2025年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学EP 卒業研究

擬測地的な距離空間への群作用に関する Švarc-Milnor Lemma について

2264138 杉山 和輝

指導教員：野崎 雄太 准教授

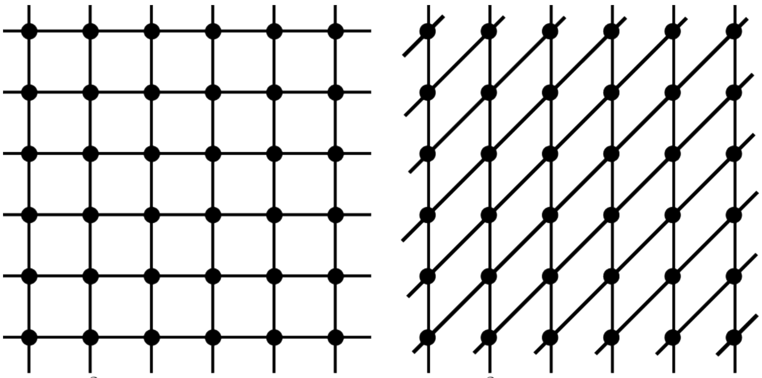
（2026年1月30日）

目 次

1　導入

幾何学的群論とは，群から幾何学的対象を構成する，あるいは他の幾何学的対象への群作用をみることで，群の構造や代数的・幾何学的性質を考察する分野である．

群から幾何学的対象を構成する代表的な例としては，群の生成系に関する Cayley グラフが挙げられる．Cayley グラフとは，群の元を頂点とし，生成系の元を演算することで移る頂点間を辺で結ぶことで得られるグラフであり，生成系によってグラフの形は変わるものの，生成系込みでの群の構造を可視化することができる．特に自由群に関しては相性が良く，その Cayley グラフは無限の tree になることが知られている．逆に，適切な条件下であれば，群と生成系に関する Cayley グラフが tree のとき群は自由群であることも知られている．また，Cayley グラフは群が作用する空間の代表例と言える．実際，群は自身の Cayley グラフに対して，頂点集合には左からの演算で，辺集合には頂点の作用から導かれる作用で，群作用をなす．この群作用は，サイクルなどのグラフの構造を保つため，Cayley グラフの構造を群作用を通して理解することもできる．また，群が自由に作用する tree が存在することと，群が自由群であることが同値であることから，自由群の部分群が自由群になるという定理のスマートな証明も与えらえる．幾何学的群論ではしばしば群作用に着目することが多い．



$\mathbb{Z}^2$ の $\{(1,0),(0,1)\}$ に関するCayleyグラフ　　$\mathbb{Z}^2$ の $\{(1,1),(0,1)\}$ に関するCayleyグラフ

図 1: Cayley グラフの例

一般に群作用とは，ある集合の自己同型写像として群が振る舞うことであり，群の代数的構造を空間の幾何学的な構造として表現するものである．群を直接調べるのではなく，どのような空間にどのように作用しているかを観察することで，空間の幾何学的な特徴や性質を通して群を調べることを可能としている．例えば，群 $\mathbb{Z}^2$ による，空間 $\mathbb{R}^2$ への加法の群作用を考えると，$\mathbb{R}^2$ は一辺が 1 の正方形を $\mathbb{Z}^2$ の作用によって敷き詰めた空間であることが分かり，逆に $\mathbb{Z}^2$ という群は $\mathbb{R}^2$ のような広がりのある群構造を持つことが分かる．このことは上の図 1 のような Cayley グラフを用いても確かめることができる．群 $\mathbb{Z}^2$ の Cayley グラフが，空間 $\mathbb{R}^2$ のような広がりを持っていることが分かるだろう．

群の二点間の距離を，Cayley グラフの一辺を長さ 1 として見ることで得られる距離を群に導入することで，群を距離空間として捉えることができ，群と空間が似ていることの定式化が可能となる．距離を入れた群の，他の距離空間への群作用を考えることで，群と空間の類似性を議論することができる．しかしこのとき，Cayley グラフの構造は選んだ生成系に依存してしまうため，群に導入した距離関数も生成系に依存してしまう．

そこで，一定誤差のズレを許容する“大雑把な視点”を導入し局所的な違いを無視することで，大局的な部分だけを見比べ，群の本質的な構造を抽出することができる．擬等長写像 (quasi-isometric) とは，距離空間から距離空間への写像であり，送った先の二点間の距離が，送る前の二点間の距離の定数倍と定数項で，点に依らず一様に抑えられるようなものを指す．これによって二つの距離空間の大局的な構造のみを見比べることができ，Cayley グラフの生成系に依存してしまう問題を解決できる．

Švarc-Milnor Lemma とは，「群がよい距離空間によい群作用をしているとき，その群の有限生成系が分かり，群の構造と距離空間の構造が“大雑把に”等しい」という主張であり，その内容から「幾何学的群論の基本補題」とも言われている．一般に，群が与えられたとき，その群が有限生成であるかどうかの判別は難しいことがあるのだが，この補題では有限生成であることが証明できる．それだけでなく，有限生成系が分かる他，作用している空間の持つ構造と群の持つ構造が大雑把に等しいことまで分かる．よく知られている距離空間へのうまい作用さえ見つけることができれば，群の構造を理解する足掛かりとなる．

Bridson と Haefliger [3] によると，1953 年，この補題の先駆けとなるアイデアが Efremovich の論文 [7] にて見つかっている．その後，1955 年に Švarc の論文 [1] にて主補題が用いられ，1968 年に Milnor [5, Theorem 2] が Švarc とは独立して本補題を見つけ応用した．その後，Švarc の先行研究を知った Milnor は “Švarc の論文にすでに多くのアイデアが含まれていた” と自身の論文 [6] にて述べている．

本論文では Löh [4, Section 5] の議論をもとに，Švarc-Milnor Lemma の証明と，その補題をいいかえた主張の証明を与えることを主目的としている．2 節にて必要な用語の定義を行い，3 節にて Švarc-Milnor Lemma の証明，4 節にて，主補題のいいかえを紹介，証明を行う．なお，幾何学的群論における Cayley グラフなどの基本的概念は付録としてまとめているので，そちらを参照されたい．

謝辞

また，指導教員である野崎雄太准教授には，日ごろの研究から本論文の完成に至るまで多大なご助言ご指導を賜りました．同ゼミの宮路宙澄氏，谷内賢翔氏にも，多くの意見や議論を通じてご支援いただきました．この場をお借りして感謝申し上げます．

2 準備

2.1 Quasi-Isometry of Meric Spaces

この節では，距離空間同士の類似を測るための道具となる写像について述べる．条件の厳しい等長写像から始まり，その条件を少しずつ緩めることによって，幾何学的群論における“大雑把な視点”を得ることができる．

以下，(X, d_X) を距離空間とし，省略して X と表記する．

Definition 2.1. 写像 $f\colon X \to Y$ が **等長埋め込み (isometric embedding)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ に関して，$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つことをいう．また，f が **等長写像 (isometry)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が等長埋め込みである．

(2) ある等長埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **等長 (isometric)** であるとは，等長写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Remark. 定義より，等長埋め込みならば単射な連続写像である．よって，等長写像は同相写像である．また，等長埋め込みは全射性を満たすと等長写像となる．

Definition 2.2. 写像 $f\colon X \to Y$ が **bilipschitz 埋め込み (bilipschitz embedding)** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$$

が成り立つことをいう．また，f が **bilipschitz equivalence (bi-Lip)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が bilipschitz 埋め込みである．

(2) ある bilipschitz 埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **bilipschitz equivalent** であるとは，bilipschitz equivalence な写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Example. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ に対し， $f\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ を，$f(n) = 2n$ とすると，これは等長埋め込みではないが bilipschitz 埋め込みである．実際，この写像は $c = 2$ とすれば bilipschitz 埋め込み の定義を満たす．また，$g\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を，$g(m) = m/2$ とすれば，f, g によって $\mathbb{Z}$ と $2\mathbb{Z}$ は bilipschitz equivalent である．

