

2025 年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 卒業研究

Knotted Trivalent Graphs が生成する ベクトル空間と Vassiliev 不変量

2264246 宮路 宙澄

指導教員：野崎 雄太 准教授 (2026 年 1 月 30 日)

目次

1	導入	3
2	Knotted Trivalent Graphs	5
2.1	定義	5
2.2	Reidemeister 変形	7
2.3	Knotted Trivalent Graphs 上の演算	8
3	Vassiliev 不変量とコード図の空間	10
3.1	Vassiliev 不変量	10
3.2	コード図が満たす関係式	12
3.3	コード図の空間の演算	13
4	フィルトレーションの一致	18
4.1	演算により定まるフィルトレーション	18
4.2	主定理	18
付録 A	Theorem 3.3 の証明	23

1 導入

結び目理論とは、円周 S^1 の 3次元ユークリッド空間への埋め込みを研究する位相幾何学の分野の一つであり、物理学や化学とも密接に関係する分野である。この分野では我々が直感的に理解する“紐の結び目”を厳密に扱い、連続的な変形により移り合う結び目を同じ対象として、その数学的な構造を明らかにすることを目的としている。

結び目を分類するための強力な道具として結び目不変量がある。結び目不変量とは、結び目一つ一つに対し多項式などが与えられるものであり、有名な結び目不変量として、Jones 多項式や Alexander 多項式や HOMFLY 多項式、Arf 不変量などがある。特に、1990 年に V. A. Vassiliev [Vas90] によって導入された Vassiliev 不変量（有限型不変量とも呼ばれる）という不変量について本論文で扱う。Vassiliev 不変量は、結び目が生成するベクトル空間に特異点の個数によりフィルトレーションを与えることにより定義される。あるベクトル空間 V に部分ベクトル空間からなるフィルトレーション

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

が定まっている場合、フィルトレーションの n 番目のベクトル空間 V_n とその部分ベクトル空間である V_{n+1} により商ベクトル空間 V_n/V_{n+1} を構成する。これによりベクトル空間 V を次数付きベクトル空間として記述することができる。

円周 S^1 の埋め込みである結び目の研究をより一般的な 1次元の単体複体、すなわちグラフへと拡張することは自然である。このような対象は空間グラフと呼ばれる。空間グラフ理論とは、3次元ユークリッド空間において、いくつかの点を紐でつないでできる図形を研究する位相幾何学の分野の一つである。この分野では埋め込む対象を S^1 に限定していないため、統一的な取り扱いが難しく、結び目理論では見られない特有の現象が生じることがある。

本論文で扱う対象は空間グラフとは異なり、グラフにさらに“枠”の構造が付加されたものの 3次元ユークリッド空間への埋め込みである knotted trivalent graph (KTG) という D. P. Thurston [Thu02] により導入された対象を扱う。KTGs の理論では結び目理論と比べ、代数的な操作が多く備わっている。具体的には orientation switch, delete, unzip, connected sum という 4つの演算を備えている。特に、unzip という辺を二重化する操作を定義するために、枠付きグラフの概念が導入されている。単なる線としてのグラフでは、辺を 2本に二重化する際にどのように二重化するかが一意に定まらないため、枠の概念が必要となる。

本論文は、D. Bar-Natan と Z. Dancso による論文 [BND13] 「Homomorphic Expan-

sions for Knotted Trivalent Graphs」に基づき、ある 3 価グラフ Γ を骨格としてもつ KTGs 全体の集合が生成する \mathbb{Q} 上のベクトル空間 $\mathcal{K}(\Gamma)$ の代数的構造を明らかにすることが目的である。具体的には、まず $\mathcal{K}(\Gamma)$ の元は図 1 の「自明な四面体」と「ねじれた四面体」という 2 つの KTGs から、orientation switch, delete, unzip, connected sum の 4 つの演算を有限回適用することで得られることを述べる。なお、四面体とは 4 頂点 6 辺を持つグラフをいう。これら 2 つのグラフはグラフ同型である一方で、枠付きグラフとしては異なる対象であるため区別される。

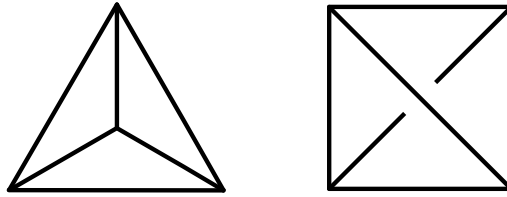


図 1: 自明な四面体 (左) とねじれた四面体 (右)

その次に、 $\mathcal{K}(\Gamma)$ 上に 2 通りのフィルトレーションを導入し、それらの関係性を調べる。1 つ目は、結び目理論における Vassiliev 不変量と同様に、特異点の解消によって定められるフィルトレーション

$$\mathcal{K}(\Gamma) \supset \mathcal{F}_1(\Gamma) \supset \mathcal{F}_2(\Gamma) \supset \mathcal{F}_3(\Gamma) \cdots$$

である。2 つ目は、KTGs 上の 4 つの演算 orientation switch, delete, unzip, connected sum によって代数的に定められるフィルトレーション

$$\mathcal{K}(\Gamma) \supset \mathcal{I}^1(\Gamma) \supset \mathcal{I}^2(\Gamma) \supset \mathcal{I}^3(\Gamma) \supset \cdots$$

である。本論文では、D. Bar-Natan と Z. Dancso による論文 [BND13] の Theorem 2.1 を参考にしてこれら 2 つのフィルトレーションが一致することを示す。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、指導教員である野崎雄太准教授に、ご丁寧なご指導を賜りましたことに深く感謝し、お礼申し上げます。また、同期である谷内賢翔氏と杉山和輝氏には様々な議論を通じて多くのご支援を頂きました。この場を借りて、心より感謝申し上げます。

2 Knotted Trivalent Graphs

2.1 定義

本論文で扱うグラフは有向であり，頂点を持たない円周成分やループや多重辺を許容する．また，各頂点に接続する辺に対し巡回順序を定める付加構造が与えられているものとする． e_1, e_2, e_3 が頂点に接続する辺であるとき，辺の巡回順序を (e_1, e_2, e_3) のように括弧を用いて表す．

