線形代数学 I

行木孝夫

2019 年 1 学期

目 次

1 2×2 行列と 2 次元ベクトル

本節では行列、ベクトルを 2×2 行列と 2 次元ベクトルに限定する。

1.1 定義と演算

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ などと書いて行列、正確には 2×2 行列、2 次正方行列などとよぶ。行列はベクトルを並べていると理解してもよい。この例では、横ベクトル $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ を縦に並べていると理解してもよく、縦ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を横に並べたと理解してもよい。

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ を第 1 行ベクトル、$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ を第 2 行ベクトルとよぶ。また、横ベクトルを一般に行ベクトルとよぶ。

同様に、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を第 1 列ベクトル、$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を第 2 列ベクトルとよび、一般に縦ベクトルを列ベクトルとよぶことにする。

一般の 2×2 行列を $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ と書くことにする。a_{ij} を行列 A の i 行 j 列成分（略して i,j 成分）とよぶ。A の定数倍は、成分ごとの定数倍、α を実数として $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j=1,2}$ である。行列の和を成分ごとの和、$A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ について、$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,2}$ と定義する。

1.2 行列とベクトルの積

行ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の積を

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ で定義する。

これを用いて、行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の積を次で定義する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{pmatrix}$$

行列の積も同様である。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

一般に、$A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ について、$AB = (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj})_{i,j=1,2}$ と書ける。

$A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ など、A の n 個の積を A^n と書く。

一般に、行列 A,B の積は交換できない。つまり、多くの場合 $AB \neq BA$ である。

2×2 行列は列ベクトルに左からかけることができ、行ベクトルには右からかけることができることに注意する。

1.3 特別な行列

特別な性質を持つ行列を示す。単位行列と零行列である。

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は任意の行列 A について $AE = EA = A$ を満たす特別な行列である。これを単位行列とよぶ。実数の場合の 1 に相当する。

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は任意の行列 A について $AO = OA = O$ を満たす。これを零行列とよぶ。実数の 0 に相当する。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ を A の転置行列とよぶ。また、列ベクトルの転置は行ベクトル、行ベクトルの転置は列ベクトルである。

行列 A について、$AB = BA = E$ を満たす行列 B が存在するとき、B を A の逆行列とよび、A^{-1} と書く。通常の数の逆数に相当する。0 の逆数は存在しないように、逆行列にも存在条件がある。

問題 1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次を確かめておくこと。

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

上の結果を見れば、$ad - bc = 0$ のとき逆行列は存在しない。従って、$ad - bc$ を計算することで逆行列の存在を判定できる。

1.4 行列式

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、$det(A) = ad - bc$ を行列式 (determinant) とよぶ。$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ と書くこともある。

行列式は、2 変数関数の極値判定（微分積分学 I）及び重積分の変数変換（微分積分学 II）でも現れるから、よく学習しておくべきである。

1.5　行列と連立一次方程式

連立方程式

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases} \tag{1}$$

を行列とベクトルで書き直すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

問題 2. 上記を確かめよ。

連立方程式 (1) において、左辺に現れる行列の各成分は連立方程式の係数を表しており、連立 1 次方程式の係数行列とよぶ。

1.6　連立方程式の解

連立一次方程式の解は係数行列の逆行列を使うと次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{2}$$

つまり、逆行列を求めれば連立方程式の解はすぐにわかる（ただし、大規模な連立方程式を解く際にはもっと効率的な手法を用いる）。

1.7　連立方程式の解の分類と行列式

連立方程式は逆行列を使って解けることがわかった。逆行列が存在しない場合、すなわち行列式が零の場合 $(ad-bc=0)$ には不定解、不能解が対応する。特に不定解が重要である。以下、不定解の場合を考える。

