分はすべて 0 である.

以下同様に, $R^{(i)}$ の $i{+}1$ 行目以降を $A^{(i)}$ とし, $A^{(i)}$ が $O_{m-i,n}$ でないなら, Lemma 4.4.2 を用いて, $R^{(i+1)}$ を得るということを繰り返す.

この方法で階段行列が得られる．つまり, ある i で $A^{(i)}$ が零行列になれば, $R^{(i)}$ は階段行列である．また, $A^{(1)}, \dots, A^{(m-1)}$ が零行列でなければ $R^{(m)}$ が階段行列である. □

Lemma 4.4.4. A を (m, n) 行列とする．$t \in \{ 1, \dots, m \}$ とする．(t, p) が t 行目の pivot であるとする．また $p < p_1 < \dots < p_l$ とし, A の $1, \dots, t$ 行目における $p_1, \dots, p_l$ 列目の成分は 0 であるとする．このとき, A を, 行基本変形を用いて, 次の条件を満たす行列 A' に変形できる.

1. A' の $t + 1, \dots, m$ 行目は A と等しい.
2. A' の $1, \dots, p - 1$ 列目は A と等しい.
3. A' の (t, p) 成分は 1.
4. A' の $(1, p), (2, p), \dots, (t - 1, p)$ 成分は 0.
5. $i \in \{ 1, \dots, t \}, j \in \{ 1, \dots, l \} \implies (i, p_j)$ 成分は 0.

▯

Proof. 構成法を与えることにより証明する.

A の (i, p) 成分を c_i とおく．$c_t \neq 0$ であるので, A の第 t 行を $\frac{1}{c_t}$ 倍した行列を $A^{(t)}$ とおく．このとき, $A^{(t)}$ の (t, p) 成分は 1 である.

$A^{(t)}$ の $t - 1$ 行目に t 行目の $-c_{t-1}$ 倍を加えて得られる行列を, $A^{(t-1)}$ とおく．このとき, $(t - 1, p)$ 成分は 0 である．$A^{(t-1)}$ の $t - 2$ 行目に t 行目の $-c_{t-2}$ 倍を加えて得られる行列を, $A^{(t-2)}$ とおく．このとき, $(t - 2, p)$ 成分は 0 である．以下同様に, $A^{(i)}$ の $i - 1$ 行目に t 行目の $-c_{i-1}$ 倍を加えて得られる行列を, $A^{(i-1)}$ とおく．このとき, $(i - 1, p)$ 成分は 0 である.

したがって, $A^{(1)}$ は, 以下の条件を満たす:

1. A' の $t + 1, \dots, m$ 行目は A と等しい.
2. A' の $1, \dots, p - 1$ 列目は A と等しい.

3. A' の (t, p) 成分は 1.
4. A' の $(1, p), (2, p), \ldots, (t-1, p)$ 成分は 0.
5. $i \in \{1, \ldots, t\}, j \in \{1, \ldots, l\} \implies (i, p_j)$ 成分は 0.

□

Theorem 4.4.5. 階段行列 A を, 行基本変形を用いて被約階段行列に変形できる. ▯

Proof. 構成法を与えることで示す.

A は (m, n)-行列で, その pivot は $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$ であるとする.

$A^{(r)} = A$ とし, $t = r$ として Lemma 4.4.4 を使って得られる行列を $A^{(r-1)}$ とおく. このとき, $A^{(r-1)}$ の p_r 列目は r 行目を除いて 0 である. また r 行目以降は被約階段行列である. つぎに, $A^{(r-1)}$ に対し, $t = r - 1$ として Lemma 4.4.4 を使って得られる行列を $A^{(r-2)}$ とおく. このとき, $A^{(r-2)}$ の p_{r-1} 列目は $r - 1$ 行目を除いて 0 である. また r 行目以降は被約階段行列である. 以下同様に繰り返し, $A^{(i)}$ に対して, $t = i$ として Lemma 4.4.4 を使って得られる行列を $A^{(i-1)}$ とおく. このとき, $A^{(1)}$ は被約階段行列である. □

Corollary 4.4.6. 行列 A を, 行基本変形を用いて被約階段行列に変形できる. ▯

Proof. 構成法を与えることで示す.

A に対し, Theorem 4.4.3 を使い階段行列 A' を得た後, A' に対し, Theorem 4.4.5 を使い被約階段行列 A を得ることができる. □

Remark 4.4.7. 行基本変形を用いて行列を被約階段行列に変形することを, **ガウスの消去法** (*Gaussian elimination*) とか**掃き出し法** (*row reduction*) と呼ぶこともある.

特に, 行基本変形を用いて階段行列を得ること (Theorem 4.4.3) を**前進消去** (*forward elimination*) と呼び, 行基本変形を用いて階段行列から被約階段行列を得ること (Theorem 4.4.5) を**後退代入** (*backward substitution*) と呼ぶことがある. ▯

行基本変形を用いて得られる被約階段行列が, 変形の手順によらず一意に定まることを示す. 次の補題が鍵となる.

Lemma 4.4.8. A, B を被約階段行列としサイズは (m, n) とする. また, P を m 次正則行列とする. $PA = B$ ならば $A = B$. ▯ 証明は Proof A.3.32.

これは次の様に言い換えることができる.

Corollary 4.4.9. X を (m, n)-行列とし, P, Q を m 次正則行列とする. PX も QX も被約階段行列なら $PX = QX$. ▯ 証明は Proof A.3.33.

行基本変形は左から基本行列をかけることであったであったので, 次が得られる.

Corollary 4.4.10. 行列 A から, 行基本変形で得られる被約階段行列はその変形手順によらず A のみによって決まる. ▯

単位行列は被約階段行列であったので次が得られる.

Corollary 4.4.11. 行列 A に対し以下は同値: 証明は Proof A.3.34.

1. A は n 次正則行列である.
2. 行基本変形を用いて A を E_n に変形できる.

□

Remark 4.4.12. A を (m,n)-行列とする．A と E_m を並べた行列 $\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right)$ を考える．この行列に対し, 正則行列 P を左からかけると

$$\begin{aligned} P\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} PA & PE_m \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} PA & P \end{array}\right) \end{aligned}$$

となる．行基本変形は左から基本行列をかけることであったので, $\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right)$ に行基本変形を繰り返して, $\left(\begin{array}{c|c} A' & P \end{array}\right)$ となったときには, $PA = A'$ となることがわかる．

この原理を用いると,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right)$$

に対し行基本変形を行い被約階段行列になるように変形をし．

$$\left(\begin{array}{c|c} S & P \end{array}\right)$$

という形に変形できたとする．ただし P は m 次正方行列である．このとき, $PA = S$ は被約階段行列であり, P は正則行列であるという条件をみたす．

とくに, A が n 次正方行列であり, $S = E_m$ となるように変形できた場合について考える．つまり,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \end{array}\right)$$

に対し行基本変形を行い被約階段行列になるように変形をし．

$$\left(\begin{array}{c|c} E_m & P \end{array}\right)$$

という形に変形できたとする．このとき, $P = A^{-1}$ である．

このように行基本変形を用いて逆行列を求めることができる． □

逆行列を基本変形で求められることから, 次がわかる．

証明は Proof A.3.35.

Corollary 4.4.13. n 次正則行列は, 基本行列の (0 個以上の) 積として書ける．(ただし, 0 個の基本行列の積は, n 次単位行列であるとする． □

4.5 階数の性質

ここでは, 行列の階数というものを定義し, その性質について紹介する．

Definition 4.5.1. A を被約階段行列とする．このとき, A の pivots の総数を**被約階段行列 A の階数**と呼ぶ． □

Definition 4.5.2. A を行列とする．A に行基本変形をし, 階数 r の被約階段行列が得られたとする．このとき, A **の階数** (*rank of* A) は r であるといい, $\mathrm{rank}(A) = r$ とする． □

階数 n の被役階段行列で n 次正方行列であるものは, n 次単位行列のみであるので, 正方行列 A が正則であるかを $\mathrm{rank}(A)$ を使って判定をすることもできる．

証明は Proof A.3.36.

Theorem 4.5.3. A が n 次正方行列であるとする．このとき, 次は同値:

1. A が正則
2. $\mathrm{rank}(A) = n$

□

階数について, 次の性質が知られている.

Theorem 4.5.4. A を (m, n)-行列とする. B を (n, k)-行列とする. このとき次が成り立つ:

証明は Proofs A.3.37 to A.3.39, A.3.42, A.3.43 and A.3.45 to A.3.47.

1. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$. Proof A.3.45.
2. $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$. Proof A.3.42.
3. $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$. Proof A.3.46.
4. $\mathrm{rank}(A) \leq m$. Proof A.3.38.
5. $\mathrm{rank}(A) \leq n$. Proof A.3.39.
6. P が m 次正則行列なら $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$. Proof A.3.47.
7. Q が n 次正則行列なら $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(A)$. Proof A.3.43.
8. A に行基本変形を用いて A' が得られるなら $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$. Proof A.3.37.

□

Remark 4.5.5. (m, n)-行列 A に対し, 行基本変形と列基本変形を用いることで,

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & O_{r,n-r} \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{array}\right)$$

という形に変形できる. このとき, $r = \mathrm{rank}(A)$ となる. これを A **の階数標準形**とか, (体上の) A **のスミス標準形** (*Smith normal form*) と呼ぶことがある. □

章末問題

略解は解説 B.3.1.

問題 4.1. 次の行列の逆行列を求めよ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

略解は解説 B.3.2.

問題 4.2. 次の等式を満たす正方行列 A は正則であることを示せ:

$$A^3 + A^2 + A + E_2 = O_{2,2}$$

略解は解説 B.3.3.

問題 4.3.

以下の行列 A に対し, A から行基本変形で得られる被約階段行列を求めよ. また, A の階数を求めよ.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

第 5 章

行列と連立一次方程式

ここでは多元連立一次方程式と行列の階数について説明する．まず連立方程式に関連する用語を定義した後, 行列の行基本変形について紹介する．また, 階段行列および階数について定義をし, その性質について紹介をする．

[1] であれば, 第 4 章, 第 5 章, 第 7 章が関連する．[2] であれば, 第 2 章が関連する．

5.1　連立方程式に関する用語の定義

ここでは連立方程式に関連する用語を定義し, 連立方程式の解の様子について具体例で説明をする．

$i \in \{ 1, \dots, m \}$, $j \in \{ 1, \dots, n \}$ に対し, 数 $a_{i,j}, b_j$ が与えられているとする．n 個の未知数 $x_1, \dots, x_n$ に関する次の方程式 (つまり, これら m 個の等式を全て満たす n 個の数の組 $x_1, \dots, x_n$ を求める問題のこと) を n **元連立一次方程式** (*system of linear equations for n unknowns*) (*simultaneous linear equations for n unknowns*) と呼ぶ:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

特に, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ であるとき, この方程式は**斉次** (*homogeneous*) であるという．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とおく[*1]と, 連立方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

は,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書くことができる．このとき, A を, **$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列** (*coefficient matrix of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．また, A と $\boldsymbol{b}$ を並べた $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array} \right)$ を C とするとき, C を, **$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列** (*augmented matrix of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を集めた集合を **$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間** (*space of solutions of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．つまり,

$$\mathcal{F} = \{\, \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \,\}$$

とおくと, $\mathcal{F}$ が $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間である．解の空間の元を **$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根** (*particular solution of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．解を考える際に数として実数のみを考えるときには, 解の空間を**実数解の空間** (*space of real solutions*) と呼ぶ．解を考える際に数として複素数を考えるときには, 解の空間を**複素数解の空間** (*space of complex solutions*) と呼ぶ．

Remark 5.1.1. 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間 $\mathcal{F}$ は空集合でないときについて考える．つまり連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つときについて考える．このとき, $\mathcal{F}$ は 1 元集合とは限らず, 無限集合となることもある．$\mathcal{F}$ に含まれる全ての元を, (0 個以上の) パラメータを使って表した式のことを, **一般解** (*general solution*) と呼ぶことがある．全ての解を表すために必要となるパラメータの個数 (の最小値) を**解の自由度** (*degree of freedom of solutions*) と呼ぶ．解の自由度が 0 であることは, 解の空間が一元集合[*2]であることと同値である．解の空間が一元集合であるときには, 特殊解と一般解はまったく同じとなる． □

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間と, 連立方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の解の空間が等しいとき, この 2 つの連立方程式は**方程式として同値** (*equivalent as equations*) であるという．連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を同値な連立方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ に変形することを, **方程式の同値変形** (*equivalence transformation of equations*) と呼ぶ．

連立方程式の解の空間の例をいくつか見る．

[*1] $\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{x}$ はボールド体である．通常のイタリック b や x とは区別して使っているので気をつけること．$\boldsymbol{b} \neq b$ であり $\boldsymbol{x} \neq x$ であるので読み間違えないこと．また自分で書くとには書き分け, 読み間違えないようにすること．

[*2] ただ一つの要素からなる集合を一元集合と呼ぶ．

Example 5.1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間を $\mathcal{F}$ とする. このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

と表せる. この場合, 解の空間 $\mathcal{F}$ は 1 元のみからなる集合である.

この方程式の一般解は,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

であり, この方程式の解の自由度は 0 である. また, この方程式の特殊解は,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

のみである. □

Example 5.1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の実数解の空間を $\mathcal{F}$ とする. このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. $x_1 = 5$ を満たせば x_2 の値は何でもよい.

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と表せる. 解の空間は無限集合である.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は通常の連立方程式の形で書き直すと以下のようになる:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$0 = 0$ は常に成り立つので, 取り除いても連立方程式の解は変化しないので, この連立方程式を次のように書き換えることができる:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \end{cases}$$

この (連立) 方程式には, x_2 という未知数が現れていないが, もともとの設定を考えると, これは x_1 と x_2 に関する方程式である.

この方程式の一般解は, パラメータ $c \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ c \end{pmatrix}$$

と書ける. この方程式の解の自由度は 1 である. また,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

や,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

など, 第 1 成分が 5 であるようなものは, この方程式の特殊解である. □

Example 5.1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間を $\mathcal{F}$ とする. このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 通常の連立方程式の形に書き直すと

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

となる. x_1, x_2 をどんな値にしても, $0 = 1$ が成り立つことはないので,

$$\mathcal{F} = \emptyset$$

である. つまり, 解の空間は空集合である.

この場合, この方程式の解はない. 解がない場合は, 解の自由度を考えることはしない. □

Remark 5.1.5. 連立方程式の解は次の 3 つのケースが考えられる:

1. 解の空間が空集合となる場合. つまり, 解がない場合.
2. 解の空間が 1 元からなる集合となる場合. つまり, ただ 1 つの解をもつ場合.
3. 解の空間が無数集合になる場合.

□

5.2 係数行列が被約階段行列である連立一次方程式

係数行列が被約階段行列である連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間について, ここでは考える.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とし, A が階数 r の被約階段行列であるとする. さらに,

$$(1, p(1)), \ldots, (r, p(r))$$

が A の pivots であるとし,

$$\{\, p(1), \ldots, p(r) \,\} \cup \{\, q(1), \ldots, q(n-r) \,\} = \{\, 1, \ldots, n \,\}$$

とおく. つまり A の pivot が現れない列を $q(1), \ldots, q(l)$ とおく. このとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の k 行目に着目する.

$1 \leq k \leq r$ のとき, k 行目は次の方程式である:

$$x_{p(k)} + \sum_{j=p(k)+1}^{n} a_{k,j} x_j = b_k.$$

したがって,

$$x_{p(k)} = b_k - \sum_{j=p(k)+1}^{n} a_{k,j} x_j \tag{5.1}$$

とかける. また, 被約階段行列において, pivot のある列は, pivot 以外の成分は 0 であることを思い出すと,

$$x_{p(k)} = b_k - \sum_{l=1}^{n-r} a_{k,q(l)} x_{q(l)} \tag{5.2}$$

と書き換えられる.

$r+1 \leq k$ のとき, k 行目は次の方程式である:

$$0 = b_k. \tag{5.3}$$

したがって, Equations (5.2) and (5.3) を満たす $\boldsymbol{x}$ を集めた集合が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間である. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間を $\mathcal{F}$ とおき, $\mathcal{F}$ を求める.

最初に, 次の条件を満たす k が存在するときを考える:

1. $b_k \neq 0$.
2. $r < k \leq m$.

このとき, Equation (5.3) は

$$0 = b_k \neq 0$$

という方程式であり, $\boldsymbol{x}$ をどんな値にしても成り立つことはない. したがって, この場合は

$$\mathcal{F} = \emptyset$$

である.

次に次の条件を満たすときを考える:

1. $r < k \leq m \implies b_k = 0$.

このとき, Equation (5.3) は

$$0 = b_k = 0$$

という方程式であり, $\boldsymbol{x}$ をどんな値にしても常に成り立つ. Equation (5.2) があるので, $x_{p(l)}$ は, $x_{p(l)+1}, x_{p(l)+2}, \ldots, x_n$ の値できまる. それ以外の $x_{q(l)}$ は自由に値をとれる. したがって, 解の空間 $\mathcal{F}$ は以下のように求めることができる. $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対し, $(n-r)$ 変数の関数 $f_i(t_1, \ldots, t_{n-r})$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned} f_{q(l)}(t_1, \ldots, t_{n-r}) &= t_l. \\ f_{p(l)}(t_1, \ldots, t_{n-r}) &= b_l - \sum_{k=1}^{n-r} a_{l,q(k)} t_k. \end{aligned}$$

とおく. また, 考えている数の集合を K とおく. このとき,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ f_2(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ f_n(c_1, \ldots, c_{n-r}) \end{pmatrix} \middle| \, c_1, \ldots, c_{n-r} \in K \right\} \tag{5.4}$$

と表すことができる. このとき, **解の自由度** (*degree of freedom of solutions*) は $n-r$ であるという. つまり, この場合の解の自由度は $n - \mathrm{rank}(A)$ である. 以上の方法により, 係数行列が被約階段行列であるときには, 連立一次方程式の解の空間はすぐ求められる.

以下では, 係数行列が $(2,2)$-行列であるときについて, 具体的に見ていくことにする: 次の例は, 拡大係数行列が階数 2 の被約階段行列であり, 係数行列も階数 2 の被約階段行列である場合である. この場合は, 解の空間は一元集合である.

Example 5.2.1. p, q が与えられているとする. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

の場合について考える. 係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので, この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x_1 = p \\ x_2 = q \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる. したがって, 解の空間 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\}$$

この方程式の自由度は 0 である. □

拡大係数行列が階数 2 の被約階段行列であり, 係数行列は階数 1 の被約階段行列である場合は, 以下の 2 つの例であるいずれの場合も解の空間は空集合である.

Example 5.2.2. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合について考える. 係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる. $0 = 1$ が成り立つことはないので, 解の空間は空集合である. □

Example 5.2.3. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．$0 = 1$ が成り立つことはないので, 解はない． □

拡大係数行列が階数 1 の被約階段行列であり, 係数行列も階数 1 の被約階段行列である場合は, 以下の 2 つの例である．いずれの場合も解の空間は無限集合となる．また, 解の自由度は 1 である．

Example 5.2.4. a, p が与えられているとする．拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = p \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．これは

$$\begin{cases} x_1 = p - ax_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

と変形できる．つまり, x_2 の値が t であるときには, x_1 は $p - at$ と自動的に値がきまる．したがって, 実数解の集合 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} p - at \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書ける．すこし変形して,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

のように書くこともできる．この方程式の解の自由度は 1 である． □

Example 5.2.5. p が与えられているとする．拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x_2 = p \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．x_2 の値が p であれば, x_1 の値は何でも良い．したがって, 実数解の集合 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ p \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書ける．すこし変形して,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

のように書くこともできる．この方程式の解の自由度は 1 である． □

次の例は, 拡大係数行列が階数 1 の被約階段行列であり, 係数行列が階数 0 の被約階段行列である場合である．この場合は解の空間は空集合である．

Example 5.2.6. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．$0 = 1$ が成り立つことはないので, 解の空間は空集合である． □

次の例は, 拡大係数行列が階数 0 の被約階段行列であり, 係数行列も階数 0 の被約階段行列である場合である．この場合は解の空間は無限集合である．また, 解の自由度は 2 である．

Example 5.2.7. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．x と y の値が何であれ $0 = 0$ は成り立つ．したがって, 実数解の空間 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \middle| \, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

と書ける．すこし変形して,

$$\mathcal{F} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

のように書くこともできる．x_1 の値とは独立に x_2 の値を決められるので, パラメータは t, s の 2 つが必要になる．この方程式の解の集合は 2 である． □

5.3 一般の多元連立一次方程式の解の空間

証明は Proof A.4.1.

Lemma 5.3.1. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列, C を (k,m)-行列とし, $A' = CA$, $\boldsymbol{b}' = C\boldsymbol{b}$ とする．$\mathcal{F}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間, $\mathcal{F}'$ を $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の解の空間とする．このとき, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. □

証明は Proof A.4.2.

Theorem 5.3.2. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列, P を m-次正則行列とし, $A' = CA$, $\boldsymbol{b}' = C\boldsymbol{b}$ とする．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は方程式として同値. □

証明は Proof A.4.3.

Corollary 5.3.3. 拡大係数行列に対する行基本変形は, 方程式の同値変形である．つまり, 次が成り立つ: $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array} \right)$ に行基本変形をし, $\left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array} \right)$ が得られたとする．このとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の集合 $\mathcal{F}$, $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の解の集合 $\mathcal{F}'$ とすると, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. □

Remark 5.3.4. 一般に連立一次方程式は拡大係数行列を行基本変形で被約階段行列に変形することで, 簡単に解ける形になるので, それを解くと良い． □

Remark 5.3.5. 行基本変形を方程式の同値変形だと思ったとき, 行基本変形を用いて階段行列を得る変形 (Theorem 4.4.3) は未知数を “加減法” により消去していることに他ならない. また, 行基本変形を用いて階段行列から被約階段行列を得る変形は (Theorem 4.4.5) 未知数を “代入法” により減らしていることに他ならない. □

A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列とし, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ とする. このとき, $\operatorname{rank}(\tilde{A})$ は $\operatorname{rank}(A)$ または $\operatorname{rank}(A)+1$ である. $\tilde{A}$ から行基本変形で得られる被役階段行列を S とする. S の $(n+1)$-列目に pivot があるとき, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right) + 1$ である. また, S の $(n+1)$-列目に pivot がないとき, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ である. したがって次が得られる.

