入門線形代数学に関するメモ

Yasuhide NUMATA

2024 年 8 月 11 日

第 1 章

準備

1.1 注意

このメモは随時追記, 修正する. 必ずしも末尾に追記するとは限らない.

講義で解説する順番と必ずしも一致しない. また, 講義で解説する内容をすべてここにまとめるわけでもなく, ここでまとめた内容をすべて講義で解説するわけでもない.

講義では主に $(2,2)$-行列や $(2,1)$-行列を題材とし, 3 次正方行列などは, 本講義の範囲外である. しかしながら, 一般の場合での状況を知っておいたほうが見通しがよい話題もあり, 一般の場合も知りたいという人もいるであろうから, 一般のサイズでで説明している部分もある.

忙しくなった場合には, このメモは, 更新しない予定である.

ほとんどの命題はその証明が appendix A にある. 正しさを担保するために証明は書いたが, 定義から明らかなものも多く, 線形代数の基本的な技術を学ぶという観点ではこれらを読む必要はない. また, Theorems 4.2.7, 4.3.2 and 6.5.4 は証明をしていない. Theorem 4.2.7 は論理の組み立てからは重要な命題ではあるが, その証明にはそれなりの準備が必要となり, この原稿が目的としているものから離れてしまうためである. Theorem 4.3.2 は難しくはないが, 証明を与えていない. 一般のサイズでの議論であるので記号が煩雑になり混乱を与える可能性があること, この原稿が目的としている 2 次正方行列の場合にはすでに列挙により証明が済んでいることがその理由である. Theorem 6.5.4 は, 一般のサイズの命題であり, Theorem 6.5.4 自体には証明を与えていないが, この原稿が目的としている 2 次正方行列の場合は, Proposition 2.2.49 として紹介しており, 証明を与えている.

本講義は 2 次の正方行列について扱うことを目的としている. 2 次の場合にはサイズが小さく現れないが, サイズが大きくなったときには現れるようなものについては, 説明をしていないものがある. そのため, 一般の場合で解説されるときには標準的に含まれるが, この講義では取り扱わないものがある. この講義で扱わないものには, 例えば, 一般のサイズでの行列式の閉じた表示や**余因子行列** (*adjugate matrix*) に関連する話題がある. なお, 一般のサイズでの行列式の閉じた表示は与えいないが, 2 次正方行列に関しては閉じた表示を与えており, 一般のサイズの行列式に関しては, 一行目で展開する形で帰納的に定義する形で紹介している.

1.2　Webwork について

https://webwork.sci.hokudai.ac.jp/webwork2/2024_Hokudai1_Intro_LA_1/
の各ホームワークのキーワードは以下の通り:

1. LAintro set01 matrices and vectors
   - 行列に関する用語の定義 (型, 成分, 行, 列, =) (page 12,page 13)
   - クロネッカー δ (page 15)
   - 単位行列 (page 15)
   - 零行列 (page 15)
   - 上半三角行列 (page 14)
   - 下半三角行列 (page 14)
   - 対角行列 (page 14)
   - スカラー行列 (page 15)
   - 対称行列 (page 21)
   - 交代行列 (page 22)
   - 行列の転置 (page 21)
2. LAintro set02 sums and products
   - 行列の和 (page 16)
   - 行列の積 (page 19)
   - 行列のスカラー倍 (page 17)
   - 正方行列の冪 (page 20)
   - 対角行列の冪 (page 20)
   - 2 次のケーリー–ハミルトンの定理 (page 24)
3. LAintro set03 determinants and inverse matrices of dimension 2
   - (2 次) 行列式 (page 30)
   - 正則行列 (page 28)
   - 逆行列 (page 28)
   - 行列式と三角形の面積 (page 33)
   - 逆行列を用いた連立方程式の解法 (page 34)
   - 逆行列と正則行列 (page 30)
   - 行列式が積を保存すること (page 30)
4. LAintro set04 systems of linear equations of dimension 2
   - 行基本変形 (page 44)
   - 簡約行階段行列 (page 44)
   - 階数 (page 51)
   - 拡大係数行列 (page 39)
   - 行基本変形と逆行列 (page 54)
5. LAintro set05 determinants and inverse matrices of dimension 3
   - 3 次の行列式. (page 35)
6. LAintro set06 systems of linear equations of dimension 3

- 3 元連立方程式のクラメールの公式による解法. (page 55)

7. LAintro set07 basis and inner products
    - 一次独立 (page 62)
    - 基底 (page 69)
    - 一次独立であることの言い換え (page 65)
    - 内積 (page 69)
    - ベクトルのなす角と内積 (page 71)
    - ノルム (page 70)
8. LAintro set08 normality and orthogonality
    - 正規直交基底 (page 72)
    - 直交射影と垂直成分 (page 75)
    - (直線の表し方) (page 62)
    - 点から直線におろした垂線の長さ, 点と直線の距離 (page 75)
    - グラムシュミット直交化法 (page 73)
9. LAintro set09 linear transformations
    - 斉次一次式 (page 77)
    - 一次変換 (page 77)
    - 行列とベクトルの積 (表現行列) (page 79)
    - 合成と積 (page 79)
    - 鏡映 (page 82)
    - 回転 (page 81)
    - 像, 核 (page 80)
    - 全射, 単射 (page 80)
10. LAintro set10 characteristic polynomials and eigenvalues
    - 特性多項式 (page 89)
    - 固有値 (page 87)
    - 行列多項式 (page 20)
11. LAintro set11 diagonalizations
    - 対角化可能性 (page 90)
    - 固有ベクトル (pages 87 and 91)
    - 対角化 (page 91)
    - 冪 (page 91)
    - 三項間漸化式への応用 (page 91)
12. LAintro set12 diagonalizations of symmetric matrices
    - 直交行列 (page 76)
    - 実対称行列の固有値, 固有ベクトル. (page 96)
    - 実対称行列の直交行列による対角化. (page 96)

このうち, items 5 and 6 (‘LAintro set05 determinants and inverse matrices of dimension 3’, ‘LAintro set06 systems of linear equations of dimension 3’) は, 範囲外である.

WebWork の問題は英語で記述されている. そのため本原稿では定義をする際に英語で

の表記も併記している．また, 索引も英語でも引けるようにしているので, WebWork を説いている際に, わからないテクニカルタームがあった場合には, 参考にできるかもしれない.

1.3　シラバス

シラバスに挙げた項目は以下の通り:

1. 行列: 定義と演算 (和, スカラー倍, 積) (Chapter 2)
2. 2 次の行列と逆行列 (Chapter 3)
3. 行列と連立一次方程式 (Chapter 4)
4. 行列と平面の線形変換, ベクトルの内積と直交変換, 合同変換, 相似変換 (Chapter 5)
5. 線形変換の固有値と固有ベクトル, 行列の対角化 (Chapter 6)

1.4　参考書

このノートの末尾に挙げた参考文献のうち, [3, 4, 5] はシラバスに参考書として挙げたものである.

[5] は大学の数学に関する講義全般について解説している本である．講義を受ける上での注意や, 講義の前提となる集合や論理の知識についても解説がしてある．本講義とは直接関係はないが, 図書館で借りるなどして一度最初の数章を読んでみることを勧める.

[3, 4] は, 線形代数学 I での教科書たちである．本講義では, 主に 2 次正方行列について解説をするが, 一般の行列で解説をしている．本講義の範囲外ではあるが, 一般の場合も知っておくと見通しがよいこともあるので, 参考書として挙げた.

[1, 2] は, 2 次正方行列や, 3 次正方行列を中心に解説をしている線形代数の本である.

章末問題

問題 1.1.　a を実数とする．$\sqrt{a^2} = a$ は成り立つか答えよ．　略解は解説 B.1.1.

問題 1.2.　$|2 - \sqrt{5}|$ を絶対値を表す記号を使わずに書くとどうなるか答えよ．　略解は解説 B.1.2.

問題 1.3.　s, u を実数とする．x に関する方程式 $x^2 - (s+u)x + su = 0$ が実数解を持つことを示せ　略解は解説 B.1.3.

目次

第 1 章　準備 3
1.1 注意 . . . 3
1.2 Webwork について . . . 4
1.3 シラバス . . . 6
1.4 参考書 . . . 6
章末問題 . . . 7

第 2 章　行列の定義と演算 11
2.1 行列に関する用語の定義 . . . 11
2.2 行列の演算 . . . 15
章末問題 . . . 25

第 3 章　行列式と逆行列 27
3.1 逆行列の定義と性質 . . . 27
3.2 行列式の定義と性質 . . . 30
章末問題 . . . 37

第 4 章　行列と連立一次方程式 39
4.1 連立方程式に関する用語の定義 . . . 39
4.2 行基本変形 . . . 43
4.3 階数の性質 . . . 51
4.4 係数行列が正則行列であるときの解の公式 . . . 55
章末問題 . . . 58

第 5 章　平面の線形変換 61
5.1 ベクトル . . . 61
5.2 内積とノルム . . . 69
5.3 平面上の線形変換 . . . 77
章末問題 . . . 84

第 6 章　固有値と固有ベクトル 87
6.1 固有値と固有ベクトルの定義 . . . 87
6.2 行列の対角化 . . . 89
6.3 対角化の計算例 . . . 91
6.4 実対称行列の固有値 . . . 95

6.5 固有多項式に関する補足 97
章末問題 99

参考文献 101

付録 A 命題の証明 103
A.1 証明に必要となる基本的な事実 103
A.2 行列の演算に関する命題の証明 104
A.3 逆行列や正則行列に関する命題の証明 110
A.4 階数に関する命題の証明 114
A.5 平面に関する命題の証明 118
A.6 固有値に関連する命題の証明 124

付録 B 章末問題の略解 127
B.1 実数の絶対値や平方根に関する問題 127
B.2 行列の定義と演算に関する問題 127
B.3 行列式と逆行列に関する問題 136
B.4 行列と連立方程式に関する問題 139
B.5 平面の線形変換に関する問題 155
B.6 固有値と固有ベクトルに関する問題 175

索引 181

第 2 章

行列の定義と演算

ここでは, 行列に関わる用語や演算を定義し, その性質について紹介する. この章では, まず, $(2,2)$-行列など本原稿で主として取り扱うものに関して説明した後, 一般の場合についてまとめるという形式をとる.

[3] であれば, 第 2 章が関連する. また, 1.1, 1.2, 1.3 も参考になるかもしれない. [4] であれば, 1.3, 1.4 が関連する.

2.1 行列に関する用語の定義

ここでは, 行列に関連する基本的な用語を定義し, その例をいくつか紹介する.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

のように, 縦に 2 つの数 a, b[*1] を並べたものを $(2,1)$-行列と呼ぶ. $(2,1)$-行列を, 型が $(2,1)$ である行列とも呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように, 縦に 2 つずつ, 横に 2 つずつ, 全部で 4 つの数 a, b, c, d を表のように長方形に並べたものを $(2,2)$-行列と呼ぶ. $(2,2)$-行列を, 型が $(2,2)$ である行列とも呼ぶ. また, $(2,2)$-行列を, 2 次正方行列とも呼ぶ.

より一般には次のように定義される:

Definition 2.1.1. 縦に m 個ずつ, 横に n 個ずつ, 全部で mn 個の数を表のように長方形に並べた次のものを (m,n)-**行列** ((m,n)-*matrix*) (m *by* n *matrix*) と呼ぶ:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

(n,n)-行列を n **次正方行列** (*square matrix of order* n) と呼ぶ. □

[*1] このように書いた時, a, b は異なっている必要はない

Example 2.1.2. A を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

とすると A は $(2,3)$-行列である. □

Example 2.1.3. A を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると A は $(2,2)$-行列である. これは, 2 次正方行列である. □

Example 2.1.4. A を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると A は $(3,2)$-行列である. □

Example 2.1.5. A を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると A は $(1,2)$-行列である. □

Example 2.1.6. A を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると A は $(3,1)$-行列である. □

Remark 2.1.7. $(m,1)$-行列を, m **項数ベクトル** (*numerical vector*) とか m **項列ベクトル** (*column vector*) と呼ぶことがある. ベクトルについては, Chapter 5 で扱う. □

Definition 2.1.8. A が (m,n)-行列であるとき, A **のサイズ** (*size of A*) は (m,n) であるといったり, A **の型** (*type of A*) は (m,n) であるという. □

A を次の $(2,2)$ 行列とする:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

このとき,

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

を A の 1 行目

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

を A の 2 行目

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

を A の 1 列目

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

を A の 2 列目と呼ぶ．また, a を A の $(1,1)$-成分, b を A の $(1,2)$-成分, c を A の $(2,1)$-成分, d を A の $(2,2)$-成分と呼ぶ．a や d を対角成分と呼ぶ.

より一般には次のように定義される:

Definition 2.1.9. A を

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

とする．$a_{i,j}$ を **A の (i,j)-成分** ((i,j)*-entry of* A) ((i,j)*-element of* A) と呼ぶ．また, A の (i,i)-成分を **A の第 i 対角成分** (i*-th diagonal entry of* A) (i*-th main diagonal entry of* A) (i*-th diagonal element of* A) (i*-th main diagonal element of* A) と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

という横のならびを, **A の i-行目** (i*-th row of* A) と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

という縦のならびを, **A の j-列目** (j*-th column of* A) と呼ぶ. ∎

2 つの $(2,2)$-行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

は $a = e$, $b = f$, $c = g$, $d = h$ をすべて満たすとき等しいとする．また, $(2,1)$-行列と $(2,2)$-行列は, そもそも型が異なるので等しくはないとする.

より一般には次のように定義される:

Definition 2.1.10. A, B を行列とする．次の条件を満たすとき, **A と B は等しい** (A *is equal to* B) (A *equals* B) といい, $A = B$ とかく:

1. A と B の型が等しい.
2. A と B の対応する成分がそれぞれ等しい.

∎

Example 2.1.11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると $A \neq B$. ∎

Example 2.1.12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると $A \neq B$. □

Example 2.1.13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると $A \neq B$. □

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

という行列を上半三角行列と呼ぶ. 逆に

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

という行列を下半三角行列と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

という行列を対角行列と呼ぶ. また, 対角成分の値が等しい

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

という行列をスカラー行列と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を E_2 とかき 2 次単位行列とよび,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を $O_{2,2}$ とかき零行列と呼ぶ.

より一般には次のように定義される:

Definition 2.1.14. A を, $a_{i,j}$ が (i,j)-成分である n 次正方行列とする.

1. 次の条件を満たすとき A は**上半三角行列** (*upper triangular matrix*) であるという:
$$i > j \implies a_{i,j} = 0$$
2. 次の条件を満たすとき A は**下半三角行列** (*lower triangular matrix*) であるという:
$$i < j \implies a_{i,j} = 0$$
3. 次の条件を満たすとき A は**対角行列** (*diagonal matrix*) であるという:
$$i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

□

Example 2.1.15. 次の行列は上半三角行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Example 2.1.16. 次の行列は下半三角行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Example 2.1.17. 次の行列は対角行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Definition 2.1.18. 対角成分がすべて等しい値である対角行列を**スカラー行列** (*scalar matrix*) と呼ぶ. □

Definition 2.1.19. 成分がすべて 0 である (m, n)-行列を $O_{m,n}$ とかき, **零行列** (*zero matrix*) と呼ぶ. 文脈から型が明らかなときには, O と略記する. □

Definition 2.1.20.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

とおく. この関数 δ は**クロネッカのデルタ** (*Kronecker delta*) と呼ばれる. □

Definition 2.1.21. (i, j)-成分が $\delta_{i,j}$ である n 次正方行列を E_n とかき, n **次単位行列** (*n-th identity matrix*) (*Einheitsmatrix*) と呼ぶ. 文脈から型が明らかなときには, E と略記する. □

Example 2.1.22. E_n は対角成分がすべて 1 である対角行列である. 例えば,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. □

2.2 行列の演算

ここでは, 行列に対する演算を定義し, その性質について紹介する. 2 次正方行列の場合について紹介したあと, 一般の場合について定義するという形式で話を進める.

2.2.1　和

ここでは, 行列の和と呼ばれる演算について考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

という $(2,2)$-行列を $A+A'$ と書き, A と A' の和と呼ぶ.

Remark 2.2.1. $A+A'$ は A と A' の対応する成分同士を足したもの. サイズが同じだから定義できる. □

Example 2.2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

□

サイズが同じもの同士ならば同様に定義できる. より一般には次のように定義される.

Definition 2.2.3. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列とする. B は, (i,j)-成分が $b_{i,j}$ である (m,n)-行列とする. このとき, (i,j)-成分が $a_{i,j}+b_{i,j}$ である (m,n)-行列を $A+B$ とかき, **A と B の和** (*sum of A and B*) と呼ぶ. □

Example 2.2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

□

Remark 2.2.5. 和によって行列のサイズは変化しない. □

2.2.2　スカラー倍

ここでは, 行列のスカラー倍と呼ばれる演算について考える.

α を数とし,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

という $(2,2)$ 行列を, αA と書き, α による A のスカラー倍と呼ぶ.

Remark 2.2.6. αA は A の各成分を α 倍した行列. □

Example 2.2.7.

$$5\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2\\5\cdot 3 & 5\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\15 & 20\end{pmatrix}$$

□

ほかのサイズでも同様に定義できる．一般には次のように定義する:

Definition 2.2.8. A を (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列とする．α を数とする．このとき，(i,j)-成分が $\alpha a_{i,j}$ である (m,n)-行列を，αA とかき，α **による** A **のスカラー倍** (*scalar product of* α *and* A) と呼ぶ． □

Example 2.2.9.

$$5\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1\\5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$$

□

Remark 2.2.10. スカラー倍によって行列のサイズは変化しない． □

Definition 2.2.11. $-1A$ を $-A$ と略記する． □

Definition 2.2.12. $A+(-1B)$ を $A-B$ と略記する． □

Remark 2.2.13. 対角成分が α であるスカラー行列は，αE_n と表せる． □

Definition 2.2.14. k 個の (m,n)-行列 $A_1,\dots,A_k$ と数 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ に対し，スカラー倍と和を使って (m,n)-行列

$$\alpha_1 A_1+\cdots\alpha_k A_k$$

を与えることができる． これを $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ **を係数とする** $A_1,\dots,A_k$ **の線型結合** ($\alpha_1,\dots,\alpha_k$ **を係数とする** $A_1,\dots,A_k$ **の一次結合**)(*linear combination of* $A_1,\dots,A_k$ *with coeficients* $\alpha_1,\dots,\alpha_k$) と呼ぶことがある． □

Example 2.2.15. 例えば，

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$
$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

とし，

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

とすると，

$$A=2E+J$$

である．このことを，A は E と J の線型結合として表せると言い表す． □

Definition 2.2.16. $A^{(1)},A^{(2)},\dots,A^{(k)}$ を k 個の (m,n) 行列とする．

次の条件を満たすとき，$(A^{(1)},A^{(2)},\dots,A^{(k)})$ は**一次独立** (*linearly independent*) であるという:

- 数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ が $x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \cdots + x_kA^{(k)} = \mathbf{0}$ を満たすならば, $x_1 = x_2 = \cdots = 0$.

$(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)})$ が一次独立でないとき, $(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)})$ は**一次従属** (*linearly dependent*) であるという. □

Remark 2.2.17. 一次独立性については, 一般の行列よりも, ベクトルに対して考えることが多い. Chapter 5 でベクトルに関して扱うので, その際に Definition 5.1.2 として再度定義する. 例などは Section 5.1 で紹介する. □

2.2.3　積

ここでは, 行列の積と呼ばれる演算について考える. 定義が複雑なので, 慣れないうちは注意してほしい.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & db' + dd' \end{pmatrix}$$

という $(2, 2)$-行列を AA' と書き, A と A' の積と呼ぶ. 積の各成分がどのように計算されているかは, 次のような表を考えるとわかりやすいかもしれない:

$$\begin{array}{cc|c:c} & & a' & b' \\ & & c' & d' \\ \hline a & b & aa' + bc' & ab' + bd' \\ \hdashline c & d & ca' + dc' & db' + dd' \end{array}$$

Remark 2.2.18. AB の (i, j) 成分は A の i 行目と B の j 列目から計算できる. A の列数と B の行数が等しいので定義できる. □

Example 2.2.19.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 & 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．$AB \neq BA$ である． □

Remark 2.2.20. $AB \neq BA$ となることがある． □

A の列数と B の行数が等しいときには同様に積を定義できる．一般には次のように定義する:

Definition 2.2.21. A は, (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,k)-行列とする．B は, (i,j)-成分が $b_{i,j}$ である (k,n)-行列とする．このとき, (i,j)-成分が $\sum_{t=1}^{k} a_{i,t} b_{t,j}$ である (m,n)-行列を AB とかき, **A と B の積** (*product of A and B*) と呼ぶ． □

Example 2.2.22.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 \\ 43 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Remark 2.2.23. AB の行数は A の行数．AB の列数は B の列数． □

2.2.4 冪

ここでは, 行列の冪と呼ばれる演算について考える．

A を 2 次正方行列とする．このとき, AA も 2 次正方行列であるので, 再び A との積を考えることができる．これを繰り返すことで, k 個の A の積を考えることができる．そこで, k 個の A の積を A^k と書く．また, $a_1, \ldots, a_k$ を数とするとき,

$$a_0 E_2 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k$$

という式を, (2 次正方行列 A に関する) 行列多項式と呼ぶことがある．

Example 2.2.24.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+0 \\ 3+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 7+6 & 2+12 \\ 21+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

である. □

正方行列の冪は一般には複雑になるが, 対角行列であれば簡単に書ける.

Example 2.2.25.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 正の整数 k に対し,

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

である. 実際, この等式は $k = 1$ のときには成り立つ. また

$$A^l = \begin{pmatrix} a^l & 0 \\ 0 & b^l \end{pmatrix}$$

であるとすると

$$\begin{aligned} A^{l+1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^l & 0 \\ 0 & b^l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa^l + 0 \cdot 0 & a \cdot 0 + 0 \cdot b^l \\ 0a^l + b \cdot 0 & 0 \cdot 0 + b \cdot b^l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{l+1} & 0 \\ 0 & b^{l+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

正方行列であれば同様に定義できる. 一般には次のように定義する.

Definition 2.2.26. A を n 次正方行列とする. このとき, 正整数 k に対し, A^k を次で定義する:

$$A^k = \begin{cases} AA^{k-1} & (k > 1) \\ A & (k = 1) \end{cases}$$

□

Definition 2.2.27. A を n 次正方行列とする. 変数 (不定元) t に関する多項式

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d$$

の t を A に置き換えたもの (ただし, $1 = t^0$ は E_n に置き換える), つまり,

$$a_0 E_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_d A^d$$

を $f(A)$ とかく. このような式を**行列多項式** (*matrix polynomial*) と呼ぶことがある. □

2.2.5 転置

ここでは, 行列の転置と呼ばれる演算について考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする.

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

とおき, ${}^tA$ を A の転置と呼ぶ.

Example 2.2.28.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

とすると,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

である. □

Remark 2.2.29. A の i 行目から ${}^tA$ の i 列目が作られる. また, A の j 列目から ${}^tA$ の j 行目が作られる. □

ほかのサイズでも同様に定義できる. 一般には次のように定義する:

Definition 2.2.30. A は (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である (m,n)-行列であるとする. (i,j)-成分が $a_{j,i}$ である (n,m)-行列を A **の転置** (*transposed matrix of* A) とよび, ${}^tA$ で表す. □

Example 2.2.31.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

である. □

Remark 2.2.32. 転置によって (m,n)-行列は (n,m)-行列になる. □

Definition 2.2.33. A を行列とする. 次の条件を満たすとき, A は, **対称行列** (*symmetric matrix*) であるという:

$$A = {}^tA$$

□

Definition 2.2.34. A を行列とする. 次の条件を満たすとき, A は**交代行列** (*alternative matrix*) (**歪対称行列**)(*skew-symmetric matrix*) であるという:

$$-A = {}^{t}A.$$

□

Example 2.2.35.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると, これは対称行列である. □

Example 2.2.36.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, これは交代行列である. □

2.2.6　演算の性質

ここでは, 今まで見てきた演算の性質について紹介する.
まず最初に転置の性質について紹介する.

証明は Proofs A.2.1 to A.2.4.

Proposition 2.2.37. A, A' を (m,n)-行列 B を (n,k)-行列, α を数とする. このとき次が成り立つ:

1. ${}^{t}({}^{t}A) = A$ 　Proof A.2.1.
2. ${}^{t}(A + A') = {}^{t}A + {}^{t}A'$ 　Proof A.2.2.
3. ${}^{t}(\alpha A) = \alpha({}^{t}A)$ 　Proof A.2.3.
4. ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$ 　Proof A.2.4.

□

Remark 2.2.38. 積の順序が入れ替わることに注意する. □

次に, 和とスカラー倍の性質について紹介する.

証明は Proofs A.2.5 to A.2.12.

Proposition 2.2.39. A, B, C はサイズの等しい行列とする. O はそれらとサイズの等しい零行列とする. α, β は数とする. このとき, 次が成り立つ:

1. 和に関するもの
   (a) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 　Proof A.2.5.
   (b) $O + A = A$ 　Proof A.2.6.
   (c) $A + (-A) = O$ 　Proof A.2.7.
   (d) $A + B = B + A$ 　Proof A.2.8.
2. スカラー倍に関するもの
   (a) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ 　Proof A.2.9.
   (b) $1A = A$ 　Proof A.2.10.
3. 和とスカラー倍に関するもの

of A.2.11.
of A.2.12.

(a) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
(b) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

□

Remark 2.2.40. Item 1a ($(A+B)+C = A+(B+C)$) があるので, $A+B+C$ を $(A+B)+C$ と思っても $A+(B+C)$ と思っても等しいので差し支えない. $(A+B)+C$ を $A+B+C$ と略記する. □

Remark 2.2.41. Item 2a ($(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$) があるので, $\alpha\beta A$ を $(\alpha\beta)A$ と思っても $\alpha(\beta A)$ と思っても等しいので差し支えない. $\alpha(\beta A)$ を $\alpha\beta A$ と略記する. □

次に, 積の性質について紹介する.

Proposition 2.2.42. A, A' を (m,n)-行列, B, B' を (n,k)-行列, C を (k,l)-行列, α を数とする. このとき, 次が成り立つ: 証明は Proofs A.2.13 to A.2.19.

1. 積に関するもの
   (a) $(AB)C = A(BC)$ Proof A.2.13.
   (b) $AE_n = A$ Proof A.2.14.
   (c) $E_mA = A$ Proof A.2.15.
2. 積と和に関するもの
   (a) $(A+A')B = AB + A'B$ Proof A.2.16.
   (b) $A(B+B') = AB + AB'$ Proof A.2.17.
3. 積とスカラー倍に関するもの
   (a) $(\alpha A)B = \alpha(AB)$ Proof A.2.18.
   (b) $\alpha(AB) = A(\alpha B)$ Proof A.2.19.

□

Remark 2.2.43. Item 1a があるので, ABC を $A(BC)$ と思っても $(AB)C$ と思っても差し障りない. $A(BC)$ を ABC と略記する. □

Remark 2.2.44. Item 3a があるので, $\alpha\beta A$ を $(\alpha\beta)A$ と思っても $\alpha(\beta A)$ と思っても差し障りない. $(\alpha\beta)A$ を $\alpha\beta A$ と略記する. □

零行列との積や 0 によるスカラー倍は次のようになる.

Proposition 2.2.45. A を (m,n)-行列とする. 証明は Proof A.2.20.

$$\begin{aligned} 0A &= O_{m,n} \\ AO_{n,k} &= O_{m,k} \\ O_{k,m}A &= O_{k,n}. \end{aligned}$$

□

冪に関しては指数法則が成り立つ.

Proposition 2.2.46. A を正方行列, k, k' を正の整数とする. このとき, 証明は Proofs A.2.21 and A.2.22.

1. $A^kA^{k'} = A^{k+k'}$ Proof A.2.21.
2. $(A^k)^{k'} = A^{kk'}$ Proof A.2.22.

□

証明は Proof A.2.23.

Proposition 2.2.47. A を正方行列, α を数, k を正の整数とする．このとき,

$$(\alpha A)^k = \alpha^k A^k$$

□

Remark 2.2.48. 正方行列 A, B によっては,

$$AB \neq BA$$

となることが起こる．この場合には,

$$(AB)^k \neq A^k B^k$$

である． □

次の定理はケーリー–ハミルトンの定理という名前でよく知られている．ここでは, 2 次正方行列に限って紹介する．一般の n 次正方行列の場合は, Theorem 6.5.4 で紹介する．

証明は Proof A.2.24.

Proposition 2.2.49.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする．

$$f_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$$

とおく．このとき,

$$f_A(A) = O_{2,2}$$

である．つまり

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = O_{2,2}$$

である． □

章末問題

問題 2.1. 行列 略解は解説 B.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 次は何か:

1. A のサイズ.
2. A の $(1,2)$-成分.
3. A の 2-行目.
4. A の 2-列目.
5. A の転置 ${}^tA$.

問題 2.2. 以下の行列をそれぞれ具体的に書け. ただし, δ を Kronecker のデルタとする. 略解は解説 B.2.2.

1. (i,j)-成分が $5i+j-5$ である $(2,2)$-行列 A.
2. このとき (i,j)-成分が $2^i\delta_{i,j}$ である $(2,2)$-行列 A.
3. (i,j)-成分が $\delta_{i,2}\delta_{j,1}$ である $(2,2)$-行列 A.

問題 2.3. 次の条件を満たす a, b, c, d を求めよ: 略解は解説 B.2.3.

$$\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 4+c & 5d-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2b+5 \\ 6 & -4d+8 \end{pmatrix}$$

問題 2.4. 次の行列が対称行列となるような a を求めよ. 略解は解説 B.2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix}$$

問題 2.5. 次の行列が交代行列となるような a, b を求めよ. 略解は解説 B.2.5.

$$\begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 2.6. 次を求めよ: 略解は解説 B.2.6.

1. $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2$

略解は解説 B.2.7.

問題 2.7. 次を求めよ:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n$$

略解は解説 B.2.8.

問題 2.8. 次を求めよ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

略解は解説 B.2.9.

問題 2.9. A を次の行列とするとき, $A^3 + A^2 + A$ を求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

略解は解説 B.2.10.

問題 2.10. 次を満たす a, b を求めよ:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

第 3 章

行列式と逆行列

ここでは, 行列式および逆行列に関して説明をする.

[3] であれば, 第 6 章, 第 7 章, 第 8 章が関連する. とくに, 6.1 が関連する. [4] であれば, 1.4, 3.1 が関連する.

3.1 逆行列の定義と性質

ここでは, 正則行列やその逆行列について説明する. まず, 2 次正方行列の場合に関して考えたあと, 一般の場合について定義をする.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とし,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}A &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} da - bc & 0 \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix} \\
&= (ad - bc)E_2 \\
A\tilde{A} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} \\
&= (ad - bc)E_2
\end{aligned}$$

である.

まず, $ad-bc \neq 0$ のときについて考える.

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$AB = BA = E_2$$

となる.

次に, $ad-bc = 0$ のときについて考える. このとき, どんな B を考えても,

$$AB = BA = E_2$$

を満たすことはない. このことを簡単に証明する. $A = O_{2,2}$ はこの条件をみたすので, まずはこの場合を考える. このときにはどんな B をとってきても

$$AB = BA = O_{2,2}$$

となるので, E_2 にはなりえない. 次に $ad-bc = 0$ かつ $A \neq O_{2,2}$ の場合について考える. $A \neq O_{2,2}$ なので $\tilde{A} \neq O_{2,2}$ である. 冒頭の計算から,

$$A\tilde{A} = (ad-bc)E_2 = 0E_2 = O_{2,2}$$

である.

$$BA = E_2$$

を仮定すると,

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= O_{2,2} \\ BA\tilde{A} &= BO_{2,2} \\ E_2\tilde{A} &= O_{2,2} \\ \tilde{A} &= O_{2,2} \end{aligned}$$

となり, $\tilde{A} \neq O_{2,2}$ に矛盾する.

これらを踏まえて, 以下のように定義する:

Definition 3.1.1. A を正方行列とする. $AB = BA = E$ となる B が存在するとき, A は**正則** (**非退化**)(**非特異**)(**可逆**)(*invertible*) (*nondegenerate*) (*nonsingular*) (*regular*) であるといい, B を A **の逆行列** (*inverse matrix of* A) と呼び A^{-1} で表す. 正則な n 次正方行列を, n **次正則行列** (*n-th invertible matrix*) と呼ぶ. □

Definition 3.1.2. A を正方行列とする. $AB = BA = E$ となる B が存在しないとき, A は**非正則** (*degenerate*) (*singular*) であるという. □

冒頭での議論から 2 次正方行列のときには次が言える.

Theorem 3.1.3.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする. A が正則ならば,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

である. □

つぎに, 逆行列に関する性質を紹介する.

Proposition 3.1.4. X, Y を n 次正則行列とする. r を逆数を持つ数 (つまり $r \neq 0$) とする. l を正の整数とする. このとき次が成り立つ:

証明は Proofs A.3.1 to A.3.5.

1. X^{-1} も正則. $(X^{-1})^{-1} = X$.
2. ${}^tX$ も正則. $({}^tX)^{-1} = {}^t(X^{-1})$.
3. rX も正則. $(rX)^{-1} = \frac{1}{r}X^{-1}$.
4. XY も正則. $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.
5. X^l も正則. $(X^l)^{-1} = (X^{-1})^l$.

Proof A.3.1.
Proof A.3.2.
Proof A.3.3.
Proof A.3.4.
Proof A.3.5.

□

正則行列に対しては, 冪を整数全体に拡張する.

Definition 3.1.5. n 次正則行列 A と $l > 0$ に対し, A^{-l} で $(A^{-1})^l$ を表す. また $A^0 = E_n$ とする. □

このように拡張された冪に対しても, 指数法則が成り立つ.

Proposition 3.1.6. 正則行列 A と整数 l, k に対し,

証明は Proofs A.3.6 and A.3.7.

1. $A^{l+k} = A^l A^k$
2. $A^{lk} = (A^l)^k$

Proof A.3.6.
Proof A.3.7.

が成り立つ. □

正方行列の冪は一般には複雑になるが, 次のような場合には簡単に計算できる.

Example 3.1.7. A を 2 次正方行列とする. P を 2 次正則行列とする.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

となっていることを仮定する. このとき, Example 2.2.25 でみたように,

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

である. 一方

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^k &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})AP\cdots P^{-1}AP \\ &= P^{-1}AE_2AE_2AE_2\cdots E_2AP \\ &= P^{-1}AAA\cdots AP \\ &= P^{-1}A^kP \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} P^{-1}A^kP &= \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \\ PP^{-1}A^kPP^{-1} &= P\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}P^{-1} \\ E_2A^kE_2 &= P\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる. □

3.2　行列式の定義と性質

ここでは, 2 次正方行列の行列式を定義し, その性質について説明をする.

Definition 3.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\det(A) = ad - bc$$

とおく. $\det(A)$ を A **の行列式** (*determinant of* A) と呼ぶ. □

Example 3.2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

となる. このように, 行列式は負の値も取りうる. □

Example 3.2.3. α を数とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\det(A) = \alpha \cdot \alpha - 0 \cdot 0 = \alpha^2$$

となる. $A = \alpha E_2$ であるから, $\det(\alpha E_2) = \alpha^2$ である. □

Section 3.1 の冒頭の議論から次がわかる.

Theorem 3.2.4. A を 2 次正方行列とする. このとき次は同値:

1. A が正則.
2. $\det(A) \neq 0$.

□

行列式と積について, 次が成り立つ.

証明は Proof A.3.8.

Theorem 3.2.5. A, B を 2 次正方行列とする. このとき,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

が成り立つ. □

A が 2 次正則行列なら, $AA^{-1} = E_2$ であり, $\det(E_2) = 1$ である. したがって $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_2) = 1$ となるので, 次が成り立つ.

Corollary 3.2.6. A を 2 次正方行列とし, $\det(A) \neq 0$ とする. このとき,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

が成り立つ. □

また $\alpha A = (\alpha E_2)A$ であるので, 次が成り立つ.

Corollary 3.2.7. A を 2 次正方行列とする. このとき,

$$\det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A)$$

が成り立つ. □

行列式と転置に関して次が成り立つ.

Theorem 3.2.8. A を 2 次正方行列とする. このとき, 証明は Proof A.3.9.

$$\det(A) = \det({}^tA)$$

が成り立つ. □

Theorems 3.2.9 and 3.2.10 は, 行列式の交代性と呼ばれる性質である. Theorem 3.2.9 は, 行に関する交代性, Theorem 3.2.10 は, 列に関する交代性呼ばれる. 2 次正方行列においては, 直接計算することが多いので, この原稿では使う機会はほとんどないが, 一応紹介する.