係数行列が逆行列を持たない場合、行列式は $ad-bc=0$ である。この条件は、行ベクトル (a,b) と行ベクトル (c,d) が平行であることを示す。不定解を持つことは仮定しているから、連立方程式を作る 2 本の 1 次式は同値となり、$ax+by=e$ のみが (x,y) の条件を定めている。つまり、$ax+by=e$ を満たす (x,y) は全て連立方程式 (2) の解である。集合の記号を用いると次のように書ける。

$$\{(x,y) | ax+by=e\}$$

未知数が 2 個の場合は単純だが、未知数が増えるとそう単純ではない。

1.8　行列と 1 次変換

1.8.1　1 次変換

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に左からかけて、新しいベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を作ることができる。

$$y = Ax$$

もちろん、$y_1 = ax_1 + bx_2,\ y_2 = cx_1 + dx_2$ である。

問題 3. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく。次の A について Ax を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4 (ベクトルの回転)**.** $x = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ とおく。次の A について Ax を計算し、なるべく簡単な形にせよ。

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1 次変換を考えるに当たっては $y = Ax$ をうまく表現する方法が問題となる。

1.8.2　1 次変換と座標

連立方程式に関連して、次のような問題を解いたことはあるだろう。列ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と列ベクトル $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を与えておく。列ベクトル $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について $c = su + tv$ を満たす実数 s, t を求めよ。

ベクトルの成分で書けば、

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるから、行列を用いて次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 5. 逆行列を用いて s, t を求めてみよ。

s, t の意味は、1 次独立な列ベクトル u, v を新たな座標軸と定めたときに、列ベクトル c の新しい座標 (s, t) を与えるものと考えることができる。これを座標変換とよび、問題に応じて適切な座標を定めることは重要である。

行列 A の定める 1 次変換を考える際に、うまい座標軸をとることで $y = Ax$ を簡単に表現することができる。次節で与える固有ベクトルである。

1.9 固有値と固有ベクトル

行列 A の定める 1 次変換をどのように理解すると良いだろうか。行列 A を作用するベクトルが変わると作用した結果も変わり、あまり考えやすくない。前節で紹介したように、適切な座標を決めることはできないだろうか。

そのような座標軸を定めるベクトルを次のように考える。

$Av = \lambda v$ を満たす実数 λ と列ベクトル v が 2 組存在するなら、座標軸を作れそうである。

$$Av = \lambda v$$

右辺を左辺に移項する。

$$(A - \lambda E)v = O$$

$A - \lambda E$ が逆行列を持つと、v は零ベクトルしか解を持たない。これは困る。したがって、$A - \lambda E$ は逆行列を持たない。

$$det(A - \lambda E) = 0$$

成分で書く。

$$det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

行列式を計算して、$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ である。展開しておく。

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

λ の 2 次方程式だから、これが 2 つの異なる実数解を持てば良い。以下、一般論は混みいるだけので、例を用いて紹介していく。

1.10 計算例

例 1. 次の行列 A について固有値と固有ベクトルを求める。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

まず、固有値から。$det(A - \lambda E) = 0$ より、$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ を得る。つまり、$\lambda = 3, -1$ である。

固有値 $\lambda = 3$ の場合。$Av = \lambda v$ から固有ベクトル v を決める。$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて x, y の関係を定めればよい。x, y についての連立方程式だが、不定解であることに注意する。$x + 2y = 3x$, $2x + y = 3y$ とから、$x = y$ のみが x, y に関する条件である。ゆえに、$v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり、固有値 3 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍 *(*零ベクトルを除く *)* である。

固有値 $\lambda = -1$ の場合、全く同様に固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍 *(*零ベクトルを除く*)* である。

以上から、2 本の固有ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を決めることができる。これらは 1 次独立であるから、任意のベクトル $c = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $c = su + tv$ と表すことができ、Ac について $Ac = sAu + tAv = 3su - tv$ と書ける。

つまり、固有ベクトルを座標軸とみなすことで、行列 A の表す 1 次変換をうまく理解することができる。

問題 6. *2×2* 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求め、固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