Theorem 5.3.6. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列とし, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ とおく. このとき, 以下は同値:

1. $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A) + 1$.
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間は空集合.

□

Theorem 5.3.7. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列とし, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ とおく. このとき, 以下は同値:

1. $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$.
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間は空集合ではない.

また, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間が空集合ではないとき, この方程式の解の自由度は $n - \operatorname{rank}(A)$. □

Corollary 5.3.8. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列とし, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ とおく. このとき, 以下は同値:

1. $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A) = n$.
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間は一元集合である.

□

Corollary 5.3.9. A を n-次正則行列, $\boldsymbol{b}$ を $(n,1)$-行列とする. このとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間は $\left\{ A^{-1}\boldsymbol{b} \right\}$ という一元集合である. □

Theorem 5.3.10. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列とし, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ とおく. このとき, 以下は同値:

証明は Proof A.4.4.

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間が空集合ではない.
2. Y が $YA = O_{n,1}$ を満たす $(1,m)$-行列なら, $Y\boldsymbol{b} = O_{1,1}$.

□

5.4　斉次連立一次方程式

A を (m,n) 行列とし, $\mathbf{0}_m = O_{m,1}$ とする．このとき,

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$$

を斉次連立一次方程式と呼んだ．$\mathbf{0}_n = O_{n,1}$ は $A\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_m$ を満たすので, $\mathbf{0}_n$ は $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ の解空間に必ず含まれる．$\mathbf{0}_n$ を**斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ の自明な解** (*trivial solution for* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$) と呼ぶ．斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ の解の空間 $\mathcal{K}$ が, 自明な解のみからなる一元集合であるとき, 斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ は自明な解のみをもつという．つまり, $\{\, \mathbf{0}_n \,\} = \mathcal{K}$ であるとき, 斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ は自明な解のみをもつという．また, 自明な解以外の解をもつとき, 斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ の非自明な解を持つという．つまり, $\{\, \mathbf{0}_n \,\} \subsetneq \mathcal{K}$ であるとき, 斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ は自明な解のみをもつという．

Proposition 5.4.1. A を (m,n)-行列とする．このとき, 以下は同値:

1. $\operatorname{rank}(A) = n$
2. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ が自明な解しか持たない．つまり, 解の集合が $\{\, \mathbf{0}_n \,\}$ となる．

□

Proposition 5.4.2. A を (m,n)-行列とする．このとき, 以下は同値:

1. $\operatorname{rank}(A) = n$
2. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ が非自明な解をもつ．

□

Corollary 5.4.3. A を (m,n)-行列とする．$m < n$ ならば, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ は非自明な解をもつ． □

証明は Proofs A.4.5 and A.4.6.

Proposition 5.4.4. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ の解の空間を $\mathcal{K}$ とする．このとき, 以下が成り立つ:

Proof A.4.5.

1. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{K} \implies \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathcal{K}$.

Proof A.4.6.

2. a を数とする．$\boldsymbol{u} \in \mathcal{K} \implies a\boldsymbol{u} \in \mathcal{K}$.

□

証明は Proof A.4.7.

Theorem 5.4.5. A を (m,n)-行列, $\boldsymbol{b}$ を $(m,1)$-行列とし, $\mathbf{0}_m = O_{m,1}$ とする．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の集合を $\mathcal{F}$ とし, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_m$ の解の集合を $\mathcal{K}$ とする．$\boldsymbol{v} \in \mathcal{F}$ とする．このとき,

$$\mathcal{F} = \{\, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in \mathcal{K} \,\}.$$

□

章末問題

問題 5.1. 次の連立一次方程式 略解は解説 B.4.1.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

躓いたら問題 4.3 も確認.

について考える.

1. この連立一次方程式の係数行列を答えよ.
2. この連立一次方程式の拡大係数行列を答えよ.
3. この連立一次方程式を解け. つまり, 解の空間 $\mathcal{F}$ を求めよ.

問題 5.2. 連立一次方程式 略解は解説 B.4.2.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 4.3 も確認.

の実数解の空間 $\mathcal{F}$ を求めよ.

問題 5.3. 略解は解説 B.4.3.

連立一次方程式

躓いたら問題 4.3 も確認.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

の実数解の空間 $\mathcal{F}$ を求めよ.

問題 5.4. $\boldsymbol{x}$ に関する連立方程式 略解は解説 B.4.4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の実数解の空間 $\mathcal{F}$ をもとめよ.

問題 5.5. $\boldsymbol{x}$ に関する連立方程式 略解は解説 B.4.5.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の実数解の空間 $\mathcal{F}$ をもとめよ.

問題 5.6. $\boldsymbol{x}$ に関する連立方程式 略解は解説 B.4.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の実数解の空間 $\mathcal{F}$ をもとめよ.

第 6 章

行列式

ここでは, 行列式に関して説明をする.

6.1　行列式の定義

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

に対し, $(n-1)$-次正方行列 $\pi_{l,k}(A)$[*1]を

$$\pi_{l,k}(A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l-1,1} & a_{l-1,2} & \cdots & a_{l-1,k-1} & a_{l-1,k+1} & a_{l-1,k+2} & \cdots & a_{l-1,n} \\ \hline a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \cdots & a_{l+1,k-1} & a_{l+1,k+1} & a_{l+1,k+2} & \cdots & a_{l+1,n} \\ a_{l+2,1} & a_{l+2,2} & \cdots & a_{l+2,k-1} & a_{l+2,k+1} & a_{l+2,k+2} & \cdots & a_{l+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & a_{n,k+2} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

で定義する. つまり l 行目と k 行目を忘れることで得られる $(n-1)$-次正方行列が $\pi_{l,k}(A)$ である.

Definition 6.1.1. $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列 A に対し, $\det(A)$ を以下のように定義する: $n = 1$ のとき,

$$\det(A) = \det\big(\big(a_{1,1}\big)\big) = a_{1,1}$$

とする. $n > 1$ のとき, 1 行目と k 行目を忘れることで得られる $(n-1)$-次正方行列を $\pi_{1,k}(A)$ とし,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det(\pi_{1,j}(A))$$

で定義する. $\det(A)$ を $\det(A)$ を A **の行列式** (*determinant of* A) と呼ぶ. □

[*1] この記法ここだけの記法.

Example 6.1.2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする．このとき,

$$\det(A) = ad - bc$$

である．

例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

となる．このように, 行列式は負の値も取りうる． □

Example 6.1.3. 3 次正方行列のときには次のように計算する:

$$\begin{aligned}
\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}) &= a\det(\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}) - b\det(\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}) + c\det(\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}) \\
&= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\
&= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.
\end{aligned}$$

□

定義から簡単に得られる等式を紹介する．

証明は Proof A.5.1.

Proposition 6.1.4. A を n 次正方行列とする．A を下半三角行列とし, その対角成分が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であるとする．このとき, $\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$. □

証明は Proof A.5.2.

Proposition 6.1.5. A を n 次正方行列とする．A を上半三角行列とし, その対角成分が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であるとする．このとき, $\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$. □

Corollary 6.1.6. A を n 次正方行列とする． A を対角行列とし, その対角成分が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であるとする．このとき, $\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$. □

これらのことから以下が計算できる．

Example 6.1.7. α を数とすると,

$$\det(\alpha E_n) = \alpha^n.$$

□

Example 6.1.8. $\det(E_n) = 1$. □

Example 6.1.9. $\det(O_{n,n}) = 0$. □

基本行列 $F(i;c)$, $G(i,j;c)$ は三角行列であるので, 同様に計算できる．

Example 6.1.10. 基本行列 $F(i;c)$ に対し, $\det(F(i;c)) = c$. □

Example 6.1.11. $i \neq j$ とする．基本行列 $G(i,j;c)$ に対し, $\det(G(i,j;c)) = 1$. □

定義では 1 行目で展開したが, 実は列で展開しても同じ値が得られる.

明は Proof A.5.3.

Lemma 6.1.12. $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列 A に対し,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\pi_{i,1}(A)).$$

□

Lemma 6.1.12 により次がすぐわかる.

Theorem 6.1.13. n 次正方行列 A に対し, $\det(A) = \det({}^tA)$. □

1 行目や 1 列目以外の行や列で展開することもできる.

Theorem 6.1.14. $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列 A に対し,

証明は Proof A.5.5.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{t+j} a_{t,j} \det(\pi_{t,j}(A)).$$

□

Theorem 6.1.15. $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列 A に対し,

証明は Proof A.5.4.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+t} a_{i,t} \det(\pi_{i,t}(A)).$$

□

特定の行や列の成分が全て 0 なら, Theorems 6.1.14 and 6.1.15 にしたがって展開すれば, 行列式が 0 になることが示せる.

Proposition 6.1.16. A を n 次正方行列とし, $1 \leq t \leq n$ とする. A の t 行目の成分が全て 0 であるならば, $\det(A) = 0$ である. □

Proposition 6.1.17. A を n 次正方行列とし, $1 \leq t \leq n$ とする. A の t 列目の成分が全て 0 であるならば, $\det(A) = 0$ である. □

Example 6.1.18. $k < l$ とし, 基本行列 $H(k,l)$ について考える. $\det(H(k,l)) = -1$ であることを示す.

基本行列 $H(k,l)$ の l 行目の成分は k 列目を除きすべて 0 である. したがって, l 行目で展開することで,

$$\det(H(k,l)) = (-1)^{l+k} \cdot 1 \cdot \det(\pi_{l,k}(H(k,l)))$$

であることがわかる. また, $\pi_{l,k}(H(k,l))$ では $H(k,l)$ の k 列目は取り除かれているので, $(k,l-1)$-成分が 1 である. また, $\pi_{l,k}(H(k,l))$ の k 行目の成分は $l-1$ 列目を除きすべて 0 である. したがって, k 行目で展開することで,

$$\det(\pi_{l,k}(H(k,l))) = (-1)^{k+l-1} \cdot \det(\pi_{k,l-1}(\pi_{l,k}(H(k,l))))$$

であることがわかる. $\pi_{k,l-1}(\pi_{l,k}(H(k,l)))$ は, $H(k,l)$ の, k 行目と l 行目, k 列目と l 列目を取り除いたものであるので, 単位行列 E_{n-2} である. $\det(E_{n-2}) = 1$ であるから,

$$\det(H(k,l)) = (-1)^{l+k} \cdot (-1)^{k+l-1} = -1$$

である. □

6.2　行列式の閉じた式よる表示

ここでは, 再帰的に定義されている行列式の定義を展開し, 閉じた式による表示を与えることを目標とする. そのために, まずは順列に関する用語を定義する.

数の列を数列と呼ぶが, とくに有限の長さの数列のときには,

$$[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$$

のように初項から順番に並べて表記することにする.

Definition 6.2.1. $1, 2, \ldots, n$ がちょうど 1 度ずつ現れる数列を $\{ 1, 2, \ldots, n \}$ の**順列** (*permutation*) と呼ぶ. $\{ 1, 2, \ldots, n \}$ 上の**置換**と呼ぶこともある.

$\{ 1, 2, \ldots, n \}$ の順列をすべて集めた集合を S_n とおき, n **次対称群** (*n-th symmetric group*) と呼ぶ. □

Example 6.2.2. S_n には, $n!$ 個の順列が属する:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{ [1] \}. \\
S_2 &= \{ [1, 2], [2, 1] \}. \\
S_3 &= \{ [1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1] \}.
\end{aligned}$$

□

Definition 6.2.3. 順列 $\sigma = [\sigma(1), \ldots, \sigma(n)] \in S_n$ に対し,

$$I(\sigma) = \{ (i, j) \mid i < j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j) \}$$

とおき, I に属する組の総数 $\#I(\sigma)$ を σ の**転倒数** (*Inversion number*) と呼ぶ.

転倒数が偶数である順列を**偶置換** (*even permutation*) と呼び, 転倒数が奇数である順列を**奇置換** (*odd permutation*) と呼ぶ. □

Definition 6.2.4. 順列 $\sigma \in S_n$ に対し,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ は偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ は奇置換}) \end{cases}$$

と定義し, σ の**符号** (*sign*) と呼ぶ. □

Example 6.2.5. S_3 について考える.

$$\begin{aligned}
I([1, 2, 3]) &= \emptyset \\
I([1, 3, 2]) &= \{ (2, 3) \} \\
I([2, 1, 3]) &= \{ (1, 2) \} \\
I([2, 3, 1]) &= \{ (1, 3), (2, 3) \} \\
I([3, 1, 2]) &= \{ (1, 2), (1, 3) \} \\
I([3, 2, 1]) &= \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}([1,2,3]) &= 1\\
\operatorname{sgn}([1,3,2]) &= -1\\
\operatorname{sgn}([2,1,3]) &= -1\\
\operatorname{sgn}([2,3,1]) &= 1\\
\operatorname{sgn}([3,1,2]) &= 1\\
\operatorname{sgn}([3,2,1]) &= -1.
\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 6.2.6. $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列 A に対し,

証明は Proof A.5.6.

$$\det(A) = \sum_{\sigma=[\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)]\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$\square$

すでに基本行列 $H(i,j)$ の行列式は知っているが, Theorem 6.2.6 を用いて計算する.

Example 6.2.7. $i<j$ とし, 1 から n を順に並べたものを i と j だけ入れ替えた順列を τ とする. つまり

$$\tau = [1,2,\ldots,i-1,j,i+1,i+2,\ldots,j-1,i,j+1,j+2,\ldots,n]$$

とする.

$$I(\tau) = \{\,(i,i+1),(i,i+2),\ldots,(i,j-1)\,\} \cup \{\,(i+1,j),(i+2,j),\ldots,(j-1,)\,\} \cup \{\,(i,j)\,\}$$

である. したがって, $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ である.

基本行列 $H(i,j)$ の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とし, Theorem 6.2.6 を使って展開する. $\sigma \neq \tau$ ならば $a_{1,\sigma()},\ldots,a_{n.\sigma(n)}$ のいずれかは 0 であるので, その積は 0 である. したがって,

$$\det(H(i,j)) = \operatorname{sgn}(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} = \operatorname{sgn}(\tau) = -1$$

である. $\square$

6.3 行列式と行基本変形

行基本変形をすると行列式がどのように変化するかについて見る.

Theorem 6.3.1. A を n 次正方行列とする.

証明は Proofs A.5.7 to A.5.9.

1. A の t 行目を α 倍して得られる行列を A' とすると, $\det(A') = \alpha\det(A)$. Proof A.5.7.
2. A の t 行目に s 行目の α 倍を加えて得られる行列を A' とすると, $\det(A') = \det(A)$. Proof A.5.8.
3. A の t 行目と s 行目を入れ替えて得られる行列を A' とすると, $\det(A') = -\det(A)$. Proof A.5.9.

$\square$

行基本変形は, 基本行列を左からかけることであったのでこれは次のように言い換えられる.

Lemma 6.3.2. A を n 次正方行列とする.

1. $\det(F(i;\alpha)A) = \alpha\det(A)$.
2. $\det(G(i,j;\alpha)A) = \det(A)$.
3. $\det(H(i,j)A) = -\det(A)$.

□

いま, $\det(F(i;\alpha)) = \alpha$, $\det(G(i,j;\alpha)) = 1$, $\det(H(i,j)) = -1$ であるので, 次のように書くこともできる.

Lemma 6.3.3. A を n 次正方行列とする.

1. $\det(F(i;\alpha)A) = \det(F(i;\alpha))\det(A)$.
2. $\det(G(i,j;\alpha)A) = \det(G(i,j;\alpha))\det(A)$.
3. $\det(H(i,j)A) = \det(H(i,j))\det(A)$.

□

正則行列は基本行列の積でかけるので, Lemma 6.3.3 から, 次がわかる.

証明は Proofs A.5.10 and A.5.11.

Lemma 6.3.4. P を正則行列とする.

Proof A.5.10.

Proof A.5.11.

1. $\det(P) \neq 0$.
2. n 次正方行列 A に対し, $\det(PA) = \det(P)\det(A)$.

□

A を n 次正方行列とし, 行基本変形で S に変形できたとする. このとき $PA = S$ を満たす正則行列が存在する. $A = P^{-1}S$ となるが, P^{-1} も正則であるから次が成り立つ.

Lemma 6.3.5. A を n 次正方行列とし, $PA = S$ を満たす正則行列 P と被役階段行列 S を考える. このとき, $\det(A) = \det(P^{-1})\det(S)$ □

被役階段行列 S は, 階数が n 未満なら n 行目の成分はすべて 0 であるので, $\det(S) = 0$ である. 従って次がわかる.

Lemma 6.3.6. A を n 次正方行列とする. $\operatorname{rank}(A) < n$ ならば $\det(A) = 0$. □

$\det(AB)$ について考える. A が正則のときは, Lemma 6.3.4 を使えば, $\det(A)\det(B)$ に等しいことがわかる. A が正則でないときは, AB も正則ではないので, Lemma 6.3.6 を使えば, $\det(AB)$ も $\det(A)$ も 0 であるので $\det(AB)$ と $\det(A)\det(B)$ は等しく共に 0 である. したがって次がわかる.

Theorem 6.3.7. n 次正方行列 A, B に対し, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

P を正則行列とすると, $P^{-1}P = E_n$ であるので, $\det(P^{-1})\det(P) = \det(E_n) = 1$ である.

Theorem 6.3.8. A を正則行列とする. このとき, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. □

Lemmas 6.3.4 and 6.3.6 は次のようにまとめることができる.

Theorem 6.3.9. A を n 次正方行列とする. このとき, 以下の 2 つは同値:

1. $\operatorname{rank}(A) < n$.

2. $\det(A) = 0$.

また, 以下の 2 つは同値:

1. $\mathrm{rank}(A) = n$.
2. $\det(A) \neq 0$.

□

ここまでは行列式について調べてきたが, 以下では, (行列式とは限らない), n 次正方行列 A に対して, 数 $D(A)$ を対応させる関数 D について考える. 関数 D が, 行基本変形に対して以下を満たしているとする.

1. A の t 行目を α 倍して得られる行列を A' とすると, $D(A') = \alpha D(A)$.
2. A の t 行目に s 行目の α 倍を加えて得られる行列を A' とすると, $D(A') = D(A)$.
3. A の t 行目と s 行目を入れ替えて得られる行列を A' とすると, $D(A') = -D(A)$.

行基本変形に対して, 行列式と同じふるまいをするので, 正方行列 A と正則行列 P に対して, $D(PA) = \det(P)D(A)$ を満たすことがわかる. したがって, 被役階段行列 S に対して $\det(S) = D(S)$ を満たすなら, $D(A) = \det(A)$ が成り立つことがわかる. つまり, 次が成り立つ.

Proposition 6.3.10. n 次正方行列 A に対して, 数 $D(A)$ を対応させる関数 D が, 以下を満たしているとする.

1. n 次正方行列 A に対し,
   (a) A の t 行目を α 倍して得られる行列を A' とすると, $D(A') = \alpha D(A)$.
   (b) A の t 行目に s 行目の α 倍を加えて得られる行列を A' とすると, $D(A') = D(A)$.
   (c) A の t 行目と s 行目を入れ替えて得られる行列を A' とすると, $D(A') = -D(A)$.
2. 被役階段行列 S に対し,
   (a) $\mathrm{rank}(S) = n$ ならば $D(S) = 1$.
   (b) $\mathrm{rank}(S) < n$ ならば $D(S) = 0$.

このとき, 任意の n 次正方行列 A に対し, $D(A) = \det(A)$. つまり, D と $\det$ は関数として一致する. □

6.4 行列式の多重線型性と交代性

Theorem 6.4.1. A を $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列, A' を $a'_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列, A'' を $a''_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列とする. $t \in \{1,\ldots,n\}$ α を数とする.

証明は Proofs A.5.12 and A.5.13.

Proof A.5.12.

1. A' の t 行目を α 倍したものを A とすると, $\det(A) = \alpha \det(A')$.

つまり, A, A' が

$$\begin{cases} a_{i,j} = a'_{i,j} & (i \neq t) \\ a_{i,j} = \alpha a'_{i,j} & (i = t) \end{cases}$$

をみたすなら,

$$\det(A) = \alpha \det(A').$$

Proof A.5.13.

2. A, A', A'' は t 行目以外は等しいとし, A の t 行目は A' の t 行目と A'' の t 行目の和であるとすると, $\det(A) = \det(A') + \alpha(A'')$.
つまり, A, A', A'' が

$$\begin{cases} a_{i,j} = a'_{i,j} = a''_{i,j} & (i \neq t) \\ a_{i,j} = a'_{i,j} + a''_{i,j} & (i = t) \end{cases}$$

をみたすなら,

$$\det(A) = \det(A') + \alpha(A'').$$

□

証明は Proof A.5.14.

Theorem 6.4.2. $n > 1$ とし, $t < s \leq n$ とする. n 次正方行列 A の s 行目と t 行目を入れ替えたものが A' ならば, $\det(A) = -\det(A')$.

つまり, A を $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列, A' を $a'_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列とする. A, A' が

$$\begin{cases} a_{i,j} = a'_{i,j} & (i \notin \{ t, s \}) \\ a_{i,j} = a'_{s,j} & (i = t) \\ a_{i,j} = a'_{t,j} & (i = s) \end{cases}$$

をみたすなら,

$$\det(A) = -\det(A').$$

□

証明は Proof A.5.15.

Theorem 6.4.3. $n > 1$ とし, $t < s \leq n$ とする. n 次正方行列 A の s 行目と t 行目が等しいなら $\det(A) = 0$.

つまり, A を $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列とする. $t, s \in \{ 1, \ldots, n \}$, $t < s$ とする.

$$j \in \{ 1, \ldots, n \} \implies a_{s,j} = a_{t,j}$$

をみたすなら,

$$\det(A) = 0.$$

□

Remark 6.4.4. Theorem 6.4.1 に挙げた性質 Items 1 and 2 を行列式が満たしていることを, 行列式は t 行目に関して線型性をもつという. また, 行列式が全ての行に関して線型性をもつということを, 行列式は行に関して多重線型性を持つという.

Theorem 6.4.3 に挙げた性質を行列式が満たしていることを, 行列式は t 行目と s 行目に関して交代的であるという. また, 行列式が全ての行に関して交代的であることを, 行列式は行に関して交代的であるという.