Definition 2.1. 向き付け可能な滑らかな境界付き曲面 (orientable smooth surface with boundary) とはコンパクトで第 2 可算公理^{*1}を満たす向き付け可能な境界付き 2 次元 C^∞ 級多様体をいう．

Definition 2.2. 単体複体 Y の spine X とは， Y の部分複体 X であって， Y を X へ潰すことができるものをいう．ここで潰す (collapse) とは， k 単体 Δ^k と $k+1$ 単体 Δ^{k+1} の対を取り除いていく操作のことをいう．ただし， Δ^{k+1} はその境界上に Δ^k を持つような唯一の $k+1$ 単体でなければならない．

Definition 2.3. グラフ Γ に対し 枠付きグラフ (framed graph) $\mathbf{\Gamma}$ とは， Γ と， Γ を向き付け可能な滑らかな境界付き曲面 Σ に spine となるように埋め込む写像 $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$ の組 (Γ, Σ) のことである．ここで， Γ の Σ への埋め込みは各辺の内部において滑らかであるものとし，各頂点において辺の巡回順序が反時計周りとなる向きを Σ の表として定める．特に Γ が 3 価グラフのとき， $\mathbf{\Gamma}$ を 枠付き 3 価グラフ (framed trivalent graph) という．図 2 は枠付き 3 価グラフの例である．

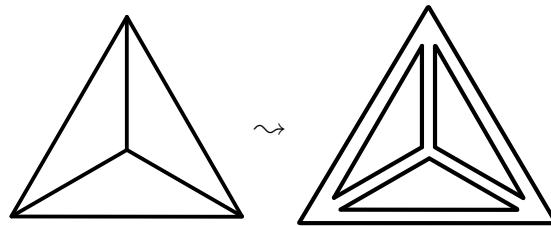


図 2: 枠付き 3 価グラフの例

2 つの枠付きグラフ $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, \Sigma), \mathbf{\Gamma}' = (\Gamma', \Sigma')$ が同値であるとは， Σ から Σ' への向きを保つ C^∞ 級微分同相写像 $h: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ が存在し， $h(\Gamma) = \Gamma'$ となることをいう．このと

^{*1} 高々可算な開基を持つ．

き, h はグラフ同型 $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ を誘導し, 各頂点において辺の反時計周りの順序を保つ. 以下では枠付きグラフはこの同値関係のもとで考える. また, 3 価グラフ Γ に対し, 枠付き 3 価グラフ Γ はこの同値関係のもとで一意に定まる.

Definition 2.4. 枠付き 3 価グラフ $\Gamma = (\Gamma, \Sigma)$ に対し, **knotted trivalent graph (KTG)** γ とは, 枠付き 3 価グラフ $\Gamma = (\Gamma, \Sigma)$ と滑らかな埋め込み $g: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ の組 (Γ, Σ, g) のことである. 図 3 は KTG の例を表している. また, knotted trivalent graph $\gamma = (\Gamma, \Sigma, g)$ の**骨格 (skeleton)** とは Γ のことをいい, 向き付けられた 3 価グラフ全体の集合を \mathcal{S} と書く.

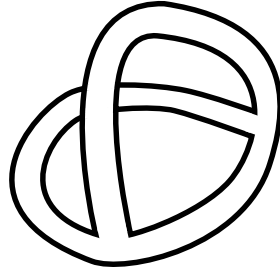


図 3: Knotted trivalent graph の例

Remark 2.5. Knotted trivalent graph は向き付けられているため, 表裏の情報が含まれていることに注意されたい. Knotted trivalent graph を描く際には blackboard framing を用い曲面を省略し骨格のみを描く. また, 頂点に接続する辺の順序 (e_1, e_2, e_3) に対し, 曲面の表からみたときに e_1, e_2, e_3 の順に反時計回りになるように描く.

Definition 2.6. 枠付き 3 価グラフを $\Gamma = (\Gamma, \Sigma)$ とする. このとき, 2 つの knotted trivalent graphs $\gamma_1 = (\Gamma, \Sigma, g), \gamma_2 = (\Gamma, \Sigma, h)$ が**枠付きイソトピック (framed isotopic)** であるとは, 滑らかな埋め込み

$$\Phi: \Sigma \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I \quad (I = [0, 1])$$

が存在し, 次の条件を満たすことをいう:

- (i) 任意の $x \in \Sigma$ と $t \in I$ に対し, $\Phi(x, t) = (\varphi_t(x), t)$ となる滑らかな埋め込み $\varphi_t: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ が存在する,
- (ii) $\varphi_0 = g$ かつ $\varphi_1 = h$ である.

以下では knotted trivalent graphs を枠付きイソトピックで同一視する. ここで, 骨格

が Γ である全ての knotted trivalent graphs の線形結合からなる \mathbb{Q} 上のベクトル空間を

$$\mathcal{K}(\Gamma) := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{ \gamma \mid \gamma \text{ は } \Gamma \text{ を骨格とする KTG} \}$$

とし,

$$\mathcal{K} := \bigoplus_{\Gamma \in \mathcal{S}} \mathcal{K}(\Gamma)$$

とする.

2.2 Reidemeister 変形

Definition 2.7. 3 価グラフ Γ に対し, Γ を台とする次数 n のコード図 (chord diagram of order n) とは, Γ と, Γ の边上の頂点を除いた相異なる $2n$ 個の点の組をいい, 各組を結ぶ線をコード (chord) という. ここで, コードは骨格とは区別された点線として視覚化され, コード図は辺の向きを保つ同相写像により同一視する. 図 4 に例を示す.

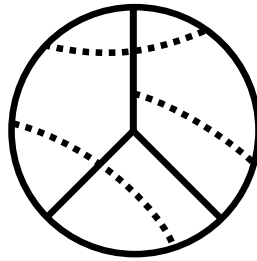
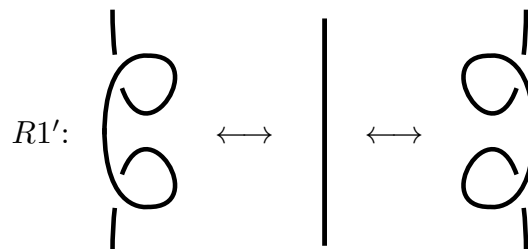


図 4: 3 価グラフ Γ を台とする次数 3 のコード図の例

Proposition 2.8. 2 つの knotted trivalent graphs が枠付きイソトピックであることと, それらのコード図が有限回の Reidemeister 変形 $R1', R2, R3, R4, R5$ で移り合うことは同値である.