Remark. bilipschitz 埋め込み は単射な連続写像である．よって，bilipschitz equivalence は同相写像である．また，bilipschitz 埋め込み は全射性を満たすと bilipschitz equivalence となる．

Definition 2.3. 写像 $f\colon X \to Y$ が 写像 $f'\colon X \to Y$ から **finite distance** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $x \in X$ に対して，

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c$$

が成り立つことをいう．

Definition 2.4. 写像 $f\colon X \to Y$ が **擬等長埋め込み (quasi-isometric embedding)** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$，$b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し，任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + b$$

が成り立つことをいう．このとき，f を **(c, b)-quasi-isometric embedding** とも表現する．また，f が**擬等長写像 (quasi-isometry, QI)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が擬等長埋め込みである．

(2) ある擬等長埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g$ が id_Y から finite distance，$g \circ f$ が id_X から finite distance である．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは，擬等長写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Example. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ に対し， $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ を，$f(x) = \lfloor x \rfloor$ と定めると，これは bilipschitz embedding ではないが，擬等長埋め込みである．実際，この写像は $c = 1, b = 1$ とすれば擬等長埋め込みの定義を満たす．また，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{R}$ への包含写像を考えると，f と包含写像によって $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ は擬等長である．

擬等長の直感的な理解は，「遠くから二つの集合を眺めたときに同じ形に見えるかどうか」である．$\mathbb{R}$ や $\mathbb{Z}$ は，局所的にみれば後者は離散的であるものの，遠くから見ればどちらも直線に見える．そのため，この二つは擬等長の関係である．また，有界な集合は遠くから見ると一点とみなせるため，一点集合と擬等長である．

Remark. 擬等長埋め込みは連続とは限らない (実際上の例の f は連続でない)．同様に，擬等長写像は連続であるとは限らない (図 2 参照)．

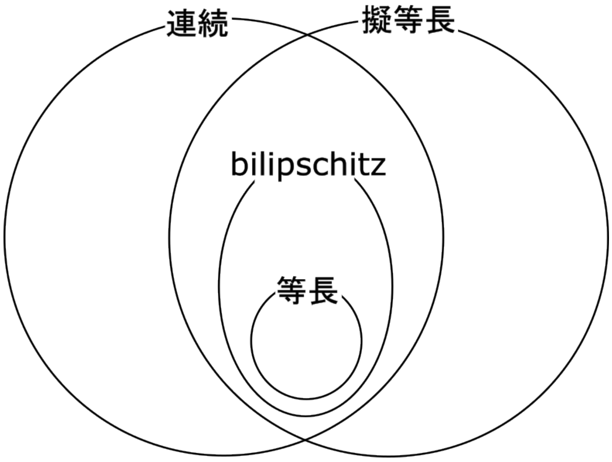


図 2: 各写像の関係

Remark. 等長埋め込み同士の合成写像は等長埋め込みであり，bilipschitz 埋め込み同士の合成写像は bilipschitz 埋め込みであり，擬等長埋め込み同士の合成は擬等長埋め込みである．

定数倍と定数分のズレを許してしまうという，擬等長の “大雑把な視点” が幾何学的群論では重要なのだが，その擬等長に関する定義について，それと同値なものを紹介する．

Proposition 2.5. Definition 2.4 の 擬等長写像における二条件は，以下の二条件と同値．

［1］f が擬等長埋め込みである．

［2］ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ をとると，$d_Y(f(x), y) \leq c$ を満たす．

Proof. 以下の二つ

- Definition 2.4 を満たすならば［1］,［2］を満たす．

・［1］,［2］を満たすならば Definition 2.4 を満たす.

を示せばよい.

・Definition 2.4 を満たすならば［1］,［2］を満たすことの証明：

［2］を示せばよい．$f\colon X \to Y$ に対し，定義より，ある擬等長写像 $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g$ が id_Y と finite distance である．任意の $y \in Y$ をとる．$x \coloneqq g(y)$ と定めることで,

$$d_Y(f(x), y) = d_Y((f \circ g)(y), y) \leq c$$

を満たす.

・［1］,［2］を満たすならば Definition 2.4 を満たすことの証明：

仮定より，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し,

(1) 任意の $x, x' \in X$ に対し，$\frac{1}{c}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + c$,

(2) 任意の $y \in Y$ に対しある $x \in X$ が存在し，$d_Y(f(x), y) \leq c$

が成り立つ．(2) と選択公理を用いて，$y \in Y$ に対し，$d_Y(f(x_y), y) \leq c$ を満たすような $x_y \in X$ を選ぶ. 写像 $g\colon Y \to X$ を，$y \mapsto x_y$ と定めると，$g \circ f$，$f \circ g$ はそれぞれ $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y$ から finite distance となる．実際に，任意の $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

となる．$f \circ g$ に関しても，任意の $y \in Y$ に対して,

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c$$

が成立する. □

Definition 2.6. Proposition 2.5 の条件［2］を f が満たすとき，f は **quasi-dense image** をもつという.

2.2 Quasi-Isometry of Groups

2.1 節では距離空間同士を大雑把にみることについて述べた．本節では群に距離を導入して距離空間として捉え，2.1 節の定義を群に対しても定義を行う．群に入れる距離は，Cayley グラフの一辺を長さ 1 として見ることで得られる距離であり，これは選ぶ生成系に依存してしまう．しかし，2.1 節で述べた bilipschitz equivalent や，擬等長といった “大雑把な視点” では， Proposition 2.9 により生成系に依らずに群と距離空間が同じ構造を持つかどうかの議論が可能となる.

以下，G を群として，S をその生成系とする.

Definition 2.7. 生成系 S による，群 G 上の **word metric** とは，$d_S\colon G\times G\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$d_S(g,h) \coloneqq \min\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid s_1,s_2,\ldots,s_n\in S\cup S^{-1},\ g^{-1}h=s_1s_2\cdots s_n\}$$

であり，これは G 上の距離関数である．

Example. 群 G の生成系 S による d_S は，$\mathrm{Cay}(G,S)$ の一辺の長さを 1 としたときに，最短経路を通ることで得られる距離関数と一致する ($\mathrm{Cay}(G,S)$ の定義は Definition A.1 を参照されたい).

Definition 2.8. G を有限生成群としたとき，G が距離空間 X に **bilipschitz equivalent** であるとは，G のある有限な生成系 S がとれ，距離空間 (G,d_S) と X が (2.1 節で定義した) bilipschitz equivalent であることをいう．また，G が X に **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは，ある有限な生成系 S がとれ，距離空間 (G,d_S) と X が (2.1 節で定義した) quasi-isometric であることをいう．

Remark. 群 G とその生成系 S からできる距離空間 (G,d_S) では，G が有限生成であること，S を有限としていることに注意.