$1+1 \neq 0$ のとき[*2], Theorem 6.4.2 に挙げた性質から Theorem 6.4.3 に挙げた性質が導かれる. Theorem 6.4.2 に挙げた性質を行列式が満たしていることを, 行列式は行に関して交代的であるということも多い. □

Theorem 6.1.13 を使うと, Theorems 6.4.1 to 6.4.3 から, 行列式が列に関して多重線形かつ交代的であることがわかる.

Theorem 6.4.5. A を $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列, A' を $a'_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列, A'' を $a''_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列とする. $t \in \{1,\dots,n\}$ α を数とする.

1. A' の t 列目を α 倍したもを A とすると, $\det(A) = \alpha \det(A')$.
   つまり, A, A' が
   $$\begin{cases} a_{i,j} = a'_{i,j} & (j \neq t) \\ a_{i,j} = \alpha a'_{i,j} & (j = t) \end{cases}$$
   をみたすなら,
   $$\det(A) = \alpha \det(A').$$
2. A, A', A'' は t 列目以外は等しいとし, A の t 列目は A' の t 列目と A'' の t 列目の和であるとすると, $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.
   つまり, A, A', A'' が
   $$\begin{cases} a_{i,j} = a'_{i,j} = a''_{i,j} & (j \neq t) \\ a_{i,j} = a'_{i,j} + a''_{i,j} & (j = t) \end{cases}$$
   をみたすなら,
   $$\det(A) = \det(A') + \alpha(A'').$$

□

Theorem 6.4.6. $n > 1$ とし, $t < s \leq n$ とする. n 次正方行列 A の s 列目と t 列目を入れ替えたものが A' ならば, $\det(A) = -\det(A')$.

つまり, A を $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列, A' を $a'_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列とする. A, A' が

$$\begin{cases} a_{i,j} = a'_{i,j} & (j \notin \{t,s\}) \\ a_{i,j} = a'_{i,s} & (j = t) \\ a_{i,j} = a'_{i,t} & (j = s) \end{cases}$$

をみたすなら,

$$\det(A) = -\det(A').$$

□

[*2] 実数や複素数を考えているときには成り立つので通常は気にする必要はない.

Theorem 6.4.7. $n > 1$ とし, $t < s \leq n$ とする. n 次正方行列 A の s 列目と t 列目が等しいなら $\det(A) = 0$.

つまり, A を $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列とする. $t, s \in \{1, \ldots, n\}$, $t < s$ とする.

$$i \in \{1, \ldots, n\} \implies a_{i,s} = a_{i,t}$$

をみたすなら,

$$\det(A) = 0.$$

□

n 次正方行列 A に対し数 $D(A)$ を対応させる関数 D について考える. D は行に関して多重線型かつ交代的であるとする. つまり, 以下を満たすとする:

1. A' の t 行目を α 倍したものを A とすると, $\det(A) = \alpha \det(A')$.
2. A, A', A'' は t 行目以外は等しいとし, A の t 行目は A' の t 行目と A'' の t 行目の和であるとすると, $\det(A) = \det(A') + \alpha(A'')$.
3. $n > 1$ とし, $t < s \leq n$ とする. n 次正方行列 A の s 行目と t 行目が等しいなら $\det(A) = 0$.

このような関数 D は, 行基本変形に対して次を満たす.

証明は Proofs A.5.17 to A.5.19.

Lemma 6.4.8. n 次正方行列 A に対し数 $D(A)$ を対応させる関数 D が, D は行に関して多重線型かつ交代的であるとする. このとき, 以下が成り立つ:

Proof A.5.17.

Proof A.5.18.

Proof A.5.19.

1. A' のある行を α 倍して得られる行列を A とすると $D(A) = \alpha D(A')$.
2. A' のある行に別の行の α 倍を加えて得られる行列を A とすると $D(A) = D(A')$.
3. A' のある行と別の行とを入れ替えた行列を A とすると $D(A) = -D(A')$.

□

また, 多重線型性から, 次が成り立つ:

証明は Proof A.5.20.

Lemma 6.4.9. n 次正方行列 A に対し数 $D(A)$ を対応させる関数 D が, D はある t 行目に関して線型であるとする. このとき, A の k 行目の成分がすべて 0 ならば $D(A) = 0$. □

よって, $\mathrm{rank}(S) < n$ である被役階段行列 S に対して, $D(S) = 0$ となることがわかる. 従って, $D(E_n) = 1$ を仮定すれば, この関数 D は以下を満たしている:

1. n 次正方行列 A に対し,
   (a) A の t 行目を α 倍して得られる行列を A' とすると, $D(A') = \alpha D(A)$.
   (b) A の t 行目に s 行目の α 倍を加えて得られる行列を A' とすると, $D(A') = D(A)$.
   (c) A の t 行目と s 行目を入れ替えて得られる行列を A' とすると, $D(A') = -D(A)$.
2. 被役階段行列 S に対し,
   (a) $\mathrm{rank}(S) = n$ ならば $D(S) = 1$.

(b) $\mathrm{rank}(S) < n$ ならば $D(S) = 0$.

したがって, Proposition 6.3.10 から, $D(A) = \det(A)$ となることがわかる.

Theorem 6.4.10. n 次正方行列 A に対し数 $D(A)$ を対応させる関数 D が行に関して多重線型かつ交代的であり, $D(E_n)$ を満たすとする. このとき, n 正方行列 A に対し, $D(A) = \det(A)$. つまり, D と det は関数として一致する. □

6.5 余因子と余因子行列

Definition 6.5.1. n 次正方行列 A に対し, $(-1)^{i+j}\det(\pi_{i,j}(A))$ を, A の (i,j)-**余因子** ((i,j)-*cofactor*) と呼ぶ. ただし, A から i 行目と j 行目を取り除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列を, $\pi_{i,j}(A)$ で表している. □

Theorems 6.1.14 and 6.1.15 を余因子をつかって言い換えると以下のようになる:

Theorem 6.5.2. A を, $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列 A とし, $\Delta_{i,j}$ を A の余因子とする. このとき以下が成り立つ:

1. $1 \le t \le n$ に対し,
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{t,j}\Delta_{t,j}$$
2. $1 \le t \le n$ に対し,
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,t}\Delta_{i,t}.$$

□

これらの, 右辺は $a_{t,j}\Delta_{t,j}$ の様に, 添字が完全に揃っている. そうでない場合も考えると次のようになる.

Lemma 6.5.3. A を, $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列 A とし, $\Delta_{i,j}$ を A の余因子とする. このとき, 以下が成り立つ:

証明は Proofs A.5.21 and A.5.22.

1. $s, t \in \{1, \ldots, n\}$ に対し,
$$\sum_{j=1}^{n} a_{s,j}\Delta_{t,j} = \begin{cases} \det(A) & (s = t) \\ 0 & (s \ne t). \end{cases}$$
2. $s, t \in \{1, \ldots, n\}$ に対し,
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,s}\Delta_{i,t} = \begin{cases} \det(A) & (s = t) \\ 0 & (s \ne t). \end{cases}$$

Proof A.5.21.

Proof A.5.22.

□

Definition 6.5.4. A を n 次正方行列 A とし, $\Delta_{i,j}$ を A の余因子とする. このとき, $\Delta_{j,i}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列を, $\mathrm{adj}(A)$ で表し, A の**余因子行列** (*adjugate matrix*) とか**古典随伴行列** (*classical adjoint matrix*) と呼ぶ. □

x2 (2024-12-15 10:57)

Remark 6.5.5. A の余因子行列は, (i,j)-余因子 $\Delta_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列の転置である. □

証明は Proof A.5.23.

Proposition 6.5.6. A を n 次正方行列とし, $\tilde{A} = \operatorname{adj}(A)$ とする. このとき,

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)E_n.$$

□

また, Proposition 6.5.6 から, 次がすぐわかる.

Proposition 6.5.7. A を n 次正方行列とし, $\tilde{A} = \operatorname{adj}(A)$ とする. $\det(A) \neq 0$ ならば,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

□

Example 6.5.8.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とし, $\Delta_{i,j}$ を A の (i,j)-余因子とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(A) &= {}^t\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} \end{pmatrix} \\
&= {}^t\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(d) & (-1)^{1+2}\det(c) \\ (-1)^{2+1}\det(b) & (-1)^{2+2}\det(a) \end{pmatrix} \\
&= {}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である. したがって, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ のときには,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

□

Example 6.5.9.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

とし, $\Delta_{i,j}$ を A の (i,j)-余因子とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(A) &= {}^t\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix} \\
&= {}^t\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ei - fh & -(di - fg) & dh - eg \\ -(bi - ch) & ai - cg & -(ah - bg) \\ bf - ce & -(af - cd) & ae - bd \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．したがって, $\det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0$ のときには,

$$A^{-1} = \frac{1}{aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg} \begin{pmatrix} ei - fh & -(di - fg) & dh - eg \\ -(bi - ch) & ai - cg & -(ah - bg) \\ bf - ce & -(af - cd) & ae - bd \end{pmatrix}.$$

□

Remark 6.5.10. 余因子行列によって, 逆行列の表示が得られるが, 多数の行列式を計算する必要があり, 計算は非常に大変である．一般には行基本変形により逆行列を求める方法が, 具体的な例の計算には有効である場合が多い． □

Corollary 6.5.11. A を n 次正方行列とし, $\tilde{A}$ を A の余因子行列とする． 証明は Proofs A.5.24 and A.5.25.

1. $\det(A)^{n-1} = \det(\tilde{A})$. Proof A.5.25.
2. 次は同値: Proof A.5.24.
   (a) $\det(A) = 0$.
   (b) $\det(\tilde{A}) = 0$.

□

連立一次方程式について考える．A を n 次正方行列, $\boldsymbol{b}$ を $(n,1)$ 行列 (n 項数ベクトル) とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

について考える．A が正則であるときには, 解はただ一つ存在し, $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ が解である．$A^{-1}\boldsymbol{b}$ は次のように表すことができる．

Theorem 6.5.12. A を (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である n 次正方行列, $\boldsymbol{b}$ を第 i 成分が b_i である n 項数ベクトル, $\boldsymbol{x}$ を第 i 成分が x_i である n 項数ベクトルとする．$\det(A) \neq 0$ のとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は, 証明は Proof A.5.26.

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-2} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_1 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix})$$

で与えられる．つまり, $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \right)$ と列ベクトル表示されているとき,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \right))$$

で与えられる． □

Example 6.5.13.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}) = 76$$
$$x_1 = \frac{1}{76}\det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}) = \frac{-10}{76}$$
$$x_2 = \frac{1}{76}\det(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}) = \frac{-12}{76}$$
$$x_1 = \frac{1}{76}\det(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}) = \frac{10}{76}$$

である, したがって $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は,

$$\frac{1}{76}\begin{pmatrix} -10 \\ = 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

□

Remark 6.5.14. Proof A.5.26 の解の公式は, **クラメルの公式** (*Cramer's formula*) と呼ばれる. 行列のサイズが大きくなると, 大きなサイズの行列式を複数計算することになる.

一般には, 吐き出し法で解くほうが簡単であることが多い. □

第 7 章

固有値と固有ベクトル

この章では, 固有値と固有ベクトルについて定義し, 行列の対角化について説明する.

[1] であれば, 第 3 章が関連する. また, 第 18–21 章には, 関連する内容について, 難しいことも含めて, 詳しく書かれている. [2] であれば, 第 6 章が関連する. 特に, 6.1, 6.2, 6.3 が関連する.

7.1 一次独立性

$(m,1)$-行列のことを m 項数ベクトルと呼んだ. $\mathbf{0} = O_{m,1}$ とおく. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を m 項数ベクトルとする. $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ かつ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$ を満たす数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ があるとき, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次従属一次従属であるといい, また, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次従属でないとき, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次独立であるといった.

Lemma 7.1.1. $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right)$ と列ベクトル表示されているとする. $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が一次従属であるなら, $\operatorname{rank}(A) < n$. $\square$

証明は Proof A.6.1.

Lemma 7.1.2. $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right)$ と列ベクトル表示されているとする. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解をもつならば, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次従属. $\square$

証明は Proof A.6.2.

正方行列のときには, Lemmas 7.1.1 and 7.1.2 から次がわかる.

Proposition 7.1.3. A を n 次正方行列とし, $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right)$ と列ベクトル表示されているとする. このとき以下は同値:

1. A が非正則.
2. $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が一次従属.

また, 以下は同値:

1. A が正則である.
2. $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次独立.

$\square$

(i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列 A について考える. $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{m'} \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n'} \leq m$ とする. a_{i_k, j_l} を (k,l)-成分とする (m', n')-行列を A の $\{ i_1, i_2, \ldots, i_{m'} \}$-行, $\{ j_1, j_2, \ldots, j_{n'} \}$-列に関する**小行列** (*submatrix*) と呼ぶ.

特に, 行と列を n' 個ずつ選んで, $\{ i_1, i_2, \ldots, i_{n'} \}$-行, $\{ j_1, j_2, \ldots, j_{n'} \}$-列に関する小

行列 A' を考えると, A' は n' 次正方行列である. $\det(A')$ を n' 次の**小行列式** (*minor*) と呼ぶ.

Example 7.1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 13 & 5 \\ 21 & 3 & 23 & 4 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix}$$

とする. $\{1, 2\}$-行 $\{2, 4\}$-列に関する小行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

であり, 小行列式は $2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -7$. □

証明は Proof A.6.5.

Proposition 7.1.5. $n \leq m$ とし, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を m 項数ベクトルとする. $A = \left(\boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{a}_2 \mid \cdots \mid \boldsymbol{a}_n \right)$ と列ベクトル表示されているとする. このとき次は同値:

1. A の n 次小行列式で 0 でないものがある.
2. $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次独立.

□

このことから, 以下がわかる.

Corollary 7.1.6. $A = \left(\boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{a}_2 \mid \cdots \mid \boldsymbol{a}_n \right)$ と列ベクトル表示されているとする.

$$\begin{aligned} I &= \{ (i_1, \ldots, i_k) \mid (\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}) \text{ が一次独立.} \} \\ r &= \max \{ k \mid (i_1, \ldots, i_k) \in I \} \\ r' &= \max \{ k \mid k \text{ 次小行列式で } 0 \text{ でないものがある.} \} \end{aligned}$$

とすると, $r = r' = \operatorname{rank}(A)$. □

7.2 固有値と固有ベクトルの定義

ここでは, 固有値や固有ベクトルに関連する用語を定義し, その性質について紹介する.

Definition 7.2.1. A を n 次正方行列とする. λ を数とする. $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{0}$ ではない n 項ベクトルとする. 次の条件を満たすとき $\boldsymbol{v}$ は**固有値 λ に属する A の固有ベクトル** (*eigenvector belonging to the eigenvalue* λ) であるという:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

固有値 λ に属する A の固有ベクトルが存在するとき, λ は **A の固有値** (*eigenvlue of* A) であるという. □

Example 7.2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 に属する A の固有ベクトル. □

Example 7.2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 0 に属する A の固有ベクトル. □

Example 7.2.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

となるが,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は第 1 成分と第 2 成分の値が異なるので等しくなることはない. したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は A の固有ベクトルにはなりえない. □

$\boldsymbol{v}$ が固有値 λ に属する A の固有ベクトルであるための条件は

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

であるが, これを書き換えると,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{v} - \lambda E_n\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} \\ (A - \lambda E_n)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である．どのような λ が A の固有値になるかがわかれば, その λ に対し, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A-\lambda E_n)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解の空間を求めることで, A の固有ベクトルがすべてわかる．したがって, どのような λ が A の固有値になるかがわかれば固有ベクトルがすべて求められることになる．λ が A の固有値として現れるということは, $(A-\lambda E_n)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が $\mathbf{0}$ 以外の解をもつということであるので, これは, $(A-\lambda E_n)$ が正則であるかそうでないかを調べればわかる．このことは以下のようにまとめることができる．

Definition 7.2.5. A を n 次正方行列とする．x に関する多項式

$$\det(A-xE_n)$$

を A **の固有多項式** (A **の特性多項式**)(*characteristic polynomial of* A) と呼ぶ. □

Proposition 7.2.6. A を n 次正方行列とする．$f(x)$ を A の固有多項式とする．つまり $f(x)=\det(A-xE_n)$ とする．このとき 次は同値:

1. λ が A の固有値.
2. λ は $f(x)=0$ の根 (つまり $f(\lambda)$=0 を満たす).

□

Remark 7.2.7. A を 2 次正方行列とすると, A の固有多項式 $f(x)$ は 2 次式である．よって $f(x)=0$ は 2 次方程式である．したがって, A の成分が実数であっても, A の固有値が実数になるとは限らない. □

Definition 7.2.8. λ を A の固有値であるとする．このとき, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A-\lambda E_n)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解の空間

$$\{\, \boldsymbol{v} \mid (A-\lambda E_n)\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \,\}$$

を**固有値** λ **に属する** A **の固有空間** (*eigenspace associated with* λ) と呼ぶ. □

Remark 7.2.9. λ を A の固有値であるとし, V を固有値 λ に属する A の固有空間とする．V は, $\mathbf{0}$ と固有値 λ に属する A の固有ベクトル全体からなる集合である. □

固有空間は $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A-\lambda E_n)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間であるので, Proposition 5.4.4 から次がわかる．

Proposition 7.2.10. A を n 次正方行列とし, λ を A の固有値とする．V を固有値 λ に属する A の固有空間とする．このとき, 次が成り立つ:

1. $\boldsymbol{v}\in V$ とし, c を数とするとすると, $c\boldsymbol{v}\in V$.
2. $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$ とすると, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\in V$.

□

また, $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$ に対し, $\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$ とおけば, $\|\bar{\boldsymbol{v}}\|=1$ であるので次がわかる．

Corollary 7.2.11. A を n 次正方行列とし, λ を A の固有値とする．このとき, 固有値 λ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\|\boldsymbol{v}\|=1$ となるものが存在する. □

Remark 7.2.12. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ を n 次正方行列 A の固有多項式とする．つまり $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\det(A-xE_n)$ とする．このとき,

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n=O_{n,n}$$

が成り立つ．この定理はケーリー–ハミルトンの定理と呼ばれる． □

Remark 7.2.13. 2 次正方行列の場合は次の様にかける:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする．固有多項式は,

$$t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$$

である．このとき,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = O_{2,2}$$

が成り立つ．実際,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = O_{2,2}$$

である． □

7.3 行列の対角化

ここでは, 行列の対角化に関連する用語を定義し, 対角化可能性に関する必要十分条件を紹介する．

A を 2 次正方行列とする．

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$$

を固有値 λ に属する A の固有ベクトルとする．

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$$

を固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が一次独立であるとする．このとき,

$$P = \begin{pmatrix} v & w \\ v' & w' \end{pmatrix}$$

とおくと, P は正則である．さらに,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる．

Remark 7.3.1. 正方行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在するとき, A **は** P **によって対角化できる** (A *is diagonalizable with* P) という．P および $P^{-1}AP$ を求めることを, A を対角化するという． □

Remark 7.3.2. 正方行列がいつでも対角化できるわけではない. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は対角化できない. 対角化出来ない理由は Remark 7.3.5 で述べる. □

証明は Proof A.6.3.

Theorem 7.3.3. A を 2 次正方行列とする. このとき, 次は同値:

1. A が対角化可能である.
2. 次を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ がとれる:
   (a) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は一次独立.
   (b) $\boldsymbol{v}_i$ は固有値 λ_i に属する A の固有ベクトル.

□

また, 次が知られている.

証明は Proof A.6.4.

Theorem 7.3.4. A を 2 次正方行列とする. $\boldsymbol{v}$ は固有値 λ に属する A の固有ベクトル, $\boldsymbol{w}$ は固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする. $\lambda \neq \mu$ ならば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は一次独立. □

Remark 7.3.5. A を 2 次正方行列とする. x に関する方程式 $\det(A - xE_2) = 0$ は, 2 次方程式である.

$\det(A - xE_2) = 0$ が異なる解を持つときには, 異なる固有値 2 つ取れる. それぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ選んでくれば, Theorem 7.3.4 から, それらは一次独立であることがわかる. したがって, Theorem 7.3.3 から A は対角化可能であることがわかる.

$\det(A - xE_2) = 0$ が重根を持つときには, 固有値は一つしかない. λ をその固有値とする. $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の空間を V とおく. つまり V は λ に属する A の固有空間である.

$\det(A - xE_2) = 0$ が重根 λ をもっても, $\operatorname{rank}(A - \lambda E_2) = 0$ ならば V から一次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が取れる. したがって, Theorem 7.3.3 から A は対角化可能であることがわかる.

$\det(A - xE_2) = 0$ が重根 λ をもっているときに, $\operatorname{rank}(A - \lambda E_2) = 1$ である場合を考える. $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に属する A の固有ベクトルとする. このとき, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であり, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である. $\operatorname{rank}(A - \lambda E_2) = 1$ が 1 であるので, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は, 変数 c を使って, $c\boldsymbol{v}$ と書くことができる. つまり, $\boldsymbol{w}$ も固有値 λ に属する A の固有ベクトルとすると, $\boldsymbol{v}$ のスカラー倍として書ける. よって, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は一次独立ではない. したがって, 一次独立である 2 つの固有ベクトルが取れないことがわかる. したがって, Theorem 7.3.3 から A は対角化可能ではないことがわかる. 実は, この場合には, 対角化はできないものの,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

のように上三角行列に変形できる正則行列 P が取れることが知られている. □

7.4 対角化の計算例

行列の対角化の応用の一つに, 冪の計算がある. 一般の正方行列の冪の計算は複雑であるが, 対角行列の冪の計算は簡単であるため, そこに帰着するというものである. 以下では, その計算方法

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合で説明する.

まず A の固有値を求める.

$$A - xE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 6 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \det(A - xE_2) &= \det(\begin{pmatrix} 1-x & 6 \\ 1 & -x \end{pmatrix}) \\ &= -(1-x)x - 6 = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

である. したがって, x に関する方程式

$$\det(A - xE_2) = 0$$

は,

$$(x-3)(x+2) = 0$$

と書けるので, 解は, 3 と -2 の 2 つである. したがって, A の固有値も, 3 と -2 の 2 つである.