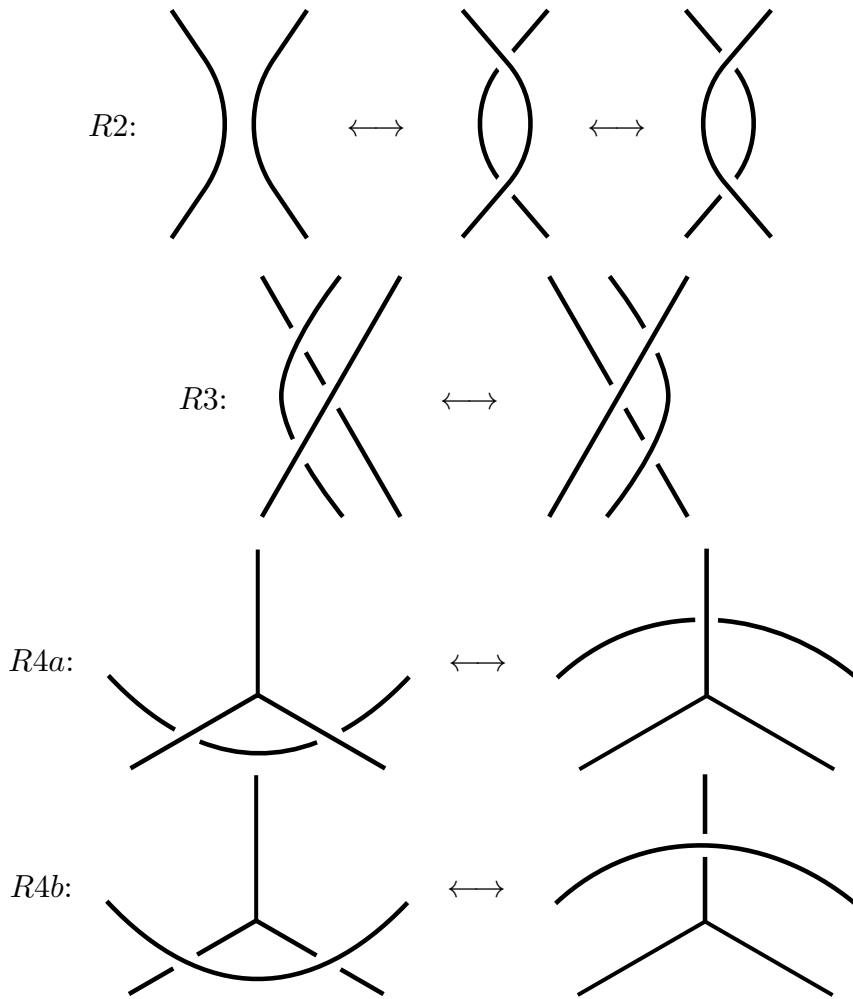


図 5: Knotted trivalent graphs における Reidemeister 変形

ここでは証明を省略する. 詳細は [MO97, Theorem 1.4] を参照されたい. 空間グラフに対して定義された拡張 Reidemeister 変形 [Yam87] に関して不変であることを示せば十分である.

2.3 Knotted Trivalent Graphs 上の演算

この章では \mathcal{K} における演算を 4 つ定義する:

Definition 2.9. Γ を 3 価グラフ, e を Γ の辺とする. e の向きを反転させる演算を **orientation switch** といい, 得られる 3 価グラフを $S_e(\Gamma)$ と表す. 同様に, $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$ に対し, 辺 e の **orientation switch** を, e の向きを反転させることによって定義し, S_e

と表す. この操作の例を図 6 に示す.

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

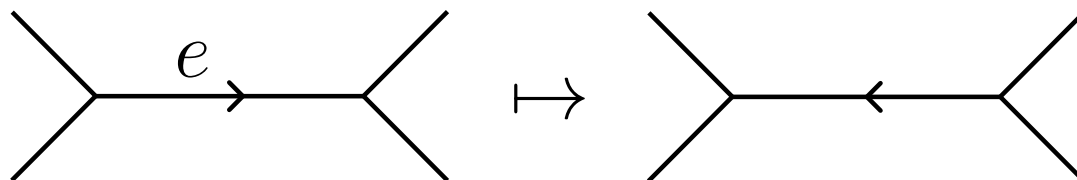


図 6: $\mathcal{K}(\Gamma)$ における orientation switch の例

Definition 2.10. Γ を 3 価グラフ, e を Γ の辺とする. e を取り除き, さらにその両端に生じる 2 価頂点を取り除き 1 本の辺にする演算を **delete** といい, 得られる 3 価グラフを $d_e(\Gamma)$ と表す. この演算を行うためには, e の両端に接続する 2 つの辺の向きが一致していることが必要である. また, $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$ に対しても同様に辺 e の **delete** を定義し, d_e と表す. 図 7 に例を示す.

$$d_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(d_e(\Gamma)); \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$

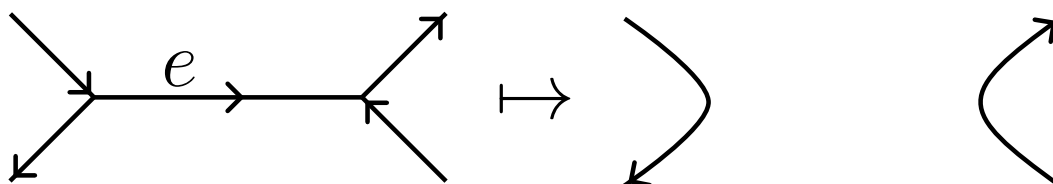


図 7: $\mathcal{K}(\Gamma)$ における delete の例

Definition 2.11. Γ を 3 価グラフ, e を Γ の辺とする. e を十分近い 2 つの辺に置き換え, さらに両端の頂点を取り除く演算を **unzip** といい, 得られる 3 価グラフを $u_e(\Gamma)$ と表す. このとき, e の始点に接続する 2 つの辺は両方とも e に入る向きであり, 終点に接続する 2 つの辺は両方とも e から出る向きでなければならない. ここで, 3 価グラフに対し頂点周りの順序を定めているため, 2 つに分割する方法は一意に定まることに注意されたい. 図 8 は unzip の適用例を表している. また, $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$ に対し辺 e の **unzip** を同様に定義し, u_e と表す.