Example. 群 $\mathbb{Z}^2$ とその生成系 $S=\{(0,1),(1,0)\}$ からなる距離空間 $(\mathbb{Z}^2,d_S)$ は，距離空間 $\mathbb{R}^2$ と擬等長である．このことは，Example 3.2 からも証明できる．

群に導入する距離関数を word metric にした場合，その定義からこの距離空間は生成系に大きく依存するため，距離空間と群が同じ構造を持つかどうかの議論が難しくなる．しかし，擬等長 (より一般に，bi-Lip) という “大雑把な視点” で見ると，生成系に依らずに議論することが可能である．

Proposition 2.9. S,S' をともに群 G の有限な生成系 としたとき，距離空間 (G,d_S) が 距離空間 (X,d_X) と f で bilipschitz equivalent ならば，$(G,d_{S'})$ と (X,d_X) も f で bilipschitz equivalent である．

Proof. $f\colon(X,d_X)\to(G,d_S)$，$f'\colon(X,d_X)\to(G,d_{S'})$ を共に bilipschitz equivalence とすると, 可換図式

$$\begin{tikzcd} & (G,d_S) \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\ (X,d_X) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & (G,d_{S'}) \end{tikzcd}$$

より，$f'=f\circ\mathrm{id}=f$ が成立する．bilipschitz equivalence の合成写像は bilipschitz equivalence なので，あとは id が bilipschitz equivalence であることを示せばよい．$c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を，

$$c \coloneqq \max_{s\in S\cup S^{-1}} d_{S'}(e,s)$$

とすると, S は有限なのでこれは有限値である．$g,h\in G$ をとり, $d_S(g,h)=n$ とし, $g^{-1}h=s_1s_2\cdots s_{n-1}s_n$

$(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \in S \cup S^{-1})$ と表せられるとする．このとき，S' 上での g, h の word metric は，

$$\begin{aligned} d_{S'}(g,h) &= d_{S'}(g, gs_1s_2\cdots s_n) \\ &\leq d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) + \cdots + d_{S'}(gs_1s_2\cdots s_{n-1}, gs_1s_2\cdots s_{n-1}s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_{n-1}) + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c + c + \cdots + c + c \\ &= cn = cd_S(g,h) \end{aligned}$$

となり，$d_{S'}(g,h) \leq cd_S(g,h)$ が得られる．同様の議論を S, S' を逆にしてすれば $d_S(g,h) \leq cd_{S'}(g,h)$ が得られる．id は全単射であることも含めると，id は bilipschitz equivalence である． □

2.3 Quasi-Geodesic Metric Spaces

本節では，1 節でも記した，よい距離空間について述べる．一般に距離空間では，二点が与えられたときに二点間の距離が定まるが，その距離を道のりとしたパスが距離空間上に存在するとは限らない．一方で，そのようなことが可能であるような距離空間を測地的といい，その条件をさらに緩めたものを擬測地的という．

Definition 2.10. 距離空間 X 上の長さ $L \in \mathbb{R}_{>0}$ の **測地線 (geodesic)** とは，$[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への等長埋め込み，つまり任意の二点 $t_1, t_2 \in [0, L]$ に対し，

$$|t_2 - t_1| = d_X(\gamma(t_2), \gamma(t_1))$$

をみたす $\gamma\colon [0, L] \to X$ のことである．また，X が **測地的 (geodesic)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ において，$\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = x'$ となるような 等長埋め込み γ がとれるときをいう．

Example. 通常の距離が入った $\mathbb{R}^n$ は測地的だが，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は測地的でない．実際，$(1, 0)$ と $(-1, 0)$ 間の距離は 2 だが，この測地線は原点を通ってしまう．一般に，$\mathbb{R}^n$ 上の凸集合は測地的である．

Definition 2.11. 距離空間 X 上の **(c, b)-擬測地線 ((c, b)-quasi-geodesic)** とは，とは，$[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への (c, b)-擬等長埋め込み，つまり任意の二点 $t_1, t_2 \in [0, L]$ に対し，

$$\frac{1}{c}|t_2 - t_1| - b \leq d_X(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) \leq c|t_2 - t_1| + b$$

をみたす $\gamma\colon [0, L] \to X$ のことである．また，X が **(c, b)-擬測地的 ((c, b)-quasi-geodesic)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ において，$\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = x'$ となるような (c, b)-擬等長埋め込み，γ がとれるときをいう．また，(c, b) を省略し，単に擬測地線や擬測地的ともいう．

Example. 通常の距離が入った $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は，$(1, \epsilon)$-測地的である $(\epsilon > 0)$．これは，原点中心で十分小さい半径の円で原点を迂回すれば，擬測地線が得られるからである．

3 主補題

本論文の主補題となる Švarc-Milnor Lemma と，それに関連する主張について紹介する．

3.1 Švarc-Milnor Lemma I

Theorem 3.1 ([4, Proposition 5.4.1])**.** G を群とし，(c,b)-擬測地的な距離空間 (X,d_X) 上に等長な群作用があるとする $(b,c>0)$．もしある部分集合 $B\subset X$ が存在し，

(a) $\operatorname{diam} B \coloneqq \sup\limits_{x,y\in B} d(x,y) < \infty$,

(b) $\bigcup_{g\in G} g\cdot B = X$,

(c) 集合 $S \coloneqq \{g\in G \mid g\cdot B'\cap B' \neq \emptyset\}$ が有限

を満たすならば,

(1) S は G の有限生成系であり，

(2) 任意の $x\in X$ に対して定まる写像 $\varphi\colon G\to X\ ;\ g\mapsto g\cdot x$ によって，G と X は擬等長である．

ただし，$B' \coloneqq \{x\in X \mid y\in B,\ d_X(x,y)\le 2b\}$ と定める．

Proof. (1) の証明：
$g\in G$ を任意にとる．$x\in B$ としたとき，X の仮定から $\gamma(0)=x$，$\gamma(L)=g\cdot x$ なる (c,b)-擬測地線 γ が存在する．$[0,L]$ をおおよそ $n\coloneqq\lceil L\cdot c/b\rceil$ 等分した点列を $t_i(0\le i\le n)$ とする．厳密には,

$$t_i \coloneqq i\cdot b/c\ (0\le i\le n-1),\ t_n\coloneqq L$$

と定める．この点列と対応するように，Imγ に点列 $x_i\in X(0\le i\le n)$ をとる．つまり，

$$x_i \coloneqq \gamma(t_i) \qquad (0\le i\le n)$$

である．B の仮定より，各 x_i に対して，$x_i\in g_i\cdot B$ となるような $g_i\in G$ を選ぶことができる (図 3 参照).

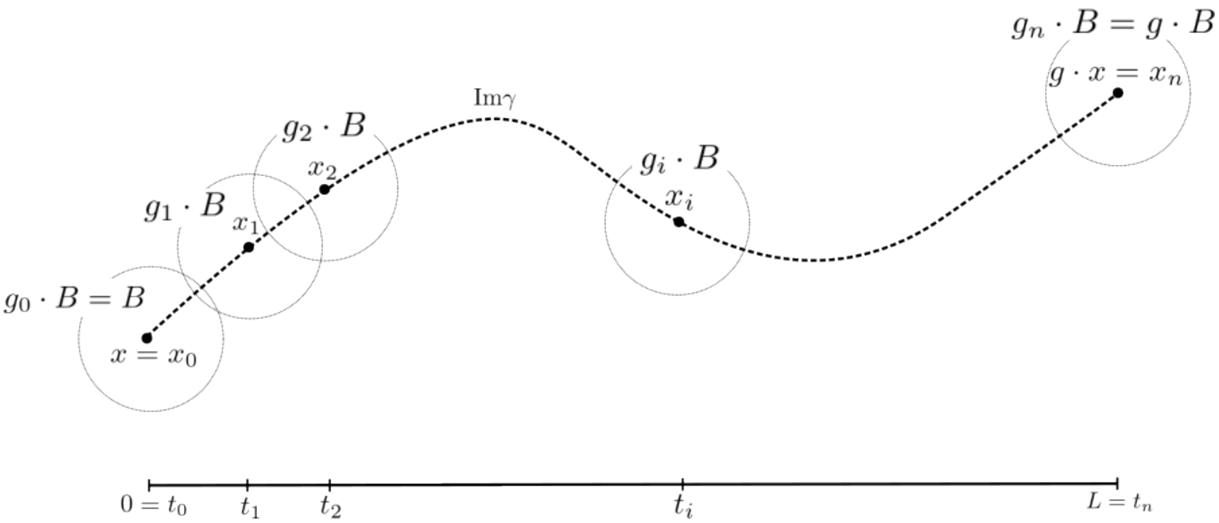


図 3: t_i, x_i, g_i の関係

ここで，$g_0 = e$，$g_n = g$ としておく．γ は (c,b)-擬測地線 なので，不等式

$$d(x_{i-1}, x_i) \leq c|t_{i-1} - t_i| + b = c \cdot b/c + b = 2b$$

を得る．等長に群作用をしていることに注意すると，

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B,\ d_X(x,y) \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B,\ d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B,\ d_X(x', y') \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る．$x_i \in g_i \cdot B \subset g_i \cdot B'$ でもあるので，

$$g_i \cdot B' \cap g_{i-1} \cdot B' \neq \emptyset,$$
$$(g_{i-1}^{-1} \cdot g_i) \cdot B' \cap B' \neq \emptyset.$$

よって, $(g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ であり, $s_i := (g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ とすれば, g は $g = g_n = e(g_0^{-1} g_1)(g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1} g_n) = es_1 s_2 \cdots s_n$ と S の元で表すことができる．

(2) の証明：
B の仮定より，任意の $x \in X$ は B に含まれていると考えてよい ($x \in g \cdot B$ となる $g \cdot B$ を改めて B とすればよいため).