まず, 固有値 3 に属する固有ベクトルを求める. $\lambda = 3$ とするとき

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の $\mathbf{0}$ 以外の解を求めれば, それが $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルである.

$$\begin{aligned} A - \lambda E_2 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-3 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. したがって, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$A - \lambda E_2\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

である．1 行目を $\frac{1}{-2}$ 倍すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目に 1 行目の -1 倍を足すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解の空間は，

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \text{ は数} \right\}$$

と書ける．したがって，例えば

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 3 に属する固有ベクトルである．

次に，固有値 -2 に属する固有ベクトルを求める．$\lambda = -2$ とするとき

$$A - \lambda E_2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の $\mathbf{0}$ 以外の解を求めれば，それが $\lambda = -2$ に属する固有ベクトルである．

$$\begin{aligned} A - \lambda E_2 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．したがって，$\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の拡大係数行列は，

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

である．1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目に 1 行目の -1 倍を足すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$A - \lambda E_2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解の空間は，

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \text{ は数} \right\}$$

と書ける．例えば

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 -2 に属する固有ベクトルである．

固有ベクトルが求められたので対角化をする．

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\det(P) = \det(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 3 - (-2) = 5 \neq 0$$

であるので P は正則であり，

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である．

このとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

である．一方，**??**でみたように，

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

であるので，

$$\begin{aligned} P^{-1}A^nP &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \\ A^n &= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

とできる．したがって，

$$
\begin{aligned}
A^n &= P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 3^n 2 \\ -(-2)^n & (-2)^n 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 3^{n+1}2 + (-2)^{n+1}3 \\ 3^n - (-2)^n & 3^n 2 + (-2)^n 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このような行列の冪の一つの応用として，数列の一般項の計算について見てみる．

Example 7.4.1.

$$
\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}
$$

で定義される数列を考え，その一般項を求める．この数列の一般項を求める．

$$
\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}
$$

とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{n+2} &= \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{n+1}6 + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_{n+1}
\end{aligned}
$$

とできる．

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

であったから，

$$
\boldsymbol{v}_{n+2} = A\boldsymbol{v}_{n+1}
$$

となる．この式は $n \leq 0$ であれば成り立つ．つまり，

$$
\boldsymbol{v}_k = A\boldsymbol{v}_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots)
$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_n \\
&= A\boldsymbol{v}_{n-1} \\
&= A(A\boldsymbol{v}_{n-2}) = A^2\boldsymbol{v}_{n-2} \\
&= A^2(A\boldsymbol{v}_{n-3}) = A^3\boldsymbol{v}_{n-3} \\
&= A^3(A\boldsymbol{v}_{n-4}) = A^4\boldsymbol{v}_{n-4} \\
&= \cdots = A^{n-1}\boldsymbol{v}_1
\end{aligned}$$

である．先ほど求めた A^n の計算結果を使うと，

$$A^{n-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n-(-2)^n & 3^n2+(-2)^n3 \\ 3^{n-1}-(-2)^{n-1} & 3^{n-1}2+(-2)^{n-1}3 \end{pmatrix}$$

であり，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{v}_n \\
&= A^{n-1}\boldsymbol{v}_0 \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n-(-2)^n & 3^n2+(-2)^n3 \\ 3^{n-1}-(-2)^{n-1} & 3^{n-1}2+(-2)^{n-1}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n-(-2)^n \\ 3^{n-1}-(-2)^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$a_n = \frac{3^n-(-2)^n}{5}$$

である．　□

7.5　実対称行列の固有値

ここでは，実数を成分とする対称行列を考え，その固有値について調べる．

$$A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & u \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\det(A-xE_2) &= \det(\begin{pmatrix} s-x & t \\ t & u-x \end{pmatrix}) \\
&= (s-x)(u-x)-t^2 \\
&= x^2-(s+u)x+su-t^2
\end{aligned}$$

となる．x に関する方程式

$$\det(A-xE_2) = 0$$

の解を調べたいので判別式 D を計算すると,

$$\begin{aligned} D &= (-(s+u))^2 - 4(su - t^2) \\ &= s^2 + 2us + u^2 - 4su + 4t^2 \\ &= s^2 - 2us + u^2 + 4t^2 \\ &= (s-u)^2 + 4t^2. \end{aligned}$$

となる．$D \geq 0$ なので, 複素数解を持つことはなく, 常に実数解をもつ.

$D > 0$ のときについて考える．このときには, 実数解が 2 つ存在するので, λ, μ とする. $\lambda \neq \mu$ である．$\boldsymbol{v}$ を $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ である固有値 λ に属する A の固有ベクトルでとする．$\boldsymbol{w}$ を $\|\boldsymbol{w}\| = 1$ である固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする．このとき,

$$\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

であるが, $\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は ${}^t(A\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}$ の $(1,1)$-成分と等しい．また,

$$\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mu\boldsymbol{w} \rangle = \mu \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

であるが, $\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle$ は ${}^t\boldsymbol{v}\,A\boldsymbol{w}$ の $(1,1)$-成分と等しい．いま A は対称行列であるので ${}^tA = A$ であるから,

$${}^t(A\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\,{}^tA\,\boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\,A\boldsymbol{w}$$

となる．したがって,

$$\lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \mu \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

となるが,

$$(\lambda - \mu) \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

となる．$\lambda \neq \mu$ であるので,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

であり, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は直交する．したがって, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を並べてできる行列は直交行列であるから, A は対角化可能であることがわかる.

また, 重根となるのは, $t = 0$ かつ $s = u$ のときであるので,

$$A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = sE_2$$

のときである．$A = sE_2$ のときは, すでに対角行列である．つまり単位行列 E_2 により A は対角化できるが, E_2 も直交行列である.

これらの事実をまとめると以下のようになる.

Theorem 7.5.1. A を実対称行列とする．このとき, A の固有値は実数である．また, λ, μ が相異なる A の固有値ならば, λ に属する A の固有ベクトルと, μ に属する A の固有ベクトルとは直交する. □

Theorem 7.5.2. A を実対称行列とする．このとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P が存在する. □

章末問題

問題 7.1. 略解は??.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

躓いたら??も確認.

とする. A の固有多項式を求めよ. また, A の固有値をすべて求めよ.

問題 7.2. 略解は??.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 7.1 も確認.

は対角化可能か判定せよ.

問題 7.3. 略解は??.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 5.4 も確認.

は対角化可能か判定せよ.

問題 7.4. 略解は??.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 5.5, 5.6 and 7.1 も確認.

とする. このとき次に答えよ:

1. 固有ベクトルをすべて求めよ.
2. A を対角化せよ.
3. A^n を求めよ.

問題 7.5. 次の行列 A は直交行列か判定せよ. 略解は??.

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

問題 7.6. 次の行列を直交行列により対角化せよ: 略解は??.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

躓いたら問題 7.5 も確認.

問題 7.7. 次で定義される数列 (Fibonacci 数列) の一般項を求めよ: 略解は??.

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ a_2 = a_1 = 1 \end{cases}$$

参考文献

[1] 澁川陽一. 線形代数学講義. 学術図書出版社, November 2019.
[2] 数学教科書編集委員会. 基礎理学線形代数学. 学術図書出版社, October 2009.
[3] 和久井道久. 大学数学ベーシックトレーニング. 日本評論社, March 2013.

付録 A

命題の証明

A.1 証明に必要となる基本的な事実

数とは体の元であったので, 数の四則演算に関して以下の計算規則が成り立つ.

Lemma A.1.1. a, b, c を数とすると以下が成り立つ:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$.
2. $0+a = a+0 = a$.
3. $a+(-a) = (-a)+a = 0$.
4. $a+b = b+a$.
5. $(ab)c = a(bc)$.
6. $1a = a1 = a$.
7. $a \neq 0$ ならば, $\frac{1}{a}a = a\frac{1}{a} = 1$.
8. $ab = ba$.
9. $a(b+c) = ab+ac$.
10. $(a+b)c = ac+bc$.

□

また, 実数に対して次の事実が成り立つ. これは既知とする.

Lemma A.1.2. a を実数とすると以下が成り立つ:

1. $a^2 \leq 0$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$.

□

実二次関数に関する次の事実も既知とする.

Lemma A.1.3. a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする. t に関する二次関数 $f(t) = at^2 + bt + c$ を考える. このとき次が同値:

1. 全ての $t \in \mathbb{R}$ において, $f(t) \geq 0$.
2. $b^2 - 4ac \leq 0$

□

A.2　行列の演算に関する命題の証明

ここでは, Chapter 3 に現れる命題の証明を行う.

Proof A.2.1 (3.2.55 – 1). A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. $T = {}^tA$ とおくと, T は (n,m)-行列である. このとき, ${}^tT$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す.

T の (i,j)-成分を $t_{i,j}$ とすると, $t_{i,j} = a_{i,j}$ である. また, ${}^tT$ の (i,j)-成分は, $t_{j,i}$ である. したがって, ${}^tT$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j}$ である. □

Proof A.2.2 (3.2.55 – 2). A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. A' を (m,n)-行列とし, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする. このとき, ${}^t(A+A')$ の (i,j)-成分と ${}^tA + {}^tA'$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A + A'$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j} + a'_{i,j}$ である. したがって, ${}^t(A+A')$ の (i,j)-成分は, $a_{j,i} + a'_{j,i}$ である. 一方, ${}^tA$ の (i,j)-成分は $a_{j,i}$ であり, ${}^tA'$ の (i,j)-成分は $a'_{j,i}$ である. したがって, ${}^tA + {}^tA'$ の (i,j)-成分は, $a_{j,i} + a'_{j,i}$ である. □

Proof A.2.3 (3.2.55 – 3). A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. α を数とする. このとき, ${}^t(\alpha A)$ の (i,j)-成分と $\alpha\,{}^tA$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

αA の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}$ である. したがって, ${}^t(\alpha A)$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{j,i}$ である. 一方, ${}^tA$ の (i,j)-成分は $a_{j,i}$ である. したがって, $\alpha\,{}^tA$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{j,i}$ である. □

Proof A.2.4 (3.2.55 – 4). A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (n,k)-行列とし, B の (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. $T = {}^tA$, $S = {}^tB$ とする. このとき, ${}^t(AB)$ の (i,j)-成分と ST の (i,j)-成分が等しいことを示す.

AB の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}b_{l,j}$ である. したがって, ${}^t(AB)$ の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}b_{l,i}$ である. 一方, S の (i,j)-成分を $s_{i,j}$ とすると, $S = {}^tB$ であるので $s_{i,j} = b_{j,i}$ である. また, T の (i,j)-成分を $t_{i,j}$ とすると, $T = {}^tA$ であるので $t_{i,j} = a_{j,i}$ である. ST の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^{n} s_{i,l}t_{l,j}$ である. $\sum_{l=1}^{n} s_{i,l}t_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} b_{l,i}a_{j,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}b_{l,i}$ であるので, ST の (i,j)-成分は, ${}^t(AB)$ の (i,j)-成分と等しい. □

Proof A.2.5 (3.2.44 – 1a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. C を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $c_{i,j}$ とする. このとき, $(A+B)+C$ の (i,j)-成分と $A+(B+C)$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A+B$ の (i,j) 成分は $a_{i,j}+b_{i,j}$ であるので, $(A+B)+C$ の (i,j)-成分は $(a_{i,j}+b_{i,j})+c_{i,j}$ である. $B+C$ の (i,j) 成分は $b_{i,j}+c_{i,j}$ であるので, $A+(B+C)$ の (i,j)-成分は $a_{i,j}+(b_{i,j}+c_{i,j})$ である. したがって, Lemma A.1.1 より, $(A+B)+C$ の (i,j)-成分と $A+(B+C)$ の (i,j)-成分が等しい.

□

Proof A.2.6 (3.2.44 – 1b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. このとき, $A + O_{m,n}$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A + O_{m,n}$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j} + 0$ であるが, Lemma A.1.1 より, $a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$ である. □

Proof A.2.7 (3.2.44 – 1c). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. このとき,

$A+(-A)$ の (i,j)-成分が 0 であることを示す.

$-A$ の (i,j)-成分は, $-a_{i,j}$ である. $A+(-A)$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j}-a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $a_{i,j}-a_{i,j}=0$ である. □

Proof A.2.8 (3.2.44 – 1d). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. このとき, $A+B$ の (i,j)-成分と $B+A$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A+B$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j}+b_{i,j}$ である. $B+A$ の (i,j)-成分は, $b_{i,j}+a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $a_{i,j}+b_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ である. □

Proof A.2.9 (3.2.44 – 2a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. α,β を数とする. このとき, $(\alpha\beta)A$ の (i,j)-成分と $\alpha(\beta A)$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$(\alpha\beta)A$ の (i,j)-成分は, $(\alpha\beta)a_{i,j}$ である. βA の (i,j)-成分は, $(\beta a_{i,j}$ であるので, $\alpha(\beta A)$ の (i,j)-成分は, $\alpha(\beta a_{i,j})$ である. Lemma A.1.1 より, $(\alpha\beta)a_{i,j}=\alpha(\beta a_{i,j})$ である. □

Proof A.2.10 (3.2.44 – 2b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. このとき, $1A$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$1A$ の (i,j)-成分は, $1a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $1a_{i,j}=a_{i,j}$ である. □

Proof A.2.11 (3.2.44 – 3a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. α, β を数とする. このとき, $(\alpha+\beta)A$ の (i,j)-成分と $\alpha A+\beta A$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$(\alpha+\beta)A$ の (i,j)-成分は, $(\alpha+\beta)a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $(\alpha+\beta)a_{i,j}=\alpha a_{i,j}+\beta a_{i,j}$ である. αA の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}$ であり, βA の (i,j)-成分は, $\beta a_{i,j}$ である. したがって, $\alpha A+\beta A$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}+\beta a_{i,j}$ である. □

Proof A.2.12 (3.2.44 – 3b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. α を数とする. このとき, $\alpha(A+B)$ の (i,j)-成分と $\alpha A+\alpha B$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A+B$ の (i,j)-成分は $a_{i,j}+b_{i,j}$ であるので, $\alpha(A+B)$ の (i,j)-成分は $\alpha(a_{i,j}+b_{i,j})$ である. Lemma A.1.1 より, $\alpha(a_{i,j}+b_{i,j})=\alpha a_{i,j}+\alpha b_{i,j}$ である. αA の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}$ であり, αB の (i,j)-成分は, $\alpha b_{i,j}$ である. したがって, $\alpha A+\alpha B$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}+\alpha b_{i,j}$ である. □

Proof A.2.13 (3.2.47 – 1a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. C を (k,l)-行列とし, (i,j)-成分を $c_{i,j}$ とする. $F=AB$, $S=BC$ とする. このとき, FC の (i,j)-成分と AS の (i,j)-成分が等しいことを示す.

F の (i,j) 成分を $f_{i,j}$ とおくと, $f_{i,j}=\sum_{p=1}^{n}a_{i,p}b_{p,j}$ である. したがって, FC の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{k}f_{i,q}c_{q,j} &= \sum_{q=1}^{k}\left(\sum_{p=1}^{n}a_{i,p}b_{p,q}\right)c_{q,j}\\ &= \sum_{q=1}^{k}\sum_{p=1}^{n}a_{i,p}b_{p,q}c_{q,j}\\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{k}a_{i,p}b_{p,q}c_{q,j}\end{aligned}$$

である．一方, S の (i,j) 成分を $s_{i,j}$ とおくと, $s_{i,j} = \sum_{u=1}^{k} b_{i,u}c_{u,j}$ である．したがって, AS の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}\sum_{v=1}^{n} a_{i,v}s_{v,j} &= \sum_{v=1}^{n} a_{i,v}\left(\sum_{u=1}^{k} b_{v,u}c_{u,j}\right)\\ &= \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{k} a_{i,v}b_{v,u}c_{u,j}\\ &= \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{k} a_{i,v}b_{v,u}c_{u,j}\end{aligned}$$

である． □

Proof A.2.14 (3.2.47 – 1b)．A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．このとき, AE_n の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$\delta_{i,j}$ をクロネッカーの δ とすると, E_n の (i,j)-成分は $\delta_{i,j}$ である．AE_n の (i,j)-成分は, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j}$ である．$\delta_{j,j} = 1$ であるが, $k \neq j$ に対して, $\delta_{k,j} = 0$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j} &= \sum_{k\in\{\,1,2,\dots,n\,\}} a_{i,k}\delta_{k,j}\\ &= a_{i,j}\delta_{j,j} + \sum_{k\in\{\,1,2,\dots,n\,\}\setminus\{\,j\,\}} a_{i,k}\delta_{k,j}\\ &= a_{i,j}\cdot 1 + \sum_{k\in\{\,1,2,\dots,n\,\}\setminus\{\,j\,\}} a_{i,k}\cdot 0\\ &= a_{i,j}.\end{aligned}$$

□

Proof A.2.15 (3.2.47 – 1c)．A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．このとき, E_mA の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$\delta_{i,j}$ をクロネッカーの δ とすると, E_m の (i,j)-成分は $\delta_{i,j}$ である．E_mA の (i,j)-成分は, $\sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k}a_{k,m}$ である．$\delta_{i,i} = 1$ であるが, $k \neq i$ に対して, $\delta_{i,k} = 0$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k}a_{k,j} &= \sum_{k\in\{\,1,2,\dots,m\,\}} \delta_{i,k}a_{k,j}\\ &= \delta_{i,i}a_{i,j} + \sum_{k\in\{\,1,2,\dots,m\,\}\setminus\{\,i\,\}} \delta_{i,k}a_{k,j}\\ &= 1a_{i,j} + \sum_{k\in\{\,1,2,\dots,m\,\}\setminus\{\,i\,\}} 0a_{k,j}\\ &= a_{i,j}.\end{aligned}$$

□

Proof A.2.16 (3.2.47 – 2a)．A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．A' を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする．B を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする．$S = A + A'$ とする．このとき, SB の (i,j)-成分と $AB + A'B$ の (i,j)-成分が等しいことを示す．

S の (i,j)-成分を $s_{i,j}$ とすると, $s_{i,j} = a_{i,j} + a'_{i,j}$ である. したがって SB の (i,j)-成分は,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} s_{i,t}b_{t,j} &= \sum_{t=1}^{n}(a_{i,t} + a'_{t,j})b_{t,j} \\ &= \sum_{t=1}^{n}(a_{i,t}b_{t,j} + a'_{t,j}b_{t,j}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a'_{t,j}b_{t,j}\end{aligned}$$

である. 一方, AB の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j}$, $A'B$ の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a'_{i,t}b_{t,j}$ である. したがって, $AB + A'B$ の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a'_{i,t}b_{t,j}$ である. □

Proof A.2.17 (3.2.47 – 2b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. B' を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b'_{i,j}$ とする. $S = B + B'$ とする. このとき, AS の (i,j)-成分と $AB + AB'$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

S の (i,j)-成分を $s_{i,j}$ とすると, $s_{i,j} = b_{i,j} + b'_{i,j}$ である. したがって AS の (i,j)-成分は,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}s_{t,j} &= \sum_{t=1}^{n} a_{i,t}(b_{t,j} + b'_{t,j}) \\ &= \sum_{t=1}^{n}(a_{i,t}b_{t,j} + a_{i,t}b'_{t,j}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b'_{t,j}\end{aligned}$$

である. 一方, AB の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j}$, AB' の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b'_{t,j}$ である. したがって, $AB + AB'$ の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b'_{t,j}$ である. □

Proof A.2.18 (3.2.47 – 3a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. α を数とする. このとき, $(\alpha A)B$ の (i,j)-成分と $\alpha(AB)$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

αA の (i,j)-成分は $\alpha a_{i,j}$ である. したがって, $(\alpha A)B$ の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t}b_{t,j}$ である. 一方 AB の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j}$ である. したがって, $\alpha(AB)$ の (i,j)-成分は $\alpha\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j} = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t}b_{t,j}$ である. □

Proof A.2.19 (3.2.47 – 3b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. α を数とする. このとき, $\alpha(AB)$ の (i,j)-成分と $A(\alpha B)$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

AB の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j}$ である. したがって, $\alpha(AB)$ の (i,j)-成分は $\alpha\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j} = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t}b_{t,j}$ である. 一方 αB の (i,j)-成分は $\alpha b_{i,j}$ である. したがって, $A(\alpha B)$ の (i,j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}\alpha b_{t,j} = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t}b_{t,j}$ である. □

Proof A.2.20 (3.2.51). A を (m,n) 行列とする.

$1+(-1)=0$ であるので,

$$
\begin{aligned}
0A &= (1+(-1))A \\
&= 1A+(-1)A \\
&= A-A \\
&= O_{m,n}
\end{aligned}
$$

である.

$O_{k,m}+(-1)O_{k,m}=O_{k,m}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
O_{k,m}A &= (O_{k,m}+(-1)O_{k,m})A \\
&= O_{k,m}A+((-1)O_{k,m})A \\
&= O_{k,m}A+(-1)(O_{k,m}A) \\
&= O_{k,m}
\end{aligned}
$$

である.

$O_{n,k}+(-1)O_{n,k}=O_{n,k}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
AO_{n,k} &= A(O_{n,k}+(-1)O_{n,k}) \\
&= AO_{n,k}+A((-1)O_{n,k}) \\
&= AO_{n,k}+(-1)(AO_{n,k}) \\
&= O_{n,k}
\end{aligned}
$$

である. □

Proof A.2.21 (3.2.52 – 1). A を n 次正方行列とする. k に関する数学的帰納法により, $A^kA^{k'}=A^{k+k'}$ を示す.

■Base case　$A^{k'+1}$ の定義から $AA^{k'}=A^{k'+1}$ である.

■Induction Step　$A^{k-1}A^{k'}=A^{k-1+k'}$ を仮定し, $A^kA^{k'}=A^{k+k'}$ を示す.

A^k の定義から

$$A^k=AA^{k-1}$$

である. したがって,

$$A^kA^{k'}=AA^{k-1}A^{k'}=AA^{k-1+k'}$$

である. 一方 $A^{k+k'}$ の定義から,

$$A^{k+k'}=AA^{k+k'-1}=AA^{k-1+k'}$$

である. □

Proof A.2.22 (3.2.52 – 2). A を n 次正方行列とする. k' に関する数学的帰納法により, $(A^k)^{k'}=A^{kk'}$ を示す.

■Base case　$(A^k)^1$ の定義から $(A^k)^1=A^k=A^{k\cdot 1}$ である.

■Induction Step $(A^k)^{k'-1} = A^k(A^{k(k'-1)})$ を仮定し, $(A^k)^{k'} = A^k(A^{kk'})$ を示す.
$(A^k)^{k'}$ の定義から $(A^k)^{k'} = A^k(A^k)^{k'-1}$ である. したがって,

$$\begin{aligned}(A^k)^{k'} &= A^k(A^k)^{k'-1}\\ &= A^k(A^{k(k'-1)})\\ &= A^kA^{k(k'-1)}\\ &= A^{k+k(k'-1)}\\ &= A^{k(1+k'-1)}\\ &= A^{kk'}\end{aligned}$$

である. □

Proof A.2.23 (3.2.53). A を n 次正方行列とする. α を数とする. k' に関する数学的帰納法により, $(\alpha A)^k = (\alpha^k)(A^k)$ を示す.