$$u_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(u_e(\Gamma)); \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$

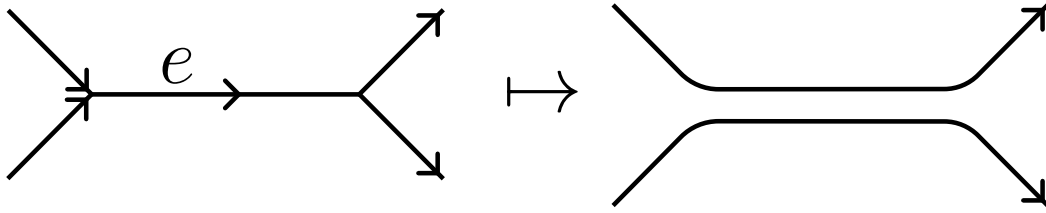


図 8: $\mathcal{K}(\Gamma)$ における unzip の例

Definition 2.12. $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$ をそれぞれ 3 価グラフとその辺の組とする. 辺 e と f を新たな辺で結ぶ演算を **connected sum** といい, 得られる 3 価グラフを $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$ と表す. 一意に定めるために, 新たな辺は Γ から Γ' へ向かう向きとする. また, $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma), \gamma' \in \mathcal{K}(\Gamma')$ とし, 2 つの組 $(\gamma, e), (\gamma', f)$ に対し新たな辺 e_{new} を用いて **connected sum** を同様に定義し, $\#_{e,f}$ と表す. ここで, e と f はそれぞれ e_1, e_2 と f_1, f_2 という 2 本の辺に分割され, 頂点の順序は $(e_1, e_2, e_{\text{new}})$ と $(f_1, f_2, e_{\text{new}})$ となるように定める. また, e_{new} はねじれを持たないものとする. 図 9 に例を示す.

$$\#_{e,f}: \mathcal{K}(\Gamma) \times \mathcal{K}(\Gamma') \rightarrow \mathcal{K}(\Gamma \#_{e,f} \Gamma')$$

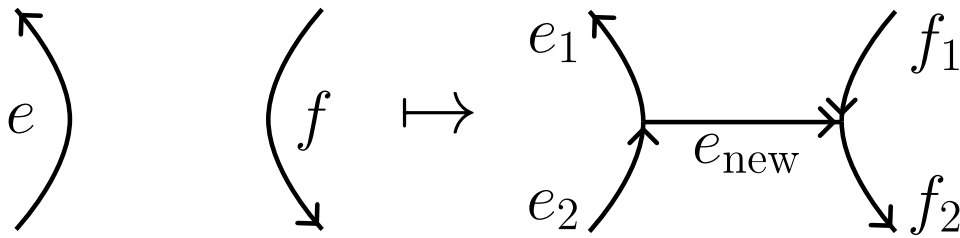


図 9: $\mathcal{K}(\Gamma) \times \mathcal{K}(\Gamma')$ における connected sum の例

これら 4 つの演算はベクトル空間 $\mathcal{K}(\Gamma)$ 上の線形写像を誘導する.

3 Vassiliev 不変量とコード図の空間

3.1 Vassiliev 不変量

結び目と同様の手順により KTGs の Vassiliev 不変量を定義する. 具体的には, “特異点” の解消によって得られるベクトル空間で $\mathcal{K}(\Gamma)$ 上にフィルトレーションを定める.

Definition 3.1. 3 価グラフ Γ に対し, Γ を骨格とする n 特異 KTG (n -singular KTG) とは, Γ から \mathbb{R}^3 へのはめ込みであって n 個の特異点を持つものをいう. ここで

特異点とは、互いに交差する2本の辺の横断的な2重点、または辺上に“ F ”と記された点 F のことである。図10は3特異 KTG の例である。

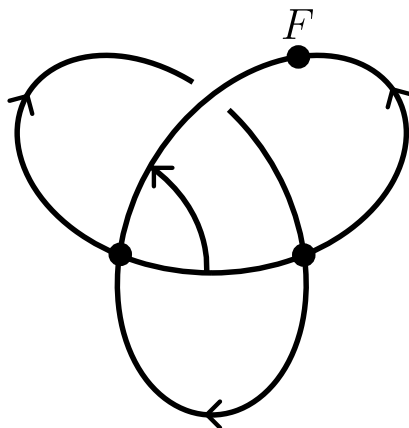
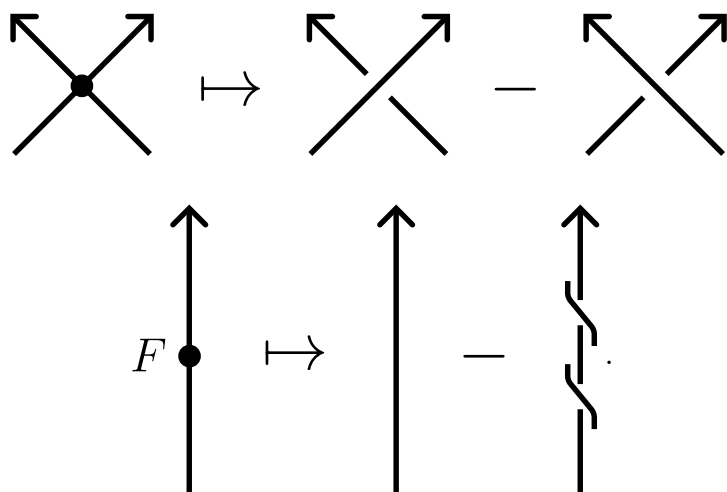


