コンピュータ

北海道大学理学部数学科

微分方程式

微分方程式とは、関数とその導関数が満たす方程式である。例えば関数 $f(x)$ について導関数 $f'(x)$ の満たす次の方程式は直接的に解くことができる。

$$f'(x) = x$$

両辺を x で積分すれば、$f(x) = x^2/2 + C$ である。
$x = 0$ での値を考えると、$f(0) = C$ となり、$f(x) = x^2/2 + f(0)$ を得る。
つまり、$f(0)$ を与えれば $f(x)$ が定まる。

次のような方程式はどうだろうか。

$$f'(x) = f(x)$$

この場合、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

と変形し、両辺を x で積分する。右辺はそのまま。左辺は置換積分によって、

$$\log |f(x)| = x + C$$

従って

$$f(x) = e^{x+C}$$

$x = 0$ での値を考えて、$f(0) = e^C$ となり、$f(x) = f(0)e^x$ を得る。

微分方程式を満たす関数を求めるには、微分方程式と初期値 $f(0)$ とを与える必要がある。これを微分方程式の初期値問題とよぶ。

$$f'(x) = f(x)$$

から

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

と変形したように、左辺に $f(x)$ とその導関数を集め、右辺には x だけを集めることのできる微分方程式を変数分離形と呼ぶ。

変数分離形の微分方程式を解くには置換積分を計算できることが必要である。しかし、積分を計算できる関数は限られているから必ずし解けるとは限らない。従って、数値的に解を求めることが必要となる。
基本的な手法として次の 2 通りを学習する。

- オイラー法（差分法）
- ルンゲクッタ法

オイラー法（差分法）

具体的に、$f'(x) = f(x)$ という微分方程式を考える。
まず、$f'(x)$ の定義を思い出す。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h を微小な値として有限のままに固定すると、微分方程式は次のように変形できる。

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)$$

h をはらうことで次を得る。

$$f(x+h) = f(x) + hf(x)$$

上式において $x = 0$ とおくと、

$$f(h) = f(0) + hf(0)$$

同様に

$$f(2h) = f(h) + hf(h)$$

さらに続けると

$$f((n+1)h) = f(nh) + hf(nh)$$

結果、$f_n = f(nh)$ についての漸化式を得ることができた。
$f_0 = f(0)$ を与えることで対応する数値解を得ることができる。これを求めるプログラムを書くことにする。

プログラム例

```
N=100
f=list(range(N))

x=list(range(N))
h=0.1
x[0]=0
f[0]=0.01

for n in range(1,N):
  x[n]=n*h
  f[n]=f[n-1]+f[n-1]*h
  print(x[n],f[n])
```

一般化

もう少し一般的な変数分離形を考えることにする。$F(u)$ を連続な関数とすれば次の形の f(x) に関する微分方程式は変数分離形となる。

$$f'(x) = F(f(x))$$

解を具体的に求めることができるのは 1/F(u) が積分できる場合だけであるが、数値解は求めることができる。さきのプログラムを変更して、$F(u) = u(1-u)$ の場合を考えてみよう。
つまり、次の形の微分方程式について数値解を求めるプログラムを作成する。

$$f'(x) = f(x)(1 - f(x))$$

$f'(x)$ を $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ で置き換えて、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)(1 - f(x))$$

```
def F(u):
  return(u*(1-u))

N=100
f=list(range(N))
x=list(range(N))

h=0.1
x[0]=0
f[0]=0.01

for n in range(1,N):
  x[n]=n*h
  f[n]=
  print(x[n],f[n])
```

変数分離系の微分方程式

変数分離系の微分方程式 $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ を解く手順を示す。
まず $f(x)$ を左辺に集める。

$$\frac{f'(x)}{f(x)(1 - f(x))} = 1$$

両辺を x で不定積分する。積分定数は右辺にまとめる。

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)(1 - f(x))} dx = x + C$$

左辺は $f(x) = u$ と置換して、$du/dx = f'(x)$ に注意して次の変形を得る。

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)(1 - f(x))} dx = \int \frac{1}{u(1 - u)} \frac{du}{dx} dx = \int \frac{1}{u(1 - u)} du$$