■Base case $(\alpha A)^1$ の定義から $(\alpha A)^1 = \alpha A = \alpha^1 A^1$ である.

■Induction Step $(\alpha A)^{k-1} = \alpha^{k-1}A^{k-1}$ を仮定し, $(\alpha A)^k = \alpha^k A^k$ を示す.
$(\alpha A)^k$ の定義から $(\alpha A)^k = (\alpha A)(\alpha A)^{k-1}$ である. したがって,

$$\begin{aligned}(\alpha A)^k &= (\alpha A)(\alpha A)^{k-1}\\ &= (\alpha A)(\alpha^{k-1}A^{k-1})\\ &= \alpha^{k-1}((\alpha A)(A^{k-1}))\\ &= \alpha^{k-1}\alpha AA^{k-1}\\ &= \alpha^{k-1+1}A^{k-1+1}\\ &= \alpha^k A^k\end{aligned}$$

である.

□

A.3 正則行列に関する命題の証明

Proof A.3.1 (4.1.4). CAB について考える.

$$\begin{aligned}(CA)B = E_nB = B,\\ C(AB) = CE_n = C\end{aligned}$$

であるので, $B = C$. □

Proof A.3.2 (4.1.9 – 1). X を n 次正則行列とする. $A = X^{-1}$ とし, $B = X$ とする. このとき, A が正則であることを示す. そのために B が A の逆行列であることを示す.
まず $AB = E_n$ となることを示す. X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = X^{-1}X = E_n$$

である.

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$BA = XX^{-1} = E_n$$

である． □

Proof A.3.3 (4.1.9 – 2)．X を n 次正則行列とする．$A = {}^tX$ とし, $B = {}^tX^{-1}$ とする．このとき, A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = {}^tX\,{}^tX^{-1} = {}^t(X^{-1}X) = {}^tE_n = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$BA = {}^tX^{-1}\,{}^tX = {}^t(XX^{-1}) = {}^tE_n = E_n$$

である． □

Proof A.3.4 (4.1.9 – 3)．X を n 次正則行列とする．r を 0 でない数とする．$A = rX$ とし, $B = \frac{1}{r}X^{-1}$ とする．このとき, A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = (rX)(\frac{1}{r}X^{-1}) = \frac{1}{r}(rXX^{-1}) = (\frac{1}{r}r)(XX^{-1}) = 1E_n = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = (\frac{1}{r}X^{-1})(rX) = r(\frac{1}{r}X^{-1}X) = (r\frac{1}{r})(X^{-1}X) = 1E_n = E_n$$

である． □

Proof A.3.5 (4.1.9 – 4)．X, Y を n 次正則行列とする．$A = XY$ とし, $B = Y^{-1}X^{-1}$ とする．このとき, A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列, Y^{-1} は Y の逆行列であるので,

$$AB = (XY)(Y^{-1}X^{-1}) = X(YY^{-1})X^{-1} = XE_nX^{-1} = XX^{-1} = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列, Y^{-1} は Y の逆行列であるので,

$$BA = (Y^{-1}X^{-1})(XY) = Y^{-1}(X^{-1}X)Y = Y^{-1}E_nY = Y^{-1}Y = E_n$$

である． □

Proof A.3.6 (4.1.9 – 5)．X を n 次正則行列とし, l を正の整数とする．このとき, X^l が正則であることを示す．そのために $(X^{-1})^l$ が X^l の逆行列であることを, l に関する数学的帰納法により示す．

■Base case $(X)^1 = X$, $(X^{-1})^1 = X^{-1}$ であるから, $(X^{-1})^1$ が $(X)^1$ の逆行列である.

■Induction Step $(X^-1)^{l-1}$ が $(X)^{l-1}$ の逆行列であることを仮定して, $(X^-1)^l$ が $(X)^l$ の逆行列であることを示す.

まず, $(X^l)((X^{-1})^l) = E_n$ となることを示す. $X^l = X^{l-1}X$, $(X^{-1})^l = X^{-1}(X^{-1})^{l-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}(X^l)((X^{-1})^l) &= (X^{l-1}X)(X^{-1}(X^{-1})^{l-1}) \\ &= X^{l-1}(XX^{-1})(X^{-1})^{l-1} \\ &= X^{l-1}E_n(X^{-1})^{l-1} \\ &= X^{l-1}(X^{-1})^{l-1} \\ &= E_n\end{aligned}$$

である.

次に, $((X^{-1})^l)(X^l) = E_n$ となることを示す. $X^l = X^{l-1}X$, $(X^{-1})^l = X^{-1}(X^{-1})^{l-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}((X^{-1})^l)(X^l) &= (X^{-1}(X^{-1})^{l-1})(X^{l-1}X) \\ &= X^{-1}((X^{-1})^{l-1})X^{l-1})X \\ &= X^{-1}E_nX \\ &= X^{-1}X \\ &= E_n\end{aligned}$$

である. □

Proof A.3.7 (4.1.12 – 1). X を n 次正則行列とする. このとき, 整数 k, k' に対し, $X^kX^{k'} = X^{k+k'}$ となることを示す.

$X^0 = E_n$ であるので, $X^0X^{k'} = E_nX^{k'} = X^{k'}$ である. また, $X^kX^0 = X^kE_n = X^k$ でもある.

k も k' も 0 ではない場合について考える. p, p' を正の整数とする. $k = p$ も $k' = p'$ である場合は, Proposition 3.2.52 である. $k = -p$ も $k' = -p'$ である場合は,

$$A^{-p}A^{-p'} = (A^{-1})^p(A^{-1})^{p'} = (A^{-1})^{p+p'} = A^{-(p+p')} = A^{(-p)+(-p')}.$$

であることがわかる.

ここまでの議論で, $k \leq 0$ かつ $k' \leq 0$ の場合と, $k \geq 0$ かつ $k' \geq 0$ の場合は証明できた. それら以外の場合について考える.

p, p' を正の整数とし, $k = -p$ かつ $k' = p'$ の場合と $k = p$ かつ $k' = -p'$ の場合について示す. $p = p'$ なら

$$\begin{aligned}A^{-p}A^{p'} &= A^{-p}A^p = (A^p)^{-1}A^p = E_n = A^0 = A^{-p+p} = A^{-p+p'} \\ A^pA^{-p'} &= A^pA^{-p} = (A^p)^{-1}A^p = E_n = A^0 = A^{p-p} = A^{p-p'}\end{aligned}$$

である．$p > p'$ であるなら, $p = d + p'$ とおくと,

$$\begin{aligned} A^{-p}A^{p'} = A^{-(d+p')}A^{p'} &= (A^{-d}A^{-p'})A^{p'} \\ &= A^{-d}(A^{-p'}A^{p'}) = A^{-d}A^{0} = A^{-d} = A^{-p+p'} \\ A^{p}A^{-p'} = A^{d+p'}A^{-p'} &= (A^{d}A^{p'})A^{-p'} \\ &= A^{d}(A^{p'}A^{-p'}) = A^{d}A^{0} = A^{d} = A^{p-p'} \end{aligned}$$

である．$p < p'$ であるなら, $p + d = p'$ とおくと,

$$\begin{aligned} A^{-p}A^{p'} &= A^{-p}A^{p+d} = A^{-p}A^{p}A^{d} = A^{-p+p}A^{d} = A^{0}A^{d} = A^{d} = A^{-p+p'}, \\ A^{p}A^{-p'} &= A^{p}A^{-(p+d)} = A^{p}A^{-p-d)} = A^{p}A^{-p}A^{-d} = A^{0}A^{d} = A^{0+d} = A^{p-p'} \end{aligned}$$

である．

□

Proof A.3.8 (4.1.12 – 2). X を n 次正則行列とする． このとき, 整数 k, k' に対し, $(X^{k})^{k'} = X^{kk'}$ となることを示す.

定義から $(X^{k})^{0} = E_n$ である．また, $X^{k \cdot 0} = X^{0} = E_n$ であるので, $(X^{k})^{0} = X^{k \cdot 0}$ である.

定義から $(X^{0})^{k'} = E_n^{k'} = E_n$ である．また, $X^{0k'} = X^{0} = E_n$ であるので, $(X^{0})^{k'} = X^{0 \cdot k'}$ である.

$X^{-k}X^{k} = X^{0} = E_n$ かつ $X^{k}X^{-k} = X^{0} = E_n$ であるので, X^{-k} は X^{k} の逆行列である．したがって $(X^{k})^{-1} = X^{-k} = X^{k \cdot -1}$ である.

p' を正の整数とすると, Proposition 4.1.9 より, $(X^{-1})^{p'}$ は $X^{p'}$ の逆行列である．したがって $(X^{-1})^{p'} = (X^{p'})^{-1} = X^{-p'} = X^{-1 \cdot p'}$ である.

p, p' を正の整数とすると, $k = p$, $k' = p'$ のときは, Proposition 3.2.52 より, $(X^{k})^{k'} = X^{kk'}$ である.

$k = p$, $k' = -p'$ のときは,

$$(X^{p})^{-p'} = ((X^{p})^{p'})^{-1} = (X^{pp'})^{-1} = X^{-pp'}$$

である.

$k = -p$, $k' = p'$ のときは,

$$(X^{-p})^{p'} = ((X^{p})^{-1})^{p'} = (X^{p})^{-p'} = X^{-pp'}$$

である.

$k = -p$, $k' = -p'$ のときは,

$$(X^{-p})^{-p'} = ((X^{-p})^{p'})^{-1} = (X^{-pp'})^{-1} = X^{-(-pp')} = X^{(-p)(-p')}$$

である.

□

Proof A.3.9 (4.1.13 – 1). 背理法により示す. A を正則とすると, $AX = O_{n,m}$ の両辺に左から A^{-1} をかけることにより,

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}O_{n,m} \\ X &= O_{n,m} \end{aligned}$$

となり, X が零行列でないことに反する. □

Proof A.3.10 (4.1.13 – 2). 背理法により示す. A を正則とすると, $YA = O_{m,n}$ の両辺に右から A^{-1} をかけることにより,

$$\begin{aligned} YAA^{-1} &= O_{m,n}A^{-1} \\ Y &= O_{m,n} \end{aligned}$$

となり, Y が零行列でないことに反する. □

Proof A.3.11 (4.1.14). Item 1 から, A が正則でないことがわかる. また, Item 1 から, B が正則でないことがわかる. □

Proof A.3.12 (4.1.15). 例えば, $Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると, $YA = O_{1,n}$ であるので, Proposition 4.1.13 から, A が正則ではないことがわかる. □

ある成分だけ 1 であり他は 0 である行列を行列単位と呼ぶことがある. どの行列も行列単位の線型結合として表すことができる. また, 行列単位の積は, 定義に従って計算すると次のようになる.

Lemma A.3.13. $B_{i,j}$ を (i,j)-成分のみ 1 で他は 0 の n 次正方行列とする.

$$B_{i,j}B_{k,l} = \begin{cases} B_{i,l} & (j = k) \\ O_{n,m} & (j \neq k) \end{cases}$$

□

したがって, 次がわかる.

Lemma A.3.14. $B_{i,j}$ を (i,j)-成分のみ 1 で他は 0 の n 次正方行列とする. また, A を (n,m) 行列とする. このとき, $B_{i,j}A$ は, i 行目が A の j 行目と等しく, それ以外の成分は 0 である. □

Proof A.3.15 (4.2.4 – 1). $F(i;c)A = (E_n - E_{i,i} + cE_{i,i})A = A + (c-1)E_{i,i}A$ である. したがって, Lemma A.3.14 から, $F(i;c)A$ の i 行目は A の i 行目に A の i 行目の $c-1$ 倍を加えたものであるので, A の i 行目の c 倍である. また i 行目以外は $F(i;c)A$ と A は等しい. つまり, $F(i;c)A$ は A の i 行目を c 倍した行列である. □

Proof A.3.16 (4.2.4 – 2). $G(i,j;c)A = (E_n + cE_{i,j})A = A + cE_{i,j}A$ である. したがって, Lemma A.3.14 から, $G(i,j;c)A$ の i 行目は A の i 行目に A の j 行目の c 倍を加えたものである. また i 行目以外は $G(i,j;c)A$ と A は等しい. つまり, $G(i,j;c)A$ は A の i 行目に j 行目の c 倍を加えた行列である. □

Proof A.3.17 (4.2.4 – 3). $H(i,j)A = (E_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{i,j})A = A - E_{i,i}A + E_{i,j}A - E_{j,j}A + E_{j,i}A$ である. したがって, Lemma A.3.14 から, $H(i,j)A$ の i 行目は, A の i 行めに A の i 行目の -1 倍と A の j 行目の 1 倍を加えたものであるので, A の j 行目である. 同様に, $H(i,j)A$ の j 行目は, A の j 行めに A の j 行目の -1 倍と A の i 行目の 1 倍を加えたものであるので, A の i 行目である. また i 行目と j 行目以外は $H(i,j)A$ と A は等しい. つまり $H(i,j)A$ は A の i 行目と j 行目を入れ替えた行列である. □

Proof A.3.18 (4.2.5 – 1). ${}^t(AF(i;c)) = {}^tF(i;c)\,{}^tA = F(i;c)\,{}^tA$ である. Lemma 4.2.4 をつかうと, ${}^t(AF(i;c))$ は, ${}^tA$ の i 行目を c 倍した行列であることがわかる. $AF(i;c) = {}^t({}^t(AF(i;c)))$ であるので, $AF(i;c)$ は A の i 列目を c 倍した行列であることがわかる. □

Proof A.3.19 (4.2.5 – 2). ${}^t(AG(i,j;c)) = {}^tG(i,j;c)\,{}^tA = G(j,i;c)\,{}^tA$ である. Lemma 4.2.4 をつかうと, ${}^t(AG(i,j;c))$ は, ${}^tA$ の j 行目に i 行目の c 倍を加えた行列であることがわかる. $AG(i,j;c) = {}^t({}^t(AG(i,j;c)))$ であるので, $AG(i,j;c)$ は A の j 列目に i 列目の c 倍を加えた行列であることがわかる. □

Proof A.3.20 (4.2.5 – 3). ${}^t(AH(i,j)) = {}^tH(i,j)\,{}^tA = H(j,i)\,{}^tA$ である. Lemma 4.2.4 をつかうと, ${}^t(AH(i,j))$ は, ${}^tA$ の j 行目と i 行目を入れ替えた行列であることがわかる. $AH(i,j) = {}^t({}^t(AH(i,j)))$ であるので, $AH(i,j)$ は A の i 列目と j 列目を入れ替えた行列であることがわかる. □

Proof A.3.21 (4.2.6 – 1). $F(i;c)$ は (i,i)-成分のみ c で他の対角成分は c である対角行列である.

$F(i;c)F(i;\frac{1}{c})$ は $F(i;\frac{1}{c}$ の i 行目を c 倍したものであるので, E_n である. $F(i;\frac{1}{c})F(i;c)$ は $F(i;c$ の i 行目を $\frac{1}{c}$ 倍したものであるので, E_n である. よって $F(i;c)^{-1} = F(i;\frac{1}{c})$ である. □

Proof A.3.22 (4.2.6 – 2). $G(i,j;c)$ は, 対角成分は全て 1, (i,j)-成分は c, 他の成分は全て 0 である.

$G(i,j;c)G(i,j;-c)$ は, $G(i,j;-c)$ の i 行目に $G(i,j;-c)$ の j 行目の c 倍を加えたものであるが, $G(i,j;-c)$ の j 行目は (j,j) 成分が 1 で他は 0 であるので, (i,j) 成分に c が加えられることになる. したがって, $G(i,j;c)G(i,j;-c) = E_n$ である. 一方 $G(i,j;-c)G(i,j;c)$ は, $G(i,j;c)$ の i 行目に $G(i,j;c)$ の j 行目の $-c$ 倍を加えたものであるが, $G(i,j;c)$ の j 行目は (j,j) 成分が 1 で他は 0 であるので, (i,j) 成分に $-c$ が加えられることになる. したがって, $G(i,j;-c)G(i,j;c) = E_n$ である. よって, $G(i,j;c)^{-1} = G(i,j;-c)$ である. □

Proof A.3.23 (4.2.6 – 3). $H(i,j)$ は (i,i)-成分と (j,j)-成分は 0, それ以外の対角成分は 1, (i,j)-成分と (j,i)-成分は 1, それ以外の成分は 0 である.

$H(i,j)H(i,j)$ は $H(i,j)$ の i 行目と j 行目を入れ替えたものであるので, E_n である. したがって, $H(i,j)^{-1} = H(i,j)$ である. □

A.3.1 行基本変形によって得られる被約階段行列の一意性に関する命題の証明

行基本変形を用いて得られる被約階段行列が, 変形の手順によらず一意に定まることを示す. そのために, いくつか補題を用意する.

P を m 次正方行列とする. $\boldsymbol{x}$ を $(m,1)$ 行列とする. $\mathbf{0}$ を零行列 $O_{m,1}$ とする. このとき次が成り立つことは既に見た:

Lemma A.3.24. $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ かつ $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ならば, P は正則ではない. □

$i = 1, 2, \ldots, m$ に対し,

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

という i 行目だけ 1 で, 他は 0 である $(m, 1)$ 行列とする.

Lemma A.3.25. $k \geq 1$ とする.

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1, \\ P\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2, \\ &\ \vdots \\ P\boldsymbol{e}_{k-1} &= \boldsymbol{e}_{k-1}, \\ P\boldsymbol{e}_k &= \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1} \\ &\quad (k = 1 \text{ のときには, } P\boldsymbol{e}_1 = P\boldsymbol{e}_k = 0 \text{ という条件として読む}) \end{aligned}$$

ならば, P は正則ではない. ▯

Proof. $\boldsymbol{e}_k - (\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1})$ は第 k 成分が 1 なので, $\mathbf{0}$ ではない.

$$\begin{aligned} &P(\boldsymbol{e}_k - (\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1})) \\ &= P\boldsymbol{e}_k - (\alpha_1 P\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 P\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_{k-1} P\boldsymbol{e}_{k-1})) \\ &= P\boldsymbol{e}_k - (\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1})) \\ &= P\boldsymbol{e}_k - P\boldsymbol{e}_k \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

したがって Lemma A.3.24 より P は正則ではない. □

$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ (m, n) 行列とする. また, $A = (\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル表示されているとする. つまり,

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} \\ a_{j,2} \\ \vdots \\ a_{j,m} \end{pmatrix}$$

である. さらに, A は階数 r の被約階段行列で, その pivots は $(1, p_1), (2, p_r), \ldots, (r, p_r)$ であるとする.

A か階数 r の階段行列であることから次がわかる:

Lemma A.3.26.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_j &= a_{1,j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{r,j}\boldsymbol{e}_r \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}\boldsymbol{e}_i. \end{aligned}$$

▯

また, $(l+1, p_{l+1})$ が pivot であることから, 次がわかる:

Lemma A.3.27. $j < p_{l+1}$ ならば,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_j &= a_{1,j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{l,j}\boldsymbol{e}_l \\ &= \sum_{i=1}^{l} a_{i,j}\boldsymbol{e}_i. \end{aligned}$$

□

Lemma A.3.28.

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1, \\ P\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2, \\ &\vdots \\ P\boldsymbol{e}_r &= \boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

ならば, $PA = A$. □

Proof. Lemma A.3.26 より

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1,j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{r,j}\boldsymbol{e}_r.$$

であるので,

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{a}_j &= a_{1,j}P\boldsymbol{e}_1 + a_{2,j}P\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{r,j}P\boldsymbol{e}_r \\ &= a_{1,j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{r,j}\boldsymbol{e}_r \\ &= \boldsymbol{a}_j \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} PA &= P(\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n) \\ &= (P\boldsymbol{a}_1|P\boldsymbol{a}_2|\cdots|P\boldsymbol{a}_n) \\ &= (\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n) \\ &= A. \end{aligned}$$

□

被約階段行列の定義から次がわかる:

Lemma A.3.29. A が被約階段行列で, (i, p_i) が pivot ならば, $\boldsymbol{a}_{p_i} = \boldsymbol{e}_i$. □

X, Y を (m, n) 行列とし, $X = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2|\cdots|\boldsymbol{x}_n)$, $Y = (\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{y}_2|\cdots|\boldsymbol{y}_n)$ と列ベクトル表示されているとする. さらに X も Y も被約階段行列であることを仮定する.

Lemma A.3.30. X と Y の pivot が完全に一致するとする. このとき $PX = Y$ ならば $X = Y$. □

Proof. X と Y の pivots が $(1, p_1), (2, p_r), \ldots, (r, p_r)$ であるとする.

$$\begin{aligned} PX &= P(\boldsymbol{x}_1|\cdots|\boldsymbol{x}_n) = (P\boldsymbol{x}_1|\cdots|P\boldsymbol{x}_n) \\ Y &= (\boldsymbol{y}_1|\cdots|\boldsymbol{y}_n) \end{aligned}$$

であり, $PX = Y$ であるので,

$$(P\boldsymbol{x}_1|\cdots|P\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{y}_1|\cdots|\boldsymbol{y}_n).$$

Pivot である p_i 列目について考えると, Lemma A.3.29 より

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{x}_i &= P\boldsymbol{e}_i, \\ \boldsymbol{y}_i &= \boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

であるので $P\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i$ である． $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対し $P\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i$ となるので, Lemma A.3.28 より $X = PX = Y$. □

Lemma A.3.31. *X の pivots は $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, Y の pivots は $(1, p_1), \ldots, (l, q_l)$ であるとする．$k \leq r$ とする．次を仮定する．*

$$i < k \implies p_i = q_i$$

$PX = Y$ をみたすとする．P が正則行列ならば $k \leq l$ かつ $p_k \geq q_k$.

