

コンピュータ
理学部数学科

ピタゴラス数の列挙

- ▶ $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす自然数の組をピタゴラス数とよぶことにする。
- ▶ 自然数 n を与える。 x, y, z がそれぞれ n 以下のピタゴラス数をすべて列挙しよう。
 1. まず、動くプログラムを作る。プログラムは動かなければ意味がない。
 2. 次に、効率を考えてプログラムを作る。効率が悪いと（実習程度ならともかく）後で大変なことになる。
- ▶ 「アルゴリズム」とは問題を解決する手段を意味する。

アルゴリズム 1

定義に従ったアルゴリズムをまず考える。効率を考えず、正しく動作するプログラムを作成する。

- ▶ x, y, z それぞれを 1 から n まで個別に変化させてピタゴラス数になるかどうか判定する

このアルゴリズムを細かく書く。

1. n を変数として与え、自然数値を代入する。
2. x, y, z を変数とする。
3. x, y, z それぞれを for 文で 1 から n まで変化させる。
4. x, y, z の組がピタゴラス数かどうかを if 文で判定する。
 - 4.1 x, y, z の組がピタゴラス数であれば出力する。

プログラム 1

具体的なプログラムは次のようになる。 $n = 100$ としている。

```
n=100
for x in range(1,n):
    for y in range(1,n):
        for
            if x*x + y*y == z*z:
                print(x,y,z)
```

アルゴリズム 1 の高速化

- ▶ プログラムでは x, y, z に関する for 文が 3 重になっている。
 x, y, z が独立に 1 から n まで動くとき、 x, y, z がピタゴラス数かどうか判定する if 文の判定回数は n^3 程度になる。この回数が少ないほどプログラムは早く終了する。
- ▶ x, y, z の動く範囲を狭めれば if 文の判定回数は減少する。
- ▶ x, y, z の動く範囲は狭められるか？

課題 1

$x \leq y$ の範囲でピタゴラス数 (x, y, z) を求めれば十分である。このとき、 z の範囲は $y < z$ で調べればよい。プログラム 1 を変更する。下記のプログラムの空欄を埋めて実行せよ。

```
n=100
for x in range(1,n):
    for y in range( ,n):
        for z
            if x*x + y*y == z*z:
                print(x,y,z)
```

数学的背景

- ▶ x, y, z が共通因数を持たないとする。簡単な議論から、 x, z は奇数、 y は偶数としてよい。
- ▶ x, y とともに奇数とすれば、
 $x^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 4l(l + 1) + 1$,
 $y^2 = 4m(m + 1) + 1$ である。これより、 $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ となる。
- ▶ 一方、 z が偶数であれば $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 、奇数であれば $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$ である。これは矛盾。
- ▶ 従って、 x, y の一方は偶数であり z は奇数である。
- ▶ $z \pm x$ はともに偶数としてよく、次のように変形できる。

$$y^2 = (z + x)(z - x) = (2U)(2V).$$

- ▶ U, V はそれぞれが $U = p^2, V = q^2$ という形に書け、
 $y = 2pq$ となる。
- ▶ 連立方程式 $z + x = 2U, z - x = 2V$ から、
 $z = U + V = p^2 + q^2, x = U - V = p^2 - q^2$ を得る。

結果として、 $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$ である。zに注目すれば $p < \sqrt{n}$, $p > q$ という範囲で計算すれば十分である。 $n = 100$ であれば $\sqrt{n} = 10$ だから、次のようなプログラムを書ける。

```
for p in range(1,10):  
    for q in range(1,p):  
        print(p*p-q*q,2*p*q,p*p+q*q)
```

課題 2

$p < \sqrt{n}$ をプログラム中で使うために、`math` モジュールを使う。`math.sqrt(n)` が n の平方根を表す。これを `int` 型に変換して `range()` の引数に用いる。`int(math.sqrt(n))` とすればよい。空欄を埋めて以下のプログラムを実行し、ピタゴラス数が出力されていることを確かめよ。

```
import math
n=100
for p in range(1, ):
    for q in range(1, ):
        print(p*p-q*q,2*p*q,p*p+q*q)
```