Theorem 3.2.9. A を 2 次正方行列とする. A の 1 行目と 2 行目を入れ替えて得られ 証明は Proof A.3.10.
る行列を A' とすると, $\det(A) = -\det(A')$ が成り立つ. つまり,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \implies \det(A) = -\det(A')$$

が成り立つ. □

Theorems 3.2.8 and 3.2.9 を組み合わせることで次がわかる.

Theorem 3.2.10. A を 2 次正方行列とする. A の 1 列目と 2 列目を入れ替えて得られる行列を A' とすると, $\det(A) = -\det(A')$ が成り立つ. つまり,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \implies \det(A) = -\det(A')$$

が成り立つ. □

Theorems 3.2.11 and 3.2.12 は, 行列式の行に関する多重線型性と呼ばれる性質である. 2 次正方行列においては, 直接計算することが多いので, この原稿では使う機会はほとんどないが, 一応紹介する.

Theorem 3.2.11. A, A', A'' を 2 次正方行列とする. A の k 行目は, A' の k 行目と 証明は Proof A.3.11.
A'' は k 行目の和となっているとする. また k 行目以外の行はそれぞれ等しいとする. このとき, $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$ が成り立つ. つまり次が成り立つ:

1. ($k = 1$ のとき)

$$\det(\begin{pmatrix} a' + a'' & b' + b'' \\ c & d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c & d \end{pmatrix}).$$

2. ($k = 2$ のとき)

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c' + c'' & d' + d'' \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c'' & d'' \end{pmatrix}).$$

□

証明は Proof A.3.12.

Theorem 3.2.12.　A を 2 次正方行列とし, A の k 行目だけを α 倍することで得られる行列を A' とおく．このとき, $\alpha \det(A) = \det(A')$ が成り立つ．つまり次が成り立つ:

1. ($k = 1$ のとき)

$$\alpha \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

2. ($k = 2$ のとき)

$$\alpha \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}).$$

□

Theorems 3.2.8, 3.2.11 and 3.2.12 を組み合わせることで Theorems 3.2.13 and 3.2.14 がわかる．これらは, 行列式の列に関する多重線型性と呼ばれる性質である．2 次正方行列においては, 直接計算することが多いので, この原稿では使う機会はほとんどないが, 一応紹介する．

Theorem 3.2.13. A, A', A'' を 2 次正方行列とする．A の k 列目は, A' の k 列目と A'' は k 列目の和となっているとする．また k 列目以外の行はそれぞれ等しいとする．このとき, $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$ が成り立つ．つまり次が成り立つ:

1. ($k = 1$ のとき)

$$\det(\begin{pmatrix} a' + a'' & b \\ c' + c'' & d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} a'' & b \\ c'' & d \end{pmatrix}).$$

2. ($k = 2$ のとき)

$$\det(\begin{pmatrix} a & b' + b'' \\ c & d' + d'' \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} a & b'' \\ c & d'' \end{pmatrix}).$$

□

Theorem 3.2.14. A を 2 次正方行列とし, A の k 列目だけを α 倍することで得られる行列を A' とおく．このとき, $\alpha \det(A) = \det(A')$ が成り立つ．つまり次が成り立つ:

1. ($k = 1$ のとき)

$$\alpha \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix}).$$

2. ($k = 2$ のとき)

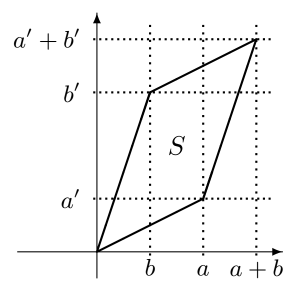
$$\alpha \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c & \alpha d \end{pmatrix}).$$

□

Remark 3.2.15.

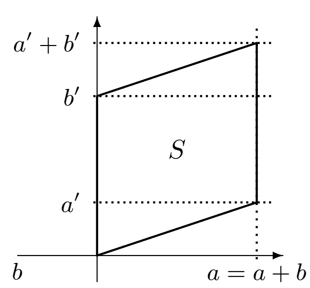
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b \\ a'+b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

の 4 点を頂点とする平行四辺形の面積を S とする．つまり, 次のような状況を考えている:



S の面積を求めよう．

まず $b=0$ の場合を考える．このときは,



となっており,

$$S = |a||b'| = |ab'|$$

となる．A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\det(A) = ab' - ba' = ab' - 0a' = ab'$$

であるので, $S = |\det(A)|$ である．

つぎに, $b \neq 0$ のときを考える．このままでは面積を計算するのは大変なので, 面積の計算しやすい形に変形する．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix},$$

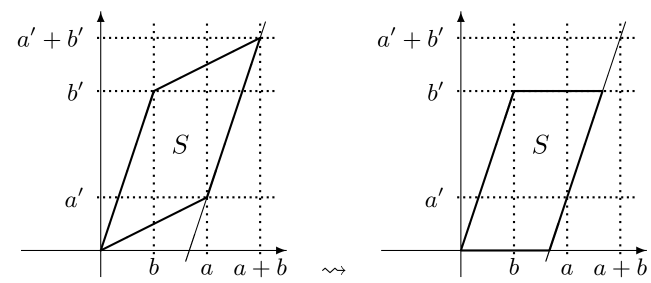
を底辺だと思って高さが変わらないように,

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a'+b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix},$$

を平行移動して計算しやすい平行四辺形に変更する．つまり, 底辺と平行な方向に移動するるので, 移動した点は, 変数 t を使って

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a'+b' \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+tb \\ a'+b'+tb' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+tb \\ a'+tb' \end{pmatrix}$$

とかける．$a'+tb'=0$ となれば, 軸と平行な辺できるので計算がしやすい．



$a'+tb'=0$, つまり, $t=\frac{-a'}{b'}$ のとき, 平行四辺形の 4 点は,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b+\frac{-a'}{b'}b \\ a'+b'+\frac{-a'}{b'}b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\frac{b'-a'}{b'}b \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+\frac{-a'}{b'}b \\ a'+\frac{-a'}{b'}b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\frac{-a'}{b'}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} S &= \left| a+\frac{-a'}{b'}b \right| |b'| \\ &= \left| b'a+\frac{-a'}{b'}bb' \right| \\ &= |b'a-a'b'| \end{aligned}$$

となる．$\det(A)=ab'-ba'$ であるので, $S=|\det(A)|$ である． □

Remark 3.2.16. 数 a,b,c,d,p,q が与えられているとする．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とし,

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおく．x, y を未知数とし,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする．[*1] このとき,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

[*1] $\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{x}$ はボールド体である．通常のイタリック b や x とは区別して使っているので気をつけること．$\boldsymbol{b} \neq b$ であり $\boldsymbol{x} \neq x$ であるのでかき分けること．

を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めるというのは, 次の連立方程式を解くことと同値である.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

A が正則であるときには, A^{-1} を使って

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ A^{-1}A\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \\ E_2\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

とできる. したがって, A が正則のときには, 連立方程式の解はただ一つであり, 逆行列を使って求めることができる. □

Remark 3.2.17. A を (i,j) 成分が $a_{i,j}$ である n 次正方行列とする. ただし, $n > 2$ とする. A の 1 行目と j 列目を削ってできる $n-1$ 次正方行列を $A^{(j)}$ と書くことにする. このとき,

$$\begin{aligned} \det(A) =& a_{1,1}\det(A^{(1)}) - a_{1,2}\det(A^{(2)}) + a_{1,3}\det(A^{(3)}) - a_{1,4}\det(A^{(4)}) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^n a_{1,n}\det(A^{(n)}) \end{aligned}$$

で計算できる値を A の行列式と呼ぶ. 例えば, 3 次正方行列のときには次のように計算する,

$$\begin{aligned} \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}) &= a\det(\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}) - b\det(\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}) + c\det(\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}) \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg). \end{aligned}$$

$\det(A)$ の定義の中にある $\det(A^{(1)})$ などは $(n-1)$ 次正方行列なので, $n-1 > 2$ のときは, 同様にサイズが小さいときに帰着させて計算する. このように定義された行列式に関しても Theorems 3.2.4, 3.2.5 and 3.2.8 to 3.2.14 が成り立つ. また, Corollary 3.2.7 は 2 を n と読み替えることで同様の等式が成り立つ. □

Remark 3.2.18. 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し, $\det(A) = ad - bc$ であった. $\det(A) \neq 0$ のとき, A は正則で, その逆行列 A^{-1} は,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と表すことができた. n 次正方行列 A に対しても, 同様に $\det(A) \neq 0$ であるとき, A は正則である. A の**余因子行列** (*adjugate matrix*) と呼ばれる行列を $\tilde{A}$ とすると,

$$A = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

と書き表せることが知られている．(本原稿では, 余因子が何かは説明しない．興味があれば, [3, 4] などを参照してほしい.) n 次正方行列の余因子行列は, $n-1$ 次正方行列の行列式を並べたものであり, サイズが大きいときには, 計算をするのは非常に面倒である．逆行列は余因子行列というものを使ってかけることが知られているものの, 余因子行列を使って計算をすることは難しい．n 次正則行列の逆行列を計算する際には, 通常は Remark 4.3.10 で紹介する方法を用いるのが一般的である．□

章末問題

問題 3.1. 以下の行列 A に対し, $\det(A)$ を求めよ: 略解は解説 B.3.1.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

問題 3.2. 略解は解説 B.3.2.

$$\det(\begin{pmatrix} -4-x & 1 \\ 5 & -x \end{pmatrix}) = 0$$

を満たす x を求めよ.

問題 3.3. 次の行列の逆行列を求めよ: 略解は解説 B.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 3.4. 以下の行列 A が正則かどうか判定せよ. 略解は解説 B.3.4.

躓いたら問題 3.1 も確認.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

問題 3.5. A, $\boldsymbol{b}$ を次で定義する: 略解は解説 B.3.5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

躓いたら問題 3.4 も確認.

1. A の逆行列を求めよ.
2. (A の逆行列を用いて) $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.

問題 3.6. 次の等式を満たす正方行列 A は正則であることを示せ: 略解は解説 B.3.6.

$$A^3 + A^2 + A + E_2 = O_{2,2}$$

第 4 章

行列と連立一次方程式

ここでは多元連立一次方程式と行列の階数について説明する．まず連立方程式に関連する用語を定義した後, 行列の行基本変形について紹介する．また, 階段行列および階数について定義をし, その性質について紹介をする．

[3] であれば, 第 4 章, 第 5 章, 第 7 章が関連する．[4] であれば, 第 2 章が関連する．

4.1　連立方程式に関する用語の定義

ここでは連立方程式に関連する用語を定義し, 連立方程式の解の様子について具体例で説明をする．

数 a, b, c, d, p, q が与えられているとする．x, y を未知数とする．x と y に関する次の方程式を *2* **元連立一次方程式** (*system of linear equations for two unknowns*) (*simultaneous linear equations for two unknowns*) と呼ぶ:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

$ax + by = p$ と $cx + dy = q$ の両方の条件を満たす x と y の組が, この連立方程式の解である．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおく*1と, この連立方程式は, 次のように書くこともできる:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

*1 $\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{x}$ はボールド体である．通常のイタリック b や x とは区別して使っているので気をつけること．$\boldsymbol{b} \neq b$ であり $\boldsymbol{x} \neq x$ であるので読み間違えないこと．また自分で書くとには書き分け, 読み間違えないようにすること．

Definition 4.1.1. 数 a, b, c, d, p, q が与えられているとする．x, y を未知数とする．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A を，**$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列** (*coefficient matrix of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．$C$ を，**$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列** (*augmented matrix of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を集めた集合を **$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間** (*space of solutions of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．つまり，

$$F = \{\, \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \,\}$$

とおくと，F が $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間である．解の空間の元を **$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根** (*particular solution of the system of equations* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) と呼ぶ．解を考える際に数として実数のみを考えるときには，解の空間を**実数解の空間** (*space of real solutions*) と呼ぶ．解を考える際に数として複素数を考えるときには，解の空間を**複素数解の空間** (*space of complex solutions*) と呼ぶ．

Remark 4.1.2. 未知数が 2 個，方程式の数が 2 本の場合について考えたが，より一般の場合も考えることができる．(m, n)-行列 A と $(m, 1)$-行列 $\boldsymbol{b}$ が与えられているとする．$x_1, \ldots, x_n$ を n 個の未知数とし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を，**n 元連立一次方程式** (*system of linear equations for n unknowns*) (*simultaneous linear equations for n unknowns*) と呼ぶ．A のことを，この連立方程式の係数行列と呼ぶ．A と $\boldsymbol{b}$ をならべてできる $(m, n+1)$-行列を，この連立方程式の拡大係数行列と呼ぶ．$\{\, \boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \,\}$ を，この連立方程式の解の空間と呼び，解の空間の元を特殊解とか根などと呼ぶ．

連立方程式の解の空間の例をいくつか見る．

Example 4.1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の集合を F とする．このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

と表せ, 解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

で全てである．この場合, 解は一通りしかない． □

Example 4.1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の集合を F とする．このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．$x = 5$ を満たせば y の値は何でもよい．

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と表せる．解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

という形で表すことができる．この場合, 解は無数にある．

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は通常の連立方程式の形で書き直すと以下のようになる:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$0 = 0$ は常に成り立つので, 取り除いても連立方程式の解は変化しないので, この連立方程式を次のように書き換えることができる:

$$\begin{cases} x = 5 \end{cases}$$

この (連立) 方程式には, y という未知数が現れていないが, もともとの設定を考えると, これは x と y に関する方程式である．したがって, この方程式の解は, x のみに言及した

$$x = 5$$

ではなく

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

のように y の値も考えたものになる． □

Example 4.1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の集合を F とする．このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．通常の連立方程式の形に書き直すと

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

となる．x, y をどんな値にしても, $0 = 6$ が成り立つことはないので,

$$F = \emptyset$$

である．つまり, 解の空間は空集合である．この場合, 解はない． □

連立方程式の解は次の 3 つのケースが考えられる:

1. 解がない場合.
2. ただ 1 つの解をもつ場合.
3. 解が無数にある場合.

係数行列が正則であるときには, Remark 3.2.16 で見たように, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ というただ一つの解をもつ.

他の場合も含めて, 一般に解の空間がどのケースに当てはまるのかについて, 以下で見ていく.

4.2 行基本変形

ここでは, 行基本変形と呼ばれる行列に対する操作を紹介する. また, 階段行列と呼ばれる行列を定義し, 拡大係数行列が階段行列であるような連立一次方程式の解の様子を調べる.

まず, 連立方程式をどのように解いていたかを復習する.

$$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

という連立方程式について考える. 拡大係数行列も併記することにする.

$$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の 1 行目と 2 行目を入れ替えると次を得る.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+4y=1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

さらに, 1 行目の-3 倍を 2 行目に加えると次となる.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ -2y=-8 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

さらに, 2 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍すると次となる.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

さらに, 2 行目の-2 倍を 1 行目に加えると次となる.

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

よって, この連立方程式の解は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である.

連立方程式を解くにあたり以下の操作を行った:

1. ある行を 0 以外で定数倍する.
2. ある行に別の行の定数倍を加える.
3. ある行と別の行を入れ替える.

これらの操作で連立一次方程式の解の空間は変化しない. これらの操作を行基本変形と呼ぶ. 行基本形をすることで, 連立一次方程式を解くことができる.

Definition 4.2.1. A を (m, n)-行列とする. 以下に挙げた A に対する操作を**行基本変形** (*elementary row operation*) と呼ぶ:

1. $1 \leq k \leq m$ とし, $a \neq 0$ とする. A の k 行目を a 倍する.
2. $k \neq l$ とし, c を数とする. A の k 行目に, l 行目を c 倍したものを足す.
3. $1 \leq k < l \leq m$ とする. A の k 行目と l 行目を入れ替える.

□

行基本変形を行うことで '0 の多い行列' に変形できる. その端的なものとして, 階段行列がある.

Definition 4.2.2. A を (i, j)-成分が $a_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. $0 \leq r \leq m$ とする. A と r が次の条件を満たすとき, A は**階数 r の階段行列** (*row echelon form of rank r*) であるという:

1. $r < i \leq m$ ならば, $a_{i,j} = 0$.
2. $1 \leq i \leq r$ ならば, 次の条件を満たす j_i がとれる:
   (a) $1 \leq j < j_i$ ならば $a_{i,j} = 0$.
   (b) $a_{i,j_i} \neq 0$.
3. $j_1, \ldots, j_r$ は次を満たす:

$$1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$$

□

階段行列の定義に現れる j_i は,

$$j_i = \min\{\, k \mid a_{i,k} \neq 0 \,\}$$

と書くこともできる. これを **i 行目のピボット** (*pivot in i-th row*) と呼ぶこともある.

階段行列のうち特別な形のものを被約行階段行列と呼ぶ.

Definition 4.2.3. A を (i, j)-成分が $a_{i,j}$ である (m, n)-行列とする. A が次の条件を満たすとき, A は**階数 r の被約行階段行列** (**階数 r の簡約行階段行列**)(*reduced row echelon form of rank r*) であるという:

1. A は階数 r の階段行列である.
2. $1 \leq i \leq r$ に対し $j_i = \min\{\, k \mid a_{i,k} \neq 0 \,\}$ とおく. このとき次が成り立つ.
   (a) $a_{i,j_i} = 1$
   (b) $l \neq a_{l,j_i} = 0$

被約行階段行列のことを単に被約階段行列と呼ぶことにする. □

被約階段行列は, pivot の列では, pivot 以外の成分は 0, pivot のみ 1, という条件をみたす階段行列である.

サイズが小さいときに被約階段行列の例を見る.

Example 4.2.4. $(2,2)$-行列の場合について考える.

階数が 0 の被約階段行列は, 1 行目と 2 行目の成分は 0 ということなので, すべて 0 である

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のみである.

階数が 1 の被約階段行列は, 2 行目が 0 ということなので,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と, 数 a をつかって

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる行列の 2 種類があり, これらで全てである.

階数が 2 の被約階段行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のみである.

□

Example 4.2.5. $(2,3)$-行列の場合について考える.

階数が 0 の被約階段行列は, 1 行目と 2 行目の成分は 0 でないといけないので,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のみである.

階数が 1 の被約階段行列は, 2 行目の成分は 0 でないといけない.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と, 数 a をつかって

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる行列と, 数 a, b を使って

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる 3 種類の行列がある. これらで全てである.

階数が 2 の被約階段行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と, 数 a を使って表せる

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と, 数 a, b を使って表せる

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

の 3 種類がある．これらですべてである． □

Example 4.2.6. 例えば

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は階段行列ではない．したがって被約階段行列でもない．

例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は階段行列ではあるが, 被約階段行列ではない． □

Theorem 4.2.7. *A を行列とする．A に行基本変形を (複数回) 行って被約階段行列にすることができる．得られる被約階段行列は A によって決まり, 変形の仕方には依らない．* □

Example 4.2.8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．例えば A の 1 行目を -2 倍して 2 行目に足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

となる．さらに, 2 行目を $\frac{-1}{6}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．さらに, 1 行目に 2 行目の -4 倍を加えることで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という被約階段行列が得られる．

例えば, A の 1 行目と 2 行目を入れ替えると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．さらに, 1 行目を $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．さらに 2 行目に 1 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．さらに 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．さらに 1 行目に 2 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という被約階段行列が得られるが, これは先程のものと同じである． □

Remark 4.2.9. 行基本変形を用いて行列を被約階段行列に変形することを, **ガウスの消去法** (*Gaussian elimination*) とか**掃き出し法** (*row reduction*) と呼ぶこともある． □

拡大係数行列を被約階段行列に変形すると, 解のすぐわかる形の連立方程式になる．係数行列が $(2,2)$-行列であるときに具体的に見ていく．

以下の例は, 拡大係数行列が階数 2 の被約階段行列であり, 係数行列も階数 2 の被約階段行列である場合である．この場合は, 解がただ一つに定まる．

Example 4.2.10. p, q が与えられているとする．拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので, この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x = p \\ y = q \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

のみが解である． □

拡大係数行列が階数 2 の被約階段行列であり, 係数行列は階数 1 の被約階段行列である場合は, 以下の 2 つの例であるいずれの場合も解が存在しない．

Example 4.2.11. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．$0 = 1$ が成り立つことはないので, 解はない． □

Example 4.2.12. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．$0 = 1$ が成り立つことはないので, 解はない． □

拡大係数行列が階数 1 の被約階段行列であり, 係数行列も階数 1 の被約階段行列である場合は, 以下の 2 つの例である．いずれの場合も解は無数に存在する．また, その解は一つの変数を使って書き表すことができる．

Example 4.2.13. a, p が与えられているとする．拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} x + ay = p \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．これは

$$\begin{cases} x = p - ay \\ 0 = 0 \end{cases}$$

と変形できる．つまり, y の値が t であるときには, x は $p - at$ と自動的に値がきまる．したがって, 実数解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - at \\ t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と書ける．また, 実数解は必ずこの形をしている．すこし変形して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

のように解を書くこともできる． □

Example 4.2.14. p が与えられているとする．拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} y = p \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．y の値が p であれば, x の値は何でも良い．したがって, 実数解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ p \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と書ける．また, 実数解は必ずこの形をしている．すこし変形して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

のように解を書くこともできる． □

次の例は, 拡大係数行列が階数 1 の被約階段行列であり, 係数行列が階数 0 の被約階段行列である場合である．この場合は解がない．

Example 4.2.15. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．$0 = 1$ が成り立つことはないので, 解はない． □

次の例は, 拡大係数行列が階数 0 の被約階段行列であり, 係数行列も階数 0 の被約階段行列である場合である．この場合は解が無数に存在する．解は 2 つの変数を用いることで書き表すことができる．

Example 4.2.16. 拡大係数行列が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合について考える．係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この場合の連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を考えていることになる．x と y の値が何であれ $0 = 0$ は成り立つ．したがって, 実数解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

と書ける．また, 実数解は必ずこの形をしている．x の値とは独立に y の値を決められるので, 変数は t, s の 2 つが必要になる．すこし変形して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

のように解を書くこともできる． □

4.3 階数の性質

ここでは, 行列の階数というものを定義し, その性質について紹介する.

Definition 4.3.1. A を行列とする. A に行基本変形をし, 階数 r の被約階段行列が得られたとする. このとき, A **の階数** (*rank of A*) は r であるといい, $\mathrm{rank}(A) = r$ とする. ∎

階数を使って解がどのくらいあるか調べることができる.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$$

とする. 2 個のの未知数

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について考える. つまり, A を係数行列, C を拡大係数行列とする, 2 個の未知数に関する方程式を考える. このとき, Examples 4.2.10 to 4.2.16 で計算したことから, 次がわかる:

1. $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(C)$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない
2. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(C) = 2$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ一つの解をもつ.
3. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(C) = 1$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は無数の解を持つ. また, その解を 1 個の変数を用いて表すことができる.
4. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(C) = 0$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は無数の解を持つ. また, その解を 2 個の変数を用いて表すことができる.

より一般には次が成り立つ:

Theorem 4.3.2. A を (m, n)-行列とする. n 個の未知数 $\boldsymbol{x}$ に関する $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ という方程式について考える. C を A と $\boldsymbol{b}$ を並べて得られる $(m, n+1)$-行列, つまり拡大係数行列とする. このとき次が成り立つ:

1. $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(C)$ のとき, 次が成り立つ:
   (a) $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない
2. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(C) = n$ (未知数の総数) のとき, 次が成り立つ:
   (a) $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解はただ一つ存在する.
3. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(C) < n$ (未知数の総数) のとき, 次が成り立つ:
   (a) $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は無数に存在する.
   (b) 解を表すのに, $(n - \mathrm{rank}(A))$ 個の変数が必要になる.

∎

$\boldsymbol{x}$ に関する $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ という方程式を考えたが,

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

のときには, 拡大係数行列の最後の列には 0 しか現れない.*2 行基本変形を行っても, 最後の列には 0 しか現れないことは変わらないので, 係数行列の階数と拡大係数行列の階数は常に一致する. したがって,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とし, 2 個のの未知数

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ について考えると, この方程式は常に解をもつ. $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ がなりたつので, $\boldsymbol{0}$ はいつでも, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である.

$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とすると c による $\boldsymbol{v}$ のスカラー倍 $c\boldsymbol{v}$ は,

$$A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となり, $c\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である. また, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ とすると

$$A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となり, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ も $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である.

$\mathrm{rank}(A) = 0$ のときには, A から得られる被約階段行列は零行列 $O_{2,2}$ であるので, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の空間は, $O_{2,2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の空間に一致する. どのような $\boldsymbol{v}$ をとっても $O_{2,2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ をみたすので, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は,

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

のように t と s の 2 つの変数を使って表すことができる. また, これは,

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように書くこともできる.

$\mathrm{rank}(A) = 1$ のときには, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}$ を見つけられれば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は変数 c を使って $c\boldsymbol{v}$ と表すことができる.

$\mathrm{rank}(A) = 2$ のときには, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は解をただ一つしかもたないが, $\boldsymbol{0}$ がその解である.

これらをまとめると, 次のようになる:

1. $\mathrm{rank}(A) = 2$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はただ一つの解をもつ. 解は $\{\,\boldsymbol{0}\,\}$ である.
2. $\mathrm{rank}(A) = 1$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は無数の解を持つ. また, その解を 1 個の変数を用いて表すことができる. $\boldsymbol{v}$ が $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ をみたすとすると, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は, 変数 c を用いて, $c\boldsymbol{v}$ と表すことができる.

*2 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という形の方程式を斉次 (せいじ)1 次方程式と呼ぶことがある. 方程式に現れる項がすべて未知数の一次式である (定数項がない) という意味である.

3. $\mathrm{rank}(A) = 0$ ならば, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は無数の解を持つ. また, その解を 2 個の変数 t, s を用いて,

$$t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

表すことができる.

より一般には, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ のときについて Theorem 4.3.2 を考えることにより次がわかる:

Theorem 4.3.3. *A を (m, n)-行列とする. n 個の未知数 $\boldsymbol{x}$ に関する $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ という方程式について考える. このとき次が成り立つ:*

1. $\mathrm{rank}(A) = n$ (未知数の総数) のとき, 次が成り立つ:
   (a) $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{0}$ のみである.
2. $\mathrm{rank}(A) < n$ (未知数の総数) のとき, 次が成り立つ:
   (a) $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は無数に存在する.
   (b) 解を表すのに, $(n - \mathrm{rank}(A))$ 個の変数が必要になる.
   (c) $d = n - \mathrm{rank}(A)$ とすると, d 個の $(n, 1)$-行列 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ をうまく選ぶことで, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, d 個の変数 $c_1, \ldots, c_d$ を使い

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{v}_d$$

と表せる.

□

Proposition 4.3.4. *A を (m, n)-行列とする. n 個の未知数 $\boldsymbol{x}$ に関する $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ という方程式について考える. このとき次が成り立つ:*

証明は Proofs A.4.1 and A.4.2.

1. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解とすると $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ も $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解である. (Proof A.4.1.)
2. c を数とし, $\boldsymbol{v}$ を $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解とすると $c\boldsymbol{v}$ も $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解である. (Proof A.4.2.)

□

階数について, 次の性質が知られている.

Theorem 4.3.5. *A を (m, n)-行列とする. このとき次が成り立つ:*

証明は Proofs A.4.5 to A.4.7 and A.4.13.

1. $\mathrm{rank}(A) \leq m$. (Proof A.4.6.)
2. $\mathrm{rank}(A) \leq n$. (Proof A.4.7.)
3. A に行基本変形を用いて A' が得られるなら $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$. (Proof A.4.5.)
4. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$. (Proof A.4.13.)

□

また, 積に関して次が知られている:

Theorem 4.3.6. *A を (m, n)-行列とする. B を (n, k)-行列とする. このとき次が成り立つ:*

証明は Proofs A.4.10, A.4.11, A.4.14 and A.4.15.

1. $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$. (Proof A.4.10.)
2. $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$. (Proof A.4.14.)

Proof A.4.11.

3. P が m 次正則行列なら $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$.
4. Q が n 次正則行列なら $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(A)$.

Proof A.4.15.

□

また, 定義から次がすぐわかる:

Proposition 4.3.7. 行列 A に対し以下は同値:

1. $\mathrm{rank}(A) = 0$.
2. A は零行列.

□

正方行列 A が正則であるかを $\mathrm{rank}(A)$ を使って判定をすることもできる.

証明は Proof A.4.16.

Theorem 4.3.8. A が n 次正方行列であるとする. このとき, 次は同値:

1. A が正則
2. $\mathrm{rank}(A) = n$
3. A に行基本変形を行って単位行列に変形できる.

□

Remark 4.3.9. A を n 次正方行列とする. このとき以下がわかる:

1. A が正則行列なら $\mathrm{rank}(A) = n$.
2. A が正則行列でもなく零行列でもないなら $0 < \mathrm{rank}(A) < n$.
3. A が零行列なら $\mathrm{rank}(A) = 0$.

特に, 正則行列でもなく零行列でもない二次正方行列 A の階数は 1 である. □

Remark 4.3.10. A を n 次正方行列とする. B を A と E_n を並べて得られる $(n, 2n)$-行列とする. このような場合に

$$B = (A|E_n)$$

とかくことにする. B に行基本変形を行って,

$$(A'|P)$$

という形の行列が得られたとする. ただし, A' も P も n 次正方行列とする. このとき, P は正則行列であり,

$$PA = A'$$

となることが知られている. B に行基本変形を行って得られた被約階段行列が

$$(E_n|P)$$

という形なら, A は正則であり, $A^{-1} = P$ である. また, 得られた被約階段行列の左半分が単位行列でないときには, A は非正則である. サイズの大きな正則行列の逆行列は, この方法でもとめるとよい. □

Remark 4.3.11. A を (m,n)-行列とする．n 個の未知数 $\boldsymbol{x}$ に関する $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ という方程式について考える．C を A と $\boldsymbol{b}$ を並べて得られる $(m,n+1)$-行列, つまり拡大係数行列とする．このとき, $\mathrm{rank}(A)\le\mathrm{rank}(C)\le m$ である．

rank$(A)=m$ であるとする． このとき, $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(C)=m$ となるので, Theorem 4.3.2 から, どんな $\boldsymbol{b}$ に対しても, 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は解をもつ．

rank$(A)=r<m$ であるなら, A に行基本変形をすることで階数 r の被約階段行列 S が得られる．Remark 4.3.10 を認めると, $PA=S$ となる正則行列 P がとれる．$\boldsymbol{e}_{r+1}$ を $r+1$ 行目が 1 で他は 0 ある $(m,1)$ 行列とし, $\boldsymbol{b}=P^{-1}\boldsymbol{e}_{r+1}$ とする．このとき, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ という連立方程式を考える．この連立方程式の拡大係数行列は A と $\boldsymbol{b}$ をならべた行列である．この行列に行基本変形をすることで得られる被約階段行列は $PA=S$ と $P\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_{r+1}$ を並べた行列であり, 階数は $r+1$ になる．したがって, Theorem 4.3.2 から, この場合は解を持たない．

まとめると, 以下の様になる: rank$(A)=m$ なら, どんな $\boldsymbol{b}$ に対しても, 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は解をもつ．rank$(A)<m$ なら, 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもたないような $\boldsymbol{b}$ が存在する．

□

4.4 係数行列が正則行列であるときの解の公式

係数行列 A が正則であるとき, 未知数 $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は, $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ のみであった．A が 2 次正則行列であるときに, もう少し詳しくしらべる．

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

とすると, A が正則であることと,

$$a_1b_2-b_1a_2\neq 0$$

は同値であった．さらに, A の逆行列は,

$$A^{-1}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix} b_2 & -a_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

と具体的に書き下すことができる．したがって,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

の解は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}&=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix} b_2 & -a_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix} b_2p_1-a_1p_2 \\ -b_1p_1+a_1p_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とかける．

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})=ad-bc$$

であるので,

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\det(A^{(1)}) = p_1 b_2 - b_1 p_2$$
$$\det(A^{(2)}) = a_1 p_2 - a_2 p_1$$
$$\det(A) = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

となるので, 方程式の解を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)} \\ \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)} \end{pmatrix}.$$

と書くこともできる.

もっと一般に, n 次正則行列が係数行列である場合の方程式の解の公式が知られている. 例えば, 3 次正則行列の場合には, 次のように計算する.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

の場合について考える. ただし A は正則であることを仮定する. このとき, $\det(A) \neq 0$ である.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

とする. つまり $A^{(k)}$ は A の k 列目を $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列である.

$$t_1 = \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)}$$
$$t_2 = \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)}$$
$$t_3 = \frac{\det(A^{(3)})}{\det(A)}$$

とおくと, 未知数 $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

と書ける.

この解の公式は クラメルの公式 (Cramer's rule) と呼ばれる. 閉じた公式を与えるという意味では意味があるが, 係数行列が正則でないと使えないことや, そもそも行列式の計算が大変であることから, 具体的な問題にはこの公式よりも, 行基本変形を用いて解くほうが有効な場合が多い.

章末問題

略解は解説 B.4.1.

問題 4.1.

以下の行列 A に対し，A から行基本変形で得られる被約階段行列を求めよ．また，A の階数を求めよ．

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

略解は解説 B.4.2.
躓いたら問題 3.5 and 4.1 も確認.

問題 4.2.　次の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

について考える．

1. この連立一次方程式の係数行列を答えよ．
2. この連立一次方程式の拡大係数行列を答えよ．
3. この連立一次方程式を解け．

略解は解説 B.4.3.
躓いたら問題 3.4 and 4.1 も確認.

問題 4.3.　連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

の実数解を求めよ．

略解は解説 B.4.4.
躓いたら問題 3.4 and 4.1 も確認.

問題 4.4.

連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

の実数解を求めよ．

略解は解説 B.4.5.
躓いたら問題 4.3 and 4.4 も確認.

問題 4.5.　連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が解を持つための a, b に対する条件を求めよ．

略解は解説 B.4.6.
躓いたら問題 4.2 も確認.

問題 4.6.　連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が解を持つための a, b に対する条件を求めよ．

問題 4.7. 連立一次方程式

略解は解説 B.4.7.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$$

が解を持つための a, b に対する条件を求めよ.

問題 4.8. 連立一次方程式

略解は解説 B.4.8.

$$\begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

躓いたら問題 3.2 も確認.

が $\mathbf{0}$ 以外の解を持つための a に対する条件を求めよ.

問題 4.9.

略解は解説 B.4.9.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

躓いたら問題 4.8 も確認.

を満たす x, y が存在するための a に対する条件を求めよ.

問題 4.10. $\boldsymbol{x}$ に関する連立方程式

略解は解説 B.4.10.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の実数解をもとめよ.

問題 4.11. $\boldsymbol{x}$ に関する連立方程式

略解は解説 B.4.11.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の実数解をもとめよ.

問題 4.12. $\boldsymbol{x}$ に関する連立方程式

略解は解説 B.4.12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の実数解をもとめよ.

第 5 章

平面の線形変換

この章では, ベクトルについて考える. 2 項実ベクトルの内積やノルムについて説明した後, と平面上の線形変換について説明する.

[3] であれば, 関連する内容について, 難しいことも含めて, 詳しく第 13–17 章に書かれている. [4] であれば, 1.1, 1.2 が関連する. また, 第 4 章, 第 5 章に, 関連する内容について, 難しいことも含めて, 詳しく書かれている.

5.1 ベクトル

ここでは, ベクトルに関連する用語を紹介する.

a, b を実数とする.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を *2* **項実ベクトル** (*real numerical vector in* $\mathbb{R}^2$) と呼ぶ. つまり, 2 項実ベクトルとは, $(2,1)$-行列のことである. 2 項実ベクトルを全て集めてきた集合を $\mathbb{R}^2$ と書く. $\mathbb{R}^2$ を *2* **次元実ベクトル空間** (*2-dimensional real numerical vector space*) と呼ぶ.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathbf{0}$ を $\mathbb{R}^2$ **の零ベクトル** (*zero vector of* $\mathbb{R}^2$) と呼ぶ.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を**基本ベクトル** (*fundamental unit vector*) と呼ぶ.