［1］写像 $\varphi(g) = g \cdot x$ に関して，quasi-dense image であること，

［2］擬等長埋め込みであること

の二点を示す．

［1］ φ が quasi-dense image であることの証明：
任意の $x' \in X$ に関して，$x' \in g' \cdot B$ となる $g' \in G$ がとれるため，

$$d_X(x', \varphi(g')) = d_X(x', g' \cdot x) \leq \mathrm{diam}(g' \cdot B) = \mathrm{diam}\, B$$

仮定より $\mathrm{diam}\, B$ は有限なので，φ が quasi-dense image であることが示された．

［2］ φ が 擬等長埋め込みであることの証明：
ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し， 任意の $g, h \in G$ に対して，

$$\frac{1}{C} d_S(g,h) - B \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq C d_S(g,h) + B$$

であることを示せばいいが，word metric の定義と G が等長に作用していることから，

$$\begin{aligned}
d_S(g,h) &= d_S(e, g^{-1}h), \\
d_X(\varphi(g), \varphi(h)) &= d_X(g\cdot x, h\cdot x) \\
&= d_X(x, (g^{-1}h)\cdot x) \\
&= d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h))
\end{aligned}$$

が成立する．以上より，ある定数 $C>0, B\geq 0$ が存在し， 任意の $g\in G$ に対して，

$$\frac{1}{C}d_S(e,g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e,g) + B$$

が成立することを示せばよい．

$[2-1]$　$\frac{1}{C}d_S(e,g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g))$ が成立することの証明：
任意に $g\in G$ をとる．このとき，g に対して proof of (1) と同様の議論により $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\cup S^{-1}$ がとれ，$g = s_1 s_2 \cdots s_n$ と表せられる．このときの γ を用いて，

$$\begin{aligned}
d_X(\varphi(e), \varphi(g)) = d_X(x, g\cdot x) &= d_X(\gamma(0), \gamma(L)) \\
&\geq \frac{1}{c}L - b \\
&\geq \frac{1}{c}\frac{b(n-1)}{c} - b = \frac{b}{c^2}n - b - \frac{b}{c^2} \\
&\geq \frac{1}{c^2}d_S(e,g) - b - \frac{b}{c^2}
\end{aligned}$$

とすることで，目的の不等式が得られる．

$[2-2]$　$d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e,g) + B$ が成立することの証明：
任意に $g\in G$ をとる．$d_S(e,g) = n$ とし，$g = s_1 s_2 \cdots s_n$ と表せられるとする．このとき，各 $s_i \in S\cup S^{-1}$ $(1\leq i\leq n)$ に対して，S の定義 $B'\cap s_i\cdot B' \neq \emptyset$ より，

$$d_X(x, s_i\cdot x) \leq \operatorname{diam} B + 2b + \operatorname{diam} B = 2(\operatorname{diam} B + b)$$

が成立する (図 4 参照)．
これより，

$$\begin{aligned}
d_X(\varphi(e), \varphi(g)) = d_X(x, g\cdot x) &= d_X(x, s_1 s_2\cdots s_n x) \\
&\leq d_X(x, s_1 x) + d_X(s_1 x, s_1 s_2 x) + \cdots + d_X(s_1 s_2 \cdots s_{n-1}x, s_1 s_2\cdots s_n x) \\
&= d_X(x, s_1 x) + d_X(x, s_2 x) + \cdots + d_X(x, s_n x) \\
&\leq 2(\operatorname{diam} B + b)\cdot n \\
&= 2(\operatorname{diam} B + b)\cdot d_S(e,g)
\end{aligned}$$

を得る．　□

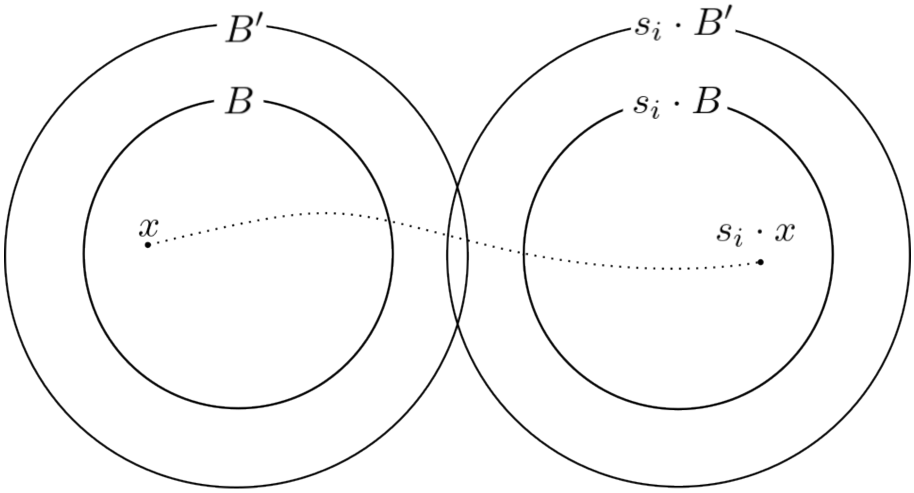


図 4: $d_X(x, s_i \cdot x)$ の不等式

Example 3.2. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{R}^2$ に群 $\mathbb{Z}^2$ が,

$$(1,0)\cdot(x,y) = (x+1, y),$$
$$(0,1)\cdot(x,y) = (x, y+1)$$

からなる作用をしているとする．作用の仕方からこれは等長な群作用である．$\mathbb{R}^2$ を $(1,1/4)$-擬測地的距離空間とし，部分集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ を,

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq x \leq 1/2,\ -1/2 \leq y \leq 1/2\}$$

とすれば，これは Theorem 3.1 の条件 (a),(b) を満たす．$S \subset \mathbb{Z}^2$ は,

$$\begin{aligned} S &= \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\} \\ &= \{-2,-1,0,1,2\} \times \{-2,-1,0,1,2\} \end{aligned}$$

となり，条件 (c) を満たす (図 5 参照)．よって，Theorem 3.1 より，$\mathbb{Z}^2$ は S によって生成され，$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{Z}^2$ は擬等長である．

3.2 Švarc-Milnor Lemma I の拡張

Theorem 3.1 は，群作用が等長でなくても成立する．つまり，以下のとおりである．

Theorem 3.3 ([4, Exercise 5.E.15])**.** Theorem 3.1 は，群 G が距離空間 X に等長な群作用だけでなく，擬等長な群作用としても成り立つ．

証明は，以下の Lemma 3.4–3.6 より与えらえる．

Lemma 3.4. Theorem 3.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長な作用でも $x_i \in g_{i-1} \cdot B'$ が成立する．ただし，$B' \coloneqq \{x \in X \mid y \in B,\ d_X(x,y) \leq 2bc' + b'\}$ とする．