部分分数分解によって

$$\frac{1}{u(1-u)} = (\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u})$$

と変形する。
これにより、考えている不定積分は

$$\int \frac{1}{u(1-u)} du = \int (\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}) du = \log|u| - \log|1-u|$$

である。積分定数は右辺に集めるので省略した。

$u = f(x)$ とから

$$\log|u| - \log|1-u| = \log|\frac{u}{1-u}| = \log|\frac{u}{1-u}| = \log|\frac{f(x)}{1-f(x)}|$$

であり、これが不定積分の結果である。従って、

$$\log|\frac{f(x)}{1-f(x)}| = x + C$$

両辺に指数関数をほどこして log をはらい次を得る。

$$\frac{f(x)}{1-f(x)} = e^{x+C}$$

f(x) について整理すれば一般解は次の通り。

$$f(x) = \frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}} = \frac{1}{e^{-x-C}+1} = \frac{1}{De^{-x}+1}$$

x=0 を代入すると、$D = -1 + 1/f(0)$ である。

ルンゲクッタ法

差分法によって微分方程式の数値解を求めると誤差が累積する。
ルンゲクッタ法は、次の形の微分方程式

$$f'(x) = F(f(x))$$

の誤差を系統的に縮める方法である。

まず、差分法の関係式を思い出そう。

$$f'(x) = F(f(x))$$

から、$f'(x)$ を $(f(x+h) - f(x))/h$ とおいて

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot F(f(x))$$

右辺について、より精度を向上させる。

$f(x+h)$ の刻み幅 h について左辺のテイラー展開を考えて 2 次の項までを残そう。

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(|h|^2)$$

h の一次の項について、微分方程式 $f'(x) = F(f(x))$ の右辺を代入できる。

$$f(x+h) = f(x) + F(f(x))h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(|h|^2).$$

ところで、$f''(x) = F(f(x))' = F'(f(x))f'(x) = F'(f(x))F(f(x))$ であるから、

$$f(x+h) = f(x) + F(f(x))h + \frac{1}{2}F'(f(x))F(f(x))h^2 + o(|h|^2).$$

天下り的に (答えを知っているので) 次の変形を考えると、

$$hF(f(x) + \frac{1}{2}hF(f(x))) = F(f(x))h + F'(f(x))\frac{1}{2}F(f(x))h^2 + o(|h|^2)$$

二次の項までを比べれば次を得る。

$$f(x+h) = f(x) + hF(f(x) + \frac{1}{2}hF(f(x))).$$

$$f(x+h) = f(x) + hF(f(x) + \frac{1}{2}hF(f(x))).$$

$$f(x+2h) = f(x+h) + hF(f(x+h) + \frac{1}{2}hF(f(x+h))).$$

以下、同様に、2 次までの項を見れば次の漸化式を得る。
$f_n = f(x+nh)$ である。これを修正差分法とよぶ。

$$f_{n+1} = f_n + hF(f_n + hF(f_n)/2)$$

同様にして、テイラー展開の n 次までの項を比較して n 次のルンゲクッタ法を得る。一般に ルンゲクッタ法といえば 4 次であるが、この授業では修正差分法までを扱う。

プログラム例

```
def F(u):
  return(u*(1-u))

N=100
f1=list(range(N))
x=list(range(N))

h=0.1
x[0]=0
f1[0]=0.01

for n in range(1,N):
  x[n]=n*h
  f1[n]=
  print(x[n],f1[n])
```

課題

微分方程式の初期値問題 $f' = f(1-f)$, $f(0) = 0.01$ について、次の課題に答えよ。

1. 差分法による数値解を求めよ。ただし、刻み幅を 0.1, ステップ数を 100 とする。（3 点）
2. 修正差分法による数値解を求めよ。ただし、刻み幅を 0.1, ステップ数を 100 とする。（3 点）
3. 差分法による数値解と実際の解の差、修正差分法による数値解と実際の解の差を別のグラフに描き、修正差分法の誤差が小さなことを確認せよ。（4 点）