Proof. 対偶となる, $k > l$ または $p_k < q_k$ ならば P は正則ではないということを示す．

$$\begin{aligned} PX &= (P\boldsymbol{x}_1|\cdots|P\boldsymbol{x}_n) \\ &= Y = (\boldsymbol{y}_1|\cdots|\boldsymbol{y}_n) \end{aligned}$$

であるので, $\boldsymbol{y}_j = P\boldsymbol{x}_j$. $j = p_t$ のときには, Lemma A.3.29 より,

$$\boldsymbol{y}_{p_t} = P\boldsymbol{x}_{p_t} = P\boldsymbol{e}_t. \tag{A.1}$$

まず $t \in \{1, \ldots, k-1\}$ のときについて考えておく． $p_t = q_t$ であるので, Lemma A.3.29 より,

$$\boldsymbol{y}_{p_t} = \boldsymbol{y}_{q_t} = \boldsymbol{e}_t. \tag{A.2}$$

よって, (A.1) と (A.2) より,

$$P\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{x}_{q_t} = \boldsymbol{e}_t.$$

つぎに, $t = k$ のときについて考える．$k > l$ ならば, Lemma A.3.26 を使うと,

$$\boldsymbol{y}_{p_k} = \boldsymbol{y}_{1p_k}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_{k-1,p_k}\boldsymbol{e}_{k-1}$$

と書ける．また, $p_k < q_k$ ならば, Lemma A.3.27 を使うと,

$$\boldsymbol{y}_{p_k} = \boldsymbol{y}_{1p_k}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_{k-1,p_k}\boldsymbol{e}_{k-1}$$

と書ける．したがって, 次が成り立つ:

$$k > l \text{ or } p_k < q_k \implies \boldsymbol{y}_{p_k} = \boldsymbol{y}_{1p_k}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_{k-1,p_k}\boldsymbol{e}_{k-1}.$$

$k > l$ または $p_k < q_k$ が成り立つとする．このとき, eq. (A.1) より,

$$P\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{y}_{p_k} = \boldsymbol{y}_{1p_k}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_{k-1,p_k}\boldsymbol{e}_{k-1}$$

となるが, Lemma A.3.25 より P は正則ではない. □

Proof A.3.32 (4.4.8). $PA = B$ であるので, $B = P^{-1}A$ でもある.

A に pivots がないとき: このときは $A = O_{m,n}$ である. $B = PA = PO_{m,n} = O_{m,n}$ であるので, $A = B$.

B に pivots がないとき: このときは $B = O_{m,n}$ である. $A = P^{-1}B = PO_{m,n} = O_{m,n}$ であるので, $A = B$.

A にも B にも pivots があるとき: A の pivots は $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, B の pivots は $(1, p_1), \ldots, (l, q_l)$ であるとし, まず, pivots が一致することを示す.

$k = 1$ として, Lemma A.3.31 を $PA = B$ に使うと $p_1 \geq q_1$. Lemma A.3.31 を $P^{-1}B = A$ に使うと $q_1 \geq p_1$. よって $p_1 = q_1$.

$k = 2$ として, Lemma A.3.31 を $PA = B$ に使うと $p_2 \geq q_2$. Lemma A.3.31 を $P^{-1}B = A$ に使うと $q_2 \geq p_2$. よって $p_2 = q_2$.

以下同様に繰り返すと,

$$\begin{gathered} r = l \\ p_1 = q_1 \\ p_2 = q_2 \\ \vdots \\ p_r = q_r \end{gathered}$$

がわかる. Pivots が一致しているので, Lemma A.3.30 を使うことで $A = B$ がわかる. □

Proof A.3.33 (4.4.9). $A = PX$, $B = QX$ とおくと A, B は被約階段行列である. $P' = QP^{-1}$ とおけば. P' は正則である. また,

$$P'A = QP^{-1}A = QP^{-1}P = QX = B$$

であるので $P'A$ は被約階段行列. よって, Lemma 4.4.8 より, $A = B$. □

Proof A.3.34 (4.4.11).

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　Corollary 4.4.6 により, A に対し行基本変形を行うことで被約階段行列が得られる. これを S とする. 行基本変形は基本行列を左からかけることであったので, $PA = S$ を満たす正方行列 P が存在する. 基本行列は正則であり, 正則行列の積もまた正則であったから, P は正則である. 一方, A は正則なので, その逆行列を Q とおく. このとき Q は正則で $QA = E_n$ を満たす. E_n は被約階段行列であったから, Corollary 4.4.9 より, $PA = QA$ である. よって, $S = E_n$.

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　行基本変形を用いて A を E_n に変形できたとする. 行基本変形は基本行列を左からかけることであったので, $PA = E_n$ を満たす正方行列 P が存在する. 基本行列は正則であり, 正則行列の積もまた正則であったから, P は正則である. $PA = E_n$ であるので, 両辺に左から P^{-1}, 右から P をかけることで, 次を得る.

$$\begin{gathered} P^{-1}PAP = P^{-1}P. \\ AP = E_n. \end{gathered}$$

$PA = E_n$, $AP = E_n$ であるので, P は A の逆行列であり, A は正則である. □

Proof A.3.35 (4.4.13). A を n 次正則行列とする．A は行基本変形で E_n に変形できる．このことは基本行列 $P_1, \ldots, P_k$ を用いて, $P_1 \cdots P_k A = E_n$ と表せることを意味する．基本行列は正則なので, $A = P_k^{-1} \cdots P_1^{-1}$ と書けるが, 基本行列の逆行列も基本行列であったから, 各 P_i^{-1} も基本行列である． □

A.3.2　階数に関する命題の証明

Proof A.3.36 (4.5.3). A を n 次正方行列であるとする．

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　A を正則とする．Corollary 4.4.11 より, 行基本変形により A を E_n に変形できる．したがって $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(E_n) = n$.

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　$\mathrm{rank}(A) = n$ とする．階数の定義から A に行基本変形を行って階数 n の被約階段に変形できる．A が n 次正方行列であるので得られる被約階段も n 次正方行列である．n 次正方行列で被約階段であるものは E_n のみであるから, 得られる被約階段は E_n である．したがって, Corollary 4.4.11 より, A は正則である． □

Proof A.3.37 (4.5.4 – 8). A に行基本変形を行って被約階段行列 S が得られたとする．また, A に行基本変形を行って A' が得られたとする．このとき, Proposition 4.2.6 から, A' 行基本変形を行って A にできる．したがって更に行基本変形を行って S にすることもできる．つまり A' に対し行基本変形を行って得られる被約階段行列も S である．したがって, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(A')$ である． □

Proof A.3.38 (4.5.4 – 4). 被約階段行列 S の階数は 0 以外の成分もある行の総数であるから S の行数を超えることはない．また行列 A の階数は A から行基本変形で得られる被約階段行列 A' の階数である．A の行数と A' の行数は等しいので, A の階数は A の行数を超えることはない． □

Proof A.3.39 (4.5.4 – 5). 被約階段行列 S の階数は pivot の総数であるが, pivot は各列に高々 1 つであるので, 階数は S の列数を超えることはない．また行列 A の階数は A から行基本変形で得られる被約階段行列 A' の階数である．A の列数と A' の列数は等しいので, A の階数は A の列数を超えることはない． □

Lemma A.3.40. (m, n)-行列 A の $r+1$ 行目から m 行目までの成分がすべて 0 であるなら, $\mathrm{rank}(A) \leq r$ である．

Proof. A' を (r, n)-行列とし, A' と $O_{m-r,n}$ を縦に並べてできる (m, n) 行列を A とする．このとき, A' に行基本変形をして被約階段行列 S' が得られたとすると, A に対し同じ手順で行基本変形をすることで, S' と $O_{m-r,n}$ を縦に並べてできる (m, n) 行列 S が得られる．S は被約階段行列であり, $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S')$ である．また Theorem 4.5.4 の Item 4 より, $\mathrm{rank}(S') \leq r$ である．したがって, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S') \leq r$ である． □

Lemma A.3.41. (m, n)-行列 A の $c+1$ 列目から n 列目までの成分がすべて 0 であるなら, $\mathrm{rank}(A) \leq c$

Proof. A' を (m, c)-行列とし, A' と $O_{m,n-c}$ を横に並べてできる (m, n) 行列を A とする．このとき, A' に行基本変形をして被約階段行列 S' が得られたとすると, A に対し同じ手順で行基本変形をすることで, S' と $O_{m,n-c}$ を横に並べてできる (m, n) 行列 S が得

られる．S は被約階段行列であり, $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S')$ である．また Theorem 4.5.4 の Item 5 より, $\mathrm{rank}(S') \le c$ である．したがって, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S') \le c$ である． □

Proof A.3.42 (4.5.4 – 2). (m, n)-行列 A から行基本変形を用いて階数 r の被約階段行列 S が得られるとする．このとき, Lemma 4.2.4 から, $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = S$ をみたす基本行列 $P_1, \ldots, P_k$ が存在する．$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = S$ であるので $P_k P_{k-1} \cdots P_1 AB = SB$ であるのでつまり AB に行基本変形を用いて SB に変形できることがわかる．したがって, Theorem 4.5.4 の item 8 より, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(SB)$ である．

一方 S は階数が r の被約階段行列であるので, $r+1$ 行目から n 行目までの成分はすべて 0 である．したがって, SB を計算すると, SB の $r+1$ 行目から n 行目までの成分もすべて 0 であることがわかる．したがって, Lemma A.3.40 より, $\mathrm{rank}(SB) \le r$ である． □

Proof A.3.43 (4.5.4 – 7). $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AQ)$ を示すために, $\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}(AQ)$ と $\mathrm{rank}(A) \ge \mathrm{rank}(AQ)$ を示す.

Theorem 4.5.4 の item 2 より, $\mathrm{rank}(AQ) \le \mathrm{rank}(A)$ である．

一方, $X = AQ$, $Y = Q^{-1}$ とすると, Theorem 4.5.4 の item 2 より, $\mathrm{rank}(XY) \le \mathrm{rank}(X)$ である．$XY = AQQ^{-1} = A$ であるので, $\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}(AQ)$ である． □

Lemma A.3.44. X を (m, n)-行列とする．このとき, $\mathrm{rank}(X) \le \mathrm{rank}({}^t X)$. ▯

Proof. X に対し行基本変形をして階数 r の被約階段行列 S が得られたとする．このとき, $\mathrm{rank}(X) = r$ である．$\mathrm{rank}(X) \le r$ を示す.

X に対し行基本変形をして階数 r の被約階段行列 S が得られたので, Lemma 4.2.4 から, $PA = S$ をみたす正則行列 P が存在する．${}^t A\, {}^t P = {}^t(PA) = {}^t S$ である．${}^t P$ は正則であるので, Theorem 4.5.4 の item 7 より, $\mathrm{rank}({}^t A) = \mathrm{rank}({}^t A\, {}^t P)$ である．一方 S は階数 r の被約階段行列であるので, $r+1$ 行目から m 行目までの成分は 0 である．したがって, ${}^t S$ の $r+1$ 列目から m 列目までの成分は 0 である．したがって, Lemma A.3.41 より, ${}^t S \le r$ である．まとめると, $\mathrm{rank}({}^t A) = \mathrm{rank}({}^t A\, {}^t P) = \mathrm{rank}({}^t S) \le r$ である． □

Proof A.3.45 (4.5.4 – 1). A を (m, n)-行列とする．$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^t A)$ を示すために, $\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}({}^t A)$. と $\mathrm{rank}({}^t A) \le \mathrm{rank}(A)$. を示す.

$X = A$ として Lemma A.3.44 を使うと, $\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}({}^t A)$. である.

一方, $X = {}^t A$ として Lemma A.3.44 を使うと, ${}^t X = A$ であるので, $\mathrm{rank}({}^t A) \le \mathrm{rank}(A)$. である.

□

Proof A.3.46 (4.5.4 – 3). Theorem 4.5.4 の Item 1 より, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}({}^t(AB))$ であるが, ${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A$ であるので, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}({}^t B\, {}^t A)$ である．Theorem 4.5.4 の Item 2 より $\mathrm{rank}({}^t B\, {}^t A) \le \mathrm{rank}({}^t B)$ であるので, $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}({}^t B)$. Theorem 4.5.4 の Item 1 より, $\mathrm{rank}({}^t B) = \mathrm{rank}(B)$ であるので, $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(B)$ である． □

Proof A.3.47 (4.5.4 – 6). Theorem 4.5.4 の Item 1 より, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}({}^t(PA))$ であるが, ${}^t(PA) = {}^t A\, {}^t P$ であるので, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}({}^t A\, {}^t P)$ である．P は正則である

ので ${}^tP$ も正則である．よって, Theorem 4.5.4 の Item 7 より $\mathrm{rank}({}^tA\,{}^tP) = \mathrm{rank}({}^tA)$ であるので, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}({}^tA)$ である．Theorem 4.5.4 の Item 1 より, $\mathrm{rank}({}^tA) = \mathrm{rank}(A)$ であるので, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$ である． □

A.4　連立一次方程式に関する命題の証明

Proof A.4.1 (5.3.1). $A' = CA$, $\boldsymbol{b}' = C\boldsymbol{b}$ とし,

$$\mathcal{F} = \{\, \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \,\},$$
$$\mathcal{F}' = \left\{\, \boldsymbol{v} \;\middle|\; A'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}' \,\right\}$$

とおく．$\boldsymbol{v} \in \mathcal{F}$ とする．このとき, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{F}'$ を示す．つまり, $A'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}'$ となることを示す．今 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{F}$ であるので, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ である．両辺に左から C をかけることで, $CA\boldsymbol{v} = C\boldsymbol{b}$ を得る．したがって, $A'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}'$ である． □

Proof A.4.2 (5.3.2).

$$\mathcal{F} = \{\, \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \,\},$$
$$\mathcal{F}' = \left\{\, \boldsymbol{v} \;\middle|\; A'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}' \,\right\}$$

とおく．$A' = PA$, $\boldsymbol{b}' = P\boldsymbol{b}$ であるので, Lemma 5.3.1 より $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$．また, P は正則であるので, $A = P^{-1}A'$, $\boldsymbol{b} = P^{-1}\boldsymbol{b}'$ であるから, Lemma 5.3.1 より $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$．したがって, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$． □

Proof A.4.3 (5.3.3). $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ に行基本変形をし $\left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right)$ が得られたとすると, $P\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right)$． を満たす正則行列 P が存在する． このとき, $\left(\begin{array}{c|c} PA & P\boldsymbol{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right)$． であるので,

$$PA = A'$$
$$P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$$

である．よって, Theorem 5.3.2 より, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ □

Proof A.4.4 (5.3.10).

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　$YA = O_{m,1}$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とする．このとき, $Y\boldsymbol{b} = YA\boldsymbol{x} = O_{m,1}\boldsymbol{x} = O_{1,1}$．

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　対偶を示す．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないとすると,

$$P\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S & O_{r,1} \\ \hline O_{1,n} & 1 \\ \hline O_{m-r-1,n} & O_{m-r-1,1} \end{array}\right)$$

とできる．つまり,

$$PA = \left(\begin{array}{c} S \\ \hline O_{m-r,n} \end{array}\right) \qquad\qquad P\boldsymbol{b} = \left(\begin{array}{c} O_{r,1} \\ \hline 1 \\ \hline O_{m-r-1,1} \end{array}\right).$$

このとき, $Y' = \left(\begin{array}{c|c|c} O_{1,r} & 1 & O_{1,n-r-1} \end{array} \right)$ とおき, $Y = Y'P$ とおけば,

$$YA = Y'PA = Y'\left(\frac{S}{O_{m-r,n}}\right) = O_{1,n}$$
$$Y\boldsymbol{b} = Y'P\boldsymbol{b} = (1).$$

これは,

$$YA = O_{n,1} \implies Y\boldsymbol{b} = O_{1,1}$$

の反例. □

Proof A.4.5 (5.4.4 − 1). $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{K}$ とすると, $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_m$, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_m$ である．したがって $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_m + \boldsymbol{0}_m = \boldsymbol{0}_m$. □

Proof A.4.6 (5.4.4 − 2). $\boldsymbol{u} \in \mathcal{K}$ とすると, $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_m$ である．数 a に対し, $A(a\boldsymbol{u}) = aA\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{0}_m = \boldsymbol{0}_m$. □

Proof A.4.7 (5.4.5). $\mathcal{F}' = \{\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in \mathcal{K} \,\}$ とおき, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ を示す.

■$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$　$\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}$ とする．このとき, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}'$ を示す．$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$ とおく．このとき,

$$A\boldsymbol{u} = A(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_m/$$

したがって, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{K}$. また, $w = \boldsymbol{u} - (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ であるので, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}'$.

■$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$　$\boldsymbol{u} \in \mathcal{K}$ とする．このとき,

$$A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0}_m = \boldsymbol{b}.$$

したがって $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}$. □

A.5　行列式に関する命題の証明

A.5.1　ラプラス展開に関すること

Proof A.5.1 (6.1.4). 行列のサイズ n に関する数学的帰納法で証明する.

■Base case　$n = 1$ のときは, $\det(\begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix}) = a_1$.

■Induction step　$n > 1$ とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とおく．A の 1 行目と k 列目を忘れて得られる $(n-1)$ 次正方行列を $\pi_{1,k}(A)$ とおく．A の 1 行目は, 1 列目の成分は a_1 であるが, それ以外は 0 である．つまり, $a_{1,1} = a_1$, $a_{1,2} = \cdots = a_{1,n} = 0$ であるので

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A)) \\ &= a_1\det(\pi_{1,1}(A)).\end{aligned}$$

$\pi_{1,1}(A)$ は下半三角行列であり, $\pi_{1,1}(A)$ の対角成分は $a_2, \ldots, a_n$ であるので, 帰納法の仮定から $\det(\pi_{1,1}(A)) = a_2 \cdots a_n$ である．よって, $\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$. □

Proof A.5.2 (6.1.5). 行列のサイズ n に関する数学的帰納法で証明する.

■Base case　$n = 1$ のときは, $\det(\begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix}) = a_1$.

■Induction step　$n > 1$ とし, A の (i, j)-成分を $a_{i,j}$ とおく. A の 1 行目と k 列目を忘れて得られる $(n-1)$ 次正方行列を $\pi_{1,k}(A)$ とおく. A が上半三角行列であるので, $\pi_{1,k}(A)$ は上半三角行列である. また, $k > 1$ のとき, $\pi_{1,k}(A)$ の $(1, 1)$-成分は, $\pi_{1,1}(A)$ の $(2, 1)$-成分であり 0 となる. したがって, $k > 1$ ならば, 対角成分に 0 が含まれるので, 帰納法の仮定から, $\det(\pi_{1,k}(A)) = 0$ となる. 一方 $\pi_{1,1}(A)$ の対角成分は $a_2, \ldots, a_n$ であるので, 帰納法の仮定から, $\det(\pi_{1,1}(A)) = a_2 \cdots a_n$ となる. よって, $a_{1,1} = a_1$ であるから,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(\pi_{1,j}(A)) \\
&= a_{1,1} \det(\pi_{1,1}(A)) \\
&= a_1 \det(\pi_{1,1}(A)) \\
&= a_1 a_2 \cdots a_n.
\end{aligned}$$

□

Proof A.5.3 (6.1.12). 行列のサイズ n に関する数学的帰納法で証明する.

■Base case　$n = 1$ のときは $\det(A) = a_{1,1}$ であるので成り立つ. $n = 2$ のときは $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$ であるので成り立つ.

■Induction step　$n > 2$ とする. $\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)$ で, A の 1 行目, i 行目, 1 列目, j 列目を取り除いて得られる $(n-2)$-次正方行列を表すことにする.