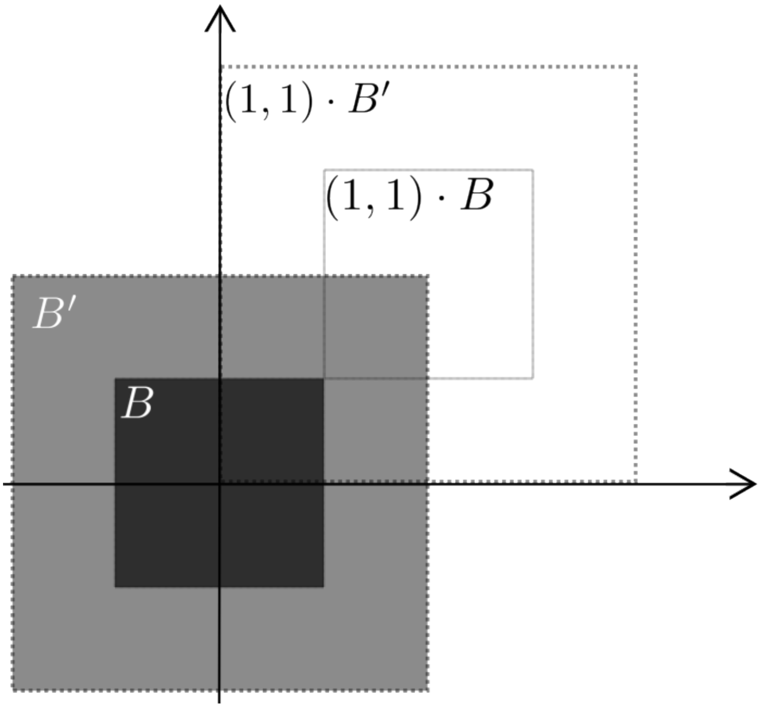


図 5: B, B' の図

Proof. 群作用が (c', b')-擬等長なので，

$$\frac{1}{c'}d_X(g\cdot x, g\cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq d_X(x,y)$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned}
x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1}\cdot B,\ d_X(x,y) \leq 2b\} \\
&\subset \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1}\cdot y \in B,\ \frac{1}{c'}d_X(g_{i-1}^{-1}\cdot x, g_{i-1}^{-1}\cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq 2b\} \\
&= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1}\cdot y \in B,\ d_X(g_{i-1}^{-1}\cdot x, g_{i-1}^{-1}\cdot y) \leq 2bc' + b'\} \\
&= g_{i-1}\cdot\{x' \in X \mid y' \in B,\ d_X(x', y') \leq 2bc' + b'\} \\
&= g_{i-1}\cdot B'
\end{aligned}$$

を得る． □

Lemma 3.5. Theorem 3.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長な作用でも $\mathrm{diam}(g'\cdot B) < \infty$ である．

Proof. 群作用が (c', b')-擬等長なので，

$$d_X(g\cdot x, g\cdot y) \leq c' d_X(x,y) + b'$$

が成立する．よって，

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(g'\cdot B) &= \sup_{x,y\in g'\cdot B} d_X(x,y)\\ &= \sup_{x',y'\in B} d_X(g\cdot x', g\cdot y')\\ &\le \sup_{x',y'\in B} c' d_X(x',y') + b'\\ &\le c' \operatorname{diam} B + b'\end{aligned}$$

となり，$\operatorname{diam}(g'\cdot B)$ は有限値． □

Lemma 3.6. Theorem 3.1 の証明において，群作用が (c',b')-擬等長な作用でも，定数 $C>0, B\ge 0$ があり，任意の $g,h\in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C}d_S(e,g) - B \le d_X(\varphi(e),\varphi(g)) \le C d_S(e,g) + B$$

が成立するならば，定数 $C'>0, B'\ge 0$ があり，任意の $g,h\in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C'}d_S(g,h) - B' \le d_X(\varphi(g),\varphi(h)) \le C' d_S(g,h) + B'$$

が成立する．

Proof. word metric の定義から，

$$d_S(g,h) = d_S(e, g^{-1}h) \tag{1}$$

が成立し，群作用が (c',b')-擬等長なことから，

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e),\varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x,(g^{-1}h)\cdot x)\\ &\le c' d_X(g\cdot x, h\cdot x) + c'b' = c' d_X(\varphi(g),\varphi(h)) + c'b', \qquad (2)\\ d_X(\varphi(e),\varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x,(g^{-1}h)\cdot x)\\ &\ge \frac{1}{c'}d_X(g\cdot x, h\cdot x) - \frac{b'}{c'} = \frac{1}{c'}d_X(\varphi(g),\varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \qquad (3)\end{aligned}$$

が成立する．仮定より，以下の不等式

$$\frac{1}{C}d_S(e,g) - B \le d_X(\varphi(e),\varphi(g)) \le C d_S(e,g) + B \tag{4}$$

が成立するので，これらの不等式を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}d_S(g,h) - B &= \frac{1}{C}d_S(e,g^{-1}h) - B && (1)\ より\\ &\le d_X(\varphi(e),\varphi(g^{-1}h)) && (4)\ より\\ &\le c' d_X(\varphi(g),\varphi(h)) + c'b', && (2)\ より\\ \frac{1}{Cc'}d_S(g,h) - \frac{B+c'b'}{c'} &\le d_X(\varphi(g),\varphi(h)) \end{aligned}$$

が得られ，もう一方も

$$\begin{aligned}
Cd_S(g,h)+B &= Cd_S(e,g^{-1}h)+B \qquad \text{(1) より} \\
&\geq d_X(\varphi(e),\varphi(g^{-1}h)) \qquad \text{(4) より} \\
&\geq \frac{1}{c'}d_X(\varphi(g),\varphi(h)) - \frac{b'}{c'}, \qquad \text{(3) より} \\
Cc'd_S(g,h)+(Bc'+b') &\geq d_X(\varphi(g),\varphi(h))
\end{aligned}$$

が得られ，目的の不等式が成立する． □

4 主補題のいいかえ

Theorem 3.1 の主張を言い換えた主張が存在する．その主張に必要な用語の定義を 4.1 節で行った後，4.2 節にて述べる．

4.1 準備

Definition 4.1. 距離空間 (X, d_X) が **proper** であるとは，任意の $x \in X$，$r \in \mathbb{R}_{>0}$ に関して，集合

$$\{y \in X \mid d_X(x,y) \leq r\}$$

が常にコンパクトになることをいう．

Example. ユークリッド空間は proper である一方，$\mathbb{R}$ の部分空間として $(0,1)$ に相対位相を入れた空間は，$(0,1)$ 自身は有界閉集合だがコンパクトでない．また，一つの頂点から無限本の辺が伸びているようなグラフは proper でない．

Definition 4.2. 群 G が位相空間 X に作用しているとする．この作用が **properly discontinuous** であるとは，任意のコンパクトな集合 $K \subset X$ に関して，

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをさす．

Example. $\mathbb{R}$ に $\mathbb{Z}$ が加法で群作用をしているとき，この作用は properly discontinuous である．しかし，$\mathbb{Q}$ が加法で群作用をしている場合，この作用は properly discontinuous ではない．

Definition 4.3. 群 G が位相空間 X に作用しているとする．この作用が **余コンパクト (cocompact)** であるとは，商集合 $G\backslash X$ がコンパクトであることをいう．言い換えると，あるコンパクトな集合 $K \subset X$ が存在し，

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$$

を満たす．商集合に関しては Definition A.6 を参照されたい．

Example. $\mathbb{R}$ に $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ が加法で群作用をしているとき，この作用は余コンパクトである．一方，$\mathbb{R}^2$ に $\mathbb{Z}$ が作用する場合，これは余コンパクトでない (商集合は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相であり，これはコンパクトでないため).

