コンピュータ

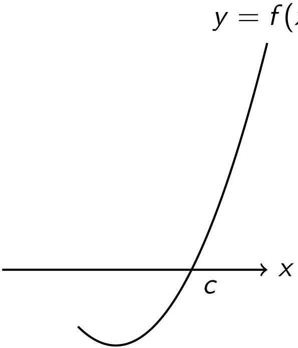
北海道大学理学部数学科

方程式を解く

方程式の解を必要な精度の範囲で数値的に与えるアルゴリズムを２種類扱う。二分法とニュートン法である。

二分法

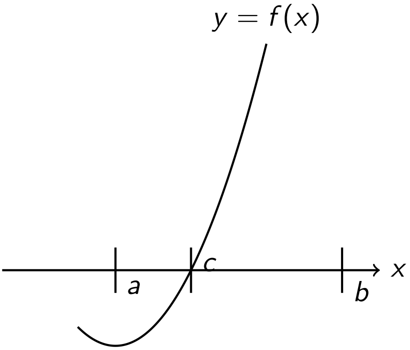
まず、関数 $f(x)$ が連続なものとする。二次関数 $f(x) = x^2 - 2x$ を考えよう。$y = f(x)$ のグラフを描いてみる。



$f(x) = 0$ の解は $x = 0$ と $x = 2$ であり、上のグラフは $x = 2$ のほうを c として描いている。

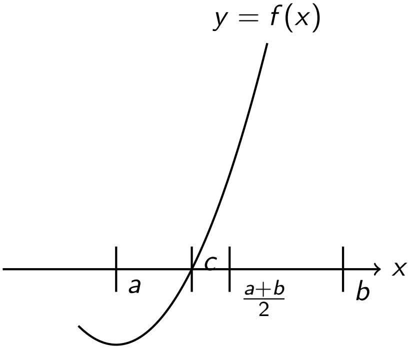
二分法

a と b の間に $f(x)=0$ の解 c が存在。精度は $b-a$ である。



二分法

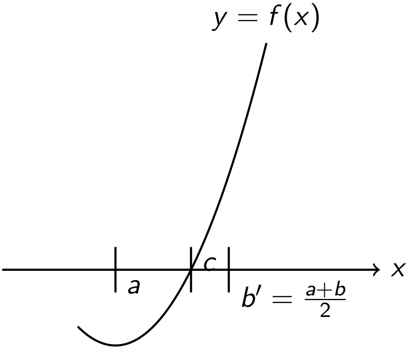
a と b の中点 $\frac{a+b}{2}$ をとる。図では a と $\frac{a+b}{2}$ の間に解 c が存在する。精度は $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ であり、前の段階の精度 $b - a$ の半分



になっている。

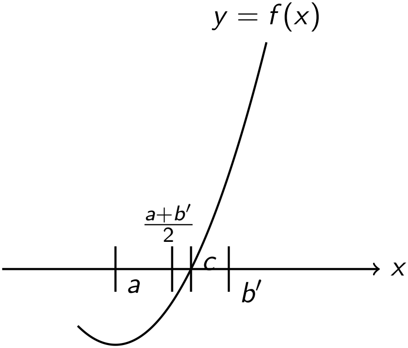
二分法

a と b の中点 $\frac{a+b}{2}$ を b' とおく。a と b' の間に解 c が存在する。



二分法

a と b' の中点 $\frac{a+b'}{2}$ をとる。今度は、$\frac{a+b'}{2}$ と b' の間に解 c がある。
精度は $b - \frac{a+b'}{2} = \frac{b'-a}{2}$ となって、前段階のさらに半分になる。



- このようにして、解 c の存在する区間の幅を $|b-a|2^{-n}$ とできる。必要とされる精度を下回ったところで停止すればよい。
- 二分法は中間値の定理の証明に他ならない。

1. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$
2. $b - a < \varepsilon$ であれば a と b の間に精度 ε で解が存在している。
3. $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ の場合、$a < c < \frac{a+b}{2}$ である。$b = \frac{a+b}{2}$ と代入して 1. から繰り返し。
4. $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ の場合、$\frac{a+b}{2} < c < b$ である。 $a = \frac{a+b}{2}$ と代入して 1. から繰り返し。
5. $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ の場合、$c = \frac{a+b}{2}$ である。