1.11 行列の応用

応用 1. *3* 項間漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は a_0, a_1 を決めれば各項が決まる。これを行列で表現する。新たな数列 b_n を $b_n = a_{n+1}$ で定めれば、漸化式の定義から $b_{n+1} = b_n + a_n$ である。$a_{n+1} = b_n$ とから、次の関係式がわかる。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0 \cdot a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

これを行列で書いて、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

a_0, $b_0 = a_1$ から定まる一般項を次のように行列の n 乗で書くことができる。つまり、*3* 項間漸化式の一般項を求める問題は行列の n 乗を求める問題に帰着する。

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

等比数列と対比できることに注意。

応用 2 (2 次形式、2 次曲線の一般形)**.** a, b, c, d を与えられた実数とする。関係式 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ によって定まる点 (x, y) はどのような図形になるか。

2 一般の行列と演算

一般の $N \times M$ 行列を $A = (a_{ij})_{1 \le i \le N, 1 \le j \le M}$ と書く。2 つの $N \times M$ 行列の和は成分ごとの和、定数倍は成分ごとの定数倍と定義する。

$N \times M$ 行列 $A = (a_{ij})_{1\le i\le N, 1\le j\le M}$ と $M \times L$ 行列 $B = (b_{ij})_{1\le i\le M, 1\le j\le L}$ について、積を $AB := (\sum_{k=1}^{M} a_{ik}b_{kj})_{1\le i\le N, 1\le j\le L}$ と定義する。これは $N \times L$ 行列である。

$M = N$ の時、$N \times N$ 正方行列（N 次正方行列）とよぶ。対角成分のみ全て 1 の N 次正方行列を N 次単位行列（単位行列）とよび、E_N あるいは E と書く。全ての成分が 0 の N 次正方行列を零行列とよび、O_N あるいは O と書く。

N 次正方行列 A について、$AA^{-1} = A^{-1}A = E_N$ を満たす N 次正方行列を A の逆行列とよぶ。2×2 の場合と異なり、逆行列を一般に表すことは（可能であり、授業で紹介するが）実用的でない。

3 行列の基本変形

$N \times M$ 行列 $A = (a_{ij})$ について、次の操作を行に関する基本変形（行基本変形、左基本変形, row elementary operation, row operation, left operation）とよぶ。

1. 第 k 行を定数倍する。
2. 第 k 行と第 m 行を入れ替える。$(k \neq m)$
3. 第 k 行に第 m 行の c 倍を加える $(k \neq m)$。

行に関する基本変形は、対応する $N \times N$ 行列を左からかけることで実現できる。

1. 第 k 行を c 倍する（$cR_k \to R_k$ と書くことにする）。$S_1(k, c) := (s_{ij})_{1\le i,j\le N}$,

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ c & i = j = k \\ 1 & i = j, i \neq k \end{cases}$$

2. 第 k 行と第 m 行を入れ替える（$R_k \leftrightarrow R_m$）。$S_2(k, m) := (s_{ij})_{1\le i,j\le N}$,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, i \neq k, i \neq m \\ 1 & (i, j) = (k, m), (m, k) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3. 第 k 行に第 m 行の c 倍を加える（$R_k + cR_m \to R_k$）。$S_3(k, m, c) := (s_{ij})_{1\le i,j\le N}$,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ c & (i, j) = (k, m) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

これらの基本行列（elementary matrix）は記号 E を使うことも多い。単位行列と混同しないように注意する。

それぞれの行列が逆行列を持つことを確かめてみよ（具体的に逆行列を見つけることは難しくない）。

4　正方行列の基本変形と逆行列

正方行列は連立一次方程式と密接な関係があるのだった。その係数行列が逆行列を持つかどうかは連立一次方程式の解が一意に定まるかどうかを分けるため、重要な条件である。ここでは、基本変形を用いて逆行列を具体的に求める手順を示す。