4.2 Švarc-Milnor Lemma II

Lemma 4.4 ([4, Corollary 5.4.2])**.** 群 G が，proper かつ擬測地的な距離空間 (X, d_X) に，等長に作用しているとする．この群作用が properly discontinuous かつ余コンパクトであれば，G は有限生成であり，G と X は擬等長である．

Proof. X は擬測地的であるので，Theorem 3.1 の仮定を満足するような $B \subset X$ をみつければよい．以下，X は $(1, b)$-quasi-geodesic であるとする $(b > 0)$．自然な射影 $\pi\colon X \to G\backslash X$ は開写像であるので，開球 $B_1(x) = \{y \in X \mid d_X(x, y) < 1\}$ の像 $\pi(B_1(x))$ は $G\backslash X$ 上の開集合である．また，$\pi(X) = G\backslash X$ より，$\{\pi(B_1(x))\}_{x \in X}$ は $G\backslash X$ の開被覆である．$G\backslash X$ のコンパクト性より，これらから有限個 $\{\pi(B_1(x_k))\}_{1 \le k \le n}$ の開被覆で $G\backslash X$ を覆うことができる．各開球 $B_1(x_k)$ の閉包 $\overline{B_1(x_k)}$ を考え，

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_1(x_k)}$$

とすれば,

(a) $\operatorname{diam} B < \infty$,

(b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$

をみたす．また，B はコンパクト集合である (X の proper 性から各 $\overline{B_1(x_k)}$ はコンパクトであり，B はそれらの有限和のため)．同様の議論として，$B' = \{x \in X \mid y \in B,\ d_X(x, y) \le 2b\}$ とすれば，これはコンパクト集合である．そして群作用が properly discontinuous であることから,

$$\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \ne \emptyset\}$$

は有限である (c). $\square$

4.3 応用例

この補題の応用例として，以下のような主張がある．

Corollary 4.5 ([4, Corollary 5.4.10])**.** M をコンパクトで境界のないリーマン多様体とする．M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ に，基本群 $\pi_1(M)$ が被覆変換で群作用をしているとき，$\pi_1(M)$ は有限生成であり，任意の $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ によって定まる写像

$$\pi_1(M) \to \widetilde{M}\ ;\ g \mapsto g \cdot \tilde{x}$$

は擬等長写像である．被覆変換に関しては Definition A.17 を，$\widetilde{M}$ 上の距離関数に関しては Definition A.20 を参照されたい．

Proof. 点 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ における $p\colon \widetilde{M} \to M$ の微分を

$$dp_{\tilde{x}}\colon T_{\tilde{x}}(\widetilde{M}) \to T_{p(\tilde{x})}(M)$$

とする．p は局所的に同相写像なので，$dp_{\tilde{x}}$ は特に単射である． $\widetilde{M}$ 上の点 $\tilde{x}$ におけるリーマン計量 $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ を，

$$\tilde{g}_{\tilde{x}}(u, v) \coloneqq g_{p(\tilde{x})}(dp_{\tilde{x}}(u), dp_{\tilde{x}}(v))$$

とすることで，$\widetilde{M}$ に距離が入る．

$\widetilde{M}$ が proper かつ測地的な距離空間であることを示す．

M はコンパクトな距離空間のため (距離空間として) 完備である．Hopf-Rinow の定理より，完備な距離空間は測地的完備であるので，M は測地的完備である．

$\widetilde{M}$ が測地的完備であることを示すために，任意の $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ と $v \in T_{\tilde{x}}(\widetilde{M})$ をとる．M が測地的完備なので，$\gamma(0) = p(\tilde{x}) \in M$，$\gamma'(0) = dp_{\tilde{x}}(v) \in T_{p(\tilde{x})}(M)$ となる測地線 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ が存在する．リフトの存在性 (Lemma A.15) より，$\gamma|_{[0,1]}$ のリフト $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \widetilde{M}$ であり，$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ となるようなものが存在する．このリフトを γ の定義域で繰り返し得ることで，定義域を $\mathbb{R}$ まで拡張することができる．このリフトは，$dp_{\tilde{x}}(\tilde{\gamma}'(0)) = \gamma'(0) = dp_{\tilde{x}}(v)$ と $dp_{\tilde{x}}$ の単射性から $\tilde{\gamma}'(0) = v$ である．このことから，$\widetilde{M}$ の測地的完備性が従う．

Hopf-Rinow の定理より，測地的完備な空間は (4.1 節て定義した) proper かつ測地的であるので $\widetilde{M}$ もそうである．

群作用が等長であることを示す．

$f \in \pi_1(M)$ とする．リーマン多様体における距離の定義より，f でベクトルを送る前と送った後で内積の値が一致することを示せば十分である． $p \circ f = p$ より，任意の $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ において，微分 $dp_{f(\tilde{x})} \circ df_{\tilde{x}} = dp_{\tilde{x}}$ が成立する．$u, v \in T_{\tilde{x}}(\widetilde{M})$ を f で送った $df_{\tilde{x}}(u), df_{\tilde{x}}(v)$ の内積は，

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{f(\tilde{x})}(df_{\tilde{x}}(u), df_{\tilde{x}}(v)) &= g_{p(f(\tilde{x}))}(dp_{f(\tilde{x})}(df_{\tilde{x}}(u)), dp_{f(\tilde{x})}(df_{\tilde{x}}(v))) \\
&= g_{p(\tilde{x})}(dp_{\tilde{x}}(u), dp_{\tilde{x}}(v)) \\
&= \tilde{g}_{\tilde{x}}(u, v)
\end{aligned}$$

となり，f で送る前の u, v の内積と一致する．

被覆空間の定義より，商集合 $\pi_1(M)\backslash\widetilde{M}$ は M と同相である．仮定より M はコンパクトなので，商集合 $\pi_1(M)\backslash\widetilde{M}$ もそうである．このことから群作用が余コンパクトであることが従う．

群作用が properly discontinuous であることを示す．

任意のコンパクトな集合 $\widetilde{K} \subset \widetilde{M}$ をとる．積空間 $\widetilde{K} \times \widetilde{K}$ 上の点 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ を覆う開集合を以下のように定める．

(1) $p(\tilde{x}) \neq p(\tilde{y})$ のときは，(M のハウスドルフ性から) 互いに素であるような $p(\tilde{x}), p(\tilde{y})$ をそれぞれ含む

開集合 $U_{p(\tilde{x})}$，$U_{p(\tilde{y})}$ が取れるので，それらを引き戻した $\widetilde{U}_{\tilde{x}} \ni \tilde{x}, \widetilde{U}_{\tilde{y}} \ni \tilde{y}$ の直積.

(2) $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ のときは，$p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ の近傍 U の逆像 $p^{-1}(U)$ から，$\tilde{x}, \tilde{y}$ をそれぞれ含むようにそれぞれ選んだ開集合 $\widetilde{U}_{\tilde{x}}, \widetilde{U}_{\tilde{y}}$ の直積.

このとき，(1) の開集合 $\widetilde{U}_{\tilde{x}}$，$\widetilde{U}_{\tilde{y}}$ では，任意の $g \in \pi_1(M) \setminus \{e\}$ に対し $p(g \cdot \widetilde{U}_{\tilde{x}}) \cap p(\widetilde{U}_{\tilde{y}}) = p(\widetilde{U}_{\tilde{x}}) \cap p(\widetilde{U}_{\tilde{y}}) = U_{p(\tilde{x})} \cap U_{p(\tilde{y})} = \emptyset$ となるため，$g \cdot \widetilde{U}_{\tilde{x}} \cap \widetilde{U}_{\tilde{y}} = \emptyset$ である．また，(2) の開集合 $\widetilde{U}_{\tilde{x}}$，$\widetilde{U}_{\tilde{y}}$ では，$g \cdot \tilde{x} = \tilde{y}$ となるので，被覆変換の一意性 (Lemma A.18) より $g \cdot \widetilde{U}_{\tilde{x}} \cap \widetilde{U}_{\tilde{y}} \neq \emptyset$ となる $g \in \pi_1(M) \setminus \{e\}$ は高々一個である．

$\widetilde{K} \times \widetilde{K}$ はコンパクトなので，以上の開集合からなる開被覆のうち，有限個で $\widetilde{K} \times \widetilde{K}$ を覆うことができる．各開集合で $g \cdot \widetilde{U}_{\tilde{x}} \cap \widetilde{U}_{\tilde{y}} \neq \emptyset$ となる $g \in \pi_1(M) \setminus \{e\}$ は高々一個であるので，$\{g \in \pi_1(M) \mid g \cdot \widetilde{K} \cap \widetilde{K} \neq \emptyset\}$ は有限集合である． □

Example. S^1 の基本群は $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ であり，S^1 の普遍被覆は $\mathbb{R}$ である．よって，Corollary 4.5 より，$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ は擬等長である (なおこの事実は，Definition 2.8 の定義から具体的に擬等長な写像を構成しても得られる).