プログラム例

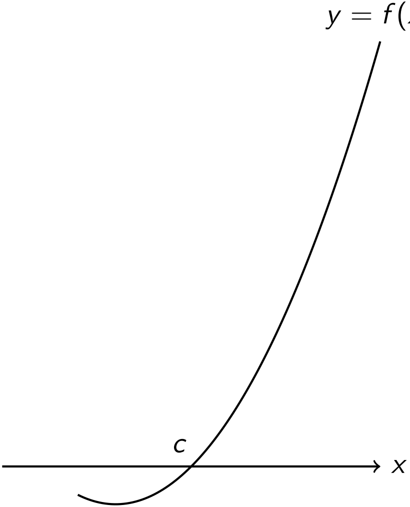
```
def f(x):
  return(x*x*x-2.0)

eps=0.00001
err=10.0
a=0.0
b=10.0

while(eps<err):
```

プログラム例

```
while( err > eps ):
  c=(a+b)/2.0
  if _____
    b=c
  else:
    a=c
  err=abs(b-a)
  print("(%.10f,%.10f),error=%.10f" % (a, b, err))
```

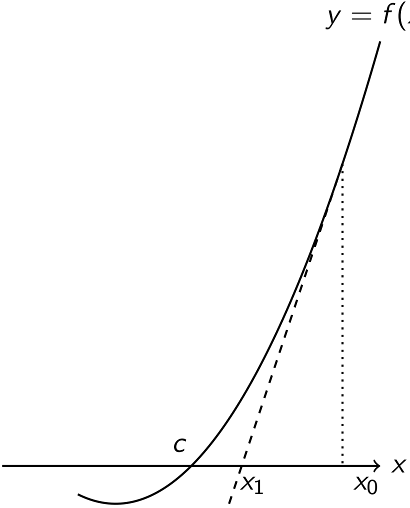
ニュートン法

まず、二次関数 $f(x) = x^2/2 - x$ を考えよう。

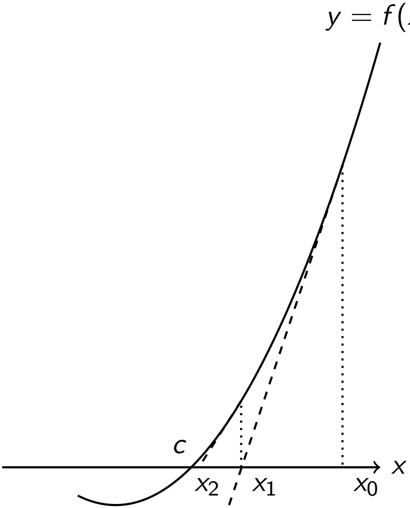


$f(x) = 0$ の解は $x = 0$ と $x = 2$ であり、上のグラフは $x = 2$ のほうを c として描いている。

まず、初期値を $x_0 = 4$ とおく。この点で接線を引こう。接線と x 軸の交点を x_1 とおく。



続いて、x_1 で接線を引き、この接線と x 軸との交点を x_2 とおく。この手順を繰り返す。



x_1 を求める。

x_0 での接線の方程式：

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x 軸との交点は、上の式で $y = 0$ とおいて,

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x について整理すると次のようになり、

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-f(x_0)/f'(x_0) = x - x_0$$

$$x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x$$

$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

x_2 を求める。

$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ を求めた手順と全く同様に

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$$

x_3,x_4 以降も全く同じく、一般に

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$$

このように、順次 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を求めていくプログラムを作る。

プログラム例

```
def f(x):
  y=x*x*x-2
  return(y)

def df(x):
  y=3*x*x
  return(y)

x=10.0
err=10.0
eps=1.0e-6

while err > eps:
  print(x,err)
  y=________
  err=abs(x-y)
  x=y
```

プログラム例には `1.0e-6` という数値が現れる。1.0×10^{-6} という意味である。

課題

$x^4 - 8x^2 + 5 = 0$ の解を $x_1 > x_2 > 0 > x_3 > x_4$ とする。

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ とおく。$y = f(x)$ のグラフを描け。使用するパッケージは matplotlib でも sympy でも良い。
2. 二分法を用いて x_1, x_2 を求めよ。精度を 1.0×10^{-4} とする。
3. ニュートン法を用いて x_4 を求めよ。精度を 1.0×10^{-4} とする。