4.1　準備：上三角行列と下三角行列

正方行列の対角成分より下側が 0 である時、上三角行列とよぶ。対角成分より上側が 0 であれば下三角行列とよぶ。両者をまとめて三角行列とよぶ。連立一次方程式の係数行列が三角行列であれば、順番に変数を消去することができる。したがって、まず正方行列を三角行列に変形する。慣習的に、まず上三角行列に変形することが多い。

4.2　逆行列を求める手順

一般論は煩雑になるだけなので、例を用いて説明する。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について、単位行列と並べ、次の行列を作る。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行の 2 倍を第 2 行から引く（$R_2 - 2R_1 \to R_2$）。これは、第 1 行を-2 倍し、第 1 行を第 2 行に加え、第 1 行を-1/2 倍すると得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A を上 3 角行列に変形できた。第 2 行を-1/3 倍し、対角成分を 1 にする（$-\frac{1}{3}R_2 \to R_2$）。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

第 2 行の 2 倍を第 1 行から引く（$R_1 - 2R_2 \to R_1$）。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

確かに逆行列ができている（確かめよ）。

4.3 連立一次方程式への応用

正方行列の逆行列を一般的に与えることも可能だが（実際、講義の最後に与えるが)、実際の問題には計算量が大きすぎることがわかっている。実際の問題を扱う際には基本変形による。

未知数 3 個の連立一次方程式に応用しよう。このような連立一次方程式は、なんとなく未知数を消去しても解くことができるはずである。しかし、必ず解ける手順を確立し習熟しておくことで、必要な時に間違いなく解くことができるようになる。このように確立した手順を「アルゴリズム (algorithm)」とよぶ。

係数行列の逆行列を求めることができれば簡単だと考えるかもしれないが、逆行列を求める計算量は基本変形を繰り返す計算量よりも大きいことがわかっている。従って、基本変形により前進消去と後退代入を行う方が効率的である。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

として、連立一次方程式 $Ax = b$ を解く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

第 1 行の 2 倍を第 3 行から引く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

第 1 行の 3 倍を第 2 行から引く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix}$$

第 1 列について対角成分から下の成分を 0 とできた。第 2 行の対角成分を 1 に規格化する（第 2 行を-1 倍する)。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$$

第 2 行の 3 倍を第 3 行に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 48 \end{pmatrix}$$

第 3 行の対角成分を規格化する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ここまでで、係数行列を行基本変形によって上三角行列へ変形した。 これを前進消去と呼ぶ。 第 3 行から x_3 の値がわかる。これと第 2 行から x_2 がわかり、順次 x_1 がわかる。

前進消去によって作成した上三角行列から解を求める手順を後退代入と呼ぶ。（前進消去、後退代入とは数値計算の専門用語である。今は覚えなくてよい。）第 3 行の 5 倍を第 2 行から引く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

第 3 行を第 1 行から引く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

第 2 行を第 1 行から引く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

以上で与えられた連立一次方程式の解を求めることができた。

4.4 係数行列の逆行列を具体的に求める

上の基本変形を基本行列で書くと、前進消去について（上三角行列に変形する過程について）次のように書ける。

第 1 行の 2 倍を第 3 行から引くには、$S_3(3,1,-2)$ を左からかける。

第 1 行の 3 倍を第 2 行から引くには、$S_3(2,1,3)$ を左からかける。第 2 行を-1 倍するには、$S_1(2,-1)$ を左からかける。第 2 行の 3 倍を第 3 行に加えるには、$S_3(3,2,3)$ を左からかける。第 3 行の対角成分を規格化するには、$S_1(3,1/16)$ を左からかける。

行基本変形の積をまとめると、次のように下三角行列になる。

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7/16 & -3/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