A 付録

ここでは幾何学的群論の分野にて基本的な概念となる Cayley グラフや，その周辺の事項について述べる．A.3–A.4 節の基本群や被覆空間の概念は， [2, Section 1] を参考にした．なおここで述べるグラフとは，多重辺やループは許していないことに注意.

A.1 Cayley Graphs

群とその生成系に関する Cayley グラフとは，生成系を用いて群の構造を可視化することを目的としており，幾何学的群論では幅広く用いられている．たくさんの重要な性質を持っているが，ここではその定義と特徴的な定理の紹介に留める．

以下，G を群として，S をその生成系とする．

Definition A.1. 群 G の生成系 S に関する **Cayley グラフ (Cayley graph)** とは，以下のようなグラフである．このグラフを $\mathrm{Cay}(G, S)$ と表記する．

(1) 頂点集合を G とする．

(2) 辺集合を $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G,\ s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$ とする．

Example. $\mathbb{Z}^2$ の生成系 $\{(1,0),(0,1)\}$ と，$\{(1,1),(0,1)\}$ に関する Cayley グラフは以下のようになる (図 6).

Theorem A.2. F が自由群であり，S がその生成系の場合，$\mathrm{Cay}(F, S)$ は tree である．

Cayley グラフにサイクルがある場合，そのサイクルに沿って $S \cup S^{-1}$ の元を演算することで，非自明なリレーションが得られる．よって，非自明なリレーションがない，つまり自由群の場合，Cayley グラフ上にはサイクルができないので，tree となる．一方この逆は一般には成り立たない．Cayley グラフ上にサイ

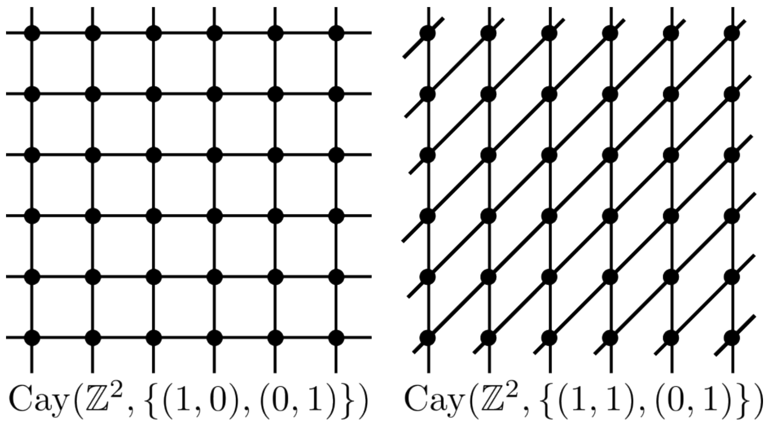


図 6: Cayley グラフの例

クルがなかったとしても，$s \cdot s' = e$ のような，二元からなる非自明なリレーションが存在するケースもあるためである．

Theorem A.3. $\mathrm{Cay}(G, S)$ が tree であり，任意の $s, s' \in S$ に対して $s \cdot s' \neq e$ のとき，G は自由群である．

A.2 Group Actions

以下，G を群，X を集合とする．

Definition A.4. 群 G が集合 X 上に**作用する (group action)** とは, 各 $g \in G$ に対して X から X への全単射な写像が存在し, その写像も g と表すとき,

(1) 任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し, $h(g(x)) = (hg)(x)$,

(2) $e(x) = x$

が成立することである．ただし, e は単位元である．

Remark. $g(x)$ を $g \cdot x$ と表記する．また，部分集合 $A \subset X$ に対し，$g \cdot A \coloneqq \{g \cdot x \mid x \in A\}$ とする．

Definition A.5. 群 G による集合 X への群作用が **自由 (free)** であるとは，任意の $g \in G \setminus \{e\}$ と任意の $x \in X$ に対して，$g \cdot x \neq x$ が成り立つときをいう．

Example. 群 $\mathbb{Z}^2$ の集合 $\mathbb{R}^2$ への加法での群作用は自由である．しかし，回転群 $\mathrm{SO}(2) \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ の $\mathbb{R}^2$ への群作用は自由でない．点 $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ は $\mathrm{SO}(2)$ のいかなる元を作用させても不動だからである．

Definition A.6. 群 G が 集合 X に群作用しているとする．元 $x \in X$ における，この群作用による**軌道 (orbit)** とは，集合

$$G \cdot x \coloneqq \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

のことである．また，この群作用による X の **商集合 (quotient)** とは，集合

$$G\backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\} \subset 2^X$$

のことである．

Example. 群 $\mathbb{Z}^2$ の集合 $\mathbb{R}^2$ への加法での群作用による，$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ の軌道は $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ である．また，この群作用による商集合は，代表元の集合が $[0,1) \times [0,1)$ であり，トーラス $S^1 \times S^1$ と同相である．

Definition A.7. $(V,E),(V',E')$ をグラフとする．$f\colon (V,E) \to (V',E')$ が **グラフ準同型 (graph homomorphism)** であるとは，以下の二条件が成り立つときをいう．

(1) $f\colon V \to V'$ が写像.

(2) $\{v,v'\} \in E \Rightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$.

また，f が **グラフ同型 (graph isomorphism)** であるとは，以下の二条件が成り立つときをいう．

(1) $f\colon V \to V$ が全単射.

(2) $\{v,v'\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$.

Definition A.8. 群 G がグラフ (V,E) にグラフ同型に作用しているとする．この作用が **自由 (free)** であるとは，任意の $g \in G \setminus \{e\}$ に対して，以下の二条件が成り立つときをいう．

(1) 任意の $v \in V$ に対して，$g(v) \neq v$.

(2) 任意の $v,v' \in V$ に対して，$\{g(v), g(v')\} \neq \{v,v'\}$.

Theorem A.9. 群 G が自由群であることと，G が自由に作用するような，(空でない) tree が存在することは同値.

以上の Theorem より自由群に対しては， tree に自由に作用することができる，という特徴づけを行うこともできる．この定理を認めれば，自由群の部分群が自由群であることを以下のように示すことができる．

Proposition A.10. 自由群の部分群は自由群である．

Proof. G を自由群とすると，Theorem A.9 より，G が自由に作用する tree が存在する．G の部分群もこの tree に自由に作用するため，Theorem A.9 より，G の部分群は自由群である． □

A.3 Fundamental Groups

以下，X を位相空間とする．

Definition A.11. X を位相空間とする．$I := [0,1]$ として，連続写像 $f\colon I \to X$ を **パス (path)** といい，$f(0) = f(1)$ のときを特に **ループ (loop)** という．また，パスの族 $f_t\colon I \to X$ $(0 \leq t \leq 1)$ が **ホモトピー (homotopy)** であるとは，以下の二条件が成り立つときをいう．

(1) $f_t(0) = x_0$，$f_t(1) = x_1$ が $t \in I$ に依らない.

(2) $F\colon I \times I \to X$; $(s,t) \mapsto f_t(s)$ が連続写像.