Remark 5.1.1. 一般に $(n,1)$-行列のことを, n **項数ベクトル** (*numerical vector*) と呼ぶ. 数として実数のみを考えているときには, **実ベクトル** (*real numerical vector*) と呼ぶ. 数として複素数を考えているときには, **複素ベクトル** (*complex numerical vector*) と呼ぶ. この章では, 2 項実ベクトルについて考える. □

$\mathbb{R}^2$ を平面だと思い, Figure 5.1 の様に,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を平面上の横軸の座標が a 縦軸の座標が b である点だと思う. $\mathbf{0}$ が原点である. また, 平

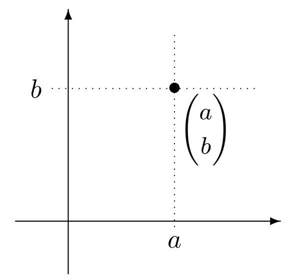


図 5.1　ベクトルの表す点

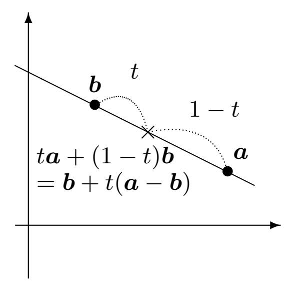


図 5.2　直線の上の点

面上の図形は $\mathbb{R}^2$ の部分集合として捉える．例えば, Figure 5.2 のように, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を通る直線上の点は

$$t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表すことができるので, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を通る直線はそれらを集めた

$$\{\, t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

という $\mathbb{R}^2$ の部分集合である.[*1]

Definition 2.2.16 で定義した用語を再掲する．ただし, Definition 2.2.16 では一般の行列に対して定義していたが, ここでは, ベクトルの場合に限って述べる.

Definition 5.1.2. $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(k)}$ を k 個の 2 項実ベクトルとする.

次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(k)})$ は**一次独立** (*linearly independent*) であるという:

- $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ かつ $x_1\boldsymbol{a}^{(1)} + x_2\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + x_k\boldsymbol{a}^{(k)} = \boldsymbol{0}$ ならば, $x_1 = x_2 = \cdots = 0$.

$(\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(k)})$ が一次独立でないとき, $(\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(k)})$ は**一次従属** (*linearly dependent*) であるという. □

特に, $k = 2$ のとき, つまり 2 つのベクトルの組を考えるときには, 一次独立であることの定義や一次従属であることの定義は以下の様に言い換えることができる

Definition 5.1.3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとする.

次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は**一次独立** (*linearly independent*) であるという:

[*1] 直線を表すには, この方法以外にも, $\boldsymbol{a}$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるという指定もできるが, この場合は $\{\, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ となる

- $x, y \in \mathbb{R}$ かつ $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば, $x = y = 0$.

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が一次独立でないとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は**一次従属** (*linearly dependent*) であるという □

Remark 5.1.4. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が一次独立であるための条件は, 次のように言い換えることもできる:

- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線型結合が零ベクトルならばその係数はすべて 0 である.

□

一次独立であるベクトルの組や一次独立でないベクトルの組をいくつ挙げる.

Example 5.1.5. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ は一次独立である. 実際,

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるので, $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると, $x = y = 0$ である. □

Example 5.1.6.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立である. そのことを確かめる.

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 5x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0$$

であるので, この行列は正則で逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

である. したがって, $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となる. したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立である. □

Example 5.1.7.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立である. そのことを確かめる.

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \neq 0$$

であり正則であるので, $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となる. したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立である. □

Example 5.1.8.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とすると, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立ではない. たとえば, $x = 2$, $y = -1$ とすると,

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

となる. したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が一次独立であるための条件

$$x, y \in \mathbb{R}, \quad x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \implies x = y = 0$$

の反例に, $x = 2$, $y = -1$ がなっている. □

証明は Proof A.5.1.

Proposition 5.1.9. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとし, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であるとする. このとき, 次が成り立つ:

$$c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} = c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b} \implies c = c', d = d'.$$

□

Proposition 5.1.9 の結論である

$$c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} = c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b} \implies c = c', d = d'$$

の対偶は

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \implies c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} \neq c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b}$$

であるので次も成り立つ.

Corollary 5.1.10. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとし, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であるとする. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \implies c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} \neq c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b}.$$

□

Remark 5.1.11. Corollary 5.1.10 があるので, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとし, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であるとすると,

$$c \neq c', d \neq d' \implies c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} \neq c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b}$$

が成り立つ. つまり, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が一次独立であるなら, 係数の異なる線形結合は異なるベクトルになる.

もし $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が一次独立でないならこのようなことは成り立たない．つまり, 2 つの線型結合が係数が異なるにも関わらず等しくなることがある．例えば, Example 5.1.8 でみたように,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とすると, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は一次独立ではない．例えば,

$$2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$
$$4\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

となり, $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ と $4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ という 2 つの線型結合は, 係数が異なるが $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ である． □

また, 一次独立かどうかを行列を使って調べることもできる．

Theorem 5.1.12.

証明は Proof A.5.2.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

とする．このとき, 次は同値である:

1. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が一次独立である．
2. $\det(A) \neq 0$.

□

Remark 5.1.13. ここでは, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ という 2 項ベクトルの組に対して, この組が一次独立であるということを定義した．より一般に, $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ という k 個の m 項ベクトルに対して, 一次独立であるということを定義することができる．具体的には, 次のように定義する．次の条件を満たすとき, k 個の m 項ベクトルの組 $(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k)$ は**一次独立** (*linearly independent*) であるという:

- 数 x_i は $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たすならば $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

この条件は以下のように考えることができる．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix},$$

とするとき,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots + & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & x_k a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \cdots + x_k a_{1,k} \\ x_2 a_{2,1} + x_2 a_{2,2} + \cdots + x_k a_{2,k} \\ \vdots \\ x_m a_{m,1} + x_2 a_{m,2} + \cdots + x_k a_{m,k} \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

となるので, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ が一次独立であるということの条件は, 次の様に言い換えることができる:

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という方程式は k 個の未知数に関する方程式であるから, Theorem 4.3.3 から, 次が同値であることがわかる:

1. $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ が一次独立である.
2. $\mathrm{rank}(A) = k$.

□

Definition 5.1.14. $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(k)}$ を k 個の 2 項実ベクトルとする. 次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(k)})$ は $\mathbb{R}^2$ **の生成系** (*system of generators for* $\mathbb{R}^2$) であるという:

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ならば, $\boldsymbol{v} = x_1 \boldsymbol{a}^{(1)} + x_2 \boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + x_k \boldsymbol{a}^{(k)}$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ が存在する.

□

特に, $k = 2$ の場合, つまり, 2 つの実ベクトルの組を考えるときには, 生成系であることの定義は以下のように言い換えることができる.

Definition 5.1.15. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとする. 次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ **の生成系** (*system of generators for* $\mathbb{R}^2$) であるという:

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ならば, $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ をみたす $x, y \in \mathbb{R}$ が存在する.

□

Remark 5.1.16. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が R^2 の生成系であるための条件は, 次のように言い換えることもできる:

- どの 2 項実ベクトルも $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線型結合として表すことができる.

□

Example 5.1.17. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系である．実際,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とすると, $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ と書ける． ▯

Example 5.1.18.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系である．この $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は Example 5.1.6 のものと同じである．

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 5x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

は正則で逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

であった．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とする．このとき, a, b を

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -5x + 3y \end{pmatrix}$$

で定義すると, $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ と書ける．したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系である． ▯

Example 5.1.19.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系である．この $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は Example 5.1.7 のものと同じである．

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は正則で逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であった.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とする. このとき, a, b を

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

で定義すると, $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ と書ける. したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系である. □

Example 5.1.20.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系ではない. 実際,

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合の第 2 成分は常に 0 である. したがって, 例えば,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ であるが, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合としては表せない. □

Remark 5.1.21. ここでは, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ という 2 個の 2 項実ベクトルの組に対して, この組が $\mathbb{R}^2$ の生成系であるということを定義した. $\mathbb{R}^m$ を m 項実ベクトルをすべて集めてできる集合とする. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ という k 個の m 項ベクトルの組に対して, この組が $\mathbb{R}^m$ の生成系であるということを定義することができる. 次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ は $\mathbb{R}^m$ **の生成系** (*system of generators for* $\mathbb{R}^m$) であるという:

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ ならば, $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{v}$ を満たす $x_i \in \mathbb{R}$ が存在する.

この条件は以下のように考えることができる.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix},$$

とするとき,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots + & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & x_k a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \cdots + x_k a_{1,k} \\ x_2 a_{2,1} + x_2 a_{2,2} + \cdots + x_k a_{2,k} \\ \vdots \\ x_m a_{m,1} + x_2 a_{m,2} + \cdots + x_k a_{m,k} \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

となるので, $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$ が $\mathbb{R}^m$ の生成系であるということの条件は, 次の様に言い換えることができる:

- $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

つまり, どんな $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が実数解を持つなら, $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$ は $\mathbb{R}^m$ の生成系である. 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が実数解を持たないような $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が存在するなら, $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$ は $\mathbb{R}^m$ の生成系ではない.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ という方程式は k 個の未知数に関する方程式であるから, Theorem 4.3.2 から, $\mathrm{rank}(A) = m$ ならば, どんな $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つことがわかる. つまり, $\mathbb{R}^m$ の生成系である. 一方, $\mathrm{rank}(A) < m$ ならば, Remark 4.3.11 から, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が存在する. つまり, $\mathbb{R}^m$ の生成系ではない. □

Definition 5.1.22. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとする. 次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ **の基底** (*basis for* $\mathbb{R}^2$) であるという:

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立である.
2. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は R^2 の生成系である.

□

Example 5.1.23. Examples 5.1.5 and 5.1.17 から, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ は一次独立であり $\mathbb{R}^2$ の生成系でもあった. したがって, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である. この基底を $\mathbb{R}^2$ **の標準基底** (*standard basis for* $\mathbb{R}^2$) と呼ぶことがある. □

Example 5.1.24.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと Examples 5.1.6 and 5.1.18 から, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であり $\mathbb{R}^2$ の生成系でもあった. したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である. □

Example 5.1.25.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと Examples 5.1.7 and 5.1.19 から, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であり $\mathbb{R}^2$ の生成系でもあった. したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である. □

5.2 内積とノルム

ここでは, 2 項実ベクトルの内積とノルムについて紹介する.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとし,

Definition 5.2.1.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

とあらわせるとする．このとき，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = ab + a'b'$$

とおき，これを **$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積** (*inner product of* $\boldsymbol{a}$ *and* $\boldsymbol{b}$) と呼ぶ． □

Remark 5.2.2. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は，${}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ の $(1,1)$-成分である． □

Definition 5.2.3. $\boldsymbol{a}$ を 2 項実ベクトルとする．このとき，

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$$

とおき，これを **$\boldsymbol{a}$ のノルム** (*norm of* $\boldsymbol{a}$) 呼ぶ． □

Remark 5.2.4.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

である．$\boldsymbol{a}$ を平面上の点と思うと，$\|\boldsymbol{a}\|$ は原点 $\boldsymbol{0}$ から $\boldsymbol{a}$ までの距離に相当する． □

証明は Proofs A.5.3 to A.5.7.

Proposition 5.2.5. r を実数とする，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を二項実ベクトルとする．このとき次が成り立つ:

1. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$. (Proof A.5.3.)
2. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. (Proof A.5.4.)
3. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$. (Proof A.5.5.)
4. $\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$. (Proof A.5.6.)
5. $\langle r\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = r \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$. (Proof A.5.7.)

□

Remark 5.2.6. Items 3 and 4 から，$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle$ が得られる．

Items 3 and 5 から，$\langle \boldsymbol{a}, r\boldsymbol{b} \rangle = r \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ が得られる． □

証明は Proofs A.5.8, A.5.9, A.5.11 and A.5.12.

Proposition 5.2.7. r を実数とする，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を二項実ベクトルとする．このとき次が成り立つ:

1. $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$. (Proof A.5.8.)
2. $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. (Proof A.5.9.)
3. $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$. (Proof A.5.11.)
4. $\|r\boldsymbol{a}\| = |r|\|\boldsymbol{a}\|$. (Proof A.5.12.)

□

$\boldsymbol{a}$ を 2 項実ベクトルとし，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{a} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

となる $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ がとれる．$r = \|\boldsymbol{a}\|$ である．

Definition 5.2.8.

$$\boldsymbol{a} = r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}$ の極座標表示と呼ぶ. θ を $\boldsymbol{a}$ **の偏角** (*angle of* $\boldsymbol{a}$) と呼ぶ.

Proposition 5.2.9.

$$\boldsymbol{a} = r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a} = s\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = rs\cos(\tau - \theta)$$

である.

Proof.

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle &= \langle r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}, s\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}\rangle\\ &= rs\cos(\theta)\cos(\tau) + rs\sin(\theta)\sin(\tau).\\ rs\cos(\tau-\theta) &= rs(\cos(\theta)\cos(\tau) + rs\sin(\theta)\sin(\tau))\\ &= rs\cos(\theta)\cos(\tau) + rs\sin(\theta)\sin(\tau).\end{aligned}$$

$\square$

Definition 5.2.10. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を二項実ベクトルとする. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ とする. 次の条件を満たすとき, $\boldsymbol{a}$ **と** $\boldsymbol{b}$ **が直交する** ($\boldsymbol{a}$ *and* $\boldsymbol{b}$ *are orthogonal to each other*) という:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0.$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交することを次で表す:

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

Example 5.2.11.

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

であるので, $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は直交している.

Example 5.2.12.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

であるこので, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交している.

Example 5.2.13.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 \neq 0$$

であるので, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交しない．

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 13$, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{34}$ であるので,

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \frac{13}{\sqrt{34}} \boldsymbol{a}$$

とおく．このとき,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}' \rangle = \left\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \frac{13}{\sqrt{34}} \boldsymbol{a} \right\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \frac{13}{\sqrt{34}} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 13 - \frac{13}{\sqrt{34}} \sqrt{34} = 0$$

となり, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}'$ は直交する．このように, 直交しないベクトルの組から, 直交するベクトルの組を作ることができる． □

Definition 5.2.14. 次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ **の正規直交基底** (*orthonormal basis for* $\mathbb{R}^2$) であるという:

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．
2. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$.
3. $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$.

□

Example 5.2.15. Example 5.1.23 で $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ が基底であることは見た．また, Example 5.2.11 で見たように, 内積の定義に従い直接計算することで, $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0$ つまり $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が直交していることがわかる．ノルムの定義に従い直接計算することで,

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = 0$$
$$\|\boldsymbol{e}_2\| = 0$$

がわかる．よって, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ は正規直交基底である． □

Example 5.2.16.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\mathbb{R}^2$ の基底であることは, Example 5.1.24 で見た．しかし, Example 5.2.13 で見たように,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 13 \neq 0$$

であるので, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交しない．したがって, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は正規直交基底ではない． □

Example 5.2.17.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする． このとき, Examples 5.1.25 and 5.2.12 で見たように, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は基底であり, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ である．しかし,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{2}$$
$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{2}$$

であるこので, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は正規直交基底ではない.

$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{2}$ であるので,

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{b}$$

とおく．このとき,

$$\langle \overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}, \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{b} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} 0 = 0$$

であるので $\overline{\boldsymbol{a}}$ と $\overline{\boldsymbol{b}}$ は直交する．さらに,

$$\|\overline{\boldsymbol{a}}\| = \|\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}\| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \|\boldsymbol{a}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$
$$\|\overline{\boldsymbol{b}}\| = \|\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{b}\| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \|\boldsymbol{b}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

であるので, $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}})$ は正規直交基底である．このように, 直交するベクトルの組があれば, 正規直交基底を作ることができる． ∎

Remark 5.2.18. Example 5.2.13 で見た方法と, Example 5.2.17 で見た方法を組み合わせることで, 一次独立なベクトルの組から正規直交基底を作ることができる．この方法を**グラム–シュミットの直交化法** (*Gram–Schmidt orthonormalization*) と呼ぶ.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を二項実ベクトルとする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立であるとする．このとき,

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$$

とおく．このとき,

$$\begin{aligned}
\|\bar{\boldsymbol{a}}\| &= \|\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}\| \\
&= \left|\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\right| \|\boldsymbol{a}\| \\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|} \|\boldsymbol{a}\| \\
&= 1
\end{aligned}$$

となる.

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}} \rangle \bar{\boldsymbol{a}}$$

とおく．このとき,

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}'\right\rangle &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \\ &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}\rangle + \langle \bar{\boldsymbol{a}}, -\langle \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \\ &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}\rangle - \langle \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \\ &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}\rangle - \langle \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \|\bar{\boldsymbol{a}}\|^2 \\ &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}\rangle - \langle \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．そこで,

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}'\|}\boldsymbol{b}'$$

とおく．このとき,

$$\begin{aligned}\|\bar{\boldsymbol{b}}\| &= \frac{1}{\|\boldsymbol{b}'\|}\|\boldsymbol{b}'\| = 1 \\ \left\langle \bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}\right\rangle &= \frac{1}{\|\boldsymbol{b}'\|}\left\langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}'\right\rangle = 0\end{aligned}$$

となる．$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である． □

Remark 5.2.19. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を正規直交基底とする．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は基底であるので, 2 項実ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ が与えられると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x\boldsymbol{a} + x'\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &= y\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

を満たす実数 x, x', y, y' がとれる．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積は, x, x', y, y' を使って,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= \langle x\boldsymbol{a} + x'\boldsymbol{b}, y\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}\rangle \\ &= \langle x\boldsymbol{a}, y\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}\rangle + \langle x'\boldsymbol{b}, y\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}\rangle \\ &= \langle x\boldsymbol{a}, y\boldsymbol{a}\rangle + \langle x\boldsymbol{a}, y'\boldsymbol{b}\rangle + \langle x'\boldsymbol{b}, y\boldsymbol{a}\rangle + \langle x'\boldsymbol{b}, y'\boldsymbol{b}\rangle \\ &= xy\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + xy'\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + x'y\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + x'y'\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\ &= xy\|\boldsymbol{a}\|^2 + (xy' + x'y)\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + x'y'\|\boldsymbol{b}\|^2\end{aligned}$$

と書ける．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を正規直交基底であるので, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$, $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$ であるので,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = xy + x'y'$$

と, 対応する係数の積の和として, 書くことができる．

また, 同様に, 一般には, $\boldsymbol{x}$ のノルムは, x, x' を使って,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\ &= \langle x\boldsymbol{a} + x'\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a} + x'\boldsymbol{b}\rangle \\ &= x^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2xx'\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + (x')^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \\ \|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{x^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2xx'\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + (x')^2\|\boldsymbol{b}\|^2}\end{aligned}$$

と書くことができる．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を正規直交基底であるので, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$, $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$ を使うと,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2 + (x')^2}$$

と書くことができる． □

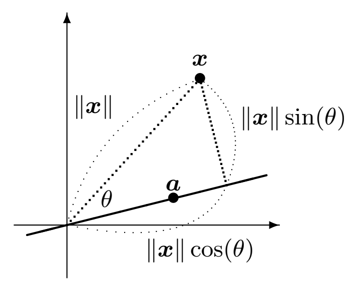


図 5.3　原点を通る直線への射影

Definition 5.2.20. L を直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ を通り L と垂直に交わる直線はただ 1 つに定まる．この直線を **$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線** (*perpendicular to the line L from the point $\boldsymbol{x}$*) 呼ぶ．$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線と直線 L の交点を $\boldsymbol{y}$ とする．このとき, $\boldsymbol{y}$ を **$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足** (*foot of the perpendicular to the line L from the point $\boldsymbol{x}$*) と呼ぶ．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分の長さ, つまり, $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ を, **$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ** (*length of the perpendicular to the line L from the point $\boldsymbol{x}$*) と呼ぶこともある．直線 L 上の点 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ の距離を考えると, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$ であるときに最小値をとる．つまり,

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \min\{\,\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}\| \;\mid\; \boldsymbol{a}\in L\,\}$$

である．$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ を**点 $\boldsymbol{x}$ と直線 L の距離** (*distance between the point $\boldsymbol{x}$ and the line L*) と呼ぶこともある． □

Definition 5.2.21. 直線 L を固定して考える．点 $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足はただ一つ定まる．点 $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足を対応させる対応のことを, **直線 L への直交射影** (*orthogonal projection to L*) と呼ぶ．$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足 $\boldsymbol{y}$ を, **点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影** (*orthogonal projection of $\boldsymbol{x}$ to L*) と呼ぶ．また, ベクトル $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, つまり垂線の足 $\boldsymbol{y}$ から点 $\boldsymbol{x}$ へ向かうベクトル, を**点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影の垂直成分**とか**反射影** (*rejection of $\boldsymbol{x}$ from L*) と呼ぶ．定義から, 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影の垂直成分のノルムが, 点 $\boldsymbol{x}$ と直線 L の距離である． □

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ とし, L を $\boldsymbol{a}$ と原点を通る直線とする．このとき

$$L=\{\,t\boldsymbol{a}\mid t\in\mathbb{R}\,\}$$

と書くことができる．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ とし, $\boldsymbol{x}$ の L への直交射影や垂直成分について考える．Figure 5.3 にあるように, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角を θ とすると, $\boldsymbol{x}$ の L への直交射影は, ノルムが $\|\boldsymbol{x}\|\cos(\theta)$ である L 上の点である．したがって, $\boldsymbol{a}$ をスカラー倍しノルムが $\|\boldsymbol{x}\|\cos(\theta)$ となるように調整することで直交射影を得ることができる．ノルムを調整する必要があるので, 議論を簡単にするため, L 上の点でノルムが 1 の点 $\bar{\boldsymbol{a}}$ を用意する．

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$$

とおくと, $\|\bar{\boldsymbol{a}}\|=1$ となる．このとき, $\boldsymbol{x}$ と $\bar{\boldsymbol{a}}$ の内積は, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ のなす角 θ を使って次のように書ける:

$$\langle\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{a}}\rangle=\|\boldsymbol{x}\|\|\bar{\boldsymbol{a}}\|\cos(\theta)=\|\boldsymbol{x}\|\cos(\theta).$$

したがって,

$$\langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{a}} \rangle \bar{\boldsymbol{a}}$$

が $\boldsymbol{x}$ の L への直交射影である．$\bar{\boldsymbol{a}}$ ではなく $\boldsymbol{a}$ を使えば,

$$\langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{a}} \rangle \bar{\boldsymbol{a}} = \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} \right\rangle \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$

と書くこともできる．

$\boldsymbol{x}$ の L への直交射影がわかったので, 今度は垂直成分について考える．垂直成分は $\boldsymbol{x}$ と垂直成分の差であるので,

$$\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{a}} \rangle \bar{\boldsymbol{a}}$$

である．これは,

$$\boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$

とも書ける．したがって, $\boldsymbol{x}$ と L の距離は,

$$\|\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{a}} \rangle \bar{\boldsymbol{a}}\|$$

と表すことができる．$\bar{\boldsymbol{a}}$ ではなく $\boldsymbol{a}$ を使えば,

$$\left\| \boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} \right\|$$

とも書ける．

原点を通らない直線 L と点 $\boldsymbol{x}$ の距離について考える．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を通る直線

$$L = \{\, t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

と点 $\boldsymbol{x}$ について考える．このときは, L と $\boldsymbol{x}$ の距離を考えるのであれば, 両方とも $-\boldsymbol{b}$ だけ平行移動して考えればよい．つまり

$$\begin{aligned} L' &= \{\, t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, t(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \end{aligned}$$

と, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ の距離を求めれば良い．L' は原点を通るので, 内積を使って求めることができる．

Definition 5.2.22. A を実数を成分とする 2 次正方行列であるとする．次の条件をみたすとき A は**直交行列** (*orthogonal matrix*) であるという:

$$^{t}A\,A = E_2$$

▯

証明は Proof A.5.14.

Proposition 5.2.23.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

とする．このとき次は同値:

1. A は直交行列である.
2. A は正則であり, $A{}^tA = E_2$.
3. A は正則であり, $A^{-1} = {}^tA$.
4. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である.
5. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \implies \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle$.

□

Remark 5.2.24. n 項実ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して, 2 項実ベクトルと同様に,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

と内積を定義でき, Proposition 5.2.5 が成り立ち, この節で紹介したことが n 項実ベクトルでも同様に成り立つ. しかしながら, 複素ベクトルに対してこのように定義しても Proposition 5.2.5 は成り立たず, 複素ベクトルに対してはここでの方法で内積を定義することはできない. □

5.3 平面上の線形変換

ここでは, 平面上の線形変換を定義しその性質について紹介する.

Definition 5.3.1. $x_1, \ldots, x_n$ を変数とする. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を 0 以上の整数とする.

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

を全次数が $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ である単項式と呼ぶ. k を 0 以上の整数とする. $f(x_1, \ldots, x_n)$ を多項式とする. $f(x_1, \ldots, x_n)$ の各項が全次数が k の単項式に係数をかけたものを**斉次 k-次多項式** (*homogeneous polynomial of degree k*) と呼ぶ. □

Example 5.3.2. 実数係数斉次 k-次多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ とは, 実数 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて,

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

と書ける多項式のことである. □

Definition 5.3.3. f は, 2 項ベクトルを代入すると 2 項ベクトルが得られる関数[*2] で

[*2] '数' 以外のものを代入して '数' 以外のものが得られるので, 関 '数' と呼ぶのは少し変な印象を受けるかもしれない. 通常は, 何かを代入することで何かが得られるもののことを '写像' と呼ぶ. (写像については例えば [5, トレーニング 26] を見ると良い.) しかし, 用語が異なるだけで, 基本的には同じものなので, ここでは, ベクトルを代入してベクトルが得られるものも, 関数と呼ぶことにする.

あるとする．次の条件を満たすとき，f は $\mathbb{R}^2$ **上の線形変換** ($\mathbb{R}^2$ **上の一次変換**)(*linear transformation on* $\mathbb{R}^2$) であるという．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2 \implies f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$.
2. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R} \implies f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$.

▯

Proposition 5.3.4. f, g を $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換であるとする．このとき，f と g の合成 $f \circ g$ も線形変換である．ただし $f \circ g$ は $(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))$ で定義される関数である． ▯

Proof. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\boldsymbol{a}) + (f \circ g)(\boldsymbol{b}) &= f(g(\boldsymbol{a})) + f(g(\boldsymbol{b})),\\ (f \circ g)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= f(g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))\\ &= f(g(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{b}))\\ &= f(g(\boldsymbol{a})) + f(g(\boldsymbol{b}))\end{aligned}$$

である．また，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ とすると，

$$\begin{aligned}c(f \circ g)(\boldsymbol{a}) &= cf(g(\boldsymbol{a})),\\ (f \circ g)(c\boldsymbol{a}) &= f(g(c\boldsymbol{a}))\\ &= f(cg(\boldsymbol{a}))\\ &= cf(g(\boldsymbol{a}))\end{aligned}$$

である． □

Remark 5.3.5. f が線形変換であるとすると，

$$f(\boldsymbol{0}) = f(0\boldsymbol{0}) = 0f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

であるので，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である． ▯

Remark 5.3.6. f が線形変換であるとする．$\boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{e}_2)$ とおく．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ と書けるので，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)\\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2)\\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2)\\ &= x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{x}$ がわかれば，$f(\boldsymbol{x})$ は計算できる． ▯

2 項ベクトルを代入すると 2 項ベクトルが得られる関数 f を与えることは，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x, y \end{pmatrix}$$

に対し，

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

を満たす 2 変数関数 f_1, f_2 を与えることと同じである．この同一視の下，f が線形変換であることと，f_1, f_2 がどちらも斉次 1 次多項式であることは，同値である．つまり，数 a, b, c, d を使って

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= ax + by \\ f_2(x,y) &= cx + dy \end{aligned}$$

とかける．このとき，

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という形で行列の積として書くことができる．

Remark 5.3.7. f が線形変換であるとする．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} &= f(\boldsymbol{e}_1) \\ \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} &= f(\boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

とおく．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

と表せる． □

Remark 5.3.8. f, g を線形変換とし，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ g(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となっているとする．このとき，

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f(g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) \\ &= f(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= f(\begin{pmatrix} a'x + b'y \\ c'x + d'y \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'x + b'y \\ c'x + d'y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(a'x + b'y) + b(c'x + d'y) \\ c(a'x + b'y) + d(c'x + d'y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa'x + ab'y + bc'x + bd'y \\ ca'x + cb'y + dc'x + dd'y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa'x + bc'x + ab'y + bd'y \\ ca'x + dc'x + cb'y + dd'y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (aa' + bc')x + (ab' + bd')y \\ (ca' + dc')x + (cb' + dd')y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と書ける．つまり,

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

と表せるが,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

である．行列の積は, 線形変換の合成と思えるように定義されている． □

Definition 5.3.9. f を線形変換とする．$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ を動かしたとき, $f(\boldsymbol{v})$ として表される点を集めた集合を, $\mathrm{Img}(f)$ で表し, f **の像** (*image of* f) と呼ぶ．$\mathrm{Img}(f) = \mathbb{R}^2$ となるとき, f は $\mathbb{R}^2$ への全射[*3]であるという． □

Remark 5.3.10.

$$\mathrm{Img}(f) = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

である．$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ のように書けているときには,

$$\mathrm{Img}(f) = \left\{ A\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

である □

Definition 5.3.11. f を線形変換とする．$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ を集めた集合を, $\mathrm{Ker}(f)$ で表し, f **の核** (*kernel of* f) と呼ぶ． □

Remark 5.3.12.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

である．$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ のように書けているときには,

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

であるので, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の空間である． □

Remark 5.3.13. f を線形変換とすると, $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ であったので, $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ である． □

Definition 5.3.14. f を関数とする．つぎの条件を満たすとき, f は単射であるという:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

□

定義にある条件の対偶を取ることで次が得られる．

Corollary 5.3.15. f を関数とする．このとき, 次は同値:

[*3] 全射という用語の本来の定義は [5, トレーニング 26] などを見ると良い．

1. f は単射である.
2. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \implies f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{y})$

□

核を調べることで単射かどうかがわかる.

Proposition 5.3.16. f を線形変換とする. このとき, 次は同値:

証明は Proof A.5.15.

1. f は単射である.
2. $\ker(f) = \{ \mathbf{0} \}$.

□

Definition 5.3.17. 次の条件を満たす線形変換 f を $\mathbb{R}^2$ 上の恒等変換と呼ぶ:

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \implies f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

$\mathbb{R}^2$ 上の恒等変換を $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ で表す. つまり $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ である. □

Remark 5.3.18. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ も線形変換であるので, 行列とベクトルの積として表すことができるはずである. 実際 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\boldsymbol{x}) = E_2\boldsymbol{x}$ という形で表すことができる. □

Definition 5.3.19. f を線形変換とする. $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ となる線形変換 g が存在するとき, 線形変換 f は**全単射** (*bijective*) であるといい, g を f **の逆変換** (*inverse of* f) と呼び f^{-1} で表す. □

Remark 5.3.20. 線形変換 f は行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せているとする.

証明は Proof A.5.16.

もし f が全単射であれば, A は正則であり, f^{-1} は $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ とかける.
また, 逆に A が正則なら f は全単射であり, f^{-1} は $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ とかける. □

Definition 5.3.21. f を線形変換とする. 次の条件を満たすとき, f は**直交変換** (*orthogonal transformation*) であるという:

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2 \implies \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}) \rangle$.

□

Remark 5.3.22. f を線形変換とし, 行列 A を使って $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書けているとする. このとき, 次は同値:

1. f は直交変換である.
2. A は直交行列である.

□

Example 5.3.23.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

とする.

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で定義される線形変換について考える．

$$\boldsymbol{x} = r\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}$$

と極座標表示をすると，

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\left(r\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}\right)\\ &= r\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}\\ &= r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\tau)-\sin(\theta)\sin(\tau)\\ \sin(\theta)\cos(\tau)+\cos(\theta)\sin(\tau)\end{pmatrix}\\ &= r\begin{pmatrix}\cos(\theta+\tau)\\ \sin(\theta+\tau)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので，f は偏角を θ 増やす操作であることがわかる．つまり，原点を中心に θ だけ回転する操作である．この行列を回転行列と呼ぶ．

$$\begin{aligned} {}^t\!A\,A &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin(\theta)\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta) & (-\sin(\theta))^2+(\cos(\theta))^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので，A は直交行列である．したがって，f は直交変換である． □

Example 5.3.24. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{a}$ と直交するベクトル $\boldsymbol{b}$ を 1 つ選ぶ．このとき，H を $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{b}\rangle = 0$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ を集めた集合とする．いまは平面で考えているので，H は原点と $\boldsymbol{a}$ を通る直線となる.[*4]

H を軸に点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を反転させた点を $f(\boldsymbol{x})$ とおく．この f について考える．

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{a}} &= \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}\\ \bar{\boldsymbol{b}} &= \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

とおけば，$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影に関し，直交射影は $\langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{a}}$，垂直成分は $\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{b}}$ と書ける．したがって，

$$\boldsymbol{x} = \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{a}} + \langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{b}}$$

であるので，H に関して折り返した点は，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{a}} - \langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{b}}\\ &= \langle \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{a}} + \langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{b}} - 2\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{b}}\\ &= \boldsymbol{x} - 2\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}\rangle\,\bar{\boldsymbol{b}}\end{aligned}$$

[*4] $H = \{\, t\boldsymbol{a} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ とかけるが，この表示は，ここでの議論では本質的ではない．

となる.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \\ &= \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}}, \\ f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \\ &= \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{x}) &= c\boldsymbol{x} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, c\boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \\ &= c\boldsymbol{x} - 2c\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}}, \\ cf(\boldsymbol{x}) &= c\boldsymbol{x} - 2c\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \end{aligned}$$

であるので f は線形変換である. さらに,

$$\begin{aligned} \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \rangle &= \left\langle \boldsymbol{x} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle + \left\langle -2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle \\ &= \left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \left\langle \boldsymbol{x}, -2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle\right) - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left(\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle + \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, -2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle\right) \\ &= \left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle\right) - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left(\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle\right) \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle + 4\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle + 4\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \|\bar{\boldsymbol{b}}\|^2 \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{b}} \right\rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle + 4\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle - 2\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle + 4\left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x} \right\rangle \left\langle \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

となるので, f は直交変換でもある. この f を H に関する鏡映と呼ぶ. □

Remark 5.3.25. f を直交変換とする. このとき, ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \\ \|f(\boldsymbol{x})\| &= \sqrt{\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \end{aligned}$$

となるので, $\|\boldsymbol{x}\| = \|f(\boldsymbol{x})\|$ である. つまり, ベクトルのノルムは直交変換 f によって変化しない. したがって, 2 点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の距離 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ も f では変化しない. したがって, 3 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を頂点とする三角形 S は, f によって, $f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z})$ を頂点とする三角形 T にうつるが, S と T は合同である. つまり, 直交変換 f は, 三角形をそれと合同な三角形にうつす.

また, r を 0 でない実数とし, f は引き続き直交変換であるとする. このとき, $f'(\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ で線形変換 f' を定義する. ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し,

$$\|f'(\boldsymbol{x})\| = \|rf(\boldsymbol{x})\| = |r|\|f(\boldsymbol{x})\| = |r|\|\boldsymbol{x}\|$$

となる. つまり, ベクトルのノルムは f' によって $|r|$ 倍となる. したがって, 2 点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の距離 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ も f' で $|r|$ 倍となる. したがって, 3 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を頂点とする三角形 S は, f' によって, $f'(\boldsymbol{x}), f'(\boldsymbol{y}), f'(\boldsymbol{z})$ を頂点とする三角形 T' にうつるが, 対応する辺の長さの比は, どれも $1 : |r|$ である. よって S と T' は相似である. つまり f' は三角形をそれと相似比 $1 : |r|$ で相似な三角形にうつす. □

x2 (2024-08-11 10:58)

章末問題

略解は解説 B.5.1.

躓いたら問題 3.1 も確認.

問題 5.1. 次が一次独立か判定せよ:

1. $(\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix})$.
2. $(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix})$.

略解は解説 B.5.2.

問題 5.2. 次が一次独立となるための a, b に関する条件を求めよ.

$$(\begin{pmatrix}-5\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix})$$

略解は解説 B.5.3.

躓いたら問題 4.5 and 4.6 も確認.

問題 5.3. 次が $\mathbb{R}^2$ の生成系か判定せよ

1. $(\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix})$.
2. $(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix})$.

略解は解説 B.5.4.

問題 5.4.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

であるとき, 以下に答えよ:

1. ノルム $\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{b}\|$ を求めよ.
2. 内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を求めよ.
3. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする. $\cos(\theta)$ を求めよ.

略解は解説 B.5.5.

躓いたら問題 5.6 も確認.

問題 5.5. $\|\boldsymbol{a}\| = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3$, $\|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}\| = \sqrt{3}$ であるとき, 以下に答えよ:

1. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を求めよ.
2. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos(\theta)$ を求めよ.