後退代入（上三角行列に変形した係数行列を単位行列に変形する）については、第 3 行の 5 倍を第 2 行から引くために $S_3(2,3,-5)$ を左からかける。第 3 行を第 1 行から引くために $S_3(1,3,-1)$ を左からかける。第 2 行を第 1 行から引くために $S_3(1,2,-1)$ を左からかける。

行基本行列で書くと、次のように上三角行列になる。

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

連立方程式の形に戻そう。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7/16 & -3/16 & 1/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7/16 & -3/16 & 1/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

もちろん、$A^{-1} = QP$ である。

4.5 係数行列を上三角行列と下三角行列の積に書く

逆行列の性質として、一般に $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である（定義からすぐに確かめられる）から、係数行列 A について $A = (A^{-1})^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ となる。

三角行列 P, Q の逆行列は定義からすぐに求められて（確かめてみよ）、

$$L := P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 16 \end{pmatrix}, U := Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。以上から、係数行列 A について、$A = LU$ と書けることがわかった。これは、正方行列 A を上三角行列 L と下三角行列 U の積へ因数分解することに相当する。

むやみに変数を消去するのではなく、上のように正しい手順（アルゴリズム）に従って解くことが重要である。

5 行列式

$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ について、行列式 $det(A), |A|$ を次の手順で定義する。

1. 各行から 1 つずつ成分を取り出す。それぞれの成分は各列についても 1 つとする。
2. 取り出した n 個の成分の積に符号をつけて足し上げる。（取り出し方は $n!$ 通りあるので、$n!$ 個の和になる。）

5.1 取り出し方の例

- 2×2 行列では、$a_{11}a_{22}$ と $a_{12}a_{21}$ だけである。
- 3×3 行列では、$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$,$a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$ の 6 通り。

5.2 符号のつけ方

取り出した n 個の成分に対応し、上の段に行の番号を並べ、下の段に列の番号を並べる。2×2 の $a_{12}a_{21}$ なら $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ である。行に対応する列は、$(1, 2)$ の順番を入れ替えて $(2, 1)$ となっている。列番号の入れ替えを 1 回行うごとに -1 を 1 回かけることに決める。したがって、$a_{12}a_{21}$ の符号は -1 とする。これより、2×2 行列の行列式は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ となる。

$3{\times}3$ 行列から $a_{12}a_{23}a_{31}$ の符号を決める。$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ について、列の番号は $(1, 2, 3) \to (2, 1, 3) \to (2, 3, 1)$ と、隣り合う番号を 2 回だけ入れ替えている。-1 を 2 回かけて、符号は正とする。

$a_{13}a_{22}a_{31}$ については $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ から $(1, 2, 3) \to (1, 3, 2) \to (3, 1, 2) \to (3, 2, 1)$ という 3 回の入れ替えである。$(-1)^3$ で、符号は負。

したがって、3×3 行列の行列式は以下の通り。

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + +a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

一般の $n \times n$ の場合も同様である。

6 行列式の性質

A の転置行列 ${}^tA$ について、$det(A) = det({}^tA)$ である。また、A が三角行列であれば対角成分の積 $det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$ である。

6.1 基本変形と行列式

基本変形と行列式の関係は次の通り。具体的な行列式の計算に有効である。

- ある行を c 倍したら行列式も c 倍。
- ある行が二つのベクトルの和の時、行列式はそれぞれのベクトルで作った行列の行列式の和。
- ある行の定数倍を別の行に加えても行列式は変化しない。

これらをうまく使って次がわかる。

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

逆行列が存在すれば

$$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

であり、逆行列が存在するならば $det(A)^{-1} \neq 0$ でなければならない。

6.2 余因子展開と逆行列、クラメルの公式

$n \times n$ 行列 A について A_{ij} は A から i 行と j 列を除いた $n-1 \times n-1$ 行列とする。

6.3 余因子展開

$$det(A) = \sum (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

6.4 逆行列

$A^{-1} = (b_{ij})$ とおいて、次が成立。A_{ji} に注意する。

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ji})/det(A)$$