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\pi_{i,1}(A)) \\
&= a_{1,1} \det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\pi_{i,1}(A))
\end{aligned}$$

とおく. $i > 1$ のとき, $\pi_{i,1}(A)$ が A の i 行目と 1 列目を取り除いて得られる行列であるので, $\pi_{i,1}(A)$ の $(1, j)$ 成分は $a_{1,j+1}$ であり, $\pi_{1,j}(\pi_{i,1}(A)) = \pi_{\{1,i\},\{1,j+1\}}(A)$ である. したがって, $i > 1$ のときには, $\det(\pi_{i,1}(A))$ を定義に従って展開すると,

$$\begin{aligned}
\det(\pi_{i,1}(A))) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} a_{1,j+1} \det(\pi_{1,j}(\pi_{i,1}(A))) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} a_{1,j+1} \det(\pi_{\{1,i\},\{1,j+1\}}(A)) \\
&= \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1,j} \det(\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)).
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
D &= a_{1,1} \det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\pi_{i,1}(A)) \\
&= a_{1,1} \det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1,j} \det(\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A))
\end{aligned}$$

$$= a_{1,1}\det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i,1}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)).$$

一方 $\det(A)$ を定義に従って展開すると

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A))\\ &= a_{1,1}\det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A)).\end{aligned}$$

である．$j > 1$ のとき，$\pi_{1,j}(A)$ が A の 1 行目と j 列目を取り除いて得られる行列であるので，$\pi_{1,j}(A)$ の $(i,1)$ 成分は $a_{i+1,1}$ であり，$\pi_{i,1}(\pi_{1,j}(A)) = \pi_{\{1,i+1\},\{1,j\}}(A)$ である．したがって，$j > 1$ のときには，帰納法の仮定を使い $\det(\pi_{1,j}(A))$ を展開すると，

$$\begin{aligned}\det(\pi_{1,j}(A)) &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_{i+1,1}\det(\pi_{i,1}(\pi_{1,j}(A)))\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_{i+1,1}\det(\pi_{\{1,i+1\},\{1,j\}}(A))\\ &= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i,1}\det(\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)).\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{1,1}\det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A))\\ &= a_{1,1}\det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i,1}\det(\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A))\\ &= a_{1,1}\det(\pi_{1,1}(A)) + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i,1}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)).\end{aligned}$$

したがって，$\det(A) = D$ である． □

Proof A.5.4 (6.1.15)．行列のサイズ n に関する数学的帰納法で証明する．

■Base case　$n = 1$ のときは $\det(A) = a_{1,1}$ であるので成り立つ．$n = 2$ のときは $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$ であるので成り立つ．

■Induction step　$n > 2$ とする．$\pi_{\{1,i\},\{k,j\}}(A)$ で，A の 1 行目，i 行目，k 列目，j 列目を取り除いて得られる $(n-2)$-次正方行列を表すことにする．

$$\begin{aligned}D &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+t}a_{i,t}\det(\pi_{i,t}(A))\\ &= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t}a_{i,t}\det(\pi_{i,t}(A))\end{aligned}$$

とおく．$i > 1$ のとき，$\pi_{i,t}(A)$ が A の i 行目と t 列目を取り除いて得られる行列である．したがって，$j < t$ なら，$\pi_{i,t}(A)$ の $(1,j)$ 成分は $a_{1,j}$ であり，$\pi_{1,j}(\pi_{i,t}(A)) = \pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)$ である．また，$j \geq t$ なら，$\pi_{i,t}(A)$ の $(1,j)$ 成分は $a_{1,j+1}$ であり，

$\pi_{1,j}(\pi_{i,t}(A)) = \pi_{\{1,i\},\{t,j+1\}}(A)$ である．したがって，$\det(\pi_{i,t}(A))$ を定義に従って展開すると，

$$\begin{aligned}\det(\pi_{i,t}(A))) &= \sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(\pi_{i,t}(A))) + \sum_{j=t}^{n-1}(-1)^{j+1}a_{1,j+1}\det(\pi_{1,j}(\pi_{i,t}(A)))\\ &= \sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)) + \sum_{j=t}^{n-1}(-1)^{j+1}a_{1,j+1}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j+1\}}(A))\\ &= \sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)) + \sum_{j=t+1}^{n}(-1)^{j}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)).\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}D &= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t}a_{i,t}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t}a_{i,t}\sum_{j=t+1}^{n}(-1)^{j}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A))\\ &= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{i+j+t+1}a_{i,t}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=t+1}^{n}(-1)^{i+j+t}a_{i,t}a_{1,j}\det(\pi_{\{1,i\},\{t,j\}}(A)).\end{aligned}$$

一方 $\det(A)$ を定義に従って展開すると

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A))\\ &= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A)) + \sum_{j=t+1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A)).\end{aligned}$$

である．$j < t$ のとき，$\pi_{1,j}(A)$ が A の 1 行目と j 列目を取り除いて得られる行列であるので，$\pi_{1,j}(A)$ の $(i, t-1)$ 成分は $a_{i+1,t}$ であり，$\pi_{i,t-1}(\pi_{1,j}(A)) = \pi_{\{1,i+1\},\{j,t\}}(A)$ である．したがって，$j < t$ のときには，帰納法の仮定を使い $\det(\pi_{1,j}(A))$ を $t-1$ 列目で展開すると，

$$\begin{aligned}\det(\pi_{1,j}(A)) &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+t-1}a_{i+1,t}\det(\pi_{i,t-1}(\pi_{1,j}(A)))\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+t-1}a_{i+1,t}\det(\pi_{\{1,i+1\},\{j,t\}}(A))\\ &= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t-2}a_{i,t}\det(\pi_{\{1,i\},\{j,t\}}(A))\\ &= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t}a_{i,t}\det(\pi_{\{1,i\},\{j,t\}}(A)).\end{aligned}$$

また，$j > t$ のとき，$\pi_{1,j}(A)$ が A の 1 行目と j 列目を取り除いて得られる行列であるので，$\pi_{1,j}(A)$ の (i, t) 成分は $a_{i+1,t}$ であり，$\pi_{i,t}(\pi_{1,j}(A)) = \pi_{\{1,i+1\},\{j,t\}}(A)$ である．したがって，$j < t$ のときには，帰納法の仮定を使い $\det(\pi_{1,j}(A))$ を t 列目で展開すると，

$$\begin{aligned}\det(\pi_{1,j}(A)) &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+t}a_{i+1,t}\det(\pi_{i,t}(\pi_{1,j}(A)))\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+t}a_{i+1,t}\det(\pi_{\{1,i+1\},\{j,t\}}(A))\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t-1}a_{i,t}\det(\pi_{\{1,i\},\{j,t\}}(A)).$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}a_{1,j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t}a_{i,t}\det(\pi_{\{1,i\},\{j,t\}}(A)) + \sum_{j=t+1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\sum_{i=2}^{n}(-1 \\
&= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{i+t+j+1}a_{1,j}a_{i,t}\det(\pi_{\{1,i\},\{j,t\}}(A)) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=t+1}^{n}(-1)^{i+j+t}a_{1,j}a_{i,t}\,\mathrm{de} \\
&= (-1)^{1+t}a_{1,t}\det(\pi_{1,t}(A)) + \sum_{j=1}^{t-1}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+t+j+1}a_{1,j}a_{i,t}\det(\pi_{\{1,i\},\{j,t\}}(A)) + \sum_{j=t+1}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j+t}a_{1,j}a_{i,t}\,\mathrm{de}
\end{aligned}$$

したがって, $\det(A) = D$ である. □

Proof A.5.5 (6.1.14). Theorems 6.1.13 and 6.1.15 から得られる. □

A.5.2　順列を用いた展開に関すること

Proof A.5.6 (6.2.6). $\det(A)$ を計算するため, 定義に従って展開することを繰り返すと, 各行各列から 1 つずつ成分を選んできてかけ合わせたものが項として現れる. つまり,

$$\det(A) = \sum_{\sigma=[\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)]\in S_n} c_\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

と書くことができる. c_σ を計算するには, $a_{i,\sigma(i)}$ が選ばれたときの符号を考える必要がある. A の 1 行目, 2 行目,..., $i-1$ 行目と, $\sigma(1)$ 列目, $\sigma(2)$ 列目,...,$\sigma(i-1)$ 列目, を取り除いて得られる $(n-i+1)$-次正方行列を A' とすると, $a_{i,\sigma(i)}$ は A' から選ばれている. $\sigma(1),\sigma(2),\ldots,(\sigma(i-1))$ のうち $\sigma(i)$ よりも小さいものの総数を k_i とすると, $a_{i,\sigma(i)}$ は A' の $\sigma(i)-k_i$ 列目であるから, このときの符号は $(-1)^{\sigma(i)-k_i+1}$ である. したがって, c_σ は

$$\begin{aligned}
c_\sigma &= (-1)^{\sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)+1-k_i)} \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n-\sum_{i=1}^{n}k_i} \\
&= (-1)^{2n}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}-n-\sum_{i=1}^{n}k_i} \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}-n-\sum_{i=1}^{n}k_i} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}-\sum_{i=1}^{n}k_i}
\end{aligned}$$

である.

$$\#\{(i,j) \mid 1\le i<j\le n\} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\#\{(i,j) \mid 1\le i<j\le n, \sigma(i)<\sigma(j)\} = \sum_{i=1}^{n}k_i$$

であるので, $\#I(\sigma) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^{n}k_i$ であるから, $c_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

記号を用意し詳細に書くなら以下のようになる:

定義から,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A)) \\ = \sum_{j\in\{\,1,2,\dots,n\,\}}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A))$$

である.

$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A))$ という和の第 j 項目 $(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(\pi_{1,j}(A))$ に注目する. これを計算するには, $\det(\pi_{1,j}(A))$ を定義に従い展開することになる. $\pi_{1,j}(A)$ は A の 1 行目と j 列目を取り除いた行列であるので, $\pi_{1,j}(A)$ の 1 行目と j' 列目を取り除いた行列は, $j' < j$ なら $\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)$ であり, $j' \geq j$ なら $\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'+1\,\}}(A)$ である. また, $\pi_{1,j}(A)$ の 1 行目は $a_{2,1},a_{2,2},\dots,a_{2,j-1},a_{2,j+1},a_{2,j+12},\dots,a_{2,n}$ という A の 2 行目から j 列目を除いたものである. したがって,

$$\begin{aligned}\det(\pi_{1,j}(A)) &= \sum_{j'=1}^{j-1}(-1)^{j'+1}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)) \\ &\quad+\sum_{j'=j}^{n-1}(-1)^{j'+1}a_{2,j'+1}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'+1\,\}}(A)) \\ &= \sum_{j'=1}^{j-1}(-1)^{j'+1}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)) \\ &\quad+\sum_{j'=j+1}^{n}(-1)^{j'}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)) \\ &= \sum_{j'=1}^{j-1}(-1)^{j'+1}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)) \\ &\quad+\sum_{j'=j+1}^{n}(-1)^{j'}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A))\end{aligned}$$

とかける. これは,

$$\begin{aligned}&\det(\pi_{1,j}(A)) \\ &= \sum_{j'=1}^{j-1}(-1)^{j'+1}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)) + \sum_{j'=j+1}^{n}(-1)^{j'}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A)) \\ &= \sum_{j'\in\{\,1,\dots,n\,\}\setminus\{\,j\,\}}c_{j'}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A))\end{aligned}$$

と整理できる.[*1] つまり, $I = \{\,1,2,\dots,n\,\}$ とおくと,

$$\begin{aligned}&\det(\pi_{1,j}(A)) \\ &= \sum_{j'\in I\setminus\{\,j\,\}}c_{j'}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A))\end{aligned}$$

とかける.

[*1] 集合 X と Y に対し, $X\setminus Y$ で X の要素で Y には含まれないものを集めた集合を表している.

このことから, $\det(A)$ は,

$$\det(A)=\sum_{j\in I}\sum_{j'\in I\setminus\{\,j\,\}} c_{j,j'}a_{1,j}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A))$$

と書くことができることがわかるが, これは

$$\det(A)=\sum_{j,j'\in\{\,1,2,\dots,n\,\}\colon\, j,\,j'\ \text{は異なる}} c_{j,j'}a_{1,j}a_{2,j'}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,j,j'\,\}}(A))$$

と書いてもよい. j, j' を, それぞれ $\sigma(1)$, $\sigma(2)$ と書き直して,

$$\det(A)=\sum_{\sigma(1),\sigma(2)\in I\colon\,\sigma(1),\,\sigma(2)\ \text{は異なる}} c_{\sigma(1),\sigma(2)}a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,\sigma(1),\sigma(2)\,\}}(A))$$

と書ける. $\det(\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,\sigma(1),\sigma(2)\,\}}(A))$ にも同様の考察をすることで,

$$\det(A)=$$
$$\sum_{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\in I\colon\,\text{相異なる}} c_{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)}a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{2,\sigma(3)}\det(\pi_{\{\,1,2,3\,\},\{\,\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\,\}}(A))$$

と書ける. 以下同様に繰り返すと,

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)\in I\colon\,\text{相異なる}} c_\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\\&=\sum_{\sigma=[\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)]\in S_n} c_\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\end{aligned}$$

と書くことができることがわかる.

c_σ が $\operatorname{sgn}(\sigma)$ と等しいことを示す. c_σ, つまり $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ の係数について考える.

$I(\sigma,i)=\{\,(t,i)\mid t<i$ かつ $\sigma(t)>\sigma(i)\,\}$ とおくことにする. $I(\sigma,i)$ に属する要素の総数 $\#I(\sigma,i)$ は, $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(i-1)$ のうち $\sigma(i)$ よりも大きいものの総数である. したがって, $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(i-1)$ のうち $\sigma(i)$ より小さいものの総数は, $i-\#I(\sigma,i)-1$ である. また, 定義から, $\#I(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\#I(\sigma,i)$ である.

行列式の最初の展開で $a_{1,\sigma(1)}$ が選ばれたときの係数は, $(-1)^{\sigma(1)+1}$ である.

次の展開で $a_{2,\sigma(2)}$ で選ばれたときの係数は, $\pi_{\{\,1\,\},\{\,\sigma(1)\,\}}$ を展開しているので, $\sigma(2)<\sigma(1)$ ならば $(-1)^{\sigma(2)+1}$ であるが, $\sigma(1)<\sigma(2)$ ならば $(-1)^{\sigma(2)}$ である.

さらに次の展開で $a_{3,\sigma(3)}$ で選ばれたときの係数は, $\pi_{\{\,1,2\,\},\{\,\sigma(1),\sigma(2)\,\}}$ を展開しているので, $\sigma(1),\sigma(2)$ のうち $\sigma(3)$ よりも小さいものの総数を l とすると, $l=0$ のとき, $(-1)^{\sigma(3)+1}$ であり, $l=1$ のとき, $(-1)^{\sigma(3)}$ であり, $l=2$ のとき, $(-1)^{\sigma(3)-1}$ である.

一般に, $a_{i,\sigma(i)}$ が選ばれたときの係数は, $(-1)^{\sigma(i)+1-(i-\#I(\sigma,i)-1)}$ であることがわかる.

$$(-1)^{\sigma(i)+1-(i-\#I(\sigma,i)-1)}=(-1)^{2+\sigma(i)-i+\#I(\sigma,i)}=(-1)^{\sigma(i)-i+\#I(\sigma,i)}$$

である. これらをかけ合わせたものが, $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ の係数であるから,

$$\begin{aligned}c_\sigma&=\prod_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma(i)-i+\#I(\sigma,i)}\\&=(-1)^{\sum_{i=1}^{n}(\sigma(i)-i+\#I(\sigma,i))}\\&=(-1)^{\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)-\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}\#I(\sigma,i))}\\&=(-1)^{\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)-\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}\#I(\sigma,i))}.\end{aligned}$$

$\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ は $1, \ldots, n$ を並び替えたものなので, 総和は等しい. したがって,

$$\begin{aligned} c_\sigma &= (-1)^{\sum_{i=1}^n \sigma(i) - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \# I(\sigma,i))} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^n \# I(\sigma,i))} \\ &= (-1)^{\# I(\sigma))} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma). \end{aligned}$$

□

A.5.3　行基本変形に関すること

Proof A.5.7 (6.3.1 – 1). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す.

■Base case　$n = 1$ のときは, $t = 1$ である. したがって, $\det(\begin{pmatrix} \alpha a \end{pmatrix}) = \alpha a = \alpha \det(\begin{pmatrix} a \end{pmatrix})$.

■Induction step　$n > 1$ のときについて考える. A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする. $k \neq t$ とする. このとき, $\pi_{k,j}(A')$ には A' の t 行目が含まれるので, 帰納法の仮定から, $\det(\pi_{k,j}(A')) = \alpha \det(\pi_{k,j}(A))$ である. また, $a'_{k,j} = a_{k,j}$ であるから, $\det(A')$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a'_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A')) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \alpha a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)). \end{aligned}$$

一方, $\det(A)$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned} \alpha \det(A) &= \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \alpha a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)). \end{aligned}$$

□

Proof A.5.8 (6.3.1 – 2). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す.

■Base case　$n = 2$ のときについて考える.

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) == ad - bc$$

$$\det(\begin{pmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ c & d \end{pmatrix}) = (a+\alpha c)d - (b+\alpha d)c = ad - bc$$

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c+\alpha a & d+\alpha b \end{pmatrix}) = a(d+\alpha b) - b(c+\alpha a) = ad - bc.$$

■Induction step　$n > 2$ のときについて考える. A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする. k は t でも s でもないとする. このとき, $\pi_{k,j}(A')$ には A' の t 行目と s 行目が含まれるので, 帰納法の仮定から, $\det(\pi_{k,j}(A')) = \det(\pi_{k,j}(A))$ である. また,

$a'_{k,j} = a_{k,j}$ であるから, $\det(A')$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a'_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A')) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)).\end{aligned}$$

一方, $\det(A)$ を k 行目で展開すると,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)).$$

□

Proof A.5.9 (6.3.1 – 3). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す.

■Base case　$n = 2$ のときについて考える.

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$$
$$-\det(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}) = -(cb - da) = ad - bc.$$

■Induction step　$n > 2$ のときについて考える. A の (i, j)-成分を $a_{i,j}$, A' の (i, j)-成分を $a'_{i,j}$ とする. k は t でも s でもないとする. このとき, $\pi_{k,j}(A')$ には A' の t 行目と s 行目が含まれるので, 帰納法の仮定から, $\det(\pi_{k,j}(A')) = -\det(\pi_{k,j}(A))$ である. また, $a'_{k,j} = a_{k,j}$ であるから, $\det(A')$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a'_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A')) \\ &= \sum_{j=1}^{n} -(-1)^{k+j} a_{t,j} \det(\pi_{k,j}(A)).\end{aligned}$$

一方, $-\det(A)$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}-\det(A) &= -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} -(-1)^{k+j} a_{k,j} \det(\pi_{k,j}(A)).\end{aligned}$$

□

Proof A.5.10 (6.3.4 – 1). P は正則行列なので, $P = P_1 P_2 P_3 \cdot P_l$ を満たす基本行列 P_i が取れる. このとき

$$\begin{aligned}\det(P) &= \det(P_1 P_2 P_3 \cdot P_l) \\ &= \det(P_1) \det(P_2 P_3 \cdot P_l) \\ &= \det(P_1) \det(P_2) \det(P_3 \cdot P_l) \\ &= \det(P_1) \det(P_2) \det(P_3) \cdot \det(P_l)\end{aligned}$$

となるが, 基本行列行列式は 0 ではないので, その積も 0 ではない. □

Proof A.5.11 (6.3.4 – 2). P は正則行列なので, $P = P_1P_2P_3 \cdot P_l$ を満たす基本行列 P_i が取れる. このとき

$$\begin{aligned}\det(P) &= \det(P_1P_2P_3 \cdot P_l)\\ &= \det(P_1)\det(P_2P_3 \cdot P_l)\\ &= \det(P_1)\det(P_2)\det(P_3 \cdot P_l)\\ &= \det(P_1)\det(P_2)\det(P_3)\cdot\det(P_l)\end{aligned}$$

である. したがって

$$\begin{aligned}\det(PA) &= \det(P_1P_2P_3 \cdot P_lA)\\ &= \det(P_1)\det(P_2P_3 \cdot P_lA)\\ &= \det(P_1)\det(P_2)\det(P_3 \cdot P_lA)\\ &= \det(P_1)\det(P_2)\det(P_3)\cdot\det(P_lA)\\ &= \det(P_1)\det(P_2)\det(P_3)\cdot\det(P_l)\det(A)\\ &= \det(P)\det(A).\end{aligned}$$

□

A.5.4 多重線形性, 交代性に関すること

Proof A.5.12 (6.4.1 – 1). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す.

■Base case　$n = 1$ のときは, $t = 1$ である. したがって, $\det(\begin{pmatrix}\alpha a\end{pmatrix}) = \alpha a = \alpha\det(\begin{pmatrix}a\end{pmatrix})$.

■Induction step　$n > 1$ のときについて考える. A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする. $k \neq t$ とする. このとき, $\pi_{k,j}(A')$ には A' の t 行目が含まれるので, 帰納法の仮定から, $\alpha\det(\pi_{k,j}(A')) = \det(\pi_{k,j}(A))$ である. また, $a'_{k,j} = a_{k,j}$ であるから, $\det(A')$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}\alpha\det(A') &= \alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a'_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))\\ &= \alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\alpha a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A))\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

□

Proof A.5.13 (6.4.1 – 2). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す.

■Base case　$n = 1$ とする. このとき, $\det(\begin{pmatrix}a_{1,1}\end{pmatrix}) = a_{1,1} = a'_{1,1} + a''_{1,1} = \det(\begin{pmatrix}a'_{1,1}\end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix}a''_{1,1}\end{pmatrix})$.

■Induction step　$n>1$ とする．A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする．$k \neq t$ とする．このとき, $\pi_{k,j}(A')$ には A' の t 行目が含まれるので, 帰納法の仮定から, $\det(\pi_{k,j}(A'))+\det(\pi_{k,j}(A''))=\det(\pi_{k,j}(A))$ である．また, $a'_{k,j}=a''_{k,j}=a_{k,j}$ であるから, $\det(A')$, $\det(A'')$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}
\det(A')+\det(A'') &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a'_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a''_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A''))\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A''))\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}(\det(\pi_{k,j}(A'))+\det(\pi_{k,j}(A'')))\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A))\\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

□

Proof A.5.14 (6.4.2). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す．

■Base case　$n=2$ のときは,

$$\begin{aligned}
\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) &= ad-bc\\
-\det(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}) &= -(cb-ad)=ad-bc.
\end{aligned}$$

■Induction step　$n>2$ のときについて考える．A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする．k は t でも s でもないとする．このとき, $\pi_{k,j}(A')$ には A' の t 行目, s 行目がどちらも含まれるので, 帰納法の仮定から, $-\det(\pi_{k,j}(A'))=\det(\pi_{k,j}(A))$ である．また, $a'_{k,j}=a_{k,j}$ であるから, $\det(A')$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}
-\det(A') &= -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a'_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))\\
&= -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}(-1)a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A'))\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A))\\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

□

Proof A.5.15 (6.4.3). 行列のサイズ n に関する帰納法で示す．

■Base case　$n=2$ のときは,

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}) = ab - ba = .$$

■Induction step　$n>2$ のときについて考える．A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$, とする．k は t でも s でもないとする．このとき, $\pi_{k,j}(A)$ には A の t 行目, s 行目がどちらも含まれるので, 帰納法の仮定から, $-\det(\pi_{k,j}(A))=0$ である．$\det(A)$ を k 行目で展開すると,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det(\pi_{k,j}(A)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Remark A.5.16. $1+1\neq 0$ のときには, 以下のように証明することもできる: A の t 行目と s 行目を入れ替えた行列を A' とすると, Theorem 6.4.2 から, $\det(A')=-\det(A)$ である．また A の t 行目と s 行目が等しいので, $A=A'$ である．従って, $\det(A)=-\det(A)$ である．両辺に $\det(A)$ を足すことで $2\det(A)=0$ である．従って $\det(A)=0$.　□

Proof A.5.17 (6.4.8 – 1)．多重線型性から明らかである．　□

Proof A.5.18 (6.4.8 – 2)．A' の t 行目に s 行目の α 倍を加えた行列を A とする．このとき, $D(A)=D(A')$ を示す．

t 行目以外は A' と等しく, t 行目は A' の s 行目と等しいような n 次正方行列 A'' を考える．このとき, 交代性から $D(A'')=0$ である．また, A'' の t 行目を α 倍をした行列を A''' とすると, t 行目に関する線型性から $D(A''')=\alpha D(A'')=\alpha 0=0$ である．一方 A' の t 行目に s 行目の α 倍を加えたものを A とすると, t 行目に関する線型性から, $D(A)=D(A')+D(A''')$ である．したがって $D(A)=D(A')+D(A''')=D(A')+0=D(A')$.　□

Proof A.5.19 (6.4.8 – 3)．A' の t 行目と s 行目を入れ替えた行列を A とする．このとき, $D(A)=-D(A')$ を示す．

A' の t 行目に s 行目の -1 倍を加えるたものを A'' とおく．A'' の s 行目に t 行目の 1 倍を加えたものを A''' とする．A''' の s 行目は A' の t 行目と等しい．A''' の t 行目に s 行目の -1 倍を加えたものを A'''' とする．A'''' の t 行目は A' の s 行目の -1 倍に等しく, A'''' の s 行目は A' の t 行目に等しい．また $D(A')=D(A'''')$ である．A'''' の t 行目を -1 倍したものは A に等しいので, t 行目に関する線型性から, $D(A)=-D(A''')=-D(A')$.　□

Proof A.5.20 (6.4.9)．A の t 行目をすべて 0 倍した行列を A' とおくと, $\det(A')=0\det(A)=0$ であるが, A の t 行目の成分はもともと 0 であったので, $A=A'$ である．よって $\det(A)=\det(A')=0$.　□

A.5.5　余因子に関すること

Proof A.5.21 (6.5.3 − 1). $s = t$ のときには, $\det(A)$ を t 行目で展開したものが左辺である.