図10: 3特異 KTG の例

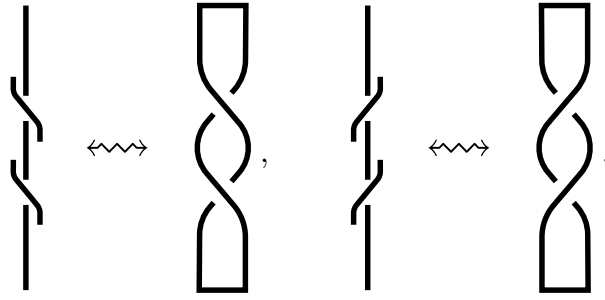
点 F は向き付け可能性を崩さないような1回転のねじれを許容するためのものである。
 $n \geq 0$ に対し、次のベクトル空間を考える:

$$\mathcal{F}'_n(\Gamma) := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \gamma' \mid \begin{array}{l} \gamma' \text{ は } \Gamma \text{ を骨格とし, 少なくとも} \\ n \text{ 個の特異点を持つ特異 KTG} \end{array} \right\}.$$

全ての特異点を同時に解消する写像 $\rho: \mathcal{F}'_*(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}_0(\Gamma)$ を以下のように定める:



ここで、枠の表記を省略しているため1回転のねじれはそれぞれ以下のように表している:



$\mathcal{F}'_n(\Gamma)$ ($n \geq 0$) に対し, $\mathcal{F}_n(\Gamma)$ を $\mathcal{F}_n(\Gamma) := \rho(\mathcal{F}'_n(\Gamma))$ と定義すると, 明らかに $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{F}_0(\Gamma)$ であり,

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{F}_0(\Gamma) \supset \mathcal{F}_1(\Gamma) \supset \mathcal{F}_2(\Gamma) \supset \mathcal{F}_3(\Gamma) \cdots$$

というフィルトレーションを得る.

Definition 3.2. 3 価グラフを Γ とする. このとき, d 次の **Vassiliev 不変量** とは, $\mathcal{K}(\Gamma)$ から \mathbb{Q} への線形写像 $v: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Q}$ であって, 任意の KTG $\gamma \in \mathcal{F}_{d+1}(\Gamma)$ に対し, $v(\gamma) = 0$ を満たすものをいう.

このフィルトレーションにおいて隣合う 2 つのベクトル空間から得られる商ベクトル空間を $\mathcal{A}_n(\Gamma) := \mathcal{F}_n(\Gamma)/\mathcal{F}_{n+1}(\Gamma)$ とし, 次数付きベクトル空間 (associated graded space) を以下のように定義する:

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(\Gamma) \left(= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(\Gamma)/\mathcal{F}_{n+1}(\Gamma) \right).$$

3.2 コード図が満たす関係式

次数 n のコード図を基底とする \mathbb{Q} 上のベクトル空間を $\mathcal{D}_n(\Gamma)$, つまり,

$$\mathcal{D}_n(\Gamma) := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{D \mid D \text{ は } \Gamma \text{ を台とする次数 } n \text{ のコード図}\}$$

とし, $\mathcal{D}(\Gamma) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n(\Gamma)$ とする. $\mathcal{A}(\Gamma)$ における 2 重点を, $\mathcal{D}(\Gamma)$ におけるコードに対応させることで, $\mathcal{D}(\Gamma)$ から $\mathcal{A}(\Gamma)$ への自然な全射 π が存在する. $\mathcal{D}(\Gamma)$ において, 以下の関係式を 4T, VI 関係式という:

- (4T) Four-term relation,

Definition 3.5. Γ を 3 価グラフ, e を Γ の辺とする. このとき, **delete** $d_e: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(d_e(\Gamma))$ はコード図 $D \in \mathcal{A}(\Gamma)$ に対し, 次のように定義される線形写像である:

$$d_e(D) = \begin{cases} 0 & (\text{辺 } e \text{ に端点を持つコードが存在する場合}), \\ D \setminus e & (\text{それ以外の場合}). \end{cases}$$

ここで, $D \setminus e$ はコード図 D から辺 e とその端点を取り除いたものを表す. 図 12 に例を示す.

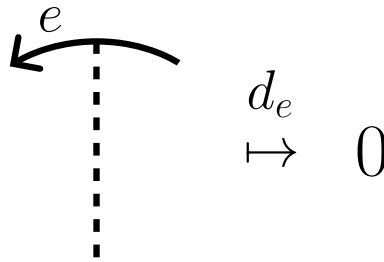


図 12: 辺 e に端点を持つコードが存在する場合の delete の例

Definition 3.6. Γ を 3 価グラフ, e を Γ の辺とする. このとき, **unzip** $u_e: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(u_e(\Gamma))$ はコード図 $D \in \mathcal{A}(\Gamma)$ に対し, 次のように定義される線形写像である:

$$u_e(D) = \sum_{\sigma: C_e(D) \rightarrow \{e_1, e_2\}} D_\sigma.$$

ここで $u_e(\Gamma)$ において辺 e は 2 本の辺 e_1, e_2 に分割されているものとし, 辺 e 上に端点を持つコードの端点の集合を $C_e(D)$ とし, 各写像 σ に対して D_σ は各端点 $p \in C_e(D)$ を辺 $\sigma(p)$ 上に配置して得られるコード図を表す. $k = |C_e(D)|$ とすると, $u_e(D)$ は 2^k 個の項の和となる. この操作の例を図 13 に示す.