略解は解説 B.5.6.

躓いたら問題 5.5 も確認.

問題 5.6. $\|\boldsymbol{a}\| = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3$, $\|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}\| = \sqrt{3}$ であるとき, $\langle \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \rangle = 0$ となる t を求めよ.

略解は解説 B.5.7.

問題 5.7.

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},$$

であるとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底となるような $\boldsymbol{b}$ をすべて求めよ.

略解は解説 B.5.8.

問題 5.8.

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & x\\4 & y\end{pmatrix},$$

が直交行列となる x, y を求めよ.

問題 5.9. 解は解説 B.5.9.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \\
L &= \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

であるとき, $\boldsymbol{a}$ から L への直交射影を求めよ. また, 垂直成分を求めよ.

問題 5.10. 略解は解説 B.5.10.

蹟いたら問題 5.9 も確認.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \\
L &= \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

であるとき, $\boldsymbol{a}$ から L への直交射影を求めよ. 垂直成分を求めよ.

問題 5.11. 略解は解説 B.5.11.

蹟いたら問題 5.10 も確認.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \\
L &= \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

であるとき, $\boldsymbol{a}$ と L の距離を求めよ.

問題 5.12. 以下のベクトルから, シュミットの正規直交化法を用いて, 互いに直交するノルムが 1 のベクトルの組を得よ: 略解は解説 B.5.12.

$$
\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

問題 5.13. 次で定まる線形変換を行列とベクトルの積で表せ: 略解は解説 B.5.13.

$$
f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 7y \end{pmatrix}.
$$

問題 5.14. 略解は解説 B.5.14.

$$
\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる線形変換を行列とベクトルの積で表せ.

問題 5.15. 略解は解説 B.5.15.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, & f(\boldsymbol{x}) &= A\boldsymbol{x}, \\
B &= \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, & g(\boldsymbol{x}) &= B\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

とする, $(f \circ g)(\boldsymbol{x})$ を行列とベクトルの積で表せ.

問題 5.16. 略解は解説 B.5.16.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

とすると, f は全単射であり, 逆写像をもつ. $f^{-1}(\boldsymbol{x})$ を行列とベクトルの積で表せ.

略解は解説 B.5.17.

躓いたら問題 5.9 も確認.

問題 5.17.

$$L = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

とする. L に関する鏡映を f とする.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

に対し, $f(\boldsymbol{a})$ を求めよ.

略解は解説 B.5.18.

問題 5.18. 各点を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させる線形変換を f とする. $f(\boldsymbol{x})$ を行列とベクトルの積として表せ. また,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

に対し, $f(\boldsymbol{a})$ を求めよ.

略解は解説 B.5.19.

問題 5.19.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

とする. $A = RB$ となる回転行列 R と上半三角行列 B を求めよ.

第 6 章

固有値と固有ベクトル

この章では, 固有値と固有ベクトルについて定義し, 行列の対角化について説明する.

[3] であれば, 第 3 章が関連する. また, 第 18–21 章には, 関連する内容について, 難しいことも含めて, 詳しく書かれている. [4] であれば, 第 6 章が関連する. 特に, 6.1, 6.2, 6.3 が関連する.

6.1 固有値と固有ベクトルの定義

ここでは, 固有値や固有ベクトルに関連する用語を定義し, その性質について紹介する.

Definition 6.1.1. A を 2 次正方行列とする. λ を数とする. $\boldsymbol{v}$ を $\mathbf{0}$ ではない 2 項ベクトルとする. 次の条件を満たすとき $\boldsymbol{v}$ は**固有値** λ **に属する** A **の固有ベクトル** (*eigenvector belonging to the eigenvalue* λ) であるという:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

固有値 λ に属する A の固有ベクトルが存在するとき, λ は A **の固有値** (*eigenvlue of* A) であるという. □

Example 6.1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 に属する A の固有ベクトル. □

Example 6.1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

は固有値 0 に属する A の固有ベクトル. □

Example 6.1.4.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

とする.

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

である.

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$$

となるが,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

は第 1 成分と第 2 成分の値が異なるので等しくなることはない. したがって,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

は A の固有ベクトルにはなりえない. □

$\boldsymbol{v}$ が固有値 λ に属する A の固有ベクトルであるための条件は

$$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$$

であるが, これを書き換えると,

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{v}-\lambda\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{0}\\A\boldsymbol{v}-\lambda E_2\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{0}\\(A-\lambda E_2)\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

である. どのような λ が A の固有値になるかがわかれば, その λ に対し, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A-\lambda E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解の空間を求めることで, A の固有ベクトルがすべてわかる. したがって, どのような λ が A の固有値になるかがわかれば固有ベクトルがすべて求められることになる. λ が A の固有値として現れるということは, $(A-\lambda E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{0}$ 以外の解をもつということであるので, これは, $(A-\lambda E_2)$ が正則であるかそうでないかを調べればわかる. このことは以下のようにまとめることができる.

Definition 6.1.5. A を 2 次正方行列とする．x に関する多項式

$$\det(A - xE_2)$$

を A **の固有多項式** (A **の特性多項式**)(*characteristic polynomial of* A) と呼ぶ． □

Proposition 6.1.6. A を 2 次正方行列とする．$f(x)$ を A の固有多項式とする．つまり $f(x) = \det(A - xE_2)$ とする．このとき 次は同値:

1. λ が A の固有値.
2. λ は $f(x) = 0$ の根 (つまり $f(\lambda)$=0 を満たす).

□

Remark 6.1.7. A を 2 次正方行列とすると, A の固有多項式 $f(x)$ は 2 次式である．よって $f(x) = 0$ は 2 次方程式である．したがって, A の成分が実数であっても, A の固有値が実数になるとは限らない． □

Definition 6.1.8. λ を A の固有値であるとする．このとき, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の空間

$$\{\, \boldsymbol{v} \mid (A - \lambda E_2)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \,\}$$

を**固有値** λ **に属する** A **の固有空間** (*eigenspace associated with* λ) と呼ぶ． □

Remark 6.1.9. λ を A の固有値であるとし, V を固有値 λ に属する A の固有空間とする．V は, $\boldsymbol{0}$ と固有値 λ に属する A の固有ベクトル全体からなる集合である． □

固有空間は $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であるので, Proposition 4.3.4 から次がわかる．

Proposition 6.1.10. A を 2 次正方行列とし, λ を A の固有値とする．V を固有値 λ に属する A の固有空間とする．このとき, 次が成り立つ:

1. $\boldsymbol{v} \in V$ とし, c を数とするとすると, $c\boldsymbol{v} \in V$.
2. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ とすると, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V$.

□

また, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に対し, $\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$ とおけば, $\|\bar{\boldsymbol{v}}\| = 1$ であるので次がわかる．

Corollary 6.1.11. A を 2 次正方行列とし, λ を A の固有値とする．このとき, 固有値 λ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ となるものが存在する． □

6.2　行列の対角化

ここでは, 行列の対角化に関連する用語を定義し, 対角化可能性に関する必要十分条件を紹介する．

A を 2 次正方行列とする．

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$$

を固有値 λ に属する A の固有ベクトルとする.

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$$

を固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする. $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が一次独立であるとする. このとき,

$$P = \begin{pmatrix} v & w \\ v' & w' \end{pmatrix}$$

とおくと, P は正則である. さらに,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる.

Remark 6.2.1. 正方行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在するとき, **A は P によって対角化できる** (A *is diagonalizable with* P) という. P および $P^{-1}AP$ を求めることを, A を対角化するという. □

Remark 6.2.2. 正方行列がいつでも対角化できるわけではない. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は対角化できない. 対角化出来ない理由は Remark 6.2.5 で述べる. □

証明は Proof A.6.1.

Theorem 6.2.3. A を 2 次正方行列とする. このとき, 次は同値:

1. A が対角化可能である.
2. 次を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ がとれる:
   (a) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は一次独立.
   (b) $\boldsymbol{v}_i$ は固有値 λ_i に属する A の固有ベクトル.

□

また, 次が知られている.

証明は Proof A.6.2.

Theorem 6.2.4. A を 2 次正方行列とする. $\boldsymbol{v}$ は固有値 λ に属する A の固有ベクトル, $\boldsymbol{w}$ は固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする. $\lambda \neq \mu$ ならば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は一次独立. □

Remark 6.2.5. A を 2 次正方行列とする. x に関する方程式 $\det(A - xE_2) = 0$ は, 2 次方程式である.

$\det(A - xE_2) = 0$ が異なる解を持つときには, 異なる固有値 2 つ取れる. それぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ選んでくれば, Theorem 6.2.4 から, それらは一次独立であることがわかる. したがって, Theorem 6.2.3 から A は対角化可能であることがわかる.

$\det(A - xE_2) = 0$ が重根を持つときには, 固有値は一つしかない. λ をその固有値とする. $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の空間を V とおく. つまり V は λ に属する A の固有空間である.

$\det(A - xE_2) = 0$ が重根 λ をもっても, $\mathrm{rank}(A - \lambda E_2) = 0$ ならば V から一次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が取れる. したがって, Theorem 6.2.3 から A は対角化可能であることがわかる.

$\det(A - xE_2) = 0$ が重根 λ をもっているときに, $\mathrm{rank}(A - \lambda E_2) = 1$ である場合を考える. $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に属する A の固有ベクトルとする. このとき, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解であり, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ である. $\mathrm{rank}(A - \lambda E_2) = 1$ が 1 であるので, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, 変数 c を使って, $c\boldsymbol{v}$ と書くことができる. つまり, $\boldsymbol{w}$ も固有値 λ に属する A の固有ベクトルとすると, $\boldsymbol{v}$ のスカラー倍として書ける. よって, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は一次独立ではない. したがって, 一次独立である 2 つの固有ベクトルが取れないことがわかる. したがって, Theorem 6.2.3 から A は対角化可能ではないことがわかる. 実は, この場合には, 対角化はできないものの,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

のように上三角行列に変形できる正則行列 P が取れることが知られている. □

6.3 対角化の計算例

行列の対角化の応用の一つに, 冪の計算がある. 一般の正方行列の冪の計算は複雑であるが, 対角行列の冪の計算は簡単であるため, そこに帰着するというものである. 以下では, その計算方法

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合で説明する.

まず A の固有値を求める.

$$A - xE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 6 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \det(A - xE_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & 6 \\ 1 & -x \end{pmatrix}\right) \\ &= -(1-x)x - 6 = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

である. したがって, x に関する方程式

$$\det(A - xE_2) = 0$$

は,

$$(x-3)(x+2) = 0$$

と書けるので, 解は, 3 と -2 の 2 つである. したがって, A の固有値も, 3 と -2 の 2 つである.

まず, 固有値 3 に属する固有ベクトルを求める. $\lambda = 3$ とするとき

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の $\mathbf{0}$ 以外の解を求めれば, それが $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルである.

$$\begin{aligned} A - \lambda E_2 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-3 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. したがって, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$A - \lambda E_2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

である. 1 行目を $\frac{1}{-2}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. 2 行目に 1 行目の -1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. したがって,

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解の空間は,

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \text{ は数} \right\}$$

と書ける. したがって, 例えば

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 3 に属する固有ベクトルである.

次に, 固有値 -2 に属する固有ベクトルを求める. $\lambda = -2$ とするとき

$$A - \lambda E_2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の $\mathbf{0}$ 以外の解を求めれば, それが $\lambda = -2$ に属する固有ベクトルである.

$$\begin{aligned} A - \lambda E_2 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．したがって, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$(A-\lambda E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

である．1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目に 1 行目の -1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって,

$$A-\lambda E_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

の解の空間は,

$$\left\{ t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \text{ は数} \right\}$$

と書ける．例えば

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 -2 に属する固有ベクトルである．

固有ベクトルが求められたので対角化をする．

$$P=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\det(P)=\det(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})=3-(-2)=5\neq 0$$

であるので P は正則であり,

$$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である．

このとき,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

である．したがって,

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

である．一方, Example 3.1.7 でみたように,

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

であるので,

$$\begin{aligned} P^{-1}A^nP &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \\ A^n &= P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$

とできる．したがって,

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 3^n2 \\ -(-2)^n & (-2)^n3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1}-(-2)^{n+1} & 3^{n+1}2+(-2)^{n+1}3 \\ 3^n-(-2)^n & 3^n2+(-2)^n3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このような行列の冪の一つの応用として, 数列の一般項の計算について見てみる．

Example 6.3.1.

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

で定義される数列を考え, その一般項を求める．この数列の一般項を求める．

$$\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

とおく．このとき,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{n+2} &= \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1}6 + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_{n+1} \end{aligned}$$

とできる．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であったから,

$$\boldsymbol{v}_{n+2} = A\boldsymbol{v}_{n+1}$$

となる．この式は $n \leq 0$ であれば成り立つ．つまり，

$$\boldsymbol{v}_k = A\boldsymbol{v}_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_n \\
&= A\boldsymbol{v}_{n-1} \\
&= A(A\boldsymbol{v}_{n-2}) = A^2\boldsymbol{v}_{n-2} \\
&= A^2(A\boldsymbol{v}_{n-3}) = A^3\boldsymbol{v}_{n-3} \\
&= A^3(A\boldsymbol{v}_{n-4}) = A^4\boldsymbol{v}_{n-4} \\
&= \cdots = A^{n-1}\boldsymbol{v}_1
\end{aligned}$$

である．先ほど求めた A^n の計算結果を使うと，

$$A^{n-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n - (-2)^n & 3^n 2 + (-2)^n 3 \\ 3^{n-1} - (-2)^{n-1} & 3^{n-1}2 + (-2)^{n-1}3 \end{pmatrix}$$

であり，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{v}_n \\
&= A^{n-1}\boldsymbol{v}_0 \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n - (-2)^n & 3^n 2 + (-2)^n 3 \\ 3^{n-1} - (-2)^{n-1} & 3^{n-1}2 + (-2)^{n-1}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n - (-2)^n \\ 3^{n-1} - (-2)^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}$$

である． □

6.4　実対称行列の固有値

ここでは，実数を成分とする対称行列を考え，その固有値について調べる．

$$A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & u \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\det(A - xE_2) &= \det(\begin{pmatrix} s - x & t \\ t & u - x \end{pmatrix}) \\
&= (s - x)(u - x) - t^2 \\
&= x^2 - (s + u)x + su - t^2
\end{aligned}$$

となる．x に関する方程式

$$\det(A - xE_2) = 0$$

の解を調べたいので判別式 D を計算すると,

$$\begin{aligned} D &= (-(s+u))^2 - 4(su - t^2) \\ &= s^2 + 2us + u^2 - 4su + 4t^2 \\ &= s^2 - 2us + u^2 + 4t^2 \\ &= (s-u)^2 + 4t^2. \end{aligned}$$

となる．$D \geq 0$ なので, 複素数解を持つことはなく, 常に実数解をもつ．

$D > 0$ のときについて考える．このときには, 実数解が 2 つ存在するので, λ, μ とする．$\lambda \neq \mu$ である．$\boldsymbol{v}$ を $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ である固有値 λ に属する A の固有ベクトルでとする．$\boldsymbol{w}$ を $\|\boldsymbol{w}\| = 1$ である固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする．このとき,

$$\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$$

であるが, $\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$ は ${}^t\!(A\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}$ の $(1,1)$-成分と等しい．また,

$$\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mu\boldsymbol{w}\rangle = \mu \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$$

であるが, $\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}\rangle$ は ${}^t\boldsymbol{v}\,A\boldsymbol{w}$ の $(1,1)$-成分と等しい．いま A は対称行列であるので ${}^tA = A$ であるから,

$${}^t\!(A\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\,{}^tA\,\boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\,A\boldsymbol{w}$$

となる．したがって,

$$\lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \mu \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$$

となるが,

$$(\lambda - \mu)\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$$

となる．$\lambda \neq \mu$ であるので,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$$

であり, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は直交する．したがって, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を並べてできる行列は直交行列であるから, A は対角化可能であることがわかる．

また, 重根となるのは, $t = 0$ かつ $s = u$ のときであるので,

$$A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = sE_2$$

のときである．$A = sE_2$ のときは, すでに対角行列である．つまり単位行列 E_2 により A は対角化できるが, E_2 も直交行列である．

これらの事実をまとめると以下のようになる．

Theorem 6.4.1. *A を実対称行列とする．このとき, A の固有値は実数である．また, λ, μ が相異なる A の固有値ならば, λ に属する A の固有ベクトルと, μ に属する A の固有ベクトルとは直交する．* □

Theorem 6.4.2. *A を実対称行列とする．このとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P が存在する．* □

6.5 固有多項式に関する補足

6.5.1 正則行列の固有値

A を 2 次正方行列とする. x に関する多項式

$$\det(A - xE_2)$$

を A の固有多項式と呼んだ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のときには, A の固有多項式 $f(x)$ は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \det(\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}) \\ &= (a-x)(d-x) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \end{aligned}$$

である.

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

の解を λ_1, λ_2 とすると, これらは, A の固有値であった.

λ_1, λ_2 を解とする二次方程式で x^2 の係数が 1 であるものは,

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = 0$$

つまり,

$$x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

と書ける. この方程式と, $f(A) = 0$ という方程式の係数を比較して,

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= a + d \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. より一般に, n 次方程式の解と係数の関係から, 次が成り立つことが知られている:

Theorem 6.5.1. A を n 次正方行列とし, $f(x)$ を A の固有多項式とする. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を $f(x) = 0$ の解 (つまり, A の固有値) とする. このとき,

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

□

また, $a_{i,j}$ を (i,j)-成分とする n 次正方行列に対し,

$$\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$$

とし, $\mathrm{tr}(A)$ を A **のトレース** (A **の跡**)(*trace of A*) と呼ぶ. たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のときには, $\mathrm{tr}(A) = a + d$ である. この記号の下, n 次方程式の解と係数の関係から, 次が成り立つことが知られている:

Theorem 6.5.2. A を n 次正方行列とし, $f(x)$ を A の固有多項式とする. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を $f(x) = 0$ の解 (つまり, A の固有値) とする. このとき,

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

□

Theorem 6.5.1 から, 固有値の積が行列式となるので, 以下がすぐわかる:

Corollary 6.5.3. A を正方行列とする. このとき, 以下は同値:

1. A は正則である.
2. 0 は A の固有値ではない.

□

6.5.2 ケーリー–ハミルトンの定理

Proposition 2.2.49 として,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のときには,

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E_2 = O_{2,2}$$

が成り立つことを紹介した. このとき, A の固有多項式 $f(x)$ は,

$$f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$$

である. 等式の左辺は固有多項式 $f(x)$ に $x = A$ を代入して得られる行列多項式 $f(A)$ と一致している. より一般に次が成り立つことが, ケーリー–ハミルトンの定理という名前で知られている:

Theorem 6.5.4 (ケーリー–ハミルトンの定理)**.** A を n 次正方行列とし, $f(x)$ を A の固有多項式とする. つまり $f(x) = \det(A - xE_n)$ とする. このとき,

$$f(A) = O_{n,n}$$

が成り立つ. □

章末問題

問題 6.1.

略解は解説 B.6.1.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 4.9 も確認.

とする. A の固有多項式を求めよ. また, A の固有値をすべて求めよ.

問題 6.2.

略解は解説 B.6.2.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 6.1 も確認.

は対角化可能か判定せよ.

問題 6.3.

略解は解説 B.6.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 4.10 も確認.

は対角化可能か判定せよ.

問題 6.4.

略解は解説 B.6.4.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

躓いたら問題 4.11, 4.12 and 6.1 も確認.

とする. このとき次に答えよ:

1. 固有ベクトルをすべて求めよ.
2. A を対角化せよ.
3. A^n を求めよ.

問題 6.5. 次の行列 A は直交行列か判定せよ.

略解は解説 B.6.5.

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

問題 6.6. 次の行列を直交行列により対角化せよ:

略解は解説 B.6.6.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

躓いたら問題 6.5 も確認.

問題 6.7. 次で定義される数列 (Fibonacci 数列) の一般項を求めよ:

略解は解説 B.6.7.

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ a_2 = a_1 = 1 \end{cases}$$

参考文献

[1] 泉屋周一. 初級線形代数: 半期で学ぶ 2 次行列と平面図形. 共立出版, October 2008.

[2] 桑村雅隆. 線形代数学入門: 平面上の 1 次変換と空間図形から. 裳華房, February 2016.

[3] 澁川陽一. 線形代数学講義. 学術図書出版社, November 2019.

[4] 数学教科書編集委員会. 基礎理学線形代数学. 学術図書出版社, October 2009.

[5] 和久井道久. 大学数学ベーシックトレーニング. 日本評論社, March 2013.

付録 A

命題の証明

A.1 証明に必要となる基本的な事実

数の四則演算に関して以下の計算規則が成り立つ．これらの計算規則は既知であるとする．

Lemma A.1.1. a, b, c を数とすると以下が成り立つ:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$.
2. $0+a = a+0 = a$.
3. $a+(-a) = (-a)+a = 0$.
4. $a+b = b+a$.
5. $(ab)c = a(bc)$.
6. $1a = a1 = a$.
7. $a \neq 0$ ならば, $\frac{1}{a}a = a\frac{1}{a} = 1$.
8. $ab = ba$.
9. $a(b+c) = ab+ac$.
10. $(a+b)c = ac+bc$.

□

また, 実数に対して次の事実が成り立つ．これも既知とする．

Lemma A.1.2. a を実数とすると以下が成り立つ:

1. $a^2 \leq 0$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$.

□

実二次関数に関する次の事実も既知とする．

Lemma A.1.3. a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする．t に関する二次関数 $f(t) = at^2+bt+c$ を考える．このとき次が同値:

1. 全ての $t \in \mathbb{R}$ において, $f(t) \geq 0$.
2. $b^2 - 4ac \leq 0$

□

A.2　行列の演算に関する命題の証明

ここでは, Chapter 2 に現れる命題の証明を行う．一般の (m,n)-行列の場合について証明をしているので, 煩雑になっている部分がある．$(2,2)$-行列の場合のみについて証明をするのであれば, 直接計算をすることで示すほうが手っ取り早いものが多い．

Proof A.2.1 (2.2.37 – 1)．A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．$T = {}^tA$ とおくと, T は (n,m)-行列である．このとき, ${}^tT$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す．

T の (i,j)-成分を $t_{i,j}$ とすると, $t_{i,j} = a_{i,j}$ である．また, ${}^tT$ の (i,j)-成分は, $t_{j,i}$ である．したがって, ${}^tT$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j}$ である． □

Proof A.2.2 (2.2.37 – 2)．A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．A' を (m,n)-行列とし, A' の (i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする．このとき, ${}^t(A + A')$ の (i,j)-成分と ${}^tA + {}^tA'$ の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$A + A'$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j} + a'_{i,j}$ である．したがって, ${}^t(A + A')$ の (i,j)-成分は, $a_{j,i} + a'_{j,i}$ である．一方, ${}^tA$ の (i,j)-成分は $a_{j,i}$ であり, ${}^tA'$ の (i,j)-成分は $a'_{j,i}$ である．したがって, ${}^tA + {}^tA'$ の (i,j)-成分は, $a_{j,i} + a'_{j,i}$ である． □

Proof A.2.3 (2.2.37 – 3)．A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．α を数とする．このとき, ${}^t(\alpha A)$ の (i,j)-成分と $\alpha\, {}^tA$ の (i,j)-成分が等しいことを示す．

αA の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}$ である．したがって, ${}^t(\alpha A)$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{j,i}$ である．一方, ${}^tA$ の (i,j)-成分は $a_{j,i}$ である．したがって, $\alpha\, {}^tA$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{j,i}$ である． □

Proof A.2.4 (2.2.37 – 4)．A を (m,n)-行列とし, A の (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．B を (n,k)-行列とし, B の (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする．$T = {}^tA$, $S = {}^tB$ とする．このとき, ${}^t(AB)$ の (i,j)-成分と ST の (i,j)-成分が等しいことを示す．

AB の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^n a_{i,l}b_{l,j}$ である．したがって, ${}^t(AB)$ の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^n a_{j,l}b_{l,i}$ である．一方, S の (i,j)-成分を $s_{i,j}$ とすると, $S = {}^tB$ であるので $s_{i,j} = b_{j,i}$ である．また, T の (i,j)-成分を $t_{i,j}$ とすると, $T = {}^tA$ であるので $t_{i,j} = a_{j,i}$ である．ST の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^n s_{i,l}t_{l,j}$ である．$\sum_{l=1}^n s_{i,l}t_{l,j} = \sum_{l=1}^n b_{l,i}a_{j,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l}b_{l,i}$ であるので, ST の (i,j)-成分は, ${}^t(AB)$ の (i,j)-成分と等しい． □

Proof A.2.5 (2.2.39 – 1a)．A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．B を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする．C を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $c_{i,j}$ とする．このとき, $(A + B) + C$ の (i,j)-成分と $A + (B + C)$ の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$A+B$ の (i,j) 成分は $a_{i,j}+b_{i,j}$ であるので, $(A+B)+C$ の (i,j)-成分は $(a_{i,j}+b_{i,j})+c_{i,j}$ である．$B + C$ の (i,j) 成分は $b_{i,j} + c_{i,j}$ であるので, $A + (B + C)$ の (i,j)-成分は $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$ である．したがって, Lemma A.1.1 より, $(A + B) + C$ の (i,j)-成分と $A + (B + C)$ の (i,j)-成分が等しい．

□

Proof A.2.6 (2.2.39 – 1b)．A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．このとき, $A + O_{m,n}$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$A + O_{m,n}$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j} + 0$ であるが, Lemma A.1.1 より, $a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$ であ

る. □

Proof A.2.7 (2.2.39 – 1c). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. このとき, $A+(-A)$ の (i,j)-成分が 0 であることを示す.

$-A$ の (i,j)-成分は, $-a_{i,j}$ である. $A+(-A)$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j}-a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $a_{i,j}-a_{i,j}=0$ である. □

Proof A.2.8 (2.2.39 – 1d). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. このとき, $A+B$ の (i,j)-成分と $B+A$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A+B$ の (i,j)-成分は, $a_{i,j}+b_{i,j}$ である. $B+A$ の (i,j)-成分は, $b_{i,j}+a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $a_{i,j}+b_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ である. □

Proof A.2.9 (2.2.39 – 2a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. α,β を数とする. このとき, $(\alpha\beta)A$ の (i,j)-成分と $\alpha(\beta A)$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$(\alpha\beta)A$ の (i,j)-成分は, $(\alpha\beta)a_{i,j}$ である. βA の (i,j)-成分は, $(\beta a_{i,j}$ であるので, $\alpha(\beta A)$ の (i,j)-成分は, $\alpha(\beta a_{i,j})$ である. Lemma A.1.1 より, $(\alpha\beta)a_{i,j}=\alpha(\beta a_{i,j})$ である. □

Proof A.2.10 (2.2.39 – 2b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. このとき, $1A$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$1A$ の (i,j)-成分は, $1a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $1a_{i,j}=a_{i,j}$ である. □

Proof A.2.11 (2.2.39 – 3a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. α, β を数とする. このとき, $(\alpha+\beta)A$ の (i,j)-成分と $\alpha A+\beta A$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$(\alpha+\beta)A$ の (i,j)-成分は, $(\alpha+\beta)a_{i,j}$ である. Lemma A.1.1 より, $(\alpha+\beta)a_{i,j}=\alpha a_{i,j}+\beta a_{i,j}$ である. αA の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}$ であり, βA の (i,j)-成分は, $\beta a_{i,j}$ である. したがって, $\alpha A+\beta A$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}+\beta a_{i,j}$ である. □

Proof A.2.12 (2.2.39 – 3b). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. α を数とする. このとき, $\alpha(A+B)$ の (i,j)-成分と $\alpha A+\alpha B$ の (i,j)-成分が等しいことを示す.

$A+B$ の (i,j)-成分は $a_{i,j}+b_{i,j}$ であるので, $\alpha(A+B)$ の (i,j)-成分は $\alpha(a_{i,j}+b_{i,j})$ である. Lemma A.1.1 より, $\alpha(a_{i,j}+b_{i,j})=\alpha a_{i,j}+\alpha b_{i,j}$ である. αA の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}$ であり, αB の (i,j)-成分は, $\alpha b_{i,j}$ である. したがって, $\alpha A+\alpha B$ の (i,j)-成分は, $\alpha a_{i,j}+\alpha b_{i,j}$ である. □

Proof A.2.13 (2.2.42 – 1a). A を (m,n)-行列とし, (i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする. B を (n,k)-行列とし, (i,j)-成分を $b_{i,j}$ とする. C を (k,l)-行列とし, (i,j)-成分を $c_{i,j}$ とする. $F=AB$, $S=BC$ とする. このとき, FC の (i,j)-成分と AS の (i,j)-成分が等しいことを示す.

F の (i,j) 成分を $f_{i,j}$ とおくと, $f_{i,j}=\sum_{p=1}^{n}a_{i,p}b_{p,j}$ である. したがって, FC の (i,j) 成分は

$$
\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{k} f_{i,q}c_{q,j} &= \sum_{q=1}^{k}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{i,p}b_{p,q}\right)c_{q,j} \\
&= \sum_{q=1}^{k}\sum_{p=1}^{n} a_{i,p}b_{p,q}c_{q,j}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{k} a_{i,p} b_{p,q} c_{q,j}$$

である．一方，S の (i,j) 成分を $s_{i,j}$ とおくと，$s_{i,j} = \sum_{u=1}^{k} b_{i,u} c_{u,j}$ である．したがって，AS の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{n} a_{i,v} s_{v,j} &= \sum_{v=1}^{n} a_{i,v} \left(\sum_{u=1}^{k} b_{v,u} c_{u,j} \right) \\
&= \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{k} a_{i,v} b_{v,u} c_{u,j} \\
&= \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{k} a_{i,v} b_{v,u} c_{u,j}
\end{aligned}$$

である． □

Proof A.2.14 (2.2.42 – 1b)．A を (m,n)-行列とし，(i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．このとき，AE_n の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$\delta_{i,j}$ をクロネッカーの δ とすると，E_n の (i,j)-成分は $\delta_{i,j}$ である．AE_n の (i,j)-成分は，$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j}$ である．$\delta_{j,j} = 1$ であるが，$k \neq j$ に対して，$\delta_{k,j} = 0$ であるので，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j} &= \sum_{k \in \{1,2,\dots,n\}} a_{i,k}\delta_{k,j} \\
&= a_{i,j}\delta_{j,j} + \sum_{k \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j\}} a_{i,k}\delta_{k,j} \\
&= a_{i,j} \cdot 1 + \sum_{k \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j\}} a_{i,k} \cdot 0 \\
&= a_{i,j}.
\end{aligned}$$

□

Proof A.2.15 (2.2.42 – 1c)．A を (m,n)-行列とし，(i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．このとき，$E_m A$ の (i,j)-成分と A の (i,j)-成分が等しいことを示す．

$\delta_{i,j}$ をクロネッカーの δ とすると，E_m の (i,j)-成分は $\delta_{i,j}$ である．$E_m A$ の (i,j)-成分は，$\sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k} a_{k,m}$ である．$\delta_{i,i} = 1$ であるが，$k \neq i$ に対して，$\delta_{i,k} = 0$ であるので，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k} a_{k,j} &= \sum_{k \in \{1,2,\dots,m\}} \delta_{i,k} a_{k,j} \\
&= \delta_{i,i} a_{i,j} + \sum_{k \in \{1,2,\dots,m\} \setminus \{i\}} \delta_{i,k} a_{k,j} \\
&= 1 a_{i,j} + \sum_{k \in \{1,2,\dots,m\} \setminus \{i\}} 0 a_{k,j} \\
&= a_{i,j}.
\end{aligned}$$

□

Proof A.2.16 (2.2.42 – 2a)．A を (m,n)-行列とし，(i,j)-成分を $a_{i,j}$ とする．A' を (m,n)-行列とし，(i,j)-成分を $a'_{i,j}$ とする．B を (n,k)-行列とし，(i,j)-成分を $b_{i,j}$ とす

る．$S = A + A'$ とする．このとき, SB の (i, j)-成分と $AB + A'B$ の (i, j)-成分が等しいことを示す．

S の (i, j)-成分を $s_{i,j}$ とすると，$s_{i,j} = a_{i,j} + a'_{i,j}$ である．したがって SB の (i, j)-成分は,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} s_{i,t} b_{t,j} &= \sum_{t=1}^{n} (a_{i,t} + a'_{t,j}) b_{t,j} \\ &= \sum_{t=1}^{n} (a_{i,t} b_{t,j} + a'_{t,j} b_{t,j}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a'_{t,j} b_{t,j}\end{aligned}$$

である．一方，AB の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j}$, $A'B$ の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a'_{i,t} b_{t,j}$ である．したがって, $AB + A'B$ の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a'_{i,t} b_{t,j}$ である． □

Proof A.2.17 (2.2.42 – 2b)．A を (m, n)-行列とし, (i, j)-成分を $a_{i,j}$ とする．B を (n, k)-行列とし，(i, j)-成分を $b_{i,j}$ とする． B' を (n, k)-行列とし，(i, j)-成分を $b'_{i,j}$ とする．$S = B + B'$ とする．このとき, AS の (i, j)-成分と $AB + AB'$ の (i, j)-成分が等しいことを示す．

S の (i, j)-成分を $s_{i,j}$ とすると，$s_{i,j} = b_{i,j} + b'_{i,j}$ である．したがって AS の (i, j)-成分は,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} s_{t,j} &= \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} (b_{t,j} + b'_{t,j}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} (a_{i,t} b_{t,j} + a_{i,t} b'_{t,j}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b'_{t,j}\end{aligned}$$

である．一方，AB の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j}$, AB' の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b'_{t,j}$ である．したがって, $AB + AB'$ の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j} + \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b'_{t,j}$ である． □

Proof A.2.18 (2.2.42 – 3a)．A を (m, n)-行列とし, (i, j)-成分を $a_{i,j}$ とする．B を (n, k)-行列とし，(i, j)-成分を $b_{i,j}$ とする． α を数とする． このとき，$(\alpha A)B$ の (i, j)-成分と $\alpha(AB)$ の (i, j)-成分が等しいことを示す．

αA の (i, j)-成分は $\alpha a_{i,j}$ である．したがって, $(\alpha A)B$ の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t} b_{t,j}$ である．一方 AB の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j}$ である．したがって, $\alpha(AB)$ の (i, j)-成分は $\alpha \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j} = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t} b_{t,j}$ である． □

Proof A.2.19 (2.2.42 – 3b)．A を (m, n)-行列とし, (i, j)-成分を $a_{i,j}$ とする．B を (n, k)-行列とし，(i, j)-成分を $b_{i,j}$ とする． α を数とする． このとき，$\alpha(AB)$ の (i, j)-成分と $A(\alpha B)$ の (i, j)-成分が等しいことを示す．

AB の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j}$ である． したがって，$\alpha(AB)$ の (i, j)-成分は $\alpha \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j} = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t} b_{t,j}$ である．一方 αB の (i, j)-成分は $\alpha b_{i,j}$ である．したがって, $A(\alpha B)$ の (i, j)-成分は $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} \alpha b_{t,j} = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{i,t} b_{t,j}$ である． □

Proof A.2.20 (2.2.45)．A を (m, n) 行列とする．

$1 + (-1) = 0$ であるので,

$$\begin{aligned} 0A &= (1 + (-1))A \\ &= 1A + (-1)A \\ &= A - A \\ &= O_{m,n} \end{aligned}$$

である.

$O_{k,m} + (-1)O_{k,m} = O_{k,m}$ であるので,

$$\begin{aligned} O_{k,m}A &= (O_{k,m} + (-1)O_{k,m})A \\ &= O_{k,m}A + ((-1)O_{k,m})A \\ &= O_{k,m}A + (-1)(O_{k,m}A) \\ &= O_{k,m} \end{aligned}$$

である.

$O_{n,k} + (-1)O_{n,k} = O_{n,k}$ であるので,

$$\begin{aligned} AO_{n,k} &= A(O_{n,k} + (-1)O_{n,k}) \\ &= AO_{n,k} + A((-1)O_{n,k}) \\ &= AO_{n,k} + (-1)(AO_{n,k}) \\ &= O_{n,k} \end{aligned}$$

である. □

Proof A.2.21 (2.2.46 – 1). A を n 次正方行列とする. k に関する数学的帰納法により, $A^kA^{k'} = A^{k+k'}$ を示す.

■Base case　$A^{k'+1}$ の定義から $AA^{k'} = A^{k'+1}$ である.

■Induction Step　$A^{k-1}A^{k'} = A^{k-1+k'}$ を仮定し, $A^kA^{k'} = A^{k+k'}$ を示す.