$s \neq t$ のときには, 次のような n 次正方行列 A' を考える: A' は s 行目を除き A と等しい. A' の s 行目は A の t 行目と等しい. このとき, A' の t 行目と s 行目は等しいので, $\det(A') = 0$ である. 一方 $\det(A')$ を展開したものが, 左辺である. □

Proof A.5.22 (6.5.3 − 2). $\det(A) = \det({}^t A)$ であるので, 行の場合に帰着できる. □

Proof A.5.23 (6.5.6). $A\tilde{A}$ を直接計算すると, (s, t) 成分は, Lemma 6.5.3 の item 1 の左辺である. よって, $\det(A)E_n$ に等しいことがわかる.

また, $\tilde{A}A$ は Lemma 6.5.3 の item 2 に帰着できる. 左辺である. □

Proof A.5.24 (6.5.11 − 2). Proposition 6.5.6 より,

$$A\tilde{A} = \det(A)E_n$$

である.

$\det(A) = 0$ とすると, $A\tilde{A} = O_{n,n}$ となる. $A = O_{n,n}$ のとき, $\tilde{A} = O_{n,n}$ であるから, $\det(\tilde{A}) = 0$. $A \neq O_{n,n}$ のとき, 零行列ではない行列をかけて零行列となったので, $\tilde{A}$ は正則ではない. よって, $\det(\tilde{A}) = 0$.

一方 $\det(A) \neq 0$ とすると, A は正則で, $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ である. したがって $\tilde{A}$ も正則であり, $\det(\tilde{A}) \neq 0$.

□

Proof A.5.25 (6.5.11 − 1). Proposition 6.5.6 より,

$$A\tilde{A} = \det(A)E_n.$$

行列式を考えると, $\det(\alpha E_n) = \alpha^n$ であるので,

$$\det(A)\det(\tilde{A}) = \det(A)^n$$

となる. $\det(A) \neq 0$ ならば, $\det(A)$ でわることで,

$$\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$$

$\det(A) = 0$ ならば, $\det(\tilde{A}) = 0$ なので,

$$\det(\tilde{A}) = 0 = \det(A)^{n-1}.$$

□

Proof A.5.26 (6.5.12). A が正則なので, $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ である. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$ であ

るので, $\Delta_{i,j}$ を A の (i,j)-余因子とすると,

$$
\begin{aligned}
A^{-1}\boldsymbol{b} &= \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\boldsymbol{b} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}\!\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \cdots & \Delta_{1,n} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \cdots & \Delta_{2,n} \\ \vdots & & & \\ \Delta_{n,1} & \Delta_{n,2} & \cdots & \Delta_{n,n} \end{pmatrix}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{2,1} & \cdots & \Delta_{n,1} \\ \Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & \cdots & \Delta_{n,2} \\ \vdots & & & \\ \Delta_{1,n} & \Delta_{2,n} & \cdots & \Delta_{n,n} \end{pmatrix}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \Delta_{1,1}b_1 + \Delta_{2,1}b_2 + \cdots + \Delta_{n,1}b_n \\ \Delta_{1,2}b_1 + \Delta_{2,2}b_2 + \cdots + \Delta_{n,2}b_n \\ \vdots \\ \Delta_{1,n}b_1 + \Delta_{2,n}b_2 + \cdots + \Delta_{n,n}b_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}\Delta_{1,j}b_j + \Delta_{2,j}b_2 + \cdots + \Delta_{n,j}b_n$$

一方,

$$A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \Big| & \cdots & \Big| & \boldsymbol{a}_{j-1} & \Big| & \boldsymbol{b} & \Big| & \boldsymbol{a}_{j-1} & \Big| & \cdots & \Big| & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

とおき, $\det(A')$ を j 列目で展開すると,

$$\det(A') = \Delta_{1,j}b_j + \Delta_{2,j}b_2 + \cdots + \Delta_{n,j}b_n.$$

よって,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}\det(A').$$

□

A.6　固有値に関連する命題の証明

A.6.1　一次独立性

Proof A.6.1 (7.1.1). 一次従属であるので $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ かつ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq (0,\ldots,0)$ を満たす数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ がとれる. $\alpha_k \neq 0$ とする. このとき,

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{-\alpha_i}{\alpha_k}\boldsymbol{a}_i + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{-\alpha_i}{\alpha_k}\boldsymbol{a}_i$$

である. ${}^{t}A$ を考え, k 行目に i 行目の $\frac{-\alpha_i}{\alpha_k}$ 倍を加えるということを行うと, k 行目の成分はすべて 0 となる. さらに k 行目と n 行目を交換した行列を A' とする. A' は n 行目がすべて 0 である (n,m) 行列であるから, $\operatorname{rank}(A') < n$ である. よって $\operatorname{rank}(A) < n$ □

Proof A.6.2 (7.1.2).

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解とする．このとき，

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

であるので，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

であり，$(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$．したがって，$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次従属． □

A.6.2

Proof A.6.3 (7.3.3).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする．

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　正則行列 P で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

とできるとする．このとき，

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である．

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix}$$

とすると

$$P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \mu q \\ \lambda p' & \mu q' \end{pmatrix}$$

である．また，

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bp' & aq + bq' \\ cp + dp' & cq + dq' \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} ap+bp' & aq+bq' \\ cp+dp' & cq+dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \mu q \\ \lambda p' & \mu q' \end{pmatrix}$$

である．したがって,

$$A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ap+bp' \\ cp+dp' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p' \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{a}$$
$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} aq+bq' \\ cq+dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu q \\ \mu q' \end{pmatrix} = \mu \boldsymbol{b}$$

である．P が正則であるので**??**より $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であり, $\boldsymbol{a}$ は固有値 λ に属する固有ベクトル, $\boldsymbol{b}$ は固有値 μ に属する固有ベクトル, である．

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　$\boldsymbol{a}$ は固有値 λ に属する固有ベクトル, $\boldsymbol{b}$ は固有値 μ に属する固有ベクトルとし, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立とする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix}$$

とすると**??**より, P は正則である．

また,

$$A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ap+bp' \\ cp+dp' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p' \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{a}$$
$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} aq+bq' \\ cq+dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu q \\ \mu q' \end{pmatrix} = \mu \boldsymbol{b}$$

であるので,

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bp' & aq+bq' \\ cp+dp' & cq+dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \mu q \\ \lambda p' & \mu q' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

P は正則なので, P^{-1} を左からかけると,

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である．□

Proof A.6.4 (7.3.4)．A を 2 次正方行列とする．$\boldsymbol{v}$ は固有値 λ に属する A の固有ベクトル, $\boldsymbol{w}$ は固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする．

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$$

とおく．$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ とする．このとき, $x = y = 0$ を示す．

$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ であるので,

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{0} \\ A(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) &= A\boldsymbol{0} \\ xA\boldsymbol{v} + yA\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{0} \\ x\lambda\boldsymbol{v} + y\mu\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である. $x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, $x\lambda\boldsymbol{v} + y\mu\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ であるので,

$$\begin{pmatrix} xv & yw \\ xv' & yw' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv + yw & \lambda xv + \mu yw \\ xv' + xv' & \lambda xv' + \mu yw' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}) = \mu - \lambda \neq 0$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

は正則である.

$$\begin{pmatrix} xv & yw \\ xv' & yw' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv & yw \\ xv' & yw' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} xv \\ xv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\ y\boldsymbol{w} &= \begin{pmatrix} yw \\ yw' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であるから, $x = 0$ である. また, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ であるから, $y = 0$ である. □

Proof A.6.5 (7.1.5).

■*Item* 1 $\implies$ *Item* 2　適宜行を入れ替えて, $\{1, \ldots, n\}$-行, $\{1, \ldots, n\}$-列の小行列式が 0 でないとする. $\{1, \ldots, n\}$-行, $\{1, \ldots, n\}$-列の小行列を B とし, $\{n+1, n+2, \ldots, m\}$-行, $\{1, \ldots, n\}$-列の小行列を C とする. このとき, $A = \left(\dfrac{B}{C}\right)$ である. B は正則であるので, 行基本形で, $\left(\dfrac{E_n}{C}\right)$ とできる. さらに行基本変形で, $\left(\dfrac{E_n}{O_{m-n,n}}\right)$ という形に変形できるので, $\mathrm{rank}(A) = n$ であることがわかる. よって, Lemma 7.1.1 より, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次独立.

■*Item* 2 $\implies$ *Item* 1　$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は一次独立とすると, Lemma 7.1.2 より, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は, 非自明な解をもつ. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とする. $A\boldsymbol{v}$ の i 行目は A の i 行目と A の, $\{i_1, \ldots, i_n\}$-行, $\{1, \ldots, n\}$-列の小行列を B とすると, $B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である. よって $\det(B) = 0$ である. □

付録 B

章末問題の略解

ここでは, 章末問題に関し簡単な解説と略解を挙げる. 答案には必要なことであっても省略しているものある. 逆に答案には必要ではないことが書いてあったりする. ここで述べられているものは, 解答例でも模範解答でもないことに注意すること.

B.1　実数の絶対値や平方根に関する問題

解説 B.1.1 (2.1)**.** たとえば, $a = -2$ のときには, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$ である. この例のように $\sqrt{a^2} \neq a$ となる場合もある.

一般には, $\sqrt{a^2} = |a|$ である. □

解説 B.1.2 (2.2)**.** $5 > 2^2$ であるから $\sqrt{5} > 2$ である. したがって, $2 - \sqrt{5} < 0$ である. よって, $|2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}$ である.

一般に実数 a の絶対値 $|a|$ は, $a > 0$ なら $|a| = a$ であり, $a < 0$ なら $|a| = -a$ である. □

解説 B.1.3 (2.3)**.** 判別式 D を考える.

$$D = (-(s+u))^2 - 4su = s^2 + 2su + u^2 - 4su = s^2 - 2su + u^2 = (s-u)^2$$

である. $D \geq 0$ なので実数解をもつ. □

B.2　行列の定義と演算に関する問題

解説 B.2.1 (3.1)**.** サイズ (型) は $(2,3)$. A の $(1,2)$-成分は 2. A の 2-行目は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A の 2-列目は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

A の転置は

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

解説 B.2.2 (3.2)**.** 具体的に成分を書き下せばわかる.

1. $(i,j)=(1,1)$ のとき, $5i+j-5=1$. $(i,j)=(1,2)$ のとき, $5i+j-5=2$. $(i,j)=(2,1)$ のとき, $5i+j-5=6$. $(i,j)=(2,2)$ のとき, $5i+j-5=7$. したがって,
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 7\end{pmatrix}.$$
2. $i\neq j$ のとき, $2^i\delta_{i,j}=2^i\cdot 0=0$. $i=j=1$ のとき, $2^i\delta_{i,j}=2^1\cdot 1=2$. $i=j=2$ のとき, $2^i\delta_{i,j}=2^2\cdot 1=4$. したがって,
$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$
3. $i\neq 2$ のとき, $\delta_{i,2}\delta_{j,1}=0\cdot\delta_{j,1}=0$. $j\neq 1$ のとき, $\delta_{i,2}\delta_{j,1}=\delta_{i,2}\cdot 0=0$. $i=2,j=1$ のとき, $\delta_{i,2}\delta_{j,1}=1\cdot 1=1$. したがって,
$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

□

解説 B.2.3 (3.3)**.**

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 3\\ 4+c & 5d-10\end{pmatrix}$$
$$B=\begin{pmatrix}7 & 2b+5\\ 6 & -4d+8\end{pmatrix}$$

とする. 行列が等しいということは, 対応する各成分が等しいということなので, $A=B$ とすると

$$\begin{cases}a+1=7\\ 3=2b+5\\ 4+c=6\\ 5d-10=-4d+8\end{cases}$$

となる. したがって,

$$\begin{cases}a=6\\ b=-1\\ c=2\\ d=2\end{cases}$$

を得る. 実際, $(a,b,c,d)=(6,-1,2,2)$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 3\\ 4+c & 5d-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1 & 3\\ 4+2 & 5\cdot 2-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$B=\begin{pmatrix}7 & 2b+5\\ 6 & -4d+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2(-1)+5\\ 6 & -4\cdot 2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

である. □

解説 B.2.4 (3.4)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix}$$

とする．A が対称行列であるということは, $A = {}^tA$ ということである．

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4+a \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので, $A = {}^tA$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4+a \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

である．したがって,

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 4+a \\ 4+a = 3 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

となり, $a = -1$ を得る．実際 $a = -1$ のとき,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ {}^tA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので対称行列である． □

解説 B.2.5 (3.5)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．A が交代行列であるということは, $-A = {}^tA$ ということである．

$$\begin{aligned} -A &= -\begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a & -3-b \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^tA &= \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ 3+b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので, $-A = {}^tA$ とすると,

$$\begin{pmatrix} -1+a & -3-b \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ 3+b & 0 \end{pmatrix}$$

である．したがって,

$$\begin{cases} -1+a = 1-a \\ -3-b = 4 \\ -4 = 3+b \\ 0 = 0 \end{cases}$$

となり, $a=1$, $b=-7$ を得る. 実際 $(a,b)=(1,-7)$ のとき,

$$
\begin{aligned}
-A &= \begin{pmatrix} -1+a & -3-b \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & -3-(-7) \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\
{}^tA &= \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ 3+b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 4 \\ 3+-7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり A は交代行列である. □

解説 B.2.6 (3.6)**.**

$$
\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-2-3 \\ 4-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 & 0+3 \\ 0-7 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\cdot 1 + 2\cdot(-5) & -9\cdot 0 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 7\cdot(-5) & 3\cdot 0 + 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 8 \\ -32 & 28 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\cdot 1 + 2\cdot(-5) \\ 3\cdot 1 + 7\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -32 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-9)\cdot 1 + 2\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-9) & 1\cdot 2 \\ -5\cdot 1 & -5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-3)\cdot 2 & 1\cdot(-3) + (-3)\cdot 5 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 2 & 2\cdot(-3) + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

解説 B.2.7 (3.7)**.**

$$
A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}
$$

とし,

$$
\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n
$$

とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= A^{n+1} \\
&= AA^n \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9a_n + 0c_n & 9b_n + 0d_n \\ 0a_n + 5c_n & 0b_n + 5d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a_n & 9b_n \\ 5c_n & 5d_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a_n & 9b_n \\ 5c_n & 5d_n \end{pmatrix}.
$$

よって，

$$
a_n = \begin{cases} 9a_{n-1} & (n > 1) \\ 9 & (n = 1) \end{cases}
$$

$$
b_n = \begin{cases} 9b_{n-1} & (n > 1) \\ 0 & (n = 1) \end{cases}
$$

$$
c_n = \begin{cases} 5c_{n-1} & (n > 1) \\ 0 & (n = 1) \end{cases}
$$

$$
d_n = \begin{cases} 5d_{n-1} & (n > 1) \\ 5 & (n = 1) \end{cases}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 9^{n-1} \cdot 9 = 9^n, \\
b_n &= 9^{n-1} \cdot 0 = 0, \\
c_n &= 5^{n-1} \cdot 0 = 0, \\
d_n &= 5^{n-1} \cdot 5 = 5^n.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
A^n = \begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.
$$

この結果は次のように検算できる: $n = 1$ のとき

$$
A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.
$$

となり正しい．$n = 2$ のとき

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 9 + 0 \cdot 0 & 9 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 9 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 9^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.
$$

となり正しい． □

解説 B.2.8 (3.8)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とし,

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n$$

とする．このとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= A^{n+1} \\ &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1a_n + 2c_n & 1b_n + 2d_n \\ 0a_n + 3c_n & 0b_n + 3d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2c_n & b_n + 2d_n \\ 3c_n & 3d_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2c_n & b_n + 2d_n \\ 3c_n & 3d_n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} a_{n-1} + 2c_{n-1} & (n > 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} b_{n-1} + 2d_{n-1} & (n > 1) \\ 2 & (n = 1) \end{cases} \\ c_n &= \begin{cases} 3c_{n-1} & (n > 1) \\ 0 & (n = 1) \end{cases} \\ d_n &= \begin{cases} 3d_{n-1} & (n > 1) \\ 3 & (n = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．したがって,

$$\begin{aligned} c_n &= 3^{n-1} \cdot 0 \\ d_n &= 3^{n-1} \cdot 3 = 3^n \end{aligned}$$

である．したがって,

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} a_{n-1} + 2c_{n-1} & (n > 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{n-1} & (n > 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} b_{n-1} + 2d_{n-1} & (n > 1) \\ 2 & (n = 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} & (n > 1) \\ 2 & (n = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$a_n = 1^{n-1} \cdot 1 = 1$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
b_n &= 2 \cdot 3^{n-1} + b_{n-1} \\
&= 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + b_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + b_{n-2} + \cdots + 2 \cdot 3^2 + b_2 \\
&= 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + b_{n-2} + \cdots + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + b_1 \\
&= 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + b_{n-2} + \cdots + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \\
&= 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1) \\
&= 2\frac{3^n - 1}{3 - 1} \\
&= 2\frac{3^n - 1}{2} \\
&= 3^n - 1.
\end{aligned}$$

したがって，

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

この結果は次のように検算できる: $n = 1$ のとき，

$$A^n = A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 3^n - 1 \cdot 2^{n+1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 3^1 - 1 \cdot 2^2 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

となり正しい．

$$\begin{aligned}
AA^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (3^n - 1) + 2 \cdot 3^n \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (3^n - 1) + 3 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (3^n - 1) + 2 \cdot 3^n \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (3^n - 1) + 3 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n \\ 3^{n+1} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 3^n - 1 \\ 3^{n+1} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 3^{n+1} & \end{pmatrix} \\
A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

となり等しい．　□

解説 B.2.9 (3.9)**.**

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

を得る．したがって $a = 1$, $b = 4$ を得る．実際, $(a, b) = (1, 4)$ とすると,

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる． □

B.3 逆行列に関する問題

解説 B.3.1 (4.1)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である． □

解説 B.3.2 (4.2)**.** $A^3 + A^2 + A + E_2 = O_{2,2}$ を満たすとすると,

$$-A^3 - A^2 - A = E_2$$

を満たす．したがって, $B = -(A^2 + A + E_2)$ とおくと,

$$\begin{aligned} AB &= A(-A^2 - A - E_2) = -A^3 - A^2 - A = E_2 \\ BA &= (-A^2 - A - E_2)A = -A^3 - A^2 - A = E_2 \end{aligned}$$

をみたすので, B は A の逆行列である．したがって, A は正則である． □

解説 B.3.3 (4.3)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の -2 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．さらに, 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．さらに, 1 行目に 2 行目の -1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これは, 階数 2 の被約階段行列である．したがって,

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}) = 2$$

である．

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．さらに 1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．これは, 階数 1 の被約階段行列である．よって

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}) = 1$$

である．

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である．さらに, 2 行目を $\frac{1}{4}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．さらに, 1 行目に 2 行目の -2 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．さらに, 1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これは, 階数 2 の被約階段行列である．よって

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}) = 2$$

である．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の $-\frac{5}{2}$ 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

である．さらに, 2 行目を $\frac{7}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である．さらに, 1 行目に 2 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{32}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である．さらに, 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である．これは, 階数 2 の被約階段行列である．よって

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}) = 2$$

である． □

B.4　連立一次方程式に関する問題

解説 B.4.1 (5.1)**.**

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とかける．この連立一次方程式の係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

この連立一次方程式の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

この連立方程式の拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の $-\frac{5}{2}$ 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

である．さらに, 2 行目を $\frac{7}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である．さらに, 1 行目に 2 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{32}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である．さらに, 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である．これを拡大係数行列にもつ連立方程式は,

$$\begin{cases} x = \frac{16}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

である．したがって, 解の空間 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \right\}$$

である．

解は, 次のように検算できる．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot16-1\cdot4}{7} \\ \frac{5\cdot16-6\cdot4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{7} \\ \frac{56}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

□

解説 B.4.2 (5.2)**.** 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．つまり，

$$\begin{cases} x + \frac{-1}{5}y = \frac{-2}{5} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

である．つまり，

$$\begin{cases} x = +\frac{1}{5}y + \frac{-2}{5} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

である．1 つ目の式から，$y = t$ のとき $x = \frac{1}{5}t + \frac{-2}{5}$ となるので，解の空間 $\mathcal{F}$ は，

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t + \frac{-2}{5} \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

これは次の様に検算できる．$t = 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot (\frac{-2}{5}) + 1 \cdot 0 \\ 5 \cdot (\frac{-2}{5}) - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．

$t = 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}1 + \frac{-2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot (\frac{-1}{5}) + 1 \cdot 1 \\ 5\frac{-1}{5} - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

□

解説 B.4.3 (5.3)**.** 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと，

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目を $\frac{1}{4}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目に 2 行目の $\frac{5}{2}$ 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．つまり,

$$\begin{cases} x + \frac{-1}{5}y = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

である．2 つ目の式は x, y をどの様な値にしても成り立つことはないので, この連立方程式は解の空間は空集合である．つまり,

$$\mathcal{F} = \emptyset$$

□

解説 B.4.4 (5.4)**.**

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $y = 0$ であれば x はどのような値でも良い．したがって, 実数解の空間 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

解説 B.4.5 (5.5)**.**

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を解けば良い.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x + \frac{-1}{5} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} x + \frac{-1}{5} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとく. $x - \frac{1}{5}y = 0$ であるので, $x = \frac{1}{5}y$ であるから, $y = t$ とすると, $x = \frac{t}{5}$ である. よって, 実数解の空間 $\mathcal{F}$ は,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書くことができる. □

解説 B.4.6 (5.6)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を解けば良い.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとく. $x + y = 0$ であるので, $x = -y$ であるから, $y = t$ とすると, $x = -t$ である. よって, 実数解の空間 $\mathcal{F}$ は,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書くことができる. □

索引

さ

た