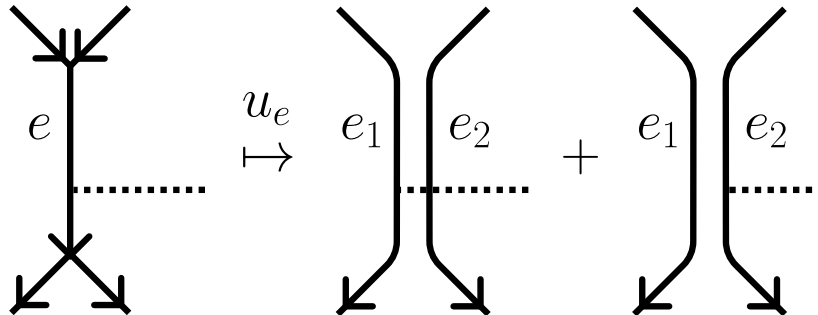


図 13: 辺 e に端点を持つコードが 1 本の場合の unzip の例

Definition 3.7. $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$ をそれぞれ 3 価グラフとその辺の組とする. このとき, **connected sum** $\#_{e,f}: \mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma') \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma \#_{e,f} \Gamma')$ はコード図 $D \in \mathcal{A}(\Gamma), D' \in \mathcal{A}(\Gamma')$ に対し, 次のように定義される線形写像である. 骨格 Γ, Γ' に対して辺 e, f の connected sum によって得られる 3 価グラフ $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$ 上において, D, D' のコードをその位置関係を変更することなくそのまま配置して得られるコード図を与える. 図 14 に例を示す.

[CDM12, Lemma 5.2.9 (Kirchhoff law)] により, 接続した 3 価頂点がコードを通り抜けることができるため well-defined である.

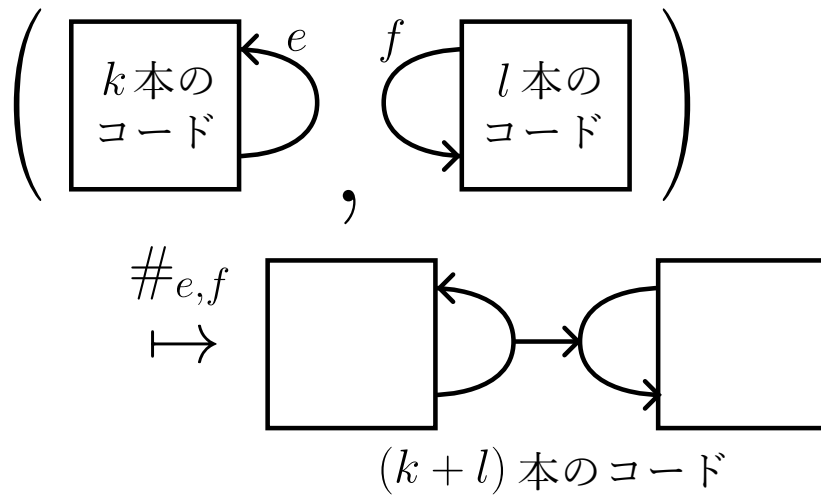


図 14: 辺 e, f による connected sum の例

Theorem 3.8 ([BND13, Theorem 2.1], [Thu02, Theorem 1]). 任意の KTG は, 「自明な四面体」と「ねじれた四面体」から 4 つの演算を有限回適用することで得られる. ここで, 自明な四面体とねじれた四面体は図 15 の 2 つである.

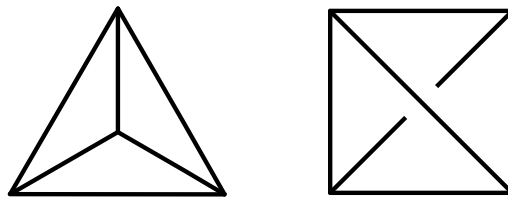
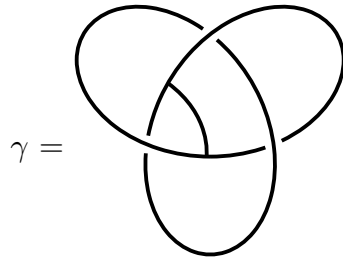
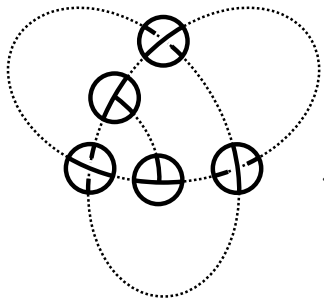


図 15: 自明な四面体 (左) とねじれた四面体 (右)

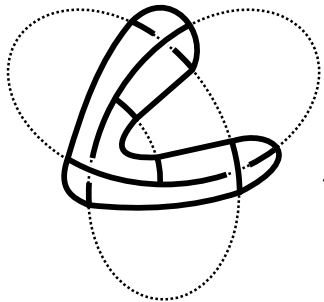
Proof. 任意の KTG γ をとる. γ の交差の数だけ自明な四面体を, 3 価頂点の数だけねじれた四面体を用意し, 4 つの演算を用いて元の KTG を表す. ここでは簡単のため



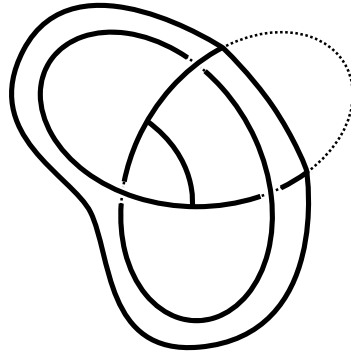
とする. この場合, 自明な四面体を 3 つ, ねじれた四面体を 2 つ用意し元の KTG の向きに合わせて配置する:



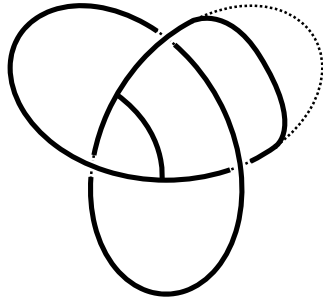
ここで, 自明な四面体とねじれた四面体の外周の向きは問わない. その後, 四面体同士を木構造となるように connected sum により接続し, さらに unzip を適用する:



辺の向きは orientation switch を用いて同調するように調整し, 1 つの辺がつながっている 3 価頂点同士を接続する際は unzip のみを適用し, 最後の 1 組となるまで続けると以下のようなになる:



最後に外周を delete することで, 元の KTG γ を得る:



この手順は他の KTG に対しても同様に適用できるため, 任意の KTG は自明な四面体とねじれた四面体から 4 つの演算を有限回適用することで得られる. \square

Theorem 3.9 ([BND13, Theorem 2.1]). 任意の n 特異 KTG は, 自明な四面体, ねじれた四面体, および「特異なねじれた四面体」から 4 つの演算を有限回適用することで得られる. ここで, 特異なねじれた四面体を図 16 に示す.

