線形代数学 I

2026 年 4 月

50 組（末尾が奇数） & 51 組

リンク先の「講義」に本日のスライドがあります：
https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nozaki/

事務連絡

- 担当：野崎雄太（のざきゆうた）
- 時間：月曜 14:45–16:15．具体的には 4 月 13, 20, 27 日, 5 月 11, 18, 25 日, 6 月 1, 8, 15, 17(水 6), 22, 29 日, 7 月 6, 13, 27 日（および期末試験）の予定です．実際には休講等による変更もあり得ますので，その際は適宜お知らせします．
- 講義室：N1.
- 成績：中間試験と期末試験の点数に日々の課題を加味して決める予定です．
- 資料：スライド（配布版）を Moodle に掲載します．

その他

- 連絡先は `nozaki@math.sci.hokudai.ac.jp` です．メールは時間を気にせずに送って構いません．ただし「件名，宛名，差出人」を必ず記載してください．また質問への回答に対しては，一言でよいので返信しましょう．
- 研究室は 4 号館 513 室です．アポイントメントを取らずに訪ねて大丈夫です．もちろん不在の場合もあります．

教科書

基本的には，三宅敏恒「入門線形代数」（培風館）に沿って進め，半年で第 3 節の終わりまでを扱う予定です．他によく知られた教科書として，

- 齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会
- 佐武一郎「線型代数学 (新装版)」裳華房
- 松坂和夫「線型代数入門」岩波書店
- 川久保勝夫「線形代数学 [新装版]」日本評論社
- 藤岡敦「手を動かしてまなぶ線形代数」裳華房

などがあります．[三宅] もしくは上記のうち 1 冊を手元に置くことを強く推奨します．また様々な演習書も出版されているので，必要に応じて活用してください．

本来の意味を尊重すると「線型」と書くべきかもしれないが，本講義では「線形」と書くことにする．

授業計画

- 行列の定義と演算
- 行列の基本変形と階数
- 連立１次方程式
- 掃き出し法と逆行列
- 中間試験
- 置換と行列式
- 行列式の性質
- 余因子と Cramer の公式
- 固有値と固有ベクトル
- 2×2 行列の対角化
- 期末試験

行列

本講義の主役は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ のように数が並んだものである．ここで数は実数の範囲で考えるものとし，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く．複素数の場合も以降の議論はそのまま成り立つ．なお整数，有理数，複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ と書く．

定義 1.1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ または } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R})$$

のように mn 個の数が並んだものを $m \times n$ **行列**と言う．
a_{ij} を (i, j) **成分**と呼び，それを含む行と列を順に**第 i 行**，**第 j 列**と呼ぶ．
また上記の行列を $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ や $(a_{ij})_{i,j}$ とも書く．

$$
\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\pi \end{pmatrix}
$$

は順に 2×3, 1×4, 2×1 行列である．特にベクトルは行列の特別な場合と思える．一般に，$1 \times n$ 行列を**行ベクトル**，$m \times 1$ 行列を**列ベクトル**と呼ぶ．

高校ではベクトルを $\vec{a}$ のように書いていたと思うが，大学では太字 $\boldsymbol{a}$ を用いることが多い．また列ベクトルとして表記すると都合の良い場面が多い．

定義 1.2

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の**内積** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.
$$

内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ や $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と書くこともある．

行列に関する用語と例

定義 1.3

- $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ に対して，$n \times m$ 行列 $(a_{ji})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ を A の**転置行列**と呼び，${}^tA$ または A^T と書く．
- (i, i) 成分のことを**対角成分**と呼ぶ．
- $n \times n$ 行列を n **次正方行列**と呼ぶ．
- 対角成分が 1，それ以外が 0 である n 次正方行列を n **次単位行列**と呼び，E_n と書く．型が明確な文脈では単に E と書き，また I_n や I とも書く．
- 全ての成分が 0 である $m \times n$ 行列を**零行列**と呼び，$O_{m,n}$ と書く．型が明確な文脈では単に O と書き，また $O_{n,n}$ は O_n とも書かれる．

$$ {}^t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = O_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

行列の和

定義 1.4

型が等しい 2 つの行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ と $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ に対して，それらの**和** $A \underset{\text{mat}}{+} B$ を次で定義する：$A \underset{\text{mat}}{+} B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

- 右辺の $+$ は実数の和であり，それは既知である．
- 2 つの行列の型が等しくないとき，和は定義されない．

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{mat}}{+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

行列は matrix の和訳であり，line や parade とは異なる．matrix の原義は母，母体，基盤などである．

行列のスカラー倍

定義 1.5

行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，**スカラー倍** $c \underset{\mathsf{mat}}{\cdot} A$ を次で定義する：
$c \underset{\mathsf{mat}}{\cdot} A = (c \cdot a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

右辺の $\cdot$ は実数の積であり，それは既知である.

$$\frac{1}{2} \underset{\mathsf{mat}}{\cdot} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