A^k の定義から

$$A^k = AA^{k-1}$$

である. したがって,

$$A^kA^{k'} = AA^{k-1}A^{k'} = AA^{k-1+k'}$$

である. 一方 $A^{k+k'}$ の定義から,

$$A^{k+k'} = AA^{k+k'-1} = AA^{k-1+k'}$$

である. □

Proof A.2.22 (2.2.46 – 2). A を n 次正方行列とする. k' に関する数学的帰納法により, $(A^k)^{k'} = A^{kk'}$ を示す.

■Base case　$(A^k)^1$ の定義から $(A^k)^1 = A^k = A^{k\cdot 1}$ である.

■Induction Step $(A^k)^{k'-1} = A^k(A^{k(k'-1)})$ を仮定し, $(A^k)^{k'} = A^k(A^{kk'})$ を示す.
$(A^k)^{k'}$ の定義から $(A^k)^{k'} = A^k(A^k)^{k'-1}$ である. したがって,

$$
\begin{aligned}
(A^k)^{k'} &= A^k(A^k)^{k'-1} \\
&= A^k(A^{k(k'-1)}) \\
&= A^kA^{k(k'-1)} \\
&= A^{k+k(k'-1)} \\
&= A^{k(1+k'-1)} \\
&= A^{kk'}
\end{aligned}
$$

である. □

Proof A.2.23 (2.2.47). A を n 次正方行列とする. α を数とする. k' に関する数学的帰納法により, $(\alpha A)^k = (\alpha^k)(A^k)$ を示す.

■Base case $(\alpha A)^1$ の定義から $(\alpha A)^1 = \alpha A = \alpha^1 A^1$ である.

■Induction Step $(\alpha A)^{k-1} = \alpha^{k-1}A^{k-1}$ を仮定し, $(\alpha A)^k = \alpha^k A^k$ を示す.
$(\alpha A)^k$ の定義から $(\alpha A)^k = (\alpha A)(\alpha A)^{k-1}$ である. したがって,

$$
\begin{aligned}
(\alpha A)^k &= (\alpha A)(\alpha A)^{k-1} \\
&= (\alpha A)(\alpha^{k-1}A^{k-1}) \\
&= \alpha^{k-1}((\alpha A)(A^{k-1})) \\
&= \alpha^{k-1}\alpha AA^{k-1} \\
&= \alpha^{k-1+1}A^{k-1+1} \\
&= \alpha^k A^k
\end{aligned}
$$

である.

□

Proof A.2.24 (2.2.49).

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

とする. このとき,

$$
A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}
$$

である. したがって,

$$
\begin{aligned}
&A^2-(a+d)A+(ad-bc)E_2 \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2-ad & -ab-bd \\ -ac-dc & -ad-d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd+0 \\ ac+cd-ac-cd+0 & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

A.3　逆行列や正則行列に関する命題の証明

ここでは, Chapter 3 に現れる命題の証明を行う．逆行列や正則行列に関する命題については, 一般の正方行列の場合について証明をしているので, 煩雑になっている部分がある．2-次正方行列の場合のみについて証明をするのであれば, 直接計算をすることで示すほうが手っ取り早いものが多い．行列式に関する命題は, 行列式を 2 次正方行列にしかここでは定義していないこともあり, 2-次正方行列の場合のみについて証明をしている．

Proof A.3.1 (3.1.4 – 1). X を n 次正則行列とする．$A = X^{-1}$ とし, $B = X$ とする．このとき, A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = X^{-1}X = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$BA = XX^{-1} = E_n$$

である． □

Proof A.3.2 (3.1.4 – 2). X を n 次正則行列とする．$A = {}^t\!X$ とし, $B = {}^t\!X^{-1}$ とする．このとき, A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = {}^t\!X\,{}^t\!X^{-1} = {}^t(X^{-1}X) = {}^t\!E_n = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$BA = {}^t\!X^{-1}\,{}^t\!X = {}^t(XX^{-1}) = {}^t\!E_n = E_n$$

である． □

Proof A.3.3 (3.1.4 – 3). X を n 次正則行列とする．r を 0 でない数とする．$A = rX$ とし, $B = \frac{1}{r}X^{-1}$ とする．このとき, A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので,

$$AB = (rX)(\frac{1}{r}X^{-1}) = \frac{1}{r}(rXX^{-1}) = (\frac{1}{r}r)(XX^{-1}) = 1E_n = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列であるので，

$$AB = (\frac{1}{r}X^{-1})(rX) = r(\frac{1}{r}X^{-1}X) = (r\frac{1}{r})(X^{-1}X) = 1E_n = E_n$$

である． □

Proof A.3.4 (3.1.4 – 4)．X, Y を n 次正則行列とする．$A = XY$ とし，$B = Y^{-1}X^{-1}$ とする．このとき，A が正則であることを示す．そのために B が A の逆行列であることを示す．

まず $AB = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列，Y^{-1} は Y の逆行列であるので，

$$AB = (XY)(Y^{-1}X^{-1}) = X(YY^{-1})X^{-1} = XE_nX^{-1} = XX^{-1} = E_n$$

である．

次に $BA = E_n$ となることを示す．X^{-1} は X の逆行列，Y^{-1} は Y の逆行列であるので，

$$BA = (Y^{-1}X^{-1})(XY) = Y^{-1}(X^{-1}X)Y = Y^{-1}E_nY = Y^{-1}Y = E_n$$

である． □

Proof A.3.5 (3.1.4 – 5)．X を n 次正則行列とし，l を正の整数とする．このとき，X^l が正則であることを示す．そのために $(X^{-1})^l$ が X^l の逆行列であることを，l に関する数学的帰納法により示す．

■Base case　$(X)^1 = X$, $(X^{-1})^1 = X^{-1}$ であるから，$(X^{-1})^1$ が $(X)^1$ の逆行列である．

■Induction Step　$(X^-1)^{l-1}$ が $(X)^{l-1}$ の逆行列であることを仮定して，$(X^-1)^l$ が $(X)^l$ の逆行列であることを示す．

まず，$(X^l)((X^{-1})^l) = E_n$ となることを示す．$X^l = X^{l-1}X$, $(X^{-1})^l = X^{-1}(X^{-1})^{l-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}(X^l)((X^{-1})^l) &= (X^{l-1}X)(X^{-1}(X^{-1})^{l-1}) \\ &= X^{l-1}(XX^{-1})(X^{-1})^{l-1} \\ &= X^{l-1}E_n(X^{-1})^{l-1} \\ &= X^{l-1}(X^{-1})^{l-1} \\ &= E_n\end{aligned}$$

である．

次に，$((X^{-1})^l)(X^l) = E_n$ となることを示す．$X^l = X^{l-1}X$, $(X^{-1})^l = X^{-1}(X^{-1})^{l-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}((X^{-1})^l)(X^l) &= (X^{-1}(X^{-1})^{l-1})(X^{l-1}X) \\ &= X^{-1}((X^{-1})^{l-1})X^{l-1})X \\ &= X^{-1}E_nX \\ &= X^{-1}X \\ &= E_n\end{aligned}$$

である． □

Proof A.3.6 (3.1.6 − 1). X を n 次正則行列とする. このとき, 整数 k, k' に対し, $X^kX^{k'} = X^{k+k'}$ となることを示す.

$X^0 = E_n$ であるので, $X^0X^{k'} = E_nX^{k'} = X^{k'}$ である. また, $X^kX^0 = X^kE_n = X^k$ でもある.

k も k' も 0 ではない場合について考える. p, p' を正の整数とする. $k = p$ も $k' = p'$ である場合は, Proposition 2.2.46 である. $k = -p$ も $k' = -p'$ である場合は,

$$A^{-p}A^{-p'} = (A^{-1})^p(A^{-1})^{p'} = (A^{-1})^{p+p'} = A^{-(p+p')} = A^{(-p)+(-p')}.$$

であることがわかる.

ここまでの議論で, $k \leq 0$ かつ $k' \leq 0$ の場合と, $k \geq 0$ かつ $k' \geq 0$ の場合は証明できた. それら以外の場合について考える.

p, p' を正の整数とし, $k = -p$ かつ $k' = p'$ の場合と $k = p$ かつ $k' = -p'$ の場合について示す. $p = p'$ なら

$$\begin{aligned} A^{-p}A^{p'} &= A^{-p}A^p = (A^p)^{-1}A^p = E_n = A^0 = A^{-p+p} = A^{-p+p'} \\ A^pA^{-p'} &= A^pA^{-p} = (A^p)^{-1}A^p = E_n = A^0 = A^{p-p} = A^{p-p'} \end{aligned}$$

である. $p > p'$ であるなら, $p = d + p'$ とおくと,

$$\begin{aligned} A^{-p}A^{p'} = A^{-(d+p')}A^{p'} &= (A^{-d}A^{-p'})A^{p'} \\ &= A^{-d}(A^{-p'}A^{p'}) = A^{-d}A^0 = A^{-d} = A^{-p+p'} \\ A^pA^{-p'} = A^{d+p'}A^{-p'} &= (A^dA^{p'})A^{-p'} \\ &= A^d(A^{p'}A^{-p'}) = A^dA^0 = A^d = A^{p-p'} \end{aligned}$$

である. $p < p'$ であるなら, $p + d = p'$ とおくと,

$$\begin{aligned} A^{-p}A^{p'} &= A^{-p}A^{p+d} = A^{-p}A^pA^d = A^{-p+p}A^d = A^0A^d = A^d = A^{-p+p'}, \\ A^pA^{-p'} &= A^pA^{-(p+d)} = A^pA^{-p-d)} = A^pA^{-p}A^{-d} = A^0A^d = A^{0+d} = A^{p-p'} \end{aligned}$$

である.

□

Proof A.3.7 (3.1.6 − 2). X を n 次正則行列とする. このとき, 整数 k, k' に対し, $(X^k)^{k'} = X^{kk'}$ となることを示す.

定義から $(X^k)^0 = E_n$ である. また, $X^{k\cdot 0} = X^0 = E_n$ であるので, $(X^k)^0 = X^{k\cdot 0}$ である.

定義から $(X^0)^{k'} = E_n^{k'} = E_n$ である. また, $X^{0k'} = X^0 = E_n$ であるので, $(X^0)^{k'} = X^{0\cdot k'}$ である.

$X^{-k}X^k = X^0 = E_n$ かつ $X^kX^{-k} = X^0 = E_n$ であるので, X^{-k} は X^k の逆行列である. したがって $(X^k)^{-1} = X^{-k} = X^{k\cdot -1}$ である.

p' を正の整数とすると, Proposition 3.1.4 より, $(X^{-1})^{p'}$ は $X^{p'}$ の逆行列である. したがって $(X^{-1})^{p'} = (X^{p'})^{-1} = X^{-p'} = X^{-1\cdot p'}$ である.

p, p' を正の整数とすると, $k = p$, $k' = p'$ のときは, Proposition 2.2.46 より, $(X^k)^{k'} = X^{kk'}$ である.

$k = p,\ k' = -p'$ のときは,

$$(X^p)^{-p'} = ((X^p)^{p'})^{-1} = (X^{pp'})^{-1} = X^{-pp'}$$

である.

$k = -p,\ k' = p'$ のときは,

$$(X^{-p})^{p'} = ((X^p)^{-1})^{p'} = (X^p)^{-p'} = X^{-pp'}$$

である.

$k = -p,\ k' = -p'$ のときは,

$$(X^{-p})^{-p'} = ((X^{-p})^{p'})^{-1} = (X^{-pp'})^{-1} = X^{-(-pp')} = X^{(-p)(-p')}$$

である.

□

Proof A.3.8 (3.2.5).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

とする.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & db' + dd' \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= (aa' + bc')(db' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\
&= aa'(db' + dd') + bc'(db' + dd') - ab'(ca' + dc') - bd'(ca' + dc') \\
&= aa'db' + aa'dd' + bc'db' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc' \\
&= ada'b' + ada'd' + bdb'c' + bdc'd' - aca'b' - adb'c' - bca'd' - bdc'd' \\
&= ada'd' - adb'c' - bca'd' + bcb'c'
\end{aligned}$$

である. 一方, $\det(A) = ad - bc$, $\det(B) = a'd' - b'c'$ であるので,

$$\begin{aligned}
\det(A)\det(B) &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \\
&= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') \\
&= ada'd' - adb'c' - bca'd' + bcb'c'
\end{aligned}$$

である. □

Proof A.3.9 (3.2.8).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $\det(A) = ad - bc$ である. 一方

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

であるので, $\det(A) = ad - cb = ad - bc$ である. □

Proof A.3.10 (3.2.9).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

とする．このとき, $\det(A) = ad - bc$ である．一方 $-\det(A') = -(cb - da) = -cb + da = ad - bc$ である． □

Proof A.3.11 (3.2.11).

$$\det(\begin{pmatrix} a' + a'' & b' + b'' \\ c & d \end{pmatrix}) = (a' + a'')d - (b' + b'')c = a'd + a''d - b'c - b''c$$

$$\det(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c & d \end{pmatrix}) = (a'd - b'c) + (a''d - b''c) = a'd + a''d - b'c - b''c$$

である．また

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c' + c'' & d' + d'' \end{pmatrix}) = a(d' + d'') - b(c' + c'') = ad' + ad'' - bc' - bc''$$

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c'' & d'' \end{pmatrix}) = (ad' - bc') + (ad'' - bc'') = ad' + ad'' - bc' - bc''$$

である． □

Proof A.3.12 (3.2.12).

$$\alpha \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \alpha(ad - bc) = \alpha ad - \alpha bc$$

$$\det(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix}) = \alpha ad - \alpha bc$$

である．また

$$\alpha \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \alpha(ad - bc) = \alpha ad - \alpha bc$$

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}). = a\alpha d - b\alpha c = \alpha ad - \alpha bc$$

である． □

A.4　階数に関する命題の証明

ここでは, Chapter 4 に現れる命題の証明を行う．

Proof A.4.1 (4.3.4 − 1). $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解とする．このとき $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．したがって, $A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である． □

Proof A.4.2 (4.3.4 − 2). $\boldsymbol{v}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解とする．このとき $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．α を数とする．このとき, $A(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である． □

Lemma A.4.3. *A を (m, n)-行列とする．$E_{i,j}$ を (i, j)-成分のみ 1 で他は 0 の n 次正方行列とする．*

1. $F(i; c) = E_n - E_{i,i} + cE_{i,i}$ とする．このとき, $F(i; c)A$ は A の i 行目を c 倍した行列である．c が逆数を持つとき, $F(i; c)$ は正則で, $F(i; c)^{-1} = F(i; \frac{1}{c})$ である．

2. $i \neq j$ とする．$G(i,j;c) = E_n + cE_{i,j}$ とする．このとき, $G(i,j;c)A$ は A の i 行目に j 行目の c 倍を加えた行列である．$G(i,j;c)$ は正則で, $G(i,j;c)^{-1} = G(i,j;-c)$ である．
3. $H(i,j) = E_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ とする．このとき, $H(i,j)A$ は A の i 行目と j 行目を入れ替えた行列である．$H(i,j)$ は正則で, $H(i,j)^{-1} = H(i,j)$ である．

□

Proof. 定義から

$$E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & (j = k) \\ O_{n,m} & (j \neq k) \end{cases}$$

であることが計算できる．また, $E_{i,j}A$ は, i 行目が A の j 行目と等しく, それ以外の成分は 0 であることも計算できる．

■Item 1　$F(i;c)$ は (i,i)-成分のみ c で他の対角成分は c である対角行列である．

$F(i;c)A = (E_n - E_{i,i} + cE_{i,i})A = A + (c-1)E_{i,i}A$ である．したがって, $F(i;c)A$ の i 行目は A の i 行目に A の i 行目の $c-1$ 倍を加えたものであるので, A の i 行目の c 倍である．また i 行目以外は $F(i;c)A$ と A は等しい．つまり, $F(i;c)A$ は A の i 行目を c 倍した行列である．

また, $F(i;c)F(i;\frac{1}{c})$ は $F(i;\frac{1}{c}$ の i 行目を c 倍したものであるので, E_n である．$F(i;\frac{1}{c})F(i;c)$ は $F(i;c$ の i 行目を $\frac{1}{c}$ 倍したものであるので, E_n である． よって $F(i;c)^{-1} = F(i;\frac{1}{c})$ である．

■Item 2　$i \neq j$ とする．$G(i,j;c) = E_n + cE_{i,j}$ とする．$G(i,j;c)$ は, 対角成分は全て 1, (i,j)-成分は c, 他の成分は全て 0 である．

$G(i,j;c)A = (E_n + cE_{i,j})A = A + cE_{i,j}A$ である．したがって, $G(i,j;c)A$ の i 行目は A の i 行目に A の j 行目の c 倍を加えたものである．また i 行目以外は $G(i,j;c)A$ と A は等しい．つまり, $G(i,j;c)A$ は A の i 行目に j 行目の c 倍を加えた行列である．

また, $G(i,j;c)G(i,j;-c)$ は, $G(i,j;-c)$ の i 行目に $G(i,j;-c)$ の j 行目の c 倍を加えたものであるが, $G(i,j;-c)$ の j 行目は (j,j) 成分が 1 で他は 0 であるので, (i,j) 成分に c が加えられることになる．したがって, $G(i,j;c)G(i,j;-c) = E_n$ である．一方 $G(i,j;-c)G(i,j;c)$ は, $G(i,j;c)$ の i 行目に $G(i,j;c)$ の j 行目の $-c$ 倍を加えたものであるが, $G(i,j;c)$ の j 行目は (j,j) 成分が 1 で他は 0 であるので, (i,j) 成分に $-c$ が加えられることになる．したがって, $G(i,j;-c)G(i,j;c) = E_n$ である．よって, $G(i,j;c)^{-1} = G(i,j;-c)$ である．

■Item 3　$H(i,j)$ は (i,i)-成分と (j,j)-成分は 0, それ以外の対角成分は 1, (i,j)-成分と (j,i)-成分は 1, それ以外の成分は 0 である．

$H(i,j)A = (E_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{i,j})A = A - E_{i,i}A + E_{i,j}A - E_{j,j}A + E_{j,i}A$ である．したがって, $H(i,j)A$ の i 行目は, A の i 行目に A の i 行目の -1 倍と A の j 行目の 1 倍を加えたものであるので, A の j 行目である．同様に, $H(i,j)A$ の j 行目は, A の j 行目に A の j 行目の -1 倍と A の i 行目の 1 倍を加えたものであるので, A の i 行目である．また i 行目と j 行目以外は $H(i,j)A$ と A は等しい．つまり $H(i,j)A$ は A の i 行目と j 行目を入れ替えた行列である．

また, $H(i,j)H(i,j)$ は $H(i,j)$ の i 行目と j 行目を入れ替えたものであるので E_n である. したがって, $H(i,j)^{-1} = H(i,j)$ である. □

Remark A.4.4. Lemma A.4.3 の $F(i;c)$, $G(i,j;c)$, $H(i,j)$ を基本行列と呼ぶ. Lemma A.4.3 から, A に行基本変形を行うことは, A に基本行列を左からかけることであり, 逆に A に基本行列を左からかけることは, A に行基本変形を行うことであることがわかる.

また, 基本行列は正則行列であり, その逆行列もまた基本行列である. このことは, A に行基本変形を行って B が得られたときには, B 行基本変形を行って A にすることもできるということを意味する. ▯

Proof A.4.5 (4.3.5 – 3). A に行基本変形を行って被約階段行列 S が得られたとする. また, A に行基本変形を行って A' が得られたとする. このとき, Remark A.4.4 から, A' 行基本変形を行って A にできる. したがって更に行基本変形を行って S にすることもできる. つまり A' に対し行基本変形を行って得られる被約階段行列も S である. したがって, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(A')$ である. □

Proof A.4.6 (4.3.5 – 1). 被約階段行列 S の階数は 0 以外の成分もある行の総数であるから S の行数を超えることはない. また行列 A の階数は A から行基本変形で得られる被約階段行列 A' の階数である. A の行数と A' の行数は等しいので, A の階数は A の行数を超えることはない. □

Proof A.4.7 (4.3.5 – 2). 被約階段行列 S の階数は pivot の総数であるが, pivot は各列に高々 1 つであるので, 階数は S の列数を超えることはない. また行列 A の階数は A から行基本変形で得られる被約階段行列 A' の階数である. A の列数と A' の列数は等しいので, A の階数は A の列数を超えることはない. □

Lemma A.4.8. (m,n)-行列 A の $r+1$ 行目から m 行目までの成分がすべて 0 であるなら, $\mathrm{rank}(A) \leq r$ である. ▯

Proof. A' を (r,n)-行列とし, A' と $O_{m-r,n}$ を縦に並べてできる (m,n) 行列を A とする. このとき, A' に行基本変形をして被約階段行列 S' が得られたとすると, A に対し同じ手順で行基本変形をすることで, S' と $O_{m-r,n}$ を縦に並べてできる (m,n) 行列 S が得られる. S は被約階段行列であり, $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S')$ である. また Theorem 4.3.5 の Item 1 より, $\mathrm{rank}(S') \leq r$ である. したがって, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S') \leq r$ である. □

Lemma A.4.9. (m,n)-行列 A の $c+1$ 列目から n 列目までの成分がすべて 0 であるなら, $\mathrm{rank}(A) \leq c$ ▯

Proof. A' を (m,c)-行列とし, A' と $O_{m,n-c}$ を横に並べてできる (m,n) 行列を A とする. このとき, A' に行基本変形をして被約階段行列 S' が得られたとすると, A に対し同じ手順で行基本変形をすることで, S' と $O_{m,n-c}$ を横に並べてできる (m,n) 行列 S が得られる. S は被約階段行列であり, $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S')$ である. また Theorem 4.3.5 の Item 2 より, $\mathrm{rank}(S') \leq c$ である. したがって, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(S') \leq c$ である. □

Proof A.4.10 (4.3.6 – 1). (m,n)-行列 A から行基本変形を用いて階数 r の被約階段行列 S が得られるとする. このとき, Lemma A.4.3 から, $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = S$ をみたす基本

行列 $P_1, \ldots, P_k$ が存在する．$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = S$ であるので $P_k P_{k-1} \cdots P_1 AB = SB$ であるのでつまり AB に行基本変形を用いて SB に変形できることがわかる．したがって, Theorem 4.3.5 の item 3 より, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(SB)$ である．

一方 S は階数が r の被約階段行列であるので, $r+1$ 行目から n 行目までの成分はすべて 0 である．したがって, SB を計算すると, SB の $r+1$ 行目から n 行目までの成分もすべて 0 であることがわかる．したがって, Lemma A.4.8 より, $\mathrm{rank}(SB) \leq r$ である． □

Proof A.4.11 (4.3.6 – 4). $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AQ)$ を示すために, $\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(AQ)$ と $\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(AQ)$ を示す.

Theorem 4.3.6 の item 1 より, $\mathrm{rank}(AQ) \leq \mathrm{rank}(A)$ である．

一方, $X = AQ$, $Y = Q^{-1}$ とすると, Theorem 4.3.6 の item 1 より, $\mathrm{rank}(XY) \leq \mathrm{rank}(X)$ である．$XY = AQQ^{-1} = A$ であるので, $\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(AQ)$ である． □

Lemma A.4.12. X を (m, n)-行列とする．このとき, $\mathrm{rank}(X) \leq \mathrm{rank}({}^t X)$. ▯

Proof. X に対し行基本変形をして階数 r の被約階段行列 S が得られたとする．このとき, $\mathrm{rank}(X) = r$ である．$\mathrm{rank}(X) \leq r$ を示す.

X に対し行基本変形をして階数 r の被約階段行列 S が得られたので, Lemma A.4.3 から, $PA = S$ をみたす正則行列 P が存在する．${}^t\!A\,{}^t\!P = {}^t(PA) = {}^t S$ である．${}^t P$ は正則であるので, Theorem 4.3.6 の item 4 より, $\mathrm{rank}({}^t A) = \mathrm{rank}({}^t\!A\,{}^t\!P)$ である．一方 S は階数 r の被約階段行列であるので, $r+1$ 行目から m 行目までの成分は 0 である．したがって, ${}^t S$ の $r+1$ 列目から m 列目までの成分は 0 である．したがって, Lemma A.4.9 より, ${}^t S \leq r$ である．まとめると, $\mathrm{rank}({}^t A) = \mathrm{rank}({}^t\!A\,{}^t\!P) = \mathrm{rank}({}^t S) \leq r$ である． □

Proof A.4.13 (4.3.5 – 4). A を (m, n)-行列とする．$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^t A)$ を示すために, $\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}({}^t A)$. と $\mathrm{rank}({}^t A) \leq \mathrm{rank}(A)$. を示す.

$X = A$ として Lemma A.4.12 を使うと, $\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}({}^t A)$. である．

一方, $X = {}^t A$ として Lemma A.4.12 を使うと, ${}^t X = A$ であるので, $\mathrm{rank}({}^t A) \leq \mathrm{rank}(A)$. である．

□

Proof A.4.14 (4.3.6 – 2). Theorem 4.3.5 の Item 4 より, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}({}^t(AB))$ であるが, ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$ であるので, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}({}^t\!B\,{}^t\!A)$ である．Theorem 4.3.6 の Item 1 より $\mathrm{rank}({}^t\!B\,{}^t\!A) \leq \mathrm{rank}({}^t B)$ であるので, $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}({}^t B)$. Theorem 4.3.5 の Item 4 より, $\mathrm{rank}({}^t B) = \mathrm{rank}(B)$ であるので, $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$ である． □

Proof A.4.15 (4.3.6 – 3). Theorem 4.3.5 の Item 4 より, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}({}^t(PA))$ であるが, ${}^t(PA) = {}^t\!A\,{}^t\!P$ であるので, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}({}^t\!A\,{}^t\!P)$ である．P は正則であるので ${}^t P$ も正則である．よって, Theorem 4.3.6 の Item 4 より $\mathrm{rank}({}^t\!A\,{}^t\!P) = \mathrm{rank}({}^t A)$ であるので, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}({}^t A)$ である．Theorem 4.3.5 の Item 4 より, $\mathrm{rank}({}^t A) = \mathrm{rank}(A)$ であるので, $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$ である． □

Proof A.4.16 (4.3.8). A を n 次正方行列であるとする.

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　A を正則とする．Theorem 4.3.5 より, 正則行列を左からかけても階数は変わらないので, $\mathrm{rank}(AE_n) = \mathrm{rank}(E_n)$. E_n は階数 n の被約階段であるので,

$\mathrm{rank}(A) = n$ である.

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 3　$\mathrm{rank}(A) = n$ とする. 階数の定義から A に行基本変形を行って階数 n の被約階段に変形できる. A が n 次正方行列であるので得られる被約階段も n 次正方行列である. n 次正方行列で被約階段であるものは E_n のみであるから, 得られる被約階段は E_n である.

■Item 3 $\Longrightarrow$ Item 1　A に行基本変形を行って E_n に変形できる. Lemma A.4.3 より, 基本変形は基本行列を左からかけることに相当するので, $F_k F_{k-1} \cdots F_1 A = E_n$ を満たす基本行列 F_i がとれる. F_i は正則であるから, $P = F_k F_{k-1} \cdots F_1$ とおくと P も正則である. $PA = E_n$ であるので, $A = P^{-1}$ であり, $AP = E_n$ である. $PA = E_n$ かつ $AP = E_n$ であるので, A は正則である. □

A.5　平面に関する命題の証明

ここでは, Chapter 5 に現れる命題の証明を行う.

Proof A.5.1 (5.1.9). $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 項実ベクトルとし, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であるとする. $c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} = c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} &= c'\boldsymbol{a} + d'\boldsymbol{b} \\ c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} - c'\boldsymbol{a} - d'\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{0} \\ (c - c')\boldsymbol{a} + (d - d')\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となるが, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であるので, $c - c' =$, $d - d' = 0$ である. したがって, $c = c'$, $d = d'$ である. □

Proof A.5.2 (5.1.12).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする. このとき,

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である.

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　$\det(A) \neq 0$ を仮定する. $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とする. このとき, $x = y = 0$ となることを示す.

$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であるので,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

である．$\det(A) \neq 0$ であるので，A は正則である．したがって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

である．

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　対偶を示す．$\det A = 0$ を仮定する．$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ を満たす

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が $\mathbf{0}$ 以外にもあることを示す．

$\det(A) \neq 0$ であるので，Theorem 4.3.8 より，$\mathrm{rank}(A) < 2$ である．したがって，Theorem 4.3.3 より，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad\qquad \neq \mathbf{0}$$

を満たす

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がとれる．この x, y に対し，$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ が成り立つ． □

Proof A.5.3 (5.2.5 – 1).

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

とし，a_i は実数とする．a_i は実数であるから $a_i^2 \geq 0$ であるので，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \geq 0$$

となる． □

Proof A.5.4 (5.2.5 – 2).

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

とし，a_i は実数とする．また $n = 2$ とする．

■$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \implies \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.　対偶を示す．$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ とすると，$a_{i_0} \neq 0$ となる i_0 が存在する．a_i は実数であるから，この i_0 に対して，$a_{i_0} > 0$ である．また，どの i に対して，$a_i^2 \leq 0$ である．したがって，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$$

である．

■$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \implies \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$.　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とする．このとき, どの i に対しても $a_i = 0$ であるので,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0$$

である．

□

Proof A.5.5 (5.2.5 – 3).

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とし, a_i, b_i は実数とする．また $n = 2$ とする．このとき,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

である． □

Proof A.5.6 (5.2.5 – 4).

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

とし, a_i, b_i, c_i は実数とする．また $n = 2$ とする．このとき,

$$\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i + b_i c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$$
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$$

である． □

Proof A.5.7 (5.2.5 – 5).

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

とし, a_i, b_i は実数とする．r を実数とする．また $n = 2$ とする．このとき,

$$\langle r\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} r a_i b_i$$
$$r \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = r \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} r a_i b_i$$

である． □

Proof A.5.8 (5.2.7 – 1). Proposition 5.2.5 より, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$ である． したがって, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} \geq 0$ である． □

Proof A.5.9 (5.2.7 − 2).
■$\|\boldsymbol{a}\| = 0 \implies \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ とする．このとき, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2 = 0$ である．Proposition 5.2.5 より, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である．

■$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \implies \|\boldsymbol{a}\| = 0$. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とする．Proposition 5.2.5 より, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ である．よって, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{0} = 0$ である． □

Lemma A.5.10 (コーシー–シュワルツの不等式.)**.** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を n 項実ベクトルとする．このとき, $| \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle | \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ である． □

Proof. $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \leq 0$ であるので, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$ を示す．
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であれば, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 = 0 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$ である．
$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする．t を実数とし, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= \langle \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \rangle + \langle t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \rangle + t \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, t\boldsymbol{b} \rangle + t \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + t \langle \boldsymbol{b}, t\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + t \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + t \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + t^2 \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2t \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + t^2 \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle
\end{aligned}
$$

である．$a = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle$, $b = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, $c = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ とおくと, $\|\boldsymbol{v}\|^2 = at^2 + bt + c$ であるが, $\|\boldsymbol{v}\|^2 \leq 0$ であるので, 全ての t で

$$
at^2 + bt + c \geq 0
$$

が成り立っている．$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ より $a \neq 0$ であるので, Lemma A.1.3 より, 判別式を考えるとその値は 0 以下である．よって,

$$
\begin{aligned}
0 &\geq b^2 - 4ac \\
&\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle
\end{aligned}
$$

である．したがって,

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle &\geq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \\
\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 &\geq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2
\end{aligned}
$$

である． □

Proof A.5.11 (5.2.7 – 3). $\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\| \leq 0$ であるので, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$ を示す.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2 &= (\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2)
\end{aligned}$$

である. Lemma A.5.10 より, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ であるので, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$ である. □

Proof A.5.12 (5.2.7 – 4). Proposition 5.2.5 より,

$$\langle r\boldsymbol{a}, r\boldsymbol{a} \rangle = r\langle \boldsymbol{a}, r\boldsymbol{a} \rangle = r\langle r\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = r^2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$$

である. したがって,

$$\|r\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle r\boldsymbol{a}, r\boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{r^2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{r^2}\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = |r|\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = |r|\|\boldsymbol{a}\|$$

である. □

Lemma A.5.13. *A を実数を成分とする 2 次正方行列であるとする. A が直交行列なら, $\det(A) \in \{1, -1\}$ である.* ▯

Proof. ${}^tAA = E_n$ であるとする. このとき, $\det({}^tAA) = \det(E_n) = 1$ である. 一方, $\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)\det(A) = \det(A)^2$ である. よって $\det(A) \in \{1, -1\}$ である. □

Proof A.5.14 (5.2.23). A は実数を成分とする 2 次正方行列であるとし,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とする. また, $n = 2$ とする.

このとき,

$$\begin{aligned}
{}^tAA &= \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+(a')^2 & ab+a'b' \\ ba+b'a' & b^2+(b')^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である.

■Item 3 $\Longrightarrow$ Item 1　A が正則であり, $A^{-1} = {}^tA$ とする. このとき, ${}^tAA = A^{-1}A = E_n$

■Item 3 $\Longrightarrow$ Item 2　A が正則であり, $A^{-1} = {}^tA$ とする．このとき, $A\,{}^tA = AA^{-1} = E_n$

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 3　${}^tAA = E_n$ とする．このとき, Lemma A.5.13 より, $\det(A) \neq 0$ である．したがって, A は正則である．${}^tAA = E_n$ の両辺に右から A^{-1} をかけることで ${}^tA = A^{-1}$ が得られる．

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 3　$A\,{}^tA = E_n$ とする．このとき, Lemma A.5.13 より, $\det(A) \neq 0$ である．したがって, A は正則である．$A\,{}^tA = E_n$ の両辺に左から A^{-1} をかけることで ${}^tA = A^{-1}$ が得られる．

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 4　${}^tAA = E_n$ とする．

$$\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{1} = 1$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle} = \sqrt{1} = 1$ である．

■Item 4 $\Longrightarrow$ Item 1　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が正規直交基底であるとする． このとき, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2 = 1^2 = 1$, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{b}\|^2 = 1^2 = 1$ である．

■Item 5 $\Longrightarrow$ Item 1　$\boldsymbol{e}_i$ を基本ベクトルとする．S を正方行列に対し, ${}^t\boldsymbol{e}_i S \boldsymbol{e}_j$ は, $(1,1)$-行列でその成分は S の (i,j) である．また, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ は, $(1,1)$-行列でその成分は $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ である．

仮定から, ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = {}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{x}$ である．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$ とすると,

$${}^t\boldsymbol{e}_i\,{}^tAA\boldsymbol{e}_j = {}^t\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

である．$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle$ は, $i = j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 であるから, ${}^tAA$ の (i,j)-成分も, $i = j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 である．したがって,

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 5　${}^tAA = E_n$ とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ とする．

$${}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}E_n\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

であるので, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle$ である． □

Proof A.5.15 (5.3.16)．f が線形変換であるとする．

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　対偶を示す．$\ker(f) \neq \{\,\boldsymbol{0}\,\}$ とする．Remark 5.3.5 から, $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ であるので $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．よって, $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a}$ かつ $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}(f)$ となる $\boldsymbol{a}$ が存在する．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{0})$ であるので, f は単射ではない．

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　対偶を示す． f が単射ではないとする． このとき, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ かつ $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$ を満たす $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が存在する．この $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とおくと, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ であるので, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であるので, $\ker(f) \neq \{\,\boldsymbol{0}\,\}$ である．

□

Proof A.5.16 (5.3.20)．線形変換 f は行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せているとする． 線形変換 g は行列 B を用いて $f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ と表せているとする． このとき $g \circ f(\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x}$, $f \circ g(\boldsymbol{x}) = AB\boldsymbol{x}$ である．

■f **が全単射** $\Longrightarrow$ A **は正則**.　f が全単射であるとする．$g = f^{-1}$ とし，$g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ とする．このとき，$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ であるので，$BA = E_2$ である．また，$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ であるので，$AB = E_2$ である．したがって B は A の逆行列である．

■A **は正則** $\Longrightarrow$ f **が全単射**.　A が正則であるとする．$B = A^{-1}$ とし，$g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ とする．このとき，$BA = E_2$ であるので $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ である．また，$AB = E_2$ であるので $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ である．したがって g は f の逆変換である．

□

A.6　固有値に関連する命題の証明

Proof A.6.1 (6.2.3).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする．

■Item 1 $\Longrightarrow$ Item 2　正則行列 P で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

とできるとする．このとき，

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である．

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix}$$

とすると

$$P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \mu q \\ \lambda p' & \mu q' \end{pmatrix}$$

である．また，

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bp' & aq + bq' \\ cp + dp' & cq + dq' \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{pmatrix} ap + bp' & aq + bq' \\ cp + dp' & cq + dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \mu q \\ \lambda p' & \mu q' \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ap + bp' \\ cp + dp' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p' \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{a}$$
$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} aq + bq' \\ cq + dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu q \\ \mu q' \end{pmatrix} = \mu \boldsymbol{b}$$

である．P が正則であるので Theorem 3.2.4 より $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立であり，$\boldsymbol{a}$ は固有値 λ に属する固有ベクトル，$\boldsymbol{b}$ は固有値 μ に属する固有ベクトル，である．

■Item 2 $\Longrightarrow$ Item 1　$\boldsymbol{a}$ は固有値 λ に属する固有ベクトル，$\boldsymbol{b}$ は固有値 μ に属する固有ベクトルとし，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は一次独立とする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix}$$

とすると Theorem 3.2.4 より，P は正則である．

また，

$$A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ap + bp' \\ cp + dp' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda p' \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{a}$$
$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} aq + bq' \\ cq + dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu q \\ \mu q' \end{pmatrix} = \mu \boldsymbol{b}$$

であるので，

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bp' & aq + bq' \\ cp + dp' & cq + dq' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \mu q \\ \lambda p' & \mu q' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

P は正則なので，P^{-1} を左からかけると，

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である．□

Proof A.6.2 (6.2.4)．A を 2 次正方行列とする．$\boldsymbol{v}$ は固有値 λ に属する A の固有ベクトル，$\boldsymbol{w}$ は固有値 μ に属する A の固有ベクトルとする．

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$$

とおく．$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ とする．このとき，$x = y = 0$ を示す．

$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ であるので，

$$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$
$$A(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{0}$$
$$xA\boldsymbol{v} + yA\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$
$$x\lambda\boldsymbol{v} + y\mu\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

である．$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, $x\lambda\boldsymbol{v} + y\mu\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ であるので,

$$\begin{pmatrix} xv & yw \\ xv' & yw' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv + yw & \lambda xv + \mu yw \\ xv' + xv' & \lambda xv' + \mu yw' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}) = \mu - \lambda \neq 0$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

は正則である．

$$\begin{pmatrix} xv & yw \\ xv' & yw' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv & yw \\ xv' & yw' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．よって,

$$x\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} xv \\ xv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$
$$y\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} yw \\ yw' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

である．$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であるから, $x = 0$ である．また, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ であるから, $y = 0$ である．　$\square$

付録 B

章末問題の略解

ここでは, 章末問題に関し簡単な解説と略解を挙げる. 答案には必要なことであっても省略しているものある. 逆に答案には必要ではないことが書いてあったりする. ここで述べられているものは, 解答例でも模範解答でもないことに注意すること.