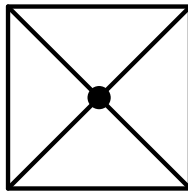


図 16: 特異なねじれた四面体

Proof. 2 重点に特異なねじれた四面体を対応させることにより, Theorem 3.8 と同様の手順で示せる. \square

4 フィルトレーションの一致

4.1 演算により定まるフィルトレーション

S を向き付けられた 3 価グラフ全体の集合とする.

Definition 4.1. Γ を 3 価グラフとする. $\mathcal{K}(\Gamma)$ の部分集合であって係数の和が 0 となるような形式和全体から生成される集合を $\mathcal{I}(\Gamma)$ と書き,

$$\mathcal{I} := \bigoplus_{\Gamma \in S} \mathcal{I}(\Gamma)$$

とする.

Example 4.2. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を, Γ を骨格とする KTGs とする. このとき, $\gamma_1 - \gamma_2, \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3 \in \mathcal{I}(\Gamma)$ である.

Definition 4.3. $n \geq 1$ に対し, \mathcal{I} の元を少なくとも n 個含むようなものから, \mathcal{K} 上の演算 (orientation switch, delete, unzip, connected sum) の有限回の合成で得られる元全体で張られる部分空間を \mathcal{I}^n とする. つまり,

$$\mathcal{I}^n := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ f(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \mid \begin{array}{l} f: \mathcal{K} \text{ 上の演算の有限回の合成,} \\ \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathcal{K}, \#\{i \mid \gamma_i \in \mathcal{I} \subset \mathcal{K}\} \geq n \end{array} \right\}.$$

さらに, $\mathcal{I}^n(\Gamma) := \mathcal{I}^n \cap \mathcal{I}(\Gamma)$ とする. つまり, $\mathcal{I}^n(\Gamma)$ は \mathcal{K} において, 「係数の和が 0 になるような \mathcal{I} の元」を少なくとも n 個含むような組に対し, \mathcal{K} 上に定められた 4 つの演算を有限回適用して得られる元全体で張られる部分空間のうち, 骨格として Γ を持つものの空間である.

ここで, $\mathcal{K}(\Gamma)$ には明らかに以下のフィルトレーションが定まる:

$$\mathcal{K}(\Gamma) \supset \mathcal{I}^1(\Gamma) \supset \mathcal{I}^2(\Gamma) \supset \mathcal{I}^3(\Gamma) \supset \dots$$

4.2 主定理

Lemma 4.4. $\mathcal{I}(\Gamma) = \left\{ \sum_i c_i(\gamma_i - \gamma'_i) \mid \gamma_i, \gamma'_i \in \mathcal{K}(\Gamma), c_i \in \mathbb{Q} \right\}$.

Proof. (⊃) 各 $c_i(\gamma_i - \gamma'_i)$ の係数の和は 0 であるため, 係数の総和も 0 である.

(⊂) 任意に $\gamma \in \mathcal{I}(\Gamma)$ をとる. このとき $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{K}(\Gamma)$ と総和が 0 となる $c_1, \dots, c_n \in$

\mathbb{Q} を用いて $\gamma = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i$ と表せる. $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ より, $c_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i$ となる. よって,

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \cdots + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} c_i \right) \gamma_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (\gamma_i - \gamma_n).$$

□

Theorem 4.5 ([BND13, Theorem 2.1]). 任意の $n \geq 1$ と 3 価グラフ Γ に対し, $\mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$ が成り立つ.

Proof. (i) $\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{F}_1(\Gamma)$

(\subset) 任意の $\gamma \in \mathcal{F}_1(\Gamma)$ は少なくとも 1 つの特異点を持つため, 正負の交差の差, または点 F に対応するねじれの差として書ける. つまり, ある $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}(\Gamma)$ が存在して, $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ と書ける. よって, $\mathcal{F}_1(\Gamma) \subset \mathcal{I}(\Gamma)$.

(\supset) 任意の $\gamma \in \mathcal{I}(\Gamma)$ は Lemma 4.4 より $\sum_i c_i (\gamma_i - \gamma'_i)$ と表すことができる. $\mathcal{F}_1(\Gamma)$ において, 同じ骨格を持つ任意の 2 つの KTG は交差の上下の変更により移りあうため, $\gamma_i - \gamma'_i$ を 1 点における正負の交差の差 $\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}'_i$ となるようにできる. よって

$$\gamma = \sum_i c_i (\gamma_i - \gamma'_i) = \sum_i c_i (\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}'_i) \in \mathcal{F}_1(\Gamma).$$

(ii) $\mathcal{I}^n(\Gamma) \subset \mathcal{F}_n(\Gamma)$

$\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{F}_1(\Gamma)$ より, 任意の元 $\gamma \in \mathcal{I}^n(\Gamma)$ は $\mathcal{F}_1(\Gamma)$ の元を少なくとも n 個含むものから 4 つの演算を有限回行うことで得られる. よって, 4 つの演算が特異点の数を保存することを示せば十分である. 特異点が点 F の場合は orientation switch と delete と connected sum の場合は明らかであるため, unzip について特異点の個数を保存することを確認する. 交差の上下を入れ替えたものや, ねじれない場合のものを足し引きすることにより, 以下の式変形により特異点の個数が保存されることが分かる.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \bullet \\ | \\ e \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ e \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \text{crossing} \\ | \\ e \end{array}$$

$$\begin{aligned}
u_e &\mapsto \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ - \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ - \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ F \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ F \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ F \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ - \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ F \end{array} .
\end{aligned}$$

次に、特異点が2重点の場合を示す。

- orientation switch の場合,

$$\gamma = \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad f \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad f \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad f \end{array} .$$

e が f に接続していない場合,

$$S_e \mapsto \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad f \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad f \end{array} = (-1) \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad f \end{array} .$$

e が f に接続している場合,

$$S_e \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot$$

いずれの場合も, 2重点の数は変わらない.