定義 1.6

$l\times m$ 行列 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le l\\1\le j\le m}}$ と $m\times n$ 行列 $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ に対して，$l\times n$ 行列 $\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\le i\le l\\1\le j\le n}}$ を考える．これを A と B の**積**と呼び，$A\underset{\mathsf{mat}}{\cdot}B$ と書く．

- $l\times m$ 行列と $m'\times n$ 行列の積は $m=m'$ の場合に限り定義され，その結果は $l\times n$ 行列である．
- 以下のように A を行ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_l$ に，B を列ベクトル $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ に分解すると，(i,j) 成分は内積 ${}^t\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j$ に等しい．

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{array}\right)\underset{\mathsf{mat}}{\cdot}\left(\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_n \\ {}^t\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_l\cdot\boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_l\cdot\boldsymbol{b}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_l\cdot\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

行列の積の例

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{array}\right) \underset{\text{mat}}{\cdot} \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{mat}}{\cdot} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 & 17 \\ 38 & 50 & 62 & 74 \end{pmatrix}$$

以降，和 $A \underset{\text{mat}}{+} B$，スカラー倍 $c \underset{\text{mat}}{\cdot} A$，積 $A \underset{\text{mat}}{\cdot} B$ を単に $A+B$, cA, AB と書く．
また $A+(-1)B$ を単に $A-B$ と書く．

余談：行列の積はなぜそのような定義なのか？

2×2 行列と 2×1 行列の積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

は，平面 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトルの変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ と思える．たとえば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ は x 軸方向を 2 倍，y 軸方向を $1/3$ 倍する変換を引き起こし，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が引き起こす変換は，原点を中心とする θ 回転である．同様に $m \times n$ 行列 A から "線形写像" $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が定まる．さて，A, B をそれぞれ $l \times m$, $m \times n$ 行列とする．このとき合成写像 $f_A \circ f_B \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ はどのような行列に対応しているだろうか？実は先ほど定義した積 AB に関して，$f_A \circ f_B = f_{AB}$ となっている．詳しくは 2 学期に習う．

問題

次の積を計算し，加法定理を用いて式を整理せよ：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

練習問題

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の行列を計算せよ：

$$AB,\ BA,\ BC,\ (AB)C,\ A(BC).$$

解答（配布時には削除）

行列の演算の性質

以降の命題は，行列の和や積が定義される型の範囲で考える．

命題 1.7

行列の和について結合律 $(A+B)+C = A+(B+C)$ と交換律 $A+B = B+A$ が成り立つ．

交換律のみ証明する．$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ とする．このとき

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = (b_{ij}+a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = B+A.$$

なお 2 つ目の等号において「実数の和の交換律」を用いた． □

積の交換律は成り立たない．もちろん偶然 $AB = BA$ となる場合もある．

命題 1.8

行列の積について結合律 $(AB)C = A(BC)$ が成り立つ．

B を $m \times n$ 行列とする．まず左辺の (p,q) 成分は $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{pi}b_{ij}\right)c_{jq}$．ここで和の順番を変えて，さらに a_{pi} が j に依存しないことから，

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{pi}b_{ij}\right)c_{jq} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{pi}b_{ij}c_{jq}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{pi}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jq}\right)$$

と変形できる．これは右辺の (p,q) 成分である．なお式変形の中で「実数の積の結合律」を用いた． □

結合律の帰結として，正方行列 A と正整数 n に対して $A^n = \overbrace{A \cdots A}^{n}$ という表記が意味を持つ．ちなみに除法 $\div$ については $(2 \div 2) \div 2 \neq 2 \div (2 \div 2)$ であり，（事前に規則を定めない限り）$2 \div 2 \div 2$ という表記は不適切である．

正方行列 $A=(a_{ij})$ について,

- $i>j$ のとき $a_{ij}=0$ であるなら**上三角行列**,
- $i\neq j$ のとき $a_{ij}=0$ であるなら**対角行列**,
- ある $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して $A=\lambda E$ なら**スカラー行列**と呼ぶ.

Kronecker のデルタ $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j,\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases}$ を使うと,対角行列は $(a_{ij}\delta_{ij})_{i,j}$,スカラー行列は $(\lambda\delta_{ij})_{i,j}$ とも書ける.

$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ は上三角行列だが,対角行列ではない. $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ は対角行列だが,スカラー行列ではない.

正整数 n に対して B^n を求めよ. また A^2, A^3 を計算した上で A^n を予想し,それを証明せよ.

解答（配布時には削除）

おまけ問題

行列の積 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ を計算し，複素数の積 $(a+bi)(c+di)$ の計算結果と比較せよ．

2 次正方行列 A, B の新しい積 $\heartsuit$ を $A \heartsuit B = AB - BA$ で定義する．このとき，以下が成り立つかそれぞれ調べよ：

- $(A \heartsuit B) \heartsuit C = A \heartsuit (B \heartsuit C)$.
- $(A \heartsuit B) \heartsuit C + (B \heartsuit C) \heartsuit A + (C \heartsuit A) \heartsuit B = O$.