B.1 実数の絶対値や平方根に関する問題

解説 B.1.1 (1.1)**.** たとえば, $a = -2$ のときには, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$ である. この例のように $\sqrt{a^2} \neq a$ となる場合もある.

一般には, $\sqrt{a^2} = |a|$ である. □

解説 B.1.2 (1.2)**.** $5 > 2^2$ であるから $\sqrt{5} > 2$ である. したがって, $2 - \sqrt{5} < 0$ である. よって, $|2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}$ である.

一般に実数 a の絶対値 $|a|$ は, $a > 0$ なら $|a| = a$ であり, $a < 0$ なら $|a| = -a$ である. □

解説 B.1.3 (1.3)**.** 判別式 D を考える.

$$D = (-(s+u))^2 - 4su = s^2 + 2su + u^2 - 4su = s^2 - 2su + u^2 = (s-u)^2$$

である. $D \geq 0$ なので実数解をもつ. □

B.2 行列の定義と演算に関する問題

解説 B.2.1 (2.1)**.** サイズ (型) は $(2, 3)$. A の $(1, 2)$-成分は 2. A の 2-行目は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A の 2-列目は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

A の転置は

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

解説 B.2.2 (2.2)**.** 具体的に成分を書き下せばわかる.

1. $(i,j)=(1,1)$ のとき, $5i+j-5=1$. $(i,j)=(1,2)$ のとき, $5i+j-5=2$. $(i,j)=(2,1)$ のとき, $5i+j-5=6$. $(i,j)=(2,2)$ のとき, $5i+j-5=7$. したがって,
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 7\end{pmatrix}.$$
2. $i\neq j$ のとき, $2^i\delta_{i,j}=2^i\cdot 0=0$. $i=j=1$ のとき, $2^i\delta_{i,j}=2^1\cdot 1=2$. $i=j=2$ のとき, $2^i\delta_{i,j}=2^2\cdot 1=4$. したがって,
$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$
3. $i\neq 2$ のとき, $\delta_{i,2}\delta_{j,1}=0\cdot\delta_{j,1}=0$. $j\neq 1$ のとき, $\delta_{i,2}\delta_{j,1}=\delta_{i,2}\cdot 0=0$. $i=2, j=1$ のとき, $\delta_{i,2}\delta_{j,1}=1\cdot 1=1$. したがって,
$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

□

解説 B.2.3 (2.3)**.**

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 3\\ 4+c & 5d-10\end{pmatrix}$$
$$B=\begin{pmatrix}7 & 2b+5\\ 6 & -4d+8\end{pmatrix}$$

とする. 行列が等しいということは, 対応する各成分が等しいということなので, $A=B$ とすると

$$\begin{cases}a+1=7\\ 3=2b+5\\ 4+c=6\\ 5d-10=-4d+8\end{cases}$$

となる. したがって,

$$\begin{cases}a=6\\ b=-1\\ c=2\\ d=2\end{cases}$$

を得る. 実際, $(a,b,c,d)=(6,-1,2,2)$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 3\\ 4+c & 5d-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1 & 3\\ 4+2 & 5\cdot 2-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$B=\begin{pmatrix}7 & 2b+5\\ 6 & -4d+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2(-1)+5\\ 6 & -4\cdot 2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

である. □

検算 B.2.3.1. $(a,b,c,d)=(6,-1,2,2)$ を対象となる行列に代入すると,

$$\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 4+c & 5d-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 & 3 \\ 4+2 & 5\cdot 2-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 2b+5 \\ 6 & -4d+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2(-1)+5 \\ 6 & -4\cdot 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

となり等しくなる.

　これ以外に解がないかはチェックできないが, 少なくとも $(a,b,c,d)=(6,-1,2,2)$ が解であることは, このように確かめられる. □

解説 B.2.4 (2.4)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix}$$

とする. A が対称行列であるということは, $A = {}^tA$ ということである.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4+a \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので, $A = {}^tA$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4+a \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

である. したがって,

$$\begin{cases} 1=1 \\ 3=4+a \\ 4+a=3 \\ 5=5 \end{cases}$$

となり, $a=-1$ を得る. 実際 $a=-1$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので対称行列である. □

検算 B.2.4.1. $a=-1$ を具体的に対象となる行列に代入すると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

となる. A の転置を考えると

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので, A は対称行列である.

　他に解があるかどうかのチェックはできないが, 少なくとも a が解であることは, このように確かめられる. □

解説 B.2.5 (2.5)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．A が交代行列であるということは，$-A = {}^tA$ ということである．

$$\begin{aligned} -A &= -\begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a & -3-b \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^tA &= \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ 3+b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので，$-A = {}^tA$ とすると，

$$\begin{pmatrix} -1+a & -3-b \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ 3+b & 0 \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$\begin{cases} -1+a = 1-a \\ -3-b = 4 \\ -4 = 3+b \\ 0 = 0 \end{cases}$$

となり，$a = 1$, $b = -7$ を得る．実際 $(a, b) = (1, -7)$ のとき，

$$\begin{aligned} -A &= \begin{pmatrix} -1+a & -3-b \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & -3-(-7) \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^tA &= \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ 3+b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 4 \\ 3+-7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり A は交代行列である． □

検算 B.2.5.1. $(a, b) = (1, -7)$ を対象となる行列に代入すると

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1-a & 3+b \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^tA &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり $-A = {}^tA$ となるから A は交代行列である．

他に解がないかどうかは確かめられれないが，少なくとも $(a, b) = (1, -7)$ が解であることは，このように確かめられる． □

解説 B.2.6 (2.6)**.**

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-2-3 \\ 4-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 & 0+3 \\ 0-7 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\cdot 1 + 2\cdot(-5) & -9\cdot 0 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 7\cdot(-5) & 3\cdot 0 + 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 8 \\ -32 & 28 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 1 + 7 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -32 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-9) \cdot 1 + 2 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-9) & 1 \cdot 2 \\ -5 \cdot 1 & -5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A^2 に関する結果は次の様に計算をすることができる:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

とおくと, Proposition 2.2.49 から,

$$\begin{aligned} A^2 - (1+5)A + (1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2)E_2 &= O_{2,2} \\ A^2 - 6A + 11E_2 &= O_{2,2} \\ A^2 &= 6A - 11E_2. \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$A^2 = 6A - 11E_2 = 6 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-11 & -18 \\ 12 & 30-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}.$$

□

解説 B.2.7 (2.7)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とし,

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= A^{n+1} \\ &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9a_n + 0c_n & 9b_n + 0d_n \\ 0a_n + 5c_n & 0b_n + 5d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a_n & 9b_n \\ 5c_n & 5d_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a_n & 9b_n \\ 5c_n & 5d_n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$a_n = \begin{cases} 9a_{n-1} & (n > 1) \\ 9 & (n = 1) \end{cases}$$
$$b_n = \begin{cases} 9b_{n-1} & (n > 1) \\ 0 & (n = 1) \end{cases}$$
$$c_n = \begin{cases} 5c_{n-1} & (n > 1) \\ 0 & (n = 1) \end{cases}$$
$$d_n = \begin{cases} 5d_{n-1} & (n > 1) \\ 5 & (n = 1) \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} a_n &= 9^{n-1} \cdot 9 = 9^n, \\ b_n &= 9^{n-1} \cdot 0 = 0, \\ c_n &= 5^{n-1} \cdot 0 = 0, \\ d_n &= 5^{n-1} \cdot 5 = 5^n. \end{aligned}$$

したがって,

$$A^n = \begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

□

検算 B.2.7.1. $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となり正しい. $n = 2$ のとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 9 + 0 \cdot 0 & 9 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 9 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

となり正しい. □

解説 B.2.8 (2.8)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とし,

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= A^{n+1} \\ &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1a_n + 2c_n & 1b_n + 2d_n \\ 0a_n + 3c_n & 0b_n + 3d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2c_n & b_n + 2d_n \\ 3c_n & 3d_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2c_n & b_n + 2d_n \\ 3c_n & 3d_n \end{pmatrix}.$$

よって，

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} a_{n-1} + 2c_{n-1} & (n > 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} b_{n-1} + 2d_{n-1} & (n > 1) \\ 2 & (n = 1) \end{cases} \\ c_n &= \begin{cases} 3c_{n-1} & (n > 1) \\ 0 & (n = 1) \end{cases} \\ d_n &= \begin{cases} 3d_{n-1} & (n > 1) \\ 3 & (n = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} c_n &= 3^{n-1} \cdot 0 \\ d_n &= 3^{n-1} \cdot 3 = 3^n \end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} a_{n-1} + 2c_{n-1} & (n > 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{n-1} & (n > 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} b_{n-1} + 2d_{n-1} & (n > 1) \\ 2 & (n = 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} & (n > 1) \\ 2 & (n = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$a_n = 1^{n-1} \cdot 1 = 1$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\cdot 3^{n-1} + b_{n-1} \\
&= 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-2} + b_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-2} + b_{n-2} + \cdots + 2\cdot 3^2 + b_2 \\
&= 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-2} + b_{n-2} + \cdots + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + b_1 \\
&= 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-2} + b_{n-2} + \cdots + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 2 \\
&= 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1) \\
&= 2\frac{3^n - 1}{3-1} \\
&= 2\frac{3^n - 1}{2} \\
&= 3^n - 1.
\end{aligned}$$

したがって，

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

□

検算 B.2.8.1. $n = 1$ のとき，

$$A^n = A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 3^n - 1\cdot 2^{n+1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 3^1 - 1\cdot 2^2 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

となり正しい．

$$\begin{aligned}
AA^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot(3^n - 1) + 2\cdot 3^n \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 & 0\cdot(3^n - 1) + 3\cdot 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot(3^n - 1) + 2\cdot 3^n \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 & 0\cdot(3^n - 1) + 3\cdot 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 + 2\cdot 3^n \\ 3^{n+1} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3\cdot 3^n - 1 \\ 3^{n+1} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 3^{n+1} & \end{pmatrix} \\
A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

となり等しい． □

解説 B.2.9 (2.9)**.** Proposition 2.2.49 から，

$$\begin{aligned}
A^2 - (1+5)A + (1\cdot 5 - (-3)\cdot 2)E_2 &= O_{2,2} \\
A^2 - 6A + 11E_2 &= O_{2,2} \\
A^2 &= 6A - 11E_2.
\end{aligned}$$

したがって

$$A^3 = A(6A - 11E_2) = 6A^2 - 11A = 6(6A - 11E_2) - 11A = 25A - 66E_2.$$

よって

$$\begin{aligned} A^3 + A^2 + A &= (25A - 66E_2) + (6A - 11E_2) + A \\ &= 32A - 77E_2 \\ &= 32\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 77\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 - 77 & 32 \cdot (-3) \\ 32 \cdot 2 & 32 \cdot 5 - 77 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -45 & -96 \\ 64 & 83 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また次のようにも計算できる:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 12 & 1 \cdot (-18) + (-3) \cdot 19 \\ 2 \cdot (-5) + 5 \cdot 12 & 2 \cdot (-18) + 5 \cdot 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & -75 \\ 50 & 59 \end{pmatrix}. \\ A^3 + A^2 + A &= \begin{pmatrix} -41 & -75 \\ 50 & 59 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -41 - 5 + 1 & -75 - 18 - 3 \\ 50 + 12 + 2 & 59 + 19 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -96 \\ 64 & 83 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

解説 B.2.10 (2.10)**.**

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

を得る. したがって $a = 1$, $b = 4$ を得る. 実際, $(a, b) = (1, 4)$ とすると,

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. □

検算 B.2.10.1. $(a,b)=(1,4)$ を与えられた式の右辺に代入すると,

$$a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

となる.

他に解がないかどうかは確かめられないが, 少なくとも $(a,b)=(1,4)$ は解であることは, このように確かめることができる. □

B.3　行列式と逆行列に関する問題

解説 B.3.1 (3.1)**.**

$$\det(\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix})=2\cdot 6-1\cdot 5=12-5=7.$$

$$\det(\begin{pmatrix}-5&1\\5&-1\end{pmatrix})=(-5)\cdot(-1)-1\cdot 5=5-5=0.$$

□

解説 B.3.2 (3.2)**.**

$$\det(\begin{pmatrix}-4-x&1\\5&-x\end{pmatrix})=(-4-x)\cdot(-x)-1\cdot 5=x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$$

であるので

$$\det(\begin{pmatrix}-4-x&1\\5&-x\end{pmatrix})=0$$

とすると,

$$(x+5)(x-1)=0$$

である. よって, $x\in\{-5,1\}$. □

検算 B.3.2.1. 少なくとも求めたものが解であることは以下のように確かめられる:

$x=-5$ を与えられた行列に代入すると,

$$A=\begin{pmatrix}-4-x&1\\5&-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-(-5)&1\\5&-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\5&5\end{pmatrix}.$$

よって,

$$\det(A)=\det(\begin{pmatrix}1&1\\5&5\end{pmatrix})=1\cdot 5-1\cdot 5=5-5=0.$$

よって, $x=-5$ は条件をみたす.

$x=1$ を与えられた行列に代入すると,

$$A=\begin{pmatrix}-4-x&1\\5&-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-1&1\\5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&1\\5&-1\end{pmatrix}.$$

よって,

$$\det(A)=\det(\begin{pmatrix}-5&1\\5&-1\end{pmatrix})=(-5)\cdot(-1)-1\cdot 5=5-5=0.$$

よって, $x=1$ は条件をみたす. □

検算 B.3.2.2. 求めたもの以外に解がないことは以下のように確かめられる:

$$\det(\begin{pmatrix} -4-x & 1 \\ 5 & -x \end{pmatrix}) = 0$$

は x に関する 2 次方程式であるので, 解はたかだか 2 個しかないので, これらで解は全てである. □

解説 B.3.3 (3.3)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. □

解説 B.3.4 (3.4)**.**

$$\det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 12 - 5 = 7 \neq 0.$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

は正則である.

$$\det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = (-5) \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = 5 - 5 = 0.$$

であるので

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

は正則ではない. □

検算 B.3.4.1. quiz:2:reg:1 正則であることは, 次のように確かめられる: 正則であるので逆行列が存在する.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \\ -5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

解説 B.3.5 (3.5)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

とする.

1. $$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 12 - 5 = 7 \neq 0.$$

   であるので, A は正則であり,

   $$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

   である.
2. A が正則なので解は $A^{-1}\boldsymbol{b}$ である. したがって,

   $$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 1 \cdot 8 \\ -5 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

□

検算 B.3.5.1. 求めたものが逆行列であることは以下のように確かめられる: もとの行列 A と求めた行列 A' をかけると

$$\begin{aligned} A'A &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \\ -5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となり, E_2 となる. よって求めた行列 A' が A の逆行列であることがわかる. □

検算 B.3.5.2. 少なくとも

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

が解であることは, 以下のように確かめられる:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

を代入すると,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{16}{7} + 1\frac{-4}{7} \\ 5\frac{16}{7} + 6\frac{-4}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{7} \\ \frac{56}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

となり $\boldsymbol{b}$ となる. □

検算 B.3.5.3. 解が

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

のみであることは, 以下のように確かめられる: 今係数行列 A は正則である. したがって解は $A^{-1}\boldsymbol{b}$ のみである. つまり解は一つしかない. □

解説 B.3.6 (3.6)**.** $A^3 + A^2 + A + E_2 = O_{2,2}$ を満たすとすると,

$$-A^3 - A^2 - A = E_2$$

を満たす. したがって, $B = -(A^2 + A + E_2)$ とおくと,

$$\begin{aligned} AB &= A(-A^2 - A - E_2) = -A^3 - A^2 - A = E_2 \\ BA &= (-A^2 - A - E_2)A = -A^3 - A^2 - A = E_2 \end{aligned}$$

をみたすので, B は A の逆行列である. したがって, A は正則である. □

B.4　行列と連立方程式に関する問題

解説 B.4.1 (4.1)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の -2 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる. さらに, 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. さらに, 1 行目に 2 行目の -1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. これは, 階数 2 の被約階段行列である. したがって,

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}) = 2$$

である.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. さらに 1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. これは, 階数 1 の被約階段行列である. よって

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}) = 1$$

である.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である. さらに, 2 行目を $\frac{1}{4}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. さらに, 1 行目に 2 行目の -2 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. さらに, 1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. これは, 階数 2 の被約階段行列である. よって

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}) = 2$$

である.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の $-\frac{5}{2}$ 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

である. さらに, 2 行目を $\frac{7}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である. さらに, 1 行目に 2 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{32}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である. さらに, 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である. これは, 階数 2 の被約階段行列である. よって

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}) = 2$$

である. □

解説 B.4.2 (4.2)**.**

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とかける. この連立一次方程式の係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

この連立一次方程式の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

また,

$$\det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2 \cot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

となるので, 係数行列は正則である. したがって解は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 1 \cdot 8 \\ -5 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

またこの連立方程式は次の方法でも解ける: この連立方程式の拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の $-\frac{5}{2}$ 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

である. さらに, 2 行目を $\frac{7}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である. さらに, 1 行目に 2 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{32}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である. さらに, 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

である. これを拡大係数行列にもつ連立方程式は,

$$\begin{cases} x = \frac{16}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

である．したがって, 解は

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

のみである． □

検算 B.4.2.1. いずれの方法で求めたにせよ, 少なくとも

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

が解であることは, 次のように確かめることができる:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 16 - 1\cdot 4}{7} \\ \frac{5\cdot 16 - 6\cdot 4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{7} \\ \frac{56}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

□

検算 B.4.2.2. 解がこれだけであることは, 係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

の階数が 2 であることを確かめればよい．2 次正方行列に対し, 階数が 2 であることと, 正則であることは同値である．また, 正則であることと行列式が 0 でないことは同値であるので, 行列式を調べればよい．

$$\det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2\cdot 6 - 1\cdot 5 = 12 - 5 = 7$$

となり, 行列式が 0 ではないので, 正則である．よって解は 1 つしかない． □

解説 B.4.3 (4.3)**.**

$$\det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = -15\cdot(-1) - 1\cdot 5 = 0$$

であるので, 係数行列の逆行列を用いて解く方法は使えない．拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形することでとくことにする．

拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．つまり,

$$\begin{cases} x + \frac{-1}{5}y = \frac{-2}{5} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

である．つまり，

$$\begin{cases} x = +\frac{1}{5}y + \frac{-2}{5} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

である．1 つ目の式から，$y = t$ のとき $x = \frac{1}{5}t + \frac{-2}{5}$ となるので，解は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t + \frac{-2}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せられる． □

検算 B.4.3.1. 少なくとも

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t + \frac{-2}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

で表されるものが解であることは次のように確かめられる: $t = 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot (\frac{-2}{5}) + 1 \cdot 0 \\ 5 \cdot (\frac{-2}{5}) - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となるので，解である．

$t = 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}1 + \frac{-2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot (\frac{-1}{5}) + 1 \cdot 1 \\ 5\frac{-1}{5} - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となるので，解である □

検算 B.4.3.2. 解が

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t + \frac{-2}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

で表されるものだけであることは次のように確かめられる: 係数行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

の階数を調べる．

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = -15 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = 0$$

であるので，A は正則行列ではなく，$\mathrm{rank}(A) < 2$ である．また A は零行列ではないので $\mathrm{rank}(A) > 0$ である．よって，$\mathrm{rank}(A) = 1$ である．$\mathrm{rank}(A) = 1$ であるので，全ての解を一つの変数を用いて表すことができる． □

解説 B.4.4 (4.4)**.**

$$\det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = -15 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = 0$$

であるので, 係数行列の逆行列を用いて解く方法は使えない. 拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形することでとくことにする.

拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる. 2 行目を $\frac{1}{4}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 1 行目に 2 行目の $\frac{5}{2}$ 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. つまり,

$$\begin{cases} x + \frac{-1}{5}y = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

である. 2 つ目の式は x, y をどの様な値にしても成り立つことはないので, この連立方程式は解を持たない. □

解説 B.4.5 (4.5)**.** 係数行列は,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

であり, 拡大係数行列は

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & a \\ 5 & -1 & b \end{pmatrix}$$

である.

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = -15 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = 0$$

であるので, 係数行列の逆行列を用いて解く方法は使えない. 拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形することを考える.

拡大係数行列

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & a \\ 5 & -1 & b \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

となる. 1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-a}{5} \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

となる. 係数行列 A の階数は 1 であるが, 拡大係数行列 B の階数を求めるには, $a+b$ の値によって場合分けをする必要がある.

$a+b=0$ のとき, C は,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-a}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 拡大係数行列の階数は 1 となる. 係数行列の階数と拡大係数行列の階数が等しいので, このとき, 考えている連立方程式は解をもつ.

$a+b \neq 0$ のとき, C の 2 行目を $\frac{1}{a+b}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-a}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. 1 行目に 2 行目の $\frac{a}{5}$ 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という被約階段行列を得ることができる. したがって拡大係数行列の階数は 2 であり, $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(B)$ であるので, このときは解を持たない. □

解説 B.4.6 (4.6)**.** 係数行列は,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

である.

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7 \neq 0$$

であるので, A は正則である. したがって,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

は連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

の階である. したがって, いつでも, この連立方程式は解を持つ. □

解説 B.4.7 (4.7)**.** 係数行列は,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & a \end{pmatrix}$$

であり, 拡大係数行列は

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & a & b \end{pmatrix}$$

である.

拡大係数行列

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & a & b \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & b+2 \end{pmatrix}$$

となる. $a+1$ の値で場合分けをする必要がある.

$a+1 \neq 0$ のとき,

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & b+2 \end{pmatrix}$$

2 行目に $\frac{1}{a+1}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{b+2}{a+1} \end{pmatrix}$$

となる. 1 行目に 2 行目の -1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 - \frac{b+2}{a+1} \\ 0 & 1 & \frac{b+2}{a+1} \end{pmatrix}$$

となる. したがって, この場合は $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ であるので, 考えている方程式は解をもつ.

$a+1 = 0$ のとき,

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$$

であるので, $\mathrm{rank}(A) = 1$ である. $\mathrm{rank}(B)$ を求めるには, $b+2$ の値で更に場合分けをする必要がある. $b+2=0$ であれば,

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $\mathrm{rank}(B) = 1$ であり, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ であるから, 考えている方程式は解をもつ. $b+2 \neq 0$ であれば, C の 2 行目を $\frac{1}{b+2}$ 倍することで,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．さらに 1 行目に 2 行目の -1 倍を加え

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という被約階段行列を得る．したがって, $\mathrm{rank}(B) = 2$ である．$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(B)$ であるので, この場合は考えている方程式は解を持たない． □

題 3.2 は関連する問題である．

解説 B.4.8 (4.8)**.** 係数行列は,

$$A = \begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & -a \end{pmatrix}$$

である． A が正則であれば, 解は $A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ に限られる． A が正則ではないことと $\det(A) = 0$ は同値であるので, $\det(A)$ を計算する．

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & -a \end{pmatrix}) = -a(-4-a) - 5 = a^2 + 4a - 5 = (a+5)(a-1)$$

であるので $\det(A) = 0$ となるのは $a \in \{ 1, -5 \}$ のときである．

実際 $a = 1$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} -4-1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

であるので, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -1 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍することで,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる． $x - \frac{1}{5} = 0$ であるので, $y = t$ とすると, $x = \frac{t}{5}$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない．

一方 $a = -5$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} -4-(-5) & 1 \\ 5 & -(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

x2 (2024-08-11 10:58)

であるが, 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$x + y = 0$ であるので, $y = t$ とすると, $x = -t$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない. □

検算 B.4.8.1. $a = 1$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} -4-1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

であるので, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -1 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍することで,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$x - \frac{1}{5} = 0$ であるので, $y = t$ とすると, $x = \frac{t}{5}$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない.

一方 $a = -5$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} -4-(-5) & 1 \\ 5 & -(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$x+y=0$ であるので, $y=t$ とすると, $x=-t$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t=1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない． □

問題 4.8 は関連する問題である．

解説 B.4.9 (4.9)**.**

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は移項すると,

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (aE_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= (\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - aE_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= (\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & 0-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と変形できるので,

$$\begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & 0-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と書き直せる．したがって, 求めるべきものは, 連立方程式

$$\begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & 0-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が $\mathbf{0}$ 以外の解を持つための a に対する条件である．係数行列がが正則であれば, 解は $\mathbf{0}$ に限られる．係数行列が正則でなくなるための条件を調べるためにその行列式を計算する．

$$\det(\begin{pmatrix} -4-a & 1 \\ 5 & 0-a \end{pmatrix}) = -a(-4-a)-5 = a^2+4a-5 = (a+5)(a-1)$$

であるので $\det(A)=0$ となるのは $a \in \{1, -5\}$ のときである．

実際 $a=1$ のとき, 考えている方程式の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -1 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍することで,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$x - \frac{1}{5} = 0$ であるので, $y = t$ とすると, $x = \frac{t}{5}$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない．

一方 $a = -5$ のとき, 考えている方程式の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$x + y = 0$ であるので, $y = t$ とすると, $x = -t$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない． □

検算 B.4.9.1. $a = 1$ のとき, 考えている方程式の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -1 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍することで,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$x - \frac{1}{5} = 0$ であるので, $y = t$ とすると, $x = \frac{t}{5}$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t=1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない．

一方 $a=-5$ のとき, 考えている方程式の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる． $x+y=0$ であるので, $y=t$ とすると, $x=-t$ である．よって解は

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

とかける．特に, $t=1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, これは第 2 成分が 0 ではないので, $\mathbf{0}$ ではない． □

解説 B.4.10 (4.10)**.**

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$
$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $y=0$ であれば x はどのような値でも良い．したがって, 実数解は

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}=t\boldsymbol{e}_1 \qquad (t\in\mathbb{R})$$

と書くことができる． □

検算 B.4.10.1. 少なくとも

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

と表されるものが解であることは, 次のように確かめることができる: $t=0$ のとき,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, これを代入すると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので解である.

$t = 1$ のとき,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, これを代入すると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので解である. □

検算 B.4.10.2. 解が

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表されるものだけであることは, 次のように確かめることができる: また,

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$$

である. よって連立方程式の解は 1 つの変数を使って書くことができることがわかる. □

解説 B.4.11 (4.11)**.**

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

を解けば良い.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x + \frac{-1}{5} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} x + \frac{-1}{5}y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとく. $x - \frac{1}{5}y = 0$ であるので, $x = \frac{1}{5}y$ であるから, $y = t$ とすると, $x = \frac{t}{5}$ である. よって, 実数解は,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書くことができる. □

検算 B.4.11.1. 少なくとも

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書けるものが解であることは, 次のように確かめることができる: $t = 0$ のとき,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, これを代入すると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので解である.

$t = 5$ のとき,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

であるので, これを代入すると,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & \\ 5 \cdot 1 & -1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので解である. □

検算 B.4.11.2. 解が

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書けるものだけであることは, 次のように確かめることができる: 係数行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

の階数について考える.

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = (-5)(-1) - 1 \cdot 5 = 0$$

であるので, A は正則ではなく $\mathrm{rank}(A) < 2$. 一方 A は零行列ではないので $\mathrm{rank}(A) > 0$. よって $\mathrm{rank}(A) = 1$. したがって, 全ての解を一つの変数を使って表すことができる. □

解説 B.4.12 (4.12)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を解けば良い.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとく. $x+y=0$ であるので, $x=-y$ であるから, $y=t$ とすると, $x=-t$ である. よって, 実数解は,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書くことができる. □

検算 B.4.12.1. 少なくとも

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が解であることは, 次のように確かめられる: $t=0$ のとき,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, これを代入すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので解である.

$t=1$ のとき,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので, これを代入すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので解である. □

検算 B.4.12.2. 解が

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書けるものだけであることは, 次のように確かめることができる: 係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

の階数について考える.

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 0$$

であるので, A は正則ではなく $\mathrm{rank}(A) < 2$. 一方 A は零行列ではないので $\mathrm{rank}(A) > 0$. よって $\mathrm{rank}(A) = 1$. したがって, 全ての解を一つの変数を使って表すことができる. □

B.5 平面の線形変換に関する問題

問題 3.1 は関連する問題である.

解説 B.5.1 (5.1)**.** 2 つの 2 項ベクトルの組が一次独立かどうかは, 行列式を調べることでわかる.

$$\det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = -5 \cdot (-1) - 1 \cdot (5) = 0$$

であるので

$$(\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

は一次独立ではない.

$$\det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 12 - 5 = 7 \neq 0.$$

であるので,

$$(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix})$$

は一次独立である. □

解説 B.5.2 (5.2)**.** 2 つの 2 項ベクトルの組が一次独立かどうかは, 行列式を調べることでわかる.

$$\det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}) = -5b - 1a = -5b - a$$

である. したがって,

$$(\begin{pmatrix} -5 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix})$$

は, 行列式が 0 でないとき, つまり, $a \neq -5b$ であるとき一次独立であり, 行列式が 0 のとき, つまり, $a = -5b$ であるとき一次独立ではない. □

解説 B.5.3 (5.3)**.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

とする．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\mathbb{R}^2$ の生成系であるということは, どの $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ に対しても, $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$ を満たす $x, y \in \mathbb{R}$ が存在するということであった．

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = x\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yb \\ xa' + yb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\mathbb{R}^2$ の生成系であるということは, どの $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ に対しても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ が実数解を持つことと言い換えられる．どの $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ に対しても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ が実数解を持つならば, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\mathbb{R}^2$ の生成系である．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ が実数解を持たないような $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ が存在するなら, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\mathbb{R}^2$ の生成系ではない．

問題 4.6 は関連する問題である．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 12 - 5 = 7 \neq 0.$$

であるので, A は正則である．したがって, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ とすると, $A^{-1}\boldsymbol{p}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ の解である．したがって,

$$(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix})$$

は $\mathbb{R}^2$ の生成系である．

問題 4.5 は関連する問題である．

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とする．この方程式の拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & p \\ 5 & -1 & q \end{pmatrix}$$

である．2 行目に 1 行目の 1 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & p \\ 0 & 0 & p+q \end{pmatrix}$$

1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-p}{5} \\ 0 & 0 & p+q \end{pmatrix}$$

となる．したがって考えている連立方程式は, $p+q=0$ なら解をもつ．しかし $p+q\neq 0$ なら, さらに 2 行目を $\frac{1}{p+q}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-p}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, さらに 1 行目に 2 行目の $\frac{p}{5}$ 倍を加えることで,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので, 考えている連立方程式は解をもたない．例えば,

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は実数解を持たないので,

$$(\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

は $\mathbb{R}^2$ の生成系ではない. □

解説 B.5.4 (5.4)**.**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1\cdot 2 + (-1)(-1) = -2+1 = -1. \\ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1)^2 + (-1)^2 = 2. \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = (2)^2 + (-1)^2 = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{2} \\ \|\boldsymbol{b}\| &= \sqrt{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos(\theta)$ であるので,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

□

解説 B.5.5 (5.5)**.**

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \rangle + \langle 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b} \rangle + \langle 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle 2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + 4\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned}$$

であるので, $\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2$ である. $\|\boldsymbol{a}\| = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3$, $\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\| = \sqrt{3}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
\sqrt{3}^2 &= 2^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\cdot 3^2 \\
3 &= 4 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 36 \\
-4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle &= 4 + 36 - 3 = 37 \\
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle &= -\frac{37}{4}
\end{aligned}
$$

である. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos(\theta)$ であるので,

$$
\cos(\theta) = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{37}{4\cdot 2\cdot 3} = \frac{37}{\sqrt{24}}.
$$

□

解説 B.5.6 (5.6)**.**

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle + \langle 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b}\rangle + \langle 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle 2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + 4\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}
$$

であるので, $\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2$ である. $\|\boldsymbol{a}\| = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3$, $\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\| = \sqrt{3}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
\sqrt{3}^2 &= 2^2 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 4\cdot 3^2 \\
3 &= 4 + 4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 36 \\
-4\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle &= 4 + 36 - 3 = 37 \\
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle &= -\frac{37}{4}
\end{aligned}
$$

である.

また,

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle + \langle t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b}\rangle + \langle t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle t\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + t\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + 2t\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + t\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 2t\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (2+t)\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + 2t\|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}
$$

である. $\|\boldsymbol{a}\| = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = -\frac{37}{4}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \rangle &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (2+t)\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + 2t\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= 2^2 + -\frac{37}{4}(2+t) + 3^2 \cdot 2t \\
&= 4 - \frac{37}{2} - \frac{37}{4}t + 18t \\
&= \frac{8-37}{2} + \frac{72-37}{4}t \\
&= \frac{-29}{2} + \frac{35}{4}t
\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{-29}{2} + \frac{35}{4}t &= 0 \\
\frac{35}{4}t &= \frac{29}{2} \\
t &= \frac{29 \cdot 2}{35} = \frac{58}{35}
\end{aligned}$$

のとき, $\langle \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \rangle = 0$ となる. □

解説 B.5.7 (5.7)**.**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

とおく. 正規直交基底であるとすると,

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \tag{B.1}$$

$$\|\boldsymbol{b}\|^2 = x^2 + y^2 = 1 \tag{B.2}$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \tag{B.3}$$

である. したがって, eq. (B.3) から,

$$x = -\frac{4}{3}y$$

がわかるので, eq. (B.2) に代入して,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 &= 1 \\
\frac{25}{9}y^2 &= 1 \\
y^2 &= \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

となるので, $y \in \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{3}{5} \right\}$ である.

$y = \frac{3}{5}$ のときには, $x = -\frac{4}{5}$ で,

$$\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

という正規直交基底が得られる.