このとき，パス f_0 と f_1 を **ホモトピック (homotopic)** であるといい，$f_0 \simeq f_1$ と表記する．

Remark. Definition A.11 における $\simeq$ は，始点と終点が一致しているパス集合上の同値関係である．

Definition A.12. パス $f, g\colon I \to X$ に関して，$f(1) = g(0)$ のとき，f と g の演算を，

$$f \cdot g \coloneqq \begin{cases} f(2s) & (s \in [0, 1/2]), \\ g(2s-1) & (s \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

とする．$x_0 \in X$ を基点としたループの集合を Definition A.11 の同値関係 $\simeq$ で割り，演算

$$[f][g] \coloneqq [f \cdot g]$$

を導入することで群ができる．この群を **基本群 (fundamental group)** といい，$\pi_1(X, x_0)$ と表記する．

Example. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ の，基点 $(1,0)$ に関する基本群は，$\pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$ である．また，トーラス $T = S^1 \times S^1$ の基点 $(1,0) \times (1,0)$ に関する基本群は，$\pi_1(T, (1,0) \times (1,0)) \cong \mathbb{Z}^2$ である．

Remark. X が弧状連結のとき，X による基本群の同型類は基点に依らない．そこで，X が弧状連結のときは，基点を省略して単に $\pi_1(X)$ と表記する．なお，X が弧状連結とは，任意の二点 $x, y \in X$ に対し，$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ となるようなパスが取れるときをいう．

A.4 Covering Spaces

Definition A.13. $X, \widetilde{X}$ を位相空間，$p\colon \widetilde{X} \to X$ を連続写像とする．任意の $x \in X$ に対し，開近傍 $U \subset X$ と 開集合族 $\{\widetilde{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^{\widetilde{X}}$ が存在し，三条件：

(1) $\alpha, \beta \in \Lambda$ に関して，$\alpha \neq \beta$ ならば $\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta = \emptyset$.

(2) $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \widetilde{U}_\lambda$.

(3) 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し，$p|_\lambda$ によって $\widetilde{U}_\lambda$ と U は同相.

が成り立つとき，$\widetilde{X}$ と p の組 $(\widetilde{X}, p)$ を X の **被覆空間 (covering space)** という．また，p を省略し，$\widetilde{X}$ のみを被覆空間ということもある．

Example. $\mathbb{R}$ は S^1 の被覆空間である (図 7 参照).

Definition A.14. X を位相空間，$(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし，写像 $f\colon Y \to X$ は連続とする．連続写像 $\tilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ で，$p \circ \tilde{f} = f$ を満たすものを f の **リフト (lift)** という．

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

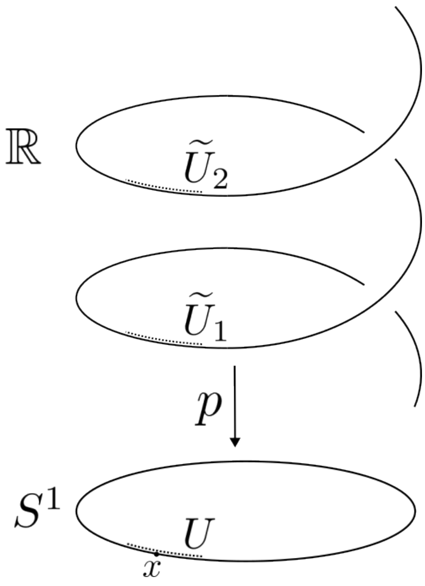


図 7: S^1 の被覆空間の例

Lemma A.15. 任意の連続写像 $f\colon [0,1] \to X$ と任意の $\tilde{x} \in p^{-1}(f(0))$ に対して，f のリフト $\tilde{f}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ かつ，$\tilde{f}(0) = \tilde{x}$ なるものが存在する．

Definition A.16. 位相空間 X の 被覆空間 $\widetilde{X}$ が **普遍被覆 (universal cover)** であるとは，$\widetilde{X}$ が弧状連結かつ $\pi_1(\widetilde{X})$ が自明群であることをいう．

Example. 図 7 より，$\mathbb{R}$ は S^1 の普遍被覆である．

Definition A.17. X を位相空間，$(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とする．写像 $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ が同相写像かつ $p \circ f = p$ をみたすとき，f を **被覆変換 (deck transformation)** という．

Example. S^1 の被覆空間 $\mathbb{R}$ をとる．$p\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$; $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ としたとき，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto t + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ は被覆変換である (図 8 参照).

Lemma A.18. X を位相空間，$(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし，$\widetilde{X}$ が連結であるとする．$x \in X$ に対し，$y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ としたとき，$f(y_1) = y_2$ となるような被覆変換 f は，存在すれば一意的である．

A.5 Riemannian Manifolds

Definition A.19. M を位相多様体とする．各点 $p \in M$ における接空間 $T_p(M)$ 上の内積 g_p があり，それが M 全体で C^∞ 級のとき，$(M, \{g_p\}_{p\in M})$ を **リーマン多様体 (Riemannian manifolds)** という．ただし，g_p が M 全体で C^∞ 級であるというのは，任意のベクトル場 $X = \{X_p\}_{p\in M}, Y = \{Y_p\}_{p\in M}$ に対し，$M \to \mathbb{R}$; $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ が C^∞ 級関数であるときをいう．

また，$p \in M$ における接空間 $T_p(M)$ 上のベクトル $u \in T_p(M)$ に関して，

$$\|u\| \coloneqq \sqrt{g_p(u,u)}$$

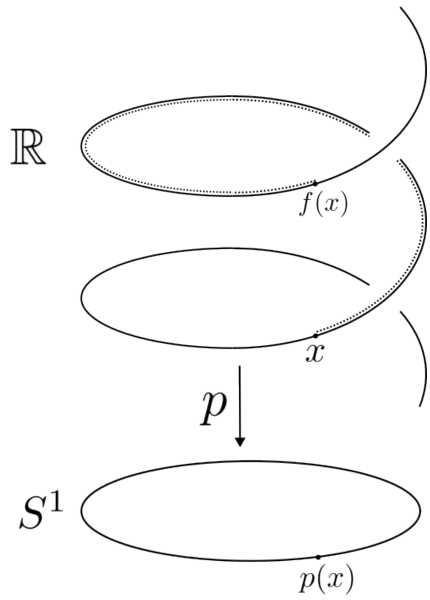


図 8: S^1 の被覆変換の例

を，u における **ノルム (norm)** という．さらに，曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ に対し，

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt$$

を曲線 γ の **長さ (length)** といい，二点間 $x_0, x_1 \in M$ の距離 d_M を，

$$d_M(x_0, x_1) \coloneqq \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x_1\}$$

と定める．

Remark A.20. $(M, \{g_p\}_{p\in M})$ をリーマン多様体とし，N を多様体，$f\colon N \to M$ とする．任意の $q \in N$ にて，微分 $df_q\colon T_q(N) \to T_{f(q)}(M)$ が単射のとき，N には M から誘導されるリーマン計量 $\{h_q\}_{q\in N}$ が，

$$h_q(u, v) \coloneqq g_{p(q)}(dp_q(u), dp_q(v))$$

で入り，そこから N には距離関数が入る．

Definition A.21. 多様体 M が **測地的完備** であるとは，任意の極大測地線 $\gamma\colon I \to M$ に対して，$I = \mathbb{R}$ が成り立つことをいう．

Theorem A.22 (Hopf-Rinow の定理)**.** M をリーマン多様体とすると，次の (1)–(3) は同値である．

(1) M の有界閉集合はコンパクトである．

(2) M は距離空間として完備である．

(3) M は測地的完備である．

また，測地的完備なリーマン多様体は測地的である．

参考文献

[1] A.S. Švarc, *A volume invariant of coverings*, Doklady Akademii Nauk SSSR, vol.105, 1955, pp.32–34.

[2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[3] Bridson-Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer, 1999.

[4] Clara Löh, *Geometric Group Theory*, Springer, 2018.

[5] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, Journal of Differential Geometry, vol.2, No.1, 1968, pp.1–7.

[6] J. Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups*, Journal of Differential Geometry, vol.2, No.1, 1968, pp.447–449.

[7] V.A. Efremovič, *The proximity geometry of Riemannian manifolds*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk 8, No.5, 1953, pp.189–191.

[8] 河野 俊丈，測地線と完備性など, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ kohno/lectures/dg9.pdf (2026/1/28 閲覧).

[9] 佐藤 隆夫，基本群と被覆空間，裳華房，2023.

[10] 正井 秀俊，群と幾何をみる，日本評論社，2023.