- delete の場合,

$$\gamma = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f - \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f$$

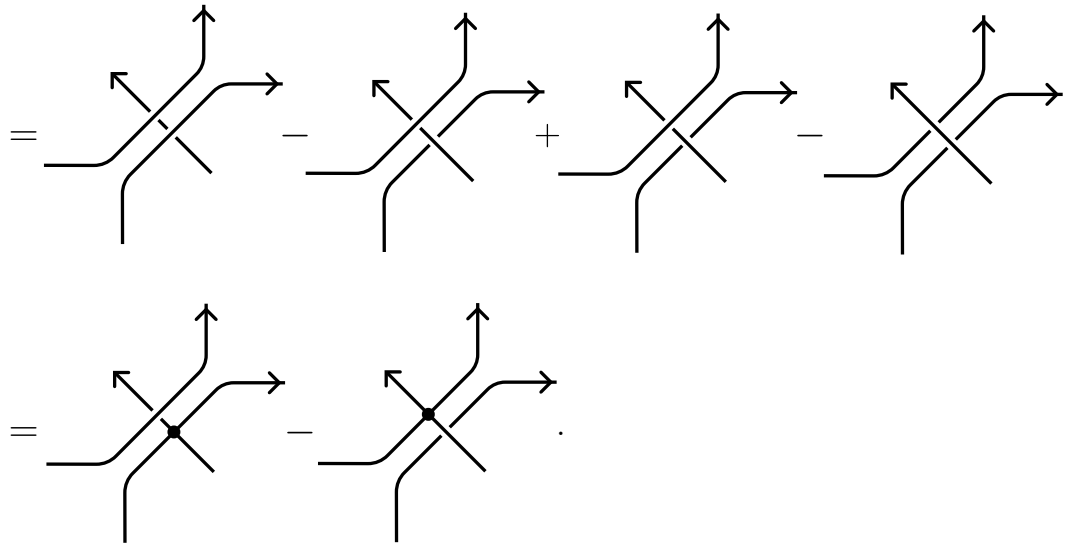
$$d_e \mapsto \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = 0.$$

e が f に接続しているかどうかにかかわらず, $d_e(\Gamma) = 0$ である. 0 は全ての $n \geq 0$ に対して \mathcal{F}_n に含まれるため, 特異点の数は変わらない.

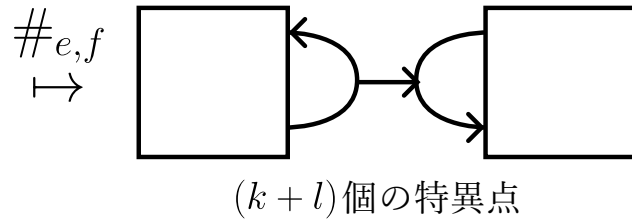
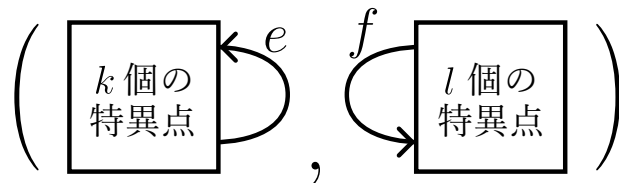
- unzip の場合, 同じ KTG を足し引きすることで特異点の個数が保存されることを示す.

$$\gamma = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f - \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f$$

$$u_e \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f - \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \cdot e \quad f$$



- connected sum の場合, k 個の特異点を持つ KTG の辺 e と, l 個の特異点を持つ KTG の辺 f の connected sum を考える.



(iii) $\mathcal{F}_n(\Gamma) \subset \mathcal{I}^n(\Gamma)$

任意の $\mathcal{F}_n(\Gamma)$ の元は Theorem 3.9 より, n 個の 1-特異 KTG に 4 つの演算を有限回適用することで得られるため明らかに成り立つ.

よって任意の $n \geq 0$ と 骨格 Γ に対して $\mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$ が成り立つ. \square

付録 A Theorem 3.3 の証明

初めに 4T 関係式について確認する. 証明の準備として, 以下の関係式

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \\
 & \stackrel{R3}{=} \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} = \text{Diagram 6}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

が成り立つ. (1) の左辺の図式に対し, 異なる図式を足し引きすることで 2 重点を 2 つもつもの関係式を導出する:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 & = \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
 & = \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} - \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} \\
 & = \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}.
\end{aligned}$$

ここで、(1) を用いて以下の関係式を得る:

$$\begin{array}{c}
\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0. \\
1 \quad 2 \quad 3
\end{array}$$

順序付けられた辺をそれぞれ接続し、2重点をコードと見なす:

$$\begin{array}{c}
\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0, \\
1 \quad 2 \quad 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0. \\
 \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3}
 \end{array}$$

最後に、骨格を円周状に変形することで 4T 関係式を得る。

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0. \\
 \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3}
 \end{array}$$

次に VI 関係式について確認する。VI 関係式は合計 8 つの式であるため、ここでは 3 価頂点に対し 2 つが入る向きであり、1 つが出る向きであるものを考える。まず、以下の関係式が成り立つ:

$$\text{Diagram 1} \stackrel{R4}{=} \text{Diagram 2} \stackrel{R2}{=} \text{Diagram 3}$$

(3) の左辺の図式に対し、異なる図式を足し引きすることで 2 重点を 1 つもつもの関係式を導出する:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 & = \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
&\quad - \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \\
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 9} + \text{Diagram 8}
\end{aligned}$$

ここで、(3) を用いて以下の関係式を得る:

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 9} = 0.$$

最後に、弧状になっている辺を直線に変形することで VI 関係式を得る.

$$\text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + (-1) \text{Diagram 12} = 0.$$

参考文献

- [BND13] D. Bar-Natan and Z. Dancso. Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs. *J. Knot Theory Ramifications*, 22(1):1250137, 33, 2013.
- [CDM12] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge University Press, 2012.
- [MO97] J. Murakami and T. Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Thu02] D. P. Thurston. The algebra of knotted trivalent graphs and Turaev’s shadow world. *Geometry & Topology Monographs*, 4:337–362, 2002.
- [Vas90] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. *Theory of singularities and its applications*, 1:23–69, 1990.
- [Yam87] S. Yamada. An invariant of spatial graphs. *数理解析研究所講究録*, 636:16–41, 1987.