$y=-\frac{3}{5}$ のときには, $x=\frac{4}{5}$ で,

$$(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix})$$

という正規直交基底が得られる. □

検算 B.5.7.1. $y=\frac{3}{5}$ のときには, $x=-\frac{4}{5}$ である.

$$(\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix})$$

が正規直行基底であることを確かめる:

$$\left\langle\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{3}{5}\frac{-4}{5}+\frac{4}{5}\frac{3}{5}=\frac{3\cdot(-4)+4\cdot 3}{25}=0,$$
$$\|\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{3^2+4^2}{25}}=\sqrt{1}=1,$$
$$\|\begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}\|=\sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{(-4)^2+3^2}{25}}=\sqrt{1}=1.$$

$y=-\frac{3}{5}$ のときには, $x=\frac{4}{5}$ である.

$$(\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{-3}{5}\end{pmatrix})$$

が正規直行基底であることを確かめる:

$$\left\langle\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{-3}{5}\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{3}{5}\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\frac{-3}{5}=\frac{3\cdot 4+4\cdot(-3)}{25}=0,$$
$$\|\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{3^2+4^2}{25}}=\sqrt{1}=1,$$
$$\|\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{-3}{5}\end{pmatrix}\|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{-3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{4^2+(-3)^2}{25}}=\sqrt{1}=1.$$

□

解説 B.5.8 (5.8)**.**

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&x\\4&y\end{pmatrix}$$

とする. A が直交行列であるとすると,

$${}^tAA=E_2$$

である.

$$\begin{aligned}{}^tAA&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3&4\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&x\\4&y\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3^2+4^2&3x+4y\\3x+4y&x^2+\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}25&3x+4y\\3x+4y&x^2+y^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので

$$\frac{x^2+y^2}{25} = 1 \tag{B.4}$$
$$\frac{3}{25}x + \frac{4}{25}y = 0 \tag{B.5}$$

である. Equation (B.5) より,

$$y = -\frac{3}{4}x$$

であるので, eq. (B.4) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2}{25} &= 1 \\
x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2 &= 25 \\
16x^2+9x^2 &= 400 \\
25x^2 &= 400 \\
x^2 &= 16
\end{aligned}$$

であるので, $x \in \{\,4, -4\,\}$ である.

$x = 4$ のときには, $y = -3$ で,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

という直交行列が得られる.

$x = -4$ のときには, $y = 3$ で,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

という直交行列が得られる.

また, A が直交行列であることと, $A^tA = E_2$ を満たすことは同値であったので, 次のように解くこともできる.

$$\begin{aligned}
A^tA &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & x \\ 4 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ x & y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3^2+x^2 & 3x+xy \\ 4\cdot 3+xy & 4^2+y^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるので

$$\frac{1}{25}(3^2+x^2) = 1 \tag{B.6}$$
$$\frac{1}{25}(3\cdot 4+xy) = 0 \tag{B.7}$$
$$\frac{1}{25}(4^2+y^2) = 1 \tag{B.8}$$

である. Equation (B.6) より,

$$\begin{aligned}
9+x^2 &= 25 \\
x^2 &= 16
\end{aligned}$$

であるので, $x \in \{4, -4\}$. Equation (B.8) より,

$$\begin{aligned} 16 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= 9 \end{aligned}$$

であるので, $y \in \{3, -3\}$.

$x = 4$, $y = 3$ のとき, $\frac{1}{25}(12 + xy) = \frac{24}{25} \neq 0$ であり, Equation (B.7) を満たさない.

$x = 4$, $y = -3$ のときには,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

という直交行列が得られる.

$x = -4$, $y = 3$ のときには,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

という直交行列が得られる.

$x = -4$, $y = -3$ のとき, $\frac{1}{25}(12 + xy) = \frac{24}{25} \neq 0$ であり, Equation (B.7) を満たさない. □

検算 B.5.8.1. 少なくとも得られたものが直交行列であることは, 以下のように確かめられる: $x = 4$, $y = -3$ のときには,

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

となる.

$$A^tA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = E_2.$$

A^tA が E_2 と等しいので直交行列である.

$x = -4$, $y = 3$ のときには,

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

となる.

$$A^tA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = E_2.$$

A^tA が E_2 と等しいので直交行列である. □

解説 B.5.9 (5.9)**.**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とする. $\boldsymbol{a}$ から L への直交射影を $\boldsymbol{p}$ とすると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= t\boldsymbol{b} \\ \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものである．$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{b}$ であることから，

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}\rangle &= \langle \boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - \langle t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - t\,\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle - t\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 7 \cdot 2 + (-4)(-3) - t(2^2 + (-3)^2) \\
&= 26 - 13t
\end{aligned}$$

である．$\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$ であるので，$26 - 13t = 0$．つまり，$t = 2$ である．よって直交射影は

$$\boldsymbol{p} = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix}$$

である．垂直成分を $\boldsymbol{q}$ とすると，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ であるので，

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．

これは次の様に考えることもできる: $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，$\boldsymbol{a}$ から L への直交射影 $\boldsymbol{p}$ は，$\boldsymbol{b}$ のスカラー倍でそのノルムが $|\cos(\theta)|\|\boldsymbol{a}\|$ であるものである．このようなベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \frac{\cos(\theta)\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}' = -\frac{\cos(\theta)\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b}$$

の 2 つがあるので，どちらが $\boldsymbol{p}$ である．一方，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos(\theta)$ であるから，

$$\cos(\theta)\|\boldsymbol{a}\| = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

である．したがって，

$$\boldsymbol{v} = \frac{\cos(\theta)\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$$

である．

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - \left\langle \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \right\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\,\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}$ である．

$\boldsymbol{a}$ から原点と $\boldsymbol{b}$ を通る直線への直交射影 $\boldsymbol{p}$ は，

$$\boldsymbol{p} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$$

とかけるので,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{14+12}{4+9} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．垂直成分 $\boldsymbol{q}$ は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ を満たすので

$$
\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

である． □

解説 B.5.10 (5.10)**.**

$$
\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とし, $\boldsymbol{a}$ から L への直交射影を $\boldsymbol{p}$ とする．

L は原点を通らないので, 原点を通るように平行移動して考える．L は $\boldsymbol{c}$ を通るので,

$$
\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{c} \qquad L' = \{\, t\boldsymbol{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\}
$$

について考える．このとき, $\boldsymbol{p}'$ は $\boldsymbol{a}'$ から原点を通る直線 L' への直交射影になっている．$\boldsymbol{a}'$ から原点と $\boldsymbol{b}$ を通る直線への直交射影 $\boldsymbol{p}'$ は,

$$
\boldsymbol{p}' = \frac{\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}
$$

とかけるので,

$$
\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-1 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

であることから,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}' &= \frac{\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{14+12}{4+9} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．いま, $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}$ であるから,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

である．垂直成分 $\boldsymbol{q}$ は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ を満たすので

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．

これは次の様に考えてもよい: $\boldsymbol{p}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものである．

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \rangle &= \langle \boldsymbol{a} - (t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}), \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} - t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle - t \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle - t \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 16 + 9 - 2 + 3 - t(4 + 9) \\ &= 26 - 13t \end{aligned}$$

となっているので, $26 - 13t = 0$ である．つまり $t = 2$ であり,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．垂直成分 $\boldsymbol{q}$ は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ を満たすので

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である． □

解説 B.5.11 (5.11)**.** 点と直線の距離を求めるには, 直交射影を考えその垂直成分のノルムを求めればよかった．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{a}$ から L への直交射影を $\boldsymbol{p}$ とする．

L は原点を通らないので, 原点を通るように平行移動して考える．L は $\boldsymbol{c}$ を通るので,

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{c} \qquad L' = \{\, t\boldsymbol{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

について考える．このとき，$\boldsymbol{p}'$ は $\boldsymbol{a}'$ から原点を通る直線 L' への直交射影になっている．$\boldsymbol{a}'$ から原点と $\boldsymbol{b}$ を通る直線への直交射影 $\boldsymbol{p}'$ は，

$$\boldsymbol{p}' = \frac{\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2} \boldsymbol{b}$$

とかけるので，

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-1 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

であることから，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \frac{\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2} \boldsymbol{b} \\ &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{14+12}{4+9} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．いま，$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}$ であるから，

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

である．垂直成分 $\boldsymbol{q}$ は，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ を満たすので

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．よって，$\boldsymbol{a}$ と L の距離は

$$\|\boldsymbol{q}\| = \| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

である．

これは次の様に考えてもよい: $\boldsymbol{p}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものである．

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \rangle &= \langle \boldsymbol{a} - (t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}), \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} - t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle - t \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle - t \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 16 + 9 - 2 + 3 - t(4+9) \\ &= 26 - 13t \end{aligned}$$

となっているので, $26-13t=0$ である．つまり $t=2$ であり,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=t\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\&=2\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．垂直成分 $\boldsymbol{q}$ は, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ を満たすので

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

である．

よって, $\boldsymbol{a}$ と L の距離は

$$\|\boldsymbol{q}\|=\|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

である．　□

解説 B.5.12 (5.12)**.**

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\qquad\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

$$\|\boldsymbol{a}\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

であるので,

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

とおく．

つぎに,

$$\langle\overline{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{b}\rangle=\left\langle\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{1}{5}(3+8)=\frac{11}{5}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}'&=\boldsymbol{b}-\langle\overline{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{b}\rangle\,\overline{\boldsymbol{a}}\\&=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{11}{5}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{11}{25}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25-33\\50-44\end{pmatrix}\qquad\qquad=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおく．

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{b}'\|&=\left\|\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{25}\left\|\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}\right\|=\frac{\sqrt{64+36}}{25}\\&=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

であるので,

$$\overline{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}'\|}\boldsymbol{b}' = \frac{5}{2}\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

とおく.

このとき, $\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$ は,

$$\begin{aligned}\|\overline{\boldsymbol{a}}\| = \|\overline{\boldsymbol{b}}\| &= 1\\ \langle\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\rangle &= 0\end{aligned}$$

を満たしている. □

解説 B.5.13 (5.13)**.**

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x+3y\\2x+7y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

とかける.

次の様に考えることもできる:

$$f((\boldsymbol{e}_1)) = f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, f((\boldsymbol{e}_2)) = f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

である. $f(\boldsymbol{e}_1)$ と $f(\boldsymbol{e}_2)$ を並べてできる 2 次正方行列を A とおくと, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる. したがって,

$$A = \begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}$$

とおけば $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である. □

検算 B.5.13.1. $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書けることは次のように確かめられる:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{e}_1) = f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}1+3\cdot 0\\2\cdot 1+7\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\cdot 1+3\cdot 0\\2\cdot 1+7\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので $f(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1$ である.

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{e}_2) = f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}0+3\cdot 1\\2\cdot 0+7\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\\ A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\cdot 0+3\cdot 1\\2\cdot 0+7\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので $f(\boldsymbol{e}_2) = A\boldsymbol{e}_2$ である. □

解説 B.5.14 (5.14)**.** $f(\boldsymbol{e}_1)$ と $f(\boldsymbol{e}_2)$ を並べてできる 2 次正方行列を A とおくと, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる. したがって,

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\-3&-9\end{pmatrix}$$

とおけば $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である.

次の様に考えることもできる:

$$\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) \\
&= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\
&= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) \\
&= x\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ -9y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x - 9y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とかける. □

検算 B.5.14.1. $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となることは次のように確かめられる:

$$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -3 \cdot 1 + (-9) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

となるので, $f(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1$ である.

$$A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 0 + (-9) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

となるので, $f(\boldsymbol{e}_2) = A\boldsymbol{e}_2$ である. □

解説 B.5.15 (5.15)**.** $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ であるとき, $(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = AB\boldsymbol{x}$ と書ける. よって

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\boldsymbol{x}) &= AB\boldsymbol{x} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\
&= \begin{pmatrix} 7 - 3 & 8 + 9 \\ 14 - 4 & 16 + 12 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 10 & 28 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

次の様に考えることもできる:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f(g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) \\
&= f(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix} 7x + 8y \\ -x + 3y \end{pmatrix}) \\
&= A\begin{pmatrix} 7x + 8y \\ -x + 3y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7x + 8y \\ -x + 3y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (7x+8y)+3(-x+3y) \\ 2(7x+8y)+4(-x+3y) \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} 4x+17y \\ 10x+28y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 10 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

とかける. □

解説 B.5.16 (5.16)**.** $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, であるとき, f が全単射であることと A が正則であることが同値であり, f が全単射であるときに f の逆写像 f^{-1} は $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ という形で, A の逆行列を用いて表すことができた. 今回の場合,

$$
\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0
$$

であるので, A は正則である. また A の逆行列は,

$$
\begin{aligned}
A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である. したがって,

$$
f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}
$$

と書ける. □

検算 B.5.16.1.

$$
f^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}
$$

と書けることは以下のように確かめることができる:

$$
f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

であるので,

$$
f^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

である. 一方,

$$
\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + \frac{-1}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

である. よって

$$
f^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

また,

$$
f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

であるので,

$$f^{-1}(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

である．一方,

$$\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot 3+\frac{3}{2}\cdot 4\\ 1\cdot 3+\frac{-1}{2}\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6+6\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

である．よって

$$f^{-1}(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

□

解説 B.5.17 (5.17)**.**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

とする． $\boldsymbol{a}$ の L への直交射影を $\boldsymbol{p}$ とすると, $\boldsymbol{a}$ と $f(\boldsymbol{a})$ の中点が $\boldsymbol{p}$ である． つまり $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}f(\boldsymbol{a})$ である． $f(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}$ とかけるので, まずは直交射影 $\boldsymbol{p}$ を求める． $\boldsymbol{a}$ から原点と $\boldsymbol{b}$ を通る直線への直交射影 $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$$

とかけるので,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}\\
&= \frac{\left\langle \begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right\rangle}{\|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\|^2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\\
&= \frac{14+12}{4+9}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．したがって,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a} &= 2\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}8-7\\-12+4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3\\-8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

解説 B.5.18 (5.18)**.** 原点を中心に θ だけ回転させるには,

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

をかければよかった．今は, $\theta = \frac{\pi}{2}$ であるので,

$$\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2})\\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{a}) &= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

もし複素平面の扱いの方が慣れているのであれば次のように考えても良い: 虚数単位を $\sqrt{-1}$ と書くことにする．絶対値が 1 で偏角が θ である複素数 z は, $z = \cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{-1}$ と書くことができる．$x + y\sqrt{-1}$ という複素平面上の点は, z をかけることによって θ だけ回転するから, 回転後の点は,

$$\begin{aligned} (x + y\sqrt{-1})z &= (x + y\sqrt{-1})(\cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{-1}) \\ &= x\cos(\theta) + y\cos(\theta)\sqrt{-1} + x\sin(\theta)\sqrt{-1} - y\sin(\theta) \\ &= (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + (x\sin(\theta) + \cos(\theta))y\sqrt{-1} \end{aligned}$$

と表すことができる．ベクトルを用いて表すと,

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

を θ だけ回転させた点は

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix}\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\\ x\sin(\theta) + \cos(\theta))y\end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかける．今は, $\theta = \frac{\pi}{2}$ であるので,

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2})\\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

とかける．また,

$$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix}$$

である．

□

解説 B.5.19 (5.19)**.** R を回転行列とすると, θ をつかって

$$R = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

とかける．また, B を上半三角行列とすると, a, b, c を使って,

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

とかける．θ, a, b, c を求める．

$$RB = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) & b\cos(\theta) - c\sin(\theta) \\ a\sin(\theta) & b\sin(\theta) + c\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

である．1 列目のみを考えると

$$\begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ a\sin(\theta) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

となる．このベクトルのノルムは, $|a|$ である．$A = RB$ を満たすという条件から,

$$a\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が得られるが,

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 5$$

であるので, $a \in \{ 5, -5 \}$ である．

まず $a = 5$ のときについて考える．このとき,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\cos(\theta) = \frac{3}{5} \qquad \sin(\theta) = \frac{4}{5}$$

となる．このとき,

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

である．一方 RB の 2 列目は,

$$R\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

であるので, A の 2 列目と比較し,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる．R の逆行列は,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+4 \\ -4+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって,

$$R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると $A = RB$ を満たす.

次に $a = -5$ のときについて考える．このとき,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\cos(\theta) = -\frac{3}{5} \qquad \sin(\theta) = -\frac{4}{5}$$

となる．このとき,

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

である．一方 RB の 2 列目は,

$$R\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

であるので, A の 2 列目と比較し,

$$\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる．R の逆行列は,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 3+4 \\ -4+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$R = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B = -\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると $A = RB$ を満たす． □

検算 B.5.19.1.

$$R = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B = -\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が $A = RB$ を満たすことは次のように確かめることができる．

$$\begin{aligned} RB &= (\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}) \cdot (-\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 0 & 3 \cdot 7 + (-4) \cdot (-1) \\ 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 & 4 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

B.6 固有値と固有ベクトルに関する問題

解説 B.6.1 (6.1)**.** 固有多項式とは $\det(A - xE_2)$ のことである．

$$A - xE_2 = \begin{pmatrix} -4 - x & 1 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$$
$$\det(A - xE_2) = (-4 - x)(-x) - 1 \cdot 5 = x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$$

であるので，A の固有多項式は $x^2 + 4x - 5$ である．

A の固有値とは，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたす $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するような λ のことである．したがって，λ が A の固有値であることと，λ が x に関する方程式 $\det(A - xE_2) = 0$ の解であることは同値である．したがって，$\det(A - xE_2) = (x - 1)(x + 5)$ であるので，

$$(x - 1)(x + 5) = 0$$

を解けばよい．A の固有値は 1, -5 である． □

検算 B.6.1.1. 1 が A の固有値であることは次のように確かめられる: $\lambda = 1$ とすると

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E_2) &= \det(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}) \\ &= \det(\begin{pmatrix} -4-1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) \\ &= \det(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) \\ &= -5\cdot(-1) - 1\cdot 5 \\ &= 5-5=0\end{aligned}$$

となり, $\det(A-1E_2)=0$.

-5 が A の固有値であることは次のように確かめられる: $\lambda = -5$ とすると

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E_2) &= \det(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}) \\ &= \det(\begin{pmatrix} -4-(-5) & 1 \\ 5 & -(-5) \end{pmatrix}) \\ &= \det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}) \\ &= 1\cdot 5 - 1\cdot 5 \\ &= 5-5=0\end{aligned}$$

となり, $\det(A-(-5)E_2)=0$. □

検算 B.6.1.2. 次のような検算も有効である: 行列式は固有値の積に一致する.

$$\begin{aligned}\det(\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}) &= -4\cdot 0 - 1\cdot 5 = -5, \\ -5\cdot 1 &= -5.\end{aligned}$$

また, 行列の対角の和は固有値の和に一致する.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}) &= -4+0 = -4, \\ -5+1 &= -4.\end{aligned}$$

□

解説 B.6.2 (6.2)**.** 2 次正方行列 A が対角化できることと, 一次独立な固有ベクトルの組が存在することは同値であった. また, 相異なる固有値に属する固有ベクトルの組は一次独立であった.

まず A の固有値を求める. そのために, $\det(A-xE_2)=0$ という x に関する方程式をとく.

$$\begin{aligned}A-xE_2 &= \begin{pmatrix} -4-x & 1 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \\ \det(A-xE_2) &= (-4-x)(-x) - 1\cdot 5 = x^2+4x-5 = (x-1)(x+5)\end{aligned}$$

であるので, $(x-1)(x+5)=0$ を解けばよく, 1 と -5 が固有値である. したがって, 固有値 1 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ と, 固有値 -5 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{w}$ をとってくると, $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ は一次独立である. したがって, A は対角化できる. □

解説 B.6.3 (6.3)**.** 2 次正方行列 A が対角化できることと, 一次独立な固有ベクトルの組が存在することは同値であった.

まず A の固有値を求める. そのために, $\det(A - xE_2) = 0$ という x に関する方程式をとく.

$$\begin{aligned} A - xE_2 &= \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} \\ \det(A - xE_2) &= (2-x)^2 - 1 \cdot 0 = (2-x)^2 \end{aligned}$$

であるので, $(2-x)^2 = 0$ を解けばよく, 固有値は 2 のみであることがわかる.

次に固有値 2 に属する A の固有値を求める. つまり $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}$ について考える.

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= 2\boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ (A - 2E_2)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

と変形できる.

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を解けばよい.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \boldsymbol{0} \\ \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

であるから, 解は変数 t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\boldsymbol{e}_1$$

と表せる. A の固有値は 2 のみであるから, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を A の固有ベクトルとすると, $a \neq 0 \neq b$ を使って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{w} &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

と書ける. $(a, b) \neq (0, 0)$ であるにも関わらず $b\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{w} = ab\boldsymbol{e}_1 - ab\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}$ となるので $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は一次独立ではない.

どんな固有ベクトルを 2 つ選んできても一次独立にはならない. つまり, 一次独立な固有ベクトルの組は存在しない. したがって, A は対角化できない. □

解説 B.6.4 (6.4)**.** まず A の固有値を求める．そのために，$\det(A-xE_2)=0$ という x に関する方程式をとく．

$$A-xE_2=\begin{pmatrix}-4-x & 1\\ 5 & -x\end{pmatrix}$$
$$\det(A-xE_2)=(-4-x)(-x)-1\cdot 5=x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$$

であるので，$(x-1)(x+5)=0$ を解けばよく，1 と -5 が固有値である．

固有値 1 に属する固有ベクトルを求める．つまり $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}$ について考える．これは $(A-E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$A-E_2=\begin{pmatrix}-4-1 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

をとく．

$$\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の 1 倍を足すと，

$$\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1 行目を $\frac{-1}{5}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{5}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{5}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

を解けば良い．左辺を計算すると

$$\begin{pmatrix}x+\frac{-1}{5}y\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

となるので，$x-\frac{1}{5}y=0$ であるので，$y=t$ とすると，$x=\frac{t}{5}$ である．よって，解は，変数 t を使って

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{t}{5}\\ t\end{pmatrix}$$

と書くことができる．$t=0$ のときには，$\boldsymbol{0}$ になり固有ベクトルではないので，固有値 1 に属する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix}\frac{t}{5}\\ t\end{pmatrix}\qquad\qquad (t\neq 0)$$

と書くことができる．

固有値 -5 に属する固有ベクトルを求める．つまり $A\boldsymbol{x} = -5\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}$ について考える．これは $(A+5E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解けばよい．

$$A - E_2 = \begin{pmatrix} -4+5 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとく．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

の 2 行目に 1 行目の -5 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けば良い．左辺を計算すると

$$\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $x+y=0$ であるので, $y=t$ とすると, $x=-t$ である．よって, 解は, 変数 t を使って

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

と書くことができる．$t=0$ のときには, $\mathbf{0}$ になり固有ベクトルではないので, 固有値 -5 に属する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0)$$

と書くことができる．

次に A を対角化する．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 に属する固有ベクトルである．また

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は固有値 -5 に属する固有ベクトルである．これらを並べて得られる行列を P とすると

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

である．$\det(P) = -1 - 5 = -6 \neq 0$ であるので P は正則であり

$$P^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となる．

最後に A^n を求める．

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP$$

であるが，一方で，

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}$$

でもある．したがって，

$$\begin{aligned} P^{-1}A^nP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \\ A^n &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}(\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ (-5)^{n+1} & (-5)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 + (-5)^{n+1} & -1 + (-5)^n \\ -5 - (-5)^{n+1} & -5 - (-5)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる． □

検算 B.6.4.1.

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0)$$

が固有値 1 に属する固有ベクトルであることは次のように確かめられる: $t = 5$ のとき

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である．また，

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 に属する固有ベクトルである． □

検算 B.6.4.2.

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \qquad\qquad (t \neq 0)$$

が固有値 -5 に属する固有ベクトルであることは, 次のように確かめることができる:

$t = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. また,

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 -5 に属する固有ベクトルである. □

検算 B.6.4.3. もとめた P^{-1}, P で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となることは, 次のように確かめることができる:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot -1 \\ 5 \cdot 1 + 0 \cdot 5 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 & -1 \cdot (-5) - 1 \cdot 5 \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & -5 \cdot (-5) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

検算 B.6.4.4.

$$\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 + (-5)^{n+1} & -1 + (-5)^n \\ -5 - (-5)^{n+1} & -5 - (-5)^n \end{pmatrix}$$

は, $n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 + (-5)^{n+1} & -1 + (-5)^n \\ -5 - (-5)^{n+1} & -5 - (-5)^n \end{pmatrix} &= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 + (-5)^{1+1} & -1 + (-5)^1 \\ -5 - (-5)^{1+1} & -5 - (-5)^1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 24 & -6 \\ -30 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり A と等しい．

$n=2$ のとき，

$$\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-1+(-5)^{n+1} & -1+(-5)^{n}\\ -5-(-5)^{n+1} & -5-(-5)^{n}\end{pmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-1+(-5)^{2+1} & -1+(-5)^{2}\\ -5-(-5)^{2+1} & -5-(-5)^{2}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-126 & 24\\ 120 & -30\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}21 & -4\\ -20 & 5\end{pmatrix}$$

であるが，

$$\begin{aligned}A^2&=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-4\cdot(-4)+1\cdot 5 & -4\cdot 1+1\cdot 0\\ 5\cdot -4+0\cdot 5 & 5\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}21 & -4\\ -20 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので，A^2 と等しい． □

解説 B.6.5 (6.5)**.**

$$\begin{aligned}{}^tAA&=(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix})(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix})\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 2\\ -1\cdot 2+2\cdot 1 & (-1)(-1)+2\cdot 2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

解説 B.6.6 (6.6)**.**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

とすると，A は対称行列であるので，直交行列により必ず対角化できる．基本的には通常と同様に対角化すればよいが，直交化に使う正則行列 P を決める際に注意が必要である．

まず固有値を求める．そのために $\det(A-xE_2)=0$ という x に関する方程式を解く．

$$\begin{aligned}\det(A-xE_2)&=\det(\begin{pmatrix}2-x & 2\\ 2 & -1-x\end{pmatrix})\\&=(2-x)(-1-x)-2\cdot 2\\&=x^2-x-6=(x-3)(x+2)\end{aligned}$$

であるので，$(x-3)(x+2)=0$ とすると，$x\in\{3,-2\}$ である．よって，A の固有値は 3, -2 である．

次に，固有ベクトルを求める．

固有値 3 に属する固有ベクトルは, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A-3E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい:

$$A-3E_2=\begin{pmatrix}2-3 & 2\\ 2 & -1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

である. 1 行目を -1 倍すると,

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

2 行目に 1 行目の -2 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる.

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

とすると, $x-2y=0$ である. つまり $x=2y$ であるので, 考えている方程式の実数解は,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2t\\ t\end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

である. よって固有値 3 に属する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix}2t\\ t\end{pmatrix} \qquad (t\neq 0)$$

と書ける.

固有値 -2 に属する固有ベクトルは, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(A-(-2)E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい:

$$A-(-2)E_2=\begin{pmatrix}2+2 & 2\\ 2 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

である. 1 行目を $\frac{1}{4}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

2 行目に 1 行目の -2 倍を加えると,

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる.

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

とすると, $x+\frac{1}{2}y=0$ である. つまり $x=-\frac{1}{2}y$ であるので, 考えている方程式の実数解は,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t\\ t\end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

x2 (2024-08-11 10:58)

である．よって固有値 3 に属する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0)$$

と書ける．

次に, 対角化するために必要となる正則行列 P を考える．これは, 固有ベクトルを 2 つ選んできて並べることで作る．今回は P が直交行列であるようにしたいので, ノルムが 1 である固有ベクトルを選ぶ必要がある．固有ベクトルはスカラー倍をしても再び固有ベクトルとなるので, 固有ベクトルを選んできてそれをノルムの逆数によりスカラー倍すればよい．

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると, 固有値 3 に属する固有ベクトルである．$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ であるので,

$$\boldsymbol{v}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすれば, $\boldsymbol{v}'$ は固有値 3 に属する固有ベクトルであり, $\|\boldsymbol{v}'\| = 1$ である．

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると, 固有値 -2 に属する固有ベクトルである．$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\frac{1}{2^2} + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ であるので,

$$\boldsymbol{v}' = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とすれば, $\boldsymbol{w}'$ は固有値 -2 に属する固有ベクトルであり, $\|\boldsymbol{w}'\| = 1$ である．

$\boldsymbol{v}'$ と $\boldsymbol{w}'$ を並べた行列を P とすると,

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である．対称行列の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので, $\langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}' \rangle = 0$ である．また, $\|\boldsymbol{v}'\| = \|\boldsymbol{w}'\| = 1$ であったから, P は直交行列である．$P^{-1} = {}^tP$ であるから,

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である．この直交行列 P に対し,

$$P^{-1}AP = (\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} (\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる．

□

検算 B.6.6.1.

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

が直交行列であることは次のように確かめられる:

$$\begin{aligned} P\,{}^tP &= (\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E_2 \end{aligned}$$

. □

検算 B.6.6.2.

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して $P^{-1}AP$ が対角行列になることは以下のように確かめられる:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -12\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 & \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\cdot 6 + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 + 1\cdot(-4) \\ -1\cdot 6 + 2\cdot 3 & -1\cdot 2 + 2\cdot(-4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

解説 B.6.7 (6.7)**.** $a_0 = 0$ として 0 項目を付け加えても, 漸化式をみたすので, 問題ないから, a_0 を付け加えて考える.

$$\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

とおく. このとき,

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_n
\end{aligned}
$$

とできる．

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

とおくと，

$$
\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n
$$

となる．この等式は $n > 0$ であればどの n でも成り立つので，

$$
\boldsymbol{v}_n = A\boldsymbol{v}_{n-1}.
$$

と書き直しても良い．繰り返しこの等式を使うことで，

$$
\boldsymbol{v}_n = A\boldsymbol{v}_{n-1} = A^2\boldsymbol{v}_{n-2} = \cdots = A^n\boldsymbol{v}_0
$$

となることがわかる．

$\boldsymbol{v}_0$ はもうすでにわかっているので A^n を計算する．

まず A の固有値を求める．

$$
A - xE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
\det(A - xE_2) &= \det(\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}) \\
&= -(1-x)x - 1 \\
&= x^2 - x - 1 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

である．したがって, x に関する方程式

$$\det(A - xE_2) = 0$$

は,

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

とおけば,

$$(x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

と書けるので, 解は, λ と μ の 2 つである．したがって, A の固有値も, λ と μ の 2 つである．

なお, λ と μ は, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu = -1$ を満たしているので,

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= \mu \\ 1 - \mu &= \lambda \\ \frac{1}{\lambda} &= -\mu \\ \frac{1}{\mu} &= -\lambda \end{aligned}$$

である．また, $\lambda - \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$ である．

まず, 固有値 λ に属する固有ベクトルを求める．

$$A - \lambda E_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の $\boldsymbol{0}$ 以外の解を求めれば, それが λ に属する固有ベクトルである．

$$\begin{aligned} A - \lambda E_2 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．したがって, $\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$A - \lambda E_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の拡大係数行列は,

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

である．1 行目を $\frac{1}{\mu}$ 倍すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目に 1 行目の -1 倍を足すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解の空間は，

$$\left\{ t \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \text{ は数} \right\}$$

と書ける．したがって，例えば

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 λ に属する固有ベクトルである．

次に，固有値 μ に属する固有ベクトルを求める．

$$A - \mu E_2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の $\mathbf{0}$ 以外の解を求めれば，それが μ に属する固有ベクトルである．

$$\begin{aligned} A - \mu E_2 &= \begin{pmatrix} 1-\mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．したがって，$\boldsymbol{x}$ に関する方程式

$$(A - \lambda E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の拡大係数行列は，

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

である．1 行目を $\frac{1}{\lambda}$ 倍すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 1 & -\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ 1 & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目に 1 行目の -1 倍を足すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$A - \mu E_2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解の空間は，

$$\left\{ t \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \text{ は数} \right\}$$

と書ける．例えば

$$\begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 μ に属する固有ベクトルである.

固有ベクトルが求められたので対角化をする.

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\det(P) = \det(\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = \lambda - \mu = -\sqrt{5} \neq 0$$

であるので P は正則であり,

$$P^{-1} = \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

である.

このとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

である. したがって,

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

である. 一方, Example 3.1.7 でみたように,

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

であるので,

$$\begin{aligned} P^{-1}A^nP &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \\ A^n &= P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

とできる. したがって,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} (\frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & -\lambda^n\mu \\ -\mu^n & \lambda\mu^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda\lambda^n - \mu^n\mu & -\lambda^n\mu\lambda + \lambda\mu^n\mu \\ \lambda^n - \mu^n & -\lambda^n\mu + \lambda\mu^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} & \lambda^n - \mu^n \\ \lambda^n - \mu^n & \lambda^{n-1} - \mu^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= \boldsymbol{v}_n \\
&= A^n \boldsymbol{v}_0 \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} & \lambda^n - \mu^n \\ \lambda^n - \mu^n & \lambda^{n-1} - \mu^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} \\ \lambda^n - \mu^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．したがって，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{-1}{\sqrt{5}}(\lambda^n - \mu^n) \\
&= \frac{\mu^n - \lambda^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)
\end{aligned}
$$

である． □

索引

Symbols

(i, j)-element
— of a matrix ... → A の (i, j)-成分
(i, j)-element of A ... → A の (i, j)-成分
(i, j)-entry
— of a matrix ... → A の (i, j)-成分
(i, j)-entry of A ...... → A の (i, j)-成分
(i, j)-成分
行列の— .... → A の (i, j)-成分
(m, n)-matrix .... → (m, n)-行列
(m, n)-行列 11
$=$
行列の— .... → A と B は等しい
α による A のスカラー倍 17
$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の一次結合 . → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合 17
$\mathbf{0}$ .... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル
$\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are orthogonal to each other → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する 71
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 70
$\boldsymbol{a}$ のノルム 70
$\boldsymbol{a}$ の偏角 71
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ .... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
$\boldsymbol{e}_i$ .... → 基本ベクトル
$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線 75
$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足 75
$\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ 75
$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間 .. 40
$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 . 40
$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列 .. 40
$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根 40
$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解 40
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ .... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
$\mathbb{R}^2$ 上の一次変換 ..... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
$\mathbb{R}^2$ 上の線形変換 78
$\mathbb{R}^2$ の基底 69
$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 72
$\mathbb{R}^2$ の生成系 66
$\mathbb{R}^2$ の標準基底 69
$\mathbb{R}^2$ の零ベクトル 61
$\mathbb{R}^m$ の生成系 68
${}^t A$ .... → A の転置
$\square^{-1}$ .... → A の逆行列, → f の逆変換
A equals B .... → A と B は等しい
A is diagonalizable with P → A は P によって対角化できる
A is equal to B ..... → A と B は等しい
A と B の積 19
A と B の和 16
A と B は等しい 13
A の (i, j)-成分 13
A の i-行目 13
A の j-列目 13
A の階数 51
A の型 12
A の逆行列 28
A の行列式 30
A の固有多項式 89
A の固有値 87
A のサイズ 12
A の跡 .... → A のトレース
A の第 i 対角成分 13
A の転置 21
A の特性多項式 .... → A の固有多項式
A のトレース 98
A は P によって対角化できる 90
$A = B$ .... → A と B は等しい
A^{-1} .... → A の逆行列
E_n .... → n 次単位行列
f の核 80
f の逆変換 81
f の像 80
f^{-1} .... → f の逆変換
i-th diagonal element of A → A の第 i 対角成分
i-th diagonal entry of A → A の第 i 対角成分
i-th main diagonal element of A → A の第 i 対角成分
i-th main diagonal entry of A → A の第 i 対角成分
i-th row of A .... → A の i-行目
i-行目
行列の— .... → A の i-行目
i 行目のピボット 44
j-th column
— of a matrix .... → A の j-列目
j-th column of A .... → A の j-列目
k-次多項式
斉次— .... → 斉次 k-次多項式
m by n matrix .... → (m, n)-行列
m 項数ベクトル 12
m 項列ベクトル 12
n-th identity matrix .... → n 次単位行列
n-th invertible matrix .. → n 次正則行列
n 元連立一次方程式 40
n 項数ベクトル 61
n 次正則行列 28
n 次正方行列 11
n 次単位行列 15
$O_{m,n}$ .... → 零行列
2-dimensional real numerical vector space ... → 2 次元実ベクトル空間
2 元連立一次方程式 39
2 項実ベクトル 61
2 次元
—実ベクトル空間 → 2 次元実ベクトル空間
2 次元実ベクトル空間 61

A

adjugate matrix → 余因子行列, → 余因子行列
alternative
— matrix .... → 交代行列
alternative matrix .... → 交代行列
angle
— of a vector .... → $\boldsymbol{a}$ の偏角
angle of $\boldsymbol{a}$ .... → $\boldsymbol{a}$ の偏角
augmented
— matrix ...... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
augmented matrix
— of a system of equations . → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
— of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
augmented matrix of the system of equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列

B

basis
— .... → $\mathbb{R}^2$ の基底
— for $\mathbb{R}^2$ .... → $\mathbb{R}^2$ の基底
orthonormal — → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
orthonormal — for $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
standard — .... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
standard — for $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
basis for $\mathbb{R}^2$ .... → $\mathbb{R}^2$ の基底
bijective .... → 全単射

C

characteristic polynomial
— of a matrix ... → A の固有多項式
characteristic polynomial of A → A の固有多項式
coefficient
— matrix ...... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列
coefficient matrix
— of a system of equations . → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列
— of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列

coefficient matrix of the system of equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ➔ $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列
column
  j-th — of a matrix .. ➔ A の j-列目
  — of a matrix .... ➔ A の j-列目
  — vector .... ➔ m 項列ベクトル
column vector .... ➔ m 項列ベクトル
combination
  linear — ➔ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
  linear — of matrices . ➔ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
complex numerical vector .. ➔ 複素ベクトル
  — .... ➔ 複素ベクトル
complex solution
  space of —s ...... ➔ 複素数解の空間
Cramer's rule 57

D

degenerate .... ➔ 非正則
delta
  Kronecker — . ➔ クロネッカのデルタ
dependent
  linearly — . ➔ 一次従属, ➔ 一次従属
determinant
  — of a matrix .... ➔ A の行列式
determinant of A .... ➔ A の行列式
diagonal
  i-th — element . ➔ A の第 i 対角成分
  i-th — element of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  i-th — entry ... ➔ A の第 i 対角成分
  i-th — entry of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  — element ..... ➔ A の第 i 対角成分
  — element of a matrix .. ➔ A の第 i 対角成分
  — entry of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  — matrix .... ➔ 対角行列
diagonal element
  i-th — .... ➔ A の第 i 対角成分
  i-th — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
  i-th main — ... ➔ A の第 i 対角成分
  i-th main — of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
  main — .... ➔ A の第 i 対角成分
  main — of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
diagonal entry
  i-th — .... ➔ A の第 i 対角成分
  i-th — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
  i-th main — ... ➔ A の第 i 対角成分
  i-th main — of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
  main — .... ➔ A の第 i 対角成分
  main — of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
diagonal matrix .... ➔ 対角行列
diagonalizable
  — .. ➔ A は P によって対角化できる
dimension
  2-—alreal numerical vector space ➔ 2 次元実ベクトル空間
distance
  — between a line and a point ➔ 点 $\boldsymbol{x}$ と直線 L の距離
distance between the point $\boldsymbol{x}$ and the line L ... ➔ 点 $\boldsymbol{x}$ と直線 L の距離

E

echelon form
  reduced row — . ➔ 階数 r の被約行階段行列
  reduced row — of rank r . ➔ 階数 r の被約行階段行列
  row — .... ➔ 階数 r の階段行列
  row — of rank r ➔ 階数 r の階段行列
eigenspace
  — ➔ 固有値 λ に属する A の固有空間
eigenspace associated with λ ➔ 固有値 λ に属する A の固有空間
eigenvalue
  — of a matrix .... ➔ A の固有値
  eigenvector belonging to — . ➔ 固有値 λ に属する A の固有ベクトル
eigenvector
  — belonging to an eigenvalue ➔ 固有値 λ に属する A の固有ベクトル
eigenvector belonging to the eigenvalue λ ➔ 固有値 λ に属する A の固有ベクトル
eigenvlue of A .... ➔ A の固有値
Einheitsmatrix .... ➔ n 次単位行列
element
  (i, j)— of a matrix ... ➔ A の (i, j)-成分
  i-th diagonal — ➔ A の第 i 対角成分
  i-th diagonal — of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  i-th diagonal main — ➔ A の第 i 対角成分
  i-th main diagonal — of a matrix .. ➔ A の第 i 対角成分
  — of a matrix ... ➔ A の (i, j)-成分
  diagonal — .... ➔ A の第 i 対角成分
  diagonal — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
  diagonal main — ... ➔ A の第 i 対角成分
  main diagonal — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
elementary
  row operation .... ➔ 行基本変形
elementary row operation ➔ 行基本変形
elimination
  Gaussian — ...... ➔ ガウスの消去法
entry
  (i, j)— of a matrix ... ➔ A の (i, j)-成分
  i-th diagonal — ➔ A の第 i 対角成分
  i-th diagonal — of a matrix ➔ A の第 i 対角成分
  i-th diagonal main — ➔ A の第 i 対角成分
  i-th main diagonal — of a matrix .. ➔ A の第 i 対角成分
  — of a matrix ... ➔ A の (i, j)-成分
  diagonal — .... ➔ A の第 i 対角成分
  diagonal — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
  diagonal main — ... ➔ A の第 i 対角成分
  main diagonal — of a matrix . ➔ A の第 i 対角成分
equal
  two matrices are — . ➔ A と B は等しい
equation
  simultaneous linear —s . ➔ 2 元連立一次方程式, ➔ n 元連立一次方程式
  simultaneous linear —s for n unknowns ➔ n 元連立一次方程式
  simultaneous linear —s for two unknowns ➔ 2 元連立一次方程式
  system of linear —s ➔ 2 元連立一次方程式, ➔ n 元連立一次方程式
  system of linear —s for n unknowns ➔ n 元連立一次方程式
  system of linear —s for two unknowns ➔ 2 元連立一次方程式

F

foot
  — of the perpendicular to a line from a point . ➔ $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
foot of perpendicular
  — to a line from a point ➔ $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
foot of the perpendicular to the line L from the point $\boldsymbol{x}$ ➔ $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
form
  reduced row echelon — ➔ 階数 r の被約行階段行列
  reduced row echelon — of rank r ➔ 階数 r の被約行階段行列
  row echelon — . ➔ 階数 r の階段行列
  row echelon — of rank r ➔ 階数 r の階段行列
fundamental
  — unit vector ...... ➔ 基本ベクトル
fundamental unit vector ➔ 基本ベクトル

G

Gauss
  —ian elimination . ➔ ガウスの消去法
Gaussian
  — elimination .... ➔ ガウスの消去法
Gaussian elimination . ➔ ガウスの消去法
Gram–Schmidt
  — orthonormalization ... ➔ グラム–シュミットの直交化法
Gram–Schmidt orthonormalization .. ➔ グラム–シュミットの直交化法

H

homogeneous
  — polynomial ... ➔ 斉次 k-次多項式
  — polynomial of degree k ➔ 斉次 k-次多項式
homogeneous polynomial
  — .... ➔ 斉次 k-次多項式
  — of degree k ... ➔ 斉次 k-次多項式
homogeneous polynomial of degree k ➔ 斉次 k-次多項式

I

identity
  n-th — matrix ..... ➔ n 次単位行列

— matrix ………. → n 次単位行列
identity matrix
n-th — ………… → n 次単位行列
image
— of linear transformation → f の像
image of f ………………. → f の像
independent
linearly — . → 一次独立, → 一次独立
inner
— product of vectors .. → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
inner product
— of vectors ……. → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
inner product of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
inverse
— matrix of matrix .. → A の逆行列
— of linear transformation . → f の逆変換
inverse matrix
— of matrix ……… → A の逆行列
inverse matrix of A …… → A の逆行列
inverse of f …………. → f の逆変換
invertible ………………… → 正則

K

kernel
— of linear transformation → f の核
kernel of f ………………. → f の核
Kronecker delta .. → クロネッカのデルタ

L

length
— of a perpendicular to a line from a point → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
length of a perpendicular
— to a line from a point → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
length of the perpendicular to the line L from the point $\boldsymbol{x}$ → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
linear
— combination → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
— combination of matrices …… → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
— transformation … → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
— transformation on $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
—ly dependent . → 一次従属, → 一次従属
—ly independent . → 一次独立, → 一次独立
linear combination
— of matrices . → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
linear combination of $A_1, \ldots, A_k$ with coeficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ……. → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
linear equation
simultaneous —s → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
simultaneous —s for n unknowns → n 元連立一次方程式
simultaneous —s for two unknowns → 2 元連立一次方程式
system of —s → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
system of —s for n unknowns . → n 元連立一次方程式
system of —s for two unknowns . → 2 元連立一次方程式
linear transformation
— …………. → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
— on $\mathbb{R}^2$ ……. → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
linear transformation on $\mathbb{R}^2$. → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
linearly
— dependent .. → 一次従属, → 一次従属
— independent . → 一次独立, → 一次独立
linearly dependent → 一次従属, → 一次従属, → 一次従属
linearly independent → 一次独立, → 一次独立, → 一次独立
lower triangular matrix . → 下半三角行列

M

main diagonal element
i-th — ……… → A の第 i 対角成分
main diagonal entry
i-th — ……… → A の第 i 対角成分
matrix
(m, n)— ………… → (m, n)-行列
m by n — ………. → (m, n)-行列
n-th identity — …. → n 次単位行列
— diagonal ………… → 対角行列
— polynomial ……. → 行列多項式
adjugate → 余因子行列, → 余因子行列
alternative — ………. → 交代行列
augmented — .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
coefficient — … → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列
degenerate — ………… → 非正則
identity — ……… → n 次単位行列
invertible — …………… → 正則
lower triangular — . → 下半三角行列
nondegenerate — ………. → 正則
nonsingular — ………… → 正則
orthogonal — ………. → 直交行列
regular — ……………… → 正則
scalar — ………. → スカラー行列
singular — …………… → 非正則
skew-symmetric — ….. → 交代行列
square — ………. → n 次正方行列
square — of order n → n 次正方行列
symmetric — ………. → 対称行列
transposed — ………. → A の転置
upper triangular — → 上半三角行列
zero — ………………. → 零行列
matrix polynomial ……. → 行列多項式

N

nondegenerate ……………. → 正則
nonsingular ………………. → 正則
norm
—of a vector ……… → $\boldsymbol{a}$ のノルム
norm of $\boldsymbol{a}$ ……………. → $\boldsymbol{a}$ のノルム
numerical
— vector → m 項列ベクトル, → n 項数ベクトル
numerical vector . → m 項数ベクトル, → n 項数ベクトル
2-dimensional real — space . → 2 次元実ベクトル空間
complex — ……… → 複素ベクトル
real — . → 2 項実ベクトル, → 実ベクトル
real — space → 2 次元実ベクトル空間
numerical vector space
2-dimensional real — . → 2 次元実ベクトル空間
real — ….. → 2 次元実ベクトル空間

O

of linear transformation
image — ……………. → f の像
inverse — ………… → f の逆変換
kernel — ……………. → f の核
of matrices
product — ………. → A と B の積
sum — ………… → A と B の和
of matrix
(i, j)-element — .. → A の (i, j)-成分
(i, j)-entry — …. → A の (i, j)-成分
i-th diagonal element — → A の第 i 対角成分
i-th diagonal entry — → A の第 i 対角成分
i-th main diagonal element — → A の第 i 対角成分
i-th main diagonal entry — → A の第 i 対角成分
i-th row — ………. → A の i-行目
j-th column — …… → A の j-列目
characteristic polynomial — → A の固有多項式
column — ………. → A の j-列目
determinant — …… → A の行列式
diagonal element — → A の第 i 対角成分
diagonal entry — .. → A の第 i 対角成分
eigenvalue — …….. → A の固有値
element — ……. → A の (i, j)-成分
entry — ……… → A の (i, j)-成分
inverse matrix — …. → A の逆行列
main diagonal element — → A の第 i 対角成分
main diagonal entry — . → A の第 i 対角成分
rank — ……………. → A の階数
row — …………… → A の i-行目
scalar product — → α による A のスカラー倍
size — …………… → A のサイズ
trace — ………… → A のトレース
type — ……………… → A の型
of rank r
reduced row echelon form — → 階数 r の被約行階段行列
row echelon form — → 階数 r の階段行列
of simultaneous equations
augmented matrix — → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
coefficient matrix — → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列
particular solution — → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根
space of solutions → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
of system of equations

augmented matrix — → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
coefficient matrix — → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
particular solution — → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
space of solutions → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
of vector
angle — .... → $\boldsymbol{a}$ の偏角
norm — .... → $\boldsymbol{a}$ のノルム
of vectors
inner product — ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
operation
elementary row — .... → 行基本変形
orthogonal
— matrix .... → 直交行列
— projection of $\boldsymbol{x}$ to L → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
— projection to L . → 直線 L への直交射影
— transformation ...... → 直交変換
— vectors ..... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
vectors are — to each other → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
orthogonal matrix .... → 直交行列
orthogonal projection
— of $\boldsymbol{x}$ to L → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
— to L ...... → 直線 L への直交射影
orthogonal projection of $\boldsymbol{x}$ to L → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
orthogonal projection to L . → 直線 L への直交射影
— of $\boldsymbol{x}$ → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
orthogonal transformation .. → 直交変換
orthogonal vectors
— .... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
orthonormal
— basis .... → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
— basis for $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
orthonormal basis
— .... → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
— for $\mathbb{R}^2$ ..... → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
orthonormal basis for $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
orthonormalization
Gram–Schmidt — ... → グラム–シュミットの直交化法

P

particular
— solution of a system of equations → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
— solution of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
particular solution
— of a system of equations . → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
— of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
particular solution of the system of equations $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
perpendicular
— to a line from a point → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線
foot of a — to a line from a point .. → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
length of a — to a line from a point → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
perpendicular to the line L from the point $\boldsymbol{x}$ .. → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線
pivot in i-th row .... → i 行目のピボット
polynomial
characteristic — of a matrix → A の固有多項式
homogeneous — . → 斉次 k-次多項式
homogeneous — of degree k → 斉次 k-次多項式
matrix — .... → 行列多項式
product
— of matrices .... → A と B の積
inner — of vectors . → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
product of A and B ..... → A と B の積
projection
orthogonal — of $\boldsymbol{x}$ to L → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
orthogonal — to L → 直線 L への直交射影

R

rank
— of matrix .... → A の階数
reduced row echelon form of — r → 階数 r の被約行階段行列
row echelon form of — r .. → 階数 r の階段行列
rank of A .... → A の階数
real numerical vector ..... → 実ベクトル
— .. → 2 項実ベクトル, → 実ベクトル
— space .... → 2 次元実ベクトル空間
2-dimensional — space → 2 次元実ベクトル空間
real numerical vector in $\mathbb{R}^2$. → 2 項実ベクトル
real numerical vector space
— .... → 2 次元実ベクトル空間
2-dimensional — → 2 次元実ベクトル空間
real solution
space of —s .... → 実数解の空間
reduced
— row echelon form → 階数 r の被約行階段行列
— row echelon form of rank r → 階数 r の被約行階段行列
reduced row echelon form
— .... → 階数 r の被約行階段行列
— of rank r .. → 階数 r の被約行階段行列
reduced row echelon form of rank r . → 階数 r の被約行階段行列
reduction
row — .... → 掃き出し法
regular .... → 正則
rejection of $\boldsymbol{x}$ from L .... → 反射影
row
i-th — of a matrix ... → A の i-行目
— of a matrix .... → A の i-行目
— reduction .... → 掃き出し法
elementary — operation .. → 行基本変形
row echelon form
— .... → 階数 r の階段行列
— of rank r .... → 階数 r の階段行列
reduced — ... → 階数 r の被約行階段行列
reduced — of rank r → 階数 r の被約行階段行列
row echelon form of rank r . → 階数 r の階段行列
row operation
elementary — .... → 行基本変形
row reduction .... → 掃き出し法

S

scalar
— matrix .... → スカラー行列
scalar matrix .... → スカラー行列
scalar product
— of matrix ... → α による A のスカラー倍
scalar product of α and A → α による A のスカラー倍
simultaneous
— linear equations → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
— linear equations for n unknowns → n 元連立一次方程式
— linear equations for two unknowns → 2 元連立一次方程式
simultaneous linear equations
— for n unknowns → n 元連立一次方程式
— for two unknowns → 2 元連立一次方程式
simultaneous linear equations for n unknowns → n 元連立一次方程式
simultaneous linear equations for two unknowns → 2 元連立一次方程式
singular .... → 非正則
size
— of a matrix .... → A のサイズ
size of A .... → A のサイズ
skew-symmetric
— matrix .... → 交代行列
skew-symmetric matrix ..... → 交代行列
solution
particular — of a system of equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
particular — of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
space of —s of a system of equations → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
space of —s of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
space of complex —s . → 複素数解の空間
space of real —s .... → 実数解の空間
space
— of complex solutions . → 複素数解の空間
— of real solutions . → 実数解の空間
— of solutions . → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
— of solutions of a system of equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
— of solutions of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
2-dimensional real numerical vector
— ...... → 2 次元実ベクトル空間

eigen— → 固有値 λ に属する A の固有空間
real numerical vector — → 2 次元実ベクトル空間
space of complex solutions → 複素数解の空間
space of real solutions .. → 実数解の空間
space of solutions
— of a system of equations . → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
— of simultaneous equations .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
space of solutions of the system of equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
square matrix
— of order n ...... → n 次正方行列
square matrix of order n → n 次正方行列
standard
— basis .... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
— basis for $\mathbb{R}^2$ .... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
standard basis
— .... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
— for $\mathbb{R}^2$ .... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
standard basis for $\mathbb{R}^2$. → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
ststem
— of linear equations . → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
— of linear equations for n unknowns → n 元連立一次方程式
— of linear equations for two unknowns → 2 元連立一次方程式
sum
— of matrices .... → A と B の和
sum of A and B .... → A と B の和
symmetric
— matrix .... → 対称行列
symmetric matrix .... → 対称行列
system
— of generators . → $\mathbb{R}^2$ の生成系, → $\mathbb{R}^m$ の生成系
— of generators for $\mathbb{R}^2$ .. → $\mathbb{R}^2$ の生成系
— of generators for $\mathbb{R}^m$ → $\mathbb{R}^m$ の生成系
system of generators
— .. → $\mathbb{R}^2$ の生成系, → $\mathbb{R}^m$ の生成系
— for $\mathbb{R}^2$ .... → $\mathbb{R}^2$ の生成系
— for $\mathbb{R}^m$ .... → $\mathbb{R}^m$ の生成系
system of generators for $\mathbb{R}^2$. → $\mathbb{R}^2$ の生成系
system of generators for $\mathbb{R}^m$ → $\mathbb{R}^m$ の生成系
system of linear equations for n unknowns → n 元連立一次方程式
system of linear equations for two unknowns → 2 元連立一次方程式

T

trace
— of a matrix ..... → A のトレース
trace of A .... → A のトレース
transformation
linear — .... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
linear — on $\mathbb{R}^2$. → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
orthogonal — .... → 直交変換
transpose
—d matix .... → A の転置
transposed
— matix .... → A の転置
transposed matrix of A .... → A の転置
triangular matrix
lower — .... → 下半三角行列
upper — .... → 上半三角行列
type
— of a matrix .... → A の型
type of A .... → A の型

U

unit
fundamental — vector .. → 基本ベクトル
unit vector
fundamental — .... → 基本ベクトル
upper triangular matrix → 上半三角行列

V

vector
2-dimensional real numerical — space ... → 2 次元実ベクトル空間
column — .... → m 項列ベクトル
complex numerical — .. → 複素ベクトル
fundamental unit — → 基本ベクトル
numerical — . → m 項列ベクトル, → n 項数ベクトル
real numerical — → 2 項実ベクトル, → 実ベクトル
real numerical — space . → 2 次元実ベクトル空間
zero — .... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル
vector space
2-dimensional real numerical — . → 2 次元実ベクトル空間
real numerical — . → 2 次元実ベクトル空間

Z

zero
— matrix .... → 零行列
— vector .... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル
zero matrix .... → 零行列
zero vector of $\mathbb{R}^2$ .... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル

あ

足
点から直線へ下ろした垂線の— → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
一次
$\mathbb{R}^2$ 上の—変換 ... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
n 元連立—方程式 .. → n 元連立一次方程式
—結合 ... → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
—従属 ..... → 一次従属, → 一次従属
—独立 ..... → 一次独立, → 一次独立
—変換 .... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
2 元連立—方程式 .. → 2 元連立一次方程式
行列の—結合 . → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
連立—方程式 . → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
一次結合
行列の— . → $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を係数とする $A_1, \ldots, A_k$ の線型結合
一次従属 18, 62, 63
一次独立 17, 62, 65
一次変換
$\mathbb{R}^2$ 上の— .... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
— .... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
—の核 .... → f の核
—の逆変換 .... → f の逆変換
—の像 .... → f の像
一次変換の
—核 .... → f の核
—逆変換 .... → f の逆変換
—像 .... → f の像
一次方程式
n 元連立— .... → n 元連立一次方程式
2 元連立— .... → 2 元連立一次方程式
連立— → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式

か

解
—の空間 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
実数—の空間 .... → 実数解の空間
特殊— .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根
複素数—の空間 .... → 複素数解の空間
方程式の—の空間 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
方程式の特殊— .. → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根
連立方程式の—の空間 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の空間
連立方程式の特殊— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の根
階数
—r の階段行列 .. → 階数 r の階段行列
—r の簡約階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
—r の簡約行階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
—r の行階段行列 → 階数 r の階段行列
—r の被約階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
—r の被約行階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
簡約階段行列の— → 階数 r の被約行階段行列
簡約行階段行列の— → 階数 r の被約行階段行列
行列の— .... → A の階数
被約階段行列の— → 階数 r の被約行階段行列
被約行階段行列の— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の階段行列 44
階数 r の簡約行階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の被約行階段行列 44
階段
—行列 .... → 階数 r の階段行列
階数 r の—行列 . → 階数 r の階段行列
階数 r の簡約—行列 . → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の簡約行—行列 . → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の行—行列 → 階数 r の階段行列
階数 r の被約—行列 . → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の被約行—行列 . → 階数 r の被約行階段行列
簡約—行列 → 階数 r の被約行階段行列
簡約行—行列 . → 階数 r の被約行階段行列
行—行列 .... → 階数 r の階段行列

被約—行列 → 階数 r の被約行階段行列
被約行—行列 → 階数 r の被約行階段行列
階段行列
— → 階数 r の階段行列
階数 r の— → 階数 r の階段行列
階数 r の簡約— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の簡約行— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の被約— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の被約行— → 階数 r の被約行階段行列
簡約— → 階数 r の被約行階段行列
簡約行— → 階数 r の被約行階段行列
被約— → 階数 r の被約行階段行列
被約行— → 階数 r の被約行階段行列
解の空間
— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
実数— → 実数解の空間
複素数— → 複素数解の空間
方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
連立方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
ガウス
—の消去法 → ガウスの消去法
ガウスの消去法 …… 47
可逆 → 正則
核
一次変換の— → f の核
線形変換の— → f の核
拡大
—係数行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
方程式の—係数行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
連立方程式の—係数行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
拡大係数
—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
方程式の—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
連立方程式の—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
拡大係数行列
— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
連立方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
型
行列の— → A の型
下半三角行列 …… 14
簡約
—階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
—行階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の—階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の—行階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
簡約階段行列
— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の— → 階数 r の被約行階段行列
簡約行階段行列
— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の— → 階数 r の被約行階段行列
基底
$\mathbb{R}^2$ の— → $\mathbb{R}^2$ の基底
$\mathbb{R}^2$ の正規直交— → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
$\mathbb{R}^2$ の標準— → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
— → $\mathbb{R}^2$ の基底
正規直交— → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
標準— → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
基本
—ベクトル → 基本ベクトル
行—変形 → 行基本変形
基本ベクトル …… 61
基本変形
行— → 行基本変形
逆行列
行列の— → A の逆行列
逆変換
一次変換の— → f の逆変換
線形変換の— → f の逆変換
行
—基本変形 → 行基本変形
行列の i—目 → A の i-行目
行列の— → A の i-行目
行基本変形 …… 44
行列
(m,n)— → (m,n)-行列
n 次正則— → n 次正則行列
n 次正方— → n 次正方行列
n 次単位— → n 次単位行列
—式 → A の行列式
—多項式 → 行列多項式
階数 r の階段— → 階数 r の階段行列
階数 r の簡約階段— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の簡約行階段— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の被約階段— → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の被約行階段— → 階数 r の被約行階段行列
階段— → 階数 r の階段行列
可逆— → 正則
拡大係数— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
下半三角— → 下半三角行列
簡約階段— → 階数 r の被約行階段行列
簡約行階段— → 階数 r の被約行階段行列
行階段— → 階数 r の階段行列
係数— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
交代— → 交代行列
上半三角— → 上半三角行列
スカラー— → スカラー行列
正則— → 正則
正方— → n 次正方行列
対角— → 対角行列
対称— → 対称行列
単位— → n 次単位行列
直交— → 直交行列
非正則— → 非正則
非退化— → 正則
非特異— → 正則
被約階段— → 階数 r の被約行階段行列
被約行階段— → 階数 r の被約行階段行列
方程式の拡大係数— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
方程式の係数— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
余因子— → 余因子行列, → 余因子行列
零— → 零行列
連立方程式の拡大係数— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
連立方程式の係数— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
歪対称— → 交代行列
行列が
—等しい → A と B は等しい
行列式
行列の— → A の行列式
行列多項式 …… 20
行列の
i-行目 → A の i-行目
—(i,j)-成分 → A の (i,j)-成分
—j 列目 → A の j-列目
—階数 → A の階数
—型 → A の型
—逆行列 → A の逆行列
—行列式 → A の行列式
—固有多項式 → A の固有多項式
—サイズ → A のサイズ
—スカラー倍 → α による A のスカラー倍
—成分 → A の (i,j)-成分
—積 → A と B の積
—跡 → A のトレース
—相等 → A と B は等しい
—第 i 対角成分 → A の第 i 対角成分
—対角成分 → A の第 i 対角成分
—転置 → A の転置
—特性多項式 → A の固有多項式
—トレース → A のトレース
—列 → A の j-列目
—和 → A と B の和
行 → A の i-行目
距離
点と直線の— → 点 $\boldsymbol{x}$ と直線 L の距離
空間
2 次元実ベクトル— → 2 次元実ベクトル空間
解の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
固有— → 固有値 λ に属する A の固有空間
固有値に属する固有— → 固有値 λ に属する A の固有空間
実数解の— → 実数解の空間
実ベクトル— → 2 次元実ベクトル空間
複素数解の— → 複素数解の空間
方程式の解の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
連立方程式の解の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
グラム–シュミット
—の直交化法 → グラム–シュミットの直交化法
グラム–シュミットの直交化法 …… 73
クラメルの公式 → i 行目のピボット
クロネッカのデルタ …… 15
係数
—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
拡大—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
方程式の—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列

方程式の拡大—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
連立方程式の—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
連立方程式の拡大—行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
係数行列
— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
拡大— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
方程式の拡大— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
連立方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
連立方程式の拡大— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
結合
一次— → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
行列の一次— → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
行列の線型— → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
線型— → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
交代
—行列 → 交代行列
交代行列 22
固有空間
固有値に属する— → 固有値 λ に属する A の固有空間
固有多項式
行列の— → A の固有多項式
固有値
—に属する固有ベクトル → 固有値 λ に属する A の固有ベクトル
行列の— → A の固有値
固有値 λ に属する A の固有空間 89
固有値 λ に属する A の固有ベクトル 87
固有ベクトル
固有値に属する— → 固有値 λ に属する A の固有ベクトル
根
方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
連立方程式の— → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根

さ

サイズ
行列の— → A のサイズ
三角行列
下半— → 下半三角行列
上半— → 上半三角行列
次元
2—実ベクトル空間 → 2 次元実ベクトル空間
実数
—解 → 実数解の空間
—解の空間 → 実数解の空間
実数解
—の空間 → 実数解の空間
実数解の空間 40
実ベクトル 61
— → 2 項実ベクトル, → 実ベクトル
—空間 → 2 次元実ベクトル空間
2 項— → 2 項実ベクトル
2 次元—空間 → 2 次元実ベクトル空間
射影
直線 L への直交— → 直線 L への直交射影
点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交— → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
従属
一次— → 一次従属, → 一次従属
消去法
ガウスの— → ガウスの消去法
上半三角行列 14
垂線
点から直線へ下ろした— → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線
点から直線へ下ろした—の足 → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
点から直線へ下ろした—の長さ → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
垂線の足
点から直線へ下ろした— → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の足
垂線の長さ
点から直線へ下ろした— → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
数ベクトル
m 項— → m 項列ベクトル
n 項— → n 項数ベクトル
— → 2 項実ベクトル, → n 項数ベクトル, → 実ベクトル, → 複素ベクトル
—空間 → 2 次元実ベクトル空間
2 項— 61
2 項実— → 2 項実ベクトル
2 次元実—空間 → 2 次元実ベクトル空間
実— → 2 項実ベクトル, → 実ベクトル
実—空間 → 2 次元実ベクトル空間
複素— → 複素ベクトル
数ベクトル空間
— → 2 次元実ベクトル空間
2 次元実— → 2 次元実ベクトル空間
実— → 2 次元実ベクトル空間
スカラー
—行列 → スカラー行列
スカラー行列 15
スカラー倍
行列の— → α による A のスカラー倍
正規
$\mathbb{R}^2$ の—直交基底 → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
—直交基底 → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
正規直交
$\mathbb{R}^2$ の—基底 → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
—基底 → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
正規直交基底
$\mathbb{R}^2$ の— → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
— → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
斉次
—k-次多項式 → 斉次 k-次多項式
—多項式 → 斉次 k-次多項式
斉次 k-次多項式 77
斉次多項式
— → 斉次 k-次多項式
生成系
$\mathbb{R}^2$ の— → $\mathbb{R}^2$ の生成系
$\mathbb{R}^m$ の— → $\mathbb{R}^m$ の生成系
— → $\mathbb{R}^2$ の生成系, → $\mathbb{R}^m$ の生成系
正則 28
成分
行列の (i,j)— → A の (i,j)-成分
行列の— → A の (i,j)-成分
行列の第 i 対角— → A の第 i 対角成分
行列の対角— → A の第 i 対角成分
第 i 対角— → A の第 i 対角成分
対角— → A の第 i 対角成分
正方行列
n 次— → n 次正方行列
積
行列の— → A と B の積
ベクトルの内— → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
跡
行列の— → A のトレース
線型
—結合 → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
行列の—結合 → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
線形
$\mathbb{R}^2$ 上の—変換 → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
—変換 → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
線型結合
行列の— → $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を係数とする $A_1,\ldots,A_k$ の線型結合
線形変換
$\mathbb{R}^2$ 上の— → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
— → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
—の核 → f の核
—の逆変換 → f の逆変換
—の像 → f の像
線形変換の
—核 → f の核
—逆変換 → f の逆変換
—像 → f の像
全単射 81
像
一次変換の— → f の像
線形変換の— → f の像
属する
固有値に—固有空間 → 固有値 λ に属する A の固有空間
固有値に—固有ベクトル → 固有値 λ に属する A の固有ベクトル

た

対角
—行列 → 対角行列
行列の—成分 → A の第 i 対角成分
行列の第 i—成分 → A の第 i 対角成分
第 i—成分 → A の第 i 対角成分
対角化
— → A は P によって対角化できる
—可能 → A は P によって対角化できる
対角行列 14
対角成分
行列の— → A の第 i 対角成分
行列の第 i— → A の第 i 対角成分
第 i— → A の第 i 対角成分
対称
—行列 → 対称行列
歪— → 交代行列
歪—行列 → 交代行列
対称行列 21
多項式
行列— → 行列多項式
行列の固有— → A の固有多項式
行列の特性— → A の固有多項式
斉次 k-次— → 斉次 k-次多項式
斉次— → 斉次 k-次多項式
単位
n 次—行列 → n 次単位行列
—行列 → n 次単位行列

単位行列
n 次— ... → n 次単位行列
直線 L への直交射影 ... 75
点 $\boldsymbol{x}$ の— ... → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
直交
$\mathbb{R}^2$ の正規—基底 → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
—行列 ... → 直交行列
—する ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
—変換 ... → 直交変換
正規—基底 ... → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
直線 L への—射影 → 直線 L への直交射影
点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への—射影 → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
ベクトルが—する → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
直交化法
グラム–シュミットの ... → グラム–シュミットの直交化法
直交基底
$\mathbb{R}^2$ の正規— ... → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
正規— ... → $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底
直交行列 ... 76
直交射影
直線 L への— → 直線 L への直交射影
点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への— → 点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影
直交性
ベクトルの— ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
直交変換 ... 81
デルタ
クロネッカの— → クロネッカのデルタ
点 $\boldsymbol{x}$ と直線 L の距離 ... 75
点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影 ... 75
点 $\boldsymbol{x}$ の直線 L への直交射影の垂直成分 . 75
転置
行列の— ... → A の転置
特殊解
方程式の— ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
連立方程式の— ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
特性
行列の—多項式 ... → A の固有多項式
特性多項式
行列の— ... → A の固有多項式
独立
一次— ... → 一次独立, → 一次独立
トレース
行列の— ... → A のトレース

な

内積
ベクトルの— ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
長さ
点から直線へ下ろした垂線の— → $\boldsymbol{x}$ から L へ下ろした垂線の長さ
ノルム
ベクトルの— ... → $\boldsymbol{a}$ のノルム

は

掃き出し法 ... 47
反射影 ... 75
非正則 ... 28
非退化 ... → 正則
非特異 ... → 正則
等しい
行列が— ... → A と B は等しい
ピボット
i 行目の— ... → i 行目のピボット
被約
—階段行列 → 階数 r の被約行階段行列
—行階段行列 . → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の—階段行列 . → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の—行階段行列 . → 階数 r の被約行階段行列
被約階段行列
— ... → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の— → 階数 r の被約行階段行列
被約行階段行列
— ... → 階数 r の被約行階段行列
階数 r の— → 階数 r の被約行階段行列
標準
$\mathbb{R}^2$ の—基底 ... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
—基底 ... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
標準基底
$\mathbb{R}^2$ の— ... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
— ... → $\mathbb{R}^2$ の標準基底
複素数
—解 ... → 複素数解の空間
—解の空間 ... → 複素数解の空間
複素数解
—の空間 ... → 複素数解の空間
複素数解の空間 ... 40
複素ベクトル ... 61
— ... → 複素ベクトル
ベクトル
m 項数— ... → m 項列ベクトル
m 項列— ... → m 項列ベクトル
n 項数— ... → n 項数ベクトル
—の内積 ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
—のノルム ... → $\boldsymbol{a}$ のノルム
—零 ... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル
2 項— ... → 2 項実ベクトル
2 項実— ... → 2 項実ベクトル
2 次元実—空間 ... → 2 次元実ベクトル空間
基本— ... → 基本ベクトル
実— → 2 項実ベクトル, → 実ベクトル
実—空間 ... → 2 次元実ベクトル空間
数— . → m 項列ベクトル, → n 項数ベクトル
複素— ... → 複素ベクトル
列— ... → m 項列ベクトル
ベクトルが
—直交する ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
ベクトル空間
2 次元実— ... → 2 次元実ベクトル空間
実— ... → 2 次元実ベクトル空間
ベクトルの
—直交性 ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する
—内積 ... → $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積
—ノルム ... → $\boldsymbol{a}$ のノルム
偏角
極座標表示の— ... → $\boldsymbol{a}$ の偏角
ベクトルの— ... → $\boldsymbol{a}$ の偏角
変換
$\mathbb{R}^2$ 上の一次— ... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
$\mathbb{R}^2$ 上の線形— ... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
一次— ... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
線形— ... → $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換
直交— ... → 直交変換
変形
行基本— ... → 行基本変形
方程式
n 元連立一次— → n 元連立一次方程式
—の解の空間 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
—の拡大係数行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
—の係数行列 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
2 元連立一次— → 2 元連立一次方程式
連立一次— . → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
方程式の
—解の空間 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
—拡大係数行列 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
—係数行列 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
—根 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
—特殊解 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根

や

余因子行列 ... 3, 35

ら

零
—行列 ... → 零行列
—ベクトル ... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル
零行列 ... 15
零ベクトル
— ... → $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル
列
行列の j—目 ... → A の j-列目
行列の— ... → A の j-列目
列ベクトル
m 項— ... → m 項列ベクトル
連立
n 元—一次方程式 ... → n 元連立一次方程式
—一次方程式 . → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
2 元—一次方程式 ... → 2 元連立一次方程式
連立一次方程式
n 元— ... → n 元連立一次方程式
2 元— ... → 2 元連立一次方程式
連立方程式
n 元— ... → n 元連立一次方程式
— → 2 元連立一次方程式, → n 元連立一次方程式
—の解の空間 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
—の拡大係数行列 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
—の係数行列 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
2 元— ... → 2 元連立一次方程式
連立方程式の
—解の空間 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の空間
—拡大係数行列 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列
—係数行列 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の係数行列
—根 ... → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根
—特殊解 → $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の根

わ

和
行列の— ... → A と B の和
歪対称
—行列 ... → 交代行列
歪対称行列 ... → 交代行列