

# 数式処理システムを利用した新時代の数学

松下 大介 ( 北大・理 )

2017 November 20

# Introduction

これまでの授業で関数を微分したり, グラフを描いたり, 行列の簡約化を扱った. これらはいずれも数学の問題を「解く」という方向からの計算機の利用である. そこで別の方向に目を向けてみると, 問題を「作る」という利用の仕方もあり得ることが容易に思い浮かぶ. 今回はこれまでに修得したコマンドを用いて適度な難易度の問題を如何に作るかということについて考える.

# 乱数

行列の演算を習い始めた時のことを思い出そう. 大抵の場合, 演算規則を教わった後, いくつか手頃な具体例を計算して, やり方を修得してもらう, という手順を踏んでいるはずである. その手頃な具体例を作る簡単な例として, 乱数を用いて行列を生成するというやり方がある. Maxima では `random(n)` という自然数  $n$  を与えると  $0$  から  $n-1$  までの値を返す関数がある.  $n$  に小数を入れると,  $n$  より小さい小数を返す.

```
(%i1) random(5)
```

```
(%o1) 3
```

## ランダムな行列

先ほどの `random` という命令を使うことで,  $n$  より小さい 0 でない成分を持つ正方行列を出力するコマンドを作成する事が出来る.

```
random_matrix(n):=block([A],  
    A:matrix([random(n),random(n)],  
             [random(n),random(n)]),  
    return(A))$
```

**問題** このコマンドでは成分に非負の整数しか出てこない. 負の整数もランダムに出てくるコマンドを自作せよ.

## 問題作り

先ほどのランダムな成文を持つ行列を生成するコマンドを用いる事で、行列の計算問題は簡単に作る事ができる。しかし以下のような出題は如何なものであろうか？

**問題** 次の二つの行列の和および積を求めよ。

$$X = \begin{pmatrix} 4204 & 5391 \\ 9429 & 3985 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2298 & 7403 \\ 2835 & 4565 \end{pmatrix}$$

**解答**

$$X + Y = \begin{pmatrix} 6502 & 12794 \\ 12264 & 8550 \end{pmatrix}, XY = \begin{pmatrix} 24944277 & 55732127 \\ 32965317 & 87994412 \end{pmatrix}$$

適切な設定をしないと、コンピューターを使ったデモンストレーションとなってしまう。

## 本当に乱数?

wxMaxima のファイルを二つ新しく開き, そこに先程作った `random_matrix(n)` を  $n$  を適当な値, 例えば  $n=10$  などとして実行して見よう. どのような結果が得られるであろうか? 乱数というからにはランダムな行列が得られるはずである. しかし, 初めて実行した時の結果は常に等しくなる.

## 線形合同法

次のコマンドを実行して見よう.

```
for i:0 thru 40 do print(power_mod(10,i,17));
```

1 から 16 までの数がランダムなように現れるはずである. よく見ると, 16 個おきに同じ数が現れる. このようにして得られる数列を線形合同法による擬似乱数列と呼ぶ. 周期的である事からわかるようにあくまで「擬似」乱数である. Maxima で実装されているものはこれほど単純なものではないが, 擬似乱数であることには変わらない.

## 行列の簡約化

さて実際に行列の簡約化を計算する問題を作ってみよう。もちろん先ほど定義した `random_matrix(n)` を使えば行列を生成することは容易である。が、その場合、とても手計算では適切とはいえないような問題が出来あがることが多い。そこで発想を逆転させ、始めに答を与え、それを修正することで、それほど大変でない計算で正解にたどり着く問題を作ることが出来る。



## 行列の簡約化

以下のようなコマンドを実行して見よう.

```
seed(n):=block([A],  
A:matrix(  
    [1,random(n),0,random(n),0],  
    [0,0,1,random(10),0],  
    [0,0,0,0,1] ));  
seed(10)
```

簡約化された行列が得られるはずである.

**問題**上のコマンドでは「かなめ」の位置を (1,1),(2,3),(3,5) 列に固定している. これを乱数を使って様々な位置に取れるように改造せよ.

# 行列の簡約化

前項で作った簡約化された行列からどうやって問題を作るかという  
と, `random_matrix(n)` で作った行列を左から掛けて簡約化する  
べき行列を得る.

**問題** `random_matrix(n)` で作った行列をそのまま掛けると, 作成  
した問題の答が始めの行列と一致しない時がある. どのようなこ  
とに気をつけるべきか?

## 行列の簡約化

別のやり方として,  $\text{rowop}(A, n, m, l)$  の三つのパラメーターを乱数で与えて,  $A$  の行を操作する, というものがある. この場合, 解答例も自動的に得られる, という利点がある.

**問題** このやり方で解答例がどのように得られるか説明せよ.

## 逆行列

もう一つ問題を作ってみる. 行列  $A$  を与えて, その逆行列を求める, という出題を考えて見よう. この場合も `random_matrix(n)` で行列を作れば, ほとんどの場合は逆行列を持つ行列が出来るので, それを使えば良い. 解答は `determinant(A)` とすれば得られる. が, この場合も手計算ではとても出来ないような問題が出来てしまう, というのが問題である. そこで行列式が 1 の整数を成分とする行列を乱数を使って作ることを考える. この場合は解答も整数を成分とする行列となるので, 出題する方としては心理的負担が少ない.

# 逆行列

どうやって行列式が 1 の行列を作るか？ 一つの安直な方法は `random_matrix(n)` で出来た行列が行列式が 1 となるまでこのコマンドを繰り返し使って行列を作る, という方法がある. が, これでは効率が悪すぎる. ここでは行列式の次の二つの性質を使って行列式が 1 の行列を作ることにする.

**定理** 正方行列  $A, B$  に対して,  $\det AB = \det A \cdot \det B$

**補題** 上半三角行列  $A$  に対して  $\det A$  は行列の対角成分の積に等しい.

## 逆行列

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  とすると, 任意の  $n, m$  に対して  $A^n B^m$

に対して, その行列式は前項の二つの性質から 1 である. ここである  $n, m$  に対しては  $A^n B^m$  が単位行列になってしまうのでは, という疑問が湧くかもしれないが, 実は任意の数列  $\{a_n\}$  に対して,  $A^{a_1} B^{a_2} A^{a_3} \dots$  は決して単位行列とはならないことが証明されている. [K. Oguiso, Mordell–Weil Groups of a Hyperkaehler a Manifold—A Question of F. Campana, Kyoto Math. J., 2008] これは数学用語で  $A, B$  で生成された  $SL(2, \mathbb{Z})$  の部分群は階数 2 の自由群となる, という.

**問題** 与えられた正の整数  $n$  に対し,  $3 \times 3$  行列で成分が 0 となるものがない行列を返すコマンドを作れ.

## レポート問題一覧

講義で出した問題を整理しておきます。以下の問題のうち一題以上を選んで解いて提出してください。沢山解けば点数も高くなります。

**問題** `RND(a)` を整数  $a$  を与えると  $-a$  から  $a$  までのランダムな整数を帰るコマンドとする。このコマンドを与えるプログラムを書け。

**問題** `random_matrix(n,m,l)` で  $n$  行  $m$  列の成分が  $0$  から  $l$  までの整数を成分とするランダムな行列を返すコマンドとする。このコマンドを与えるプログラムを書け。

**問題** コマンド `random_seed(a,b,c)` を  $a$  行  $b$  列の階数が  $c$  の簡約化された行列をランダムに返すものとする。このコマンドを与えるプログラムを書け。  $a, b$  を例えば  $3, 5$  と固定しても良い。

**問題** コマンド `SL(n)` で与えられた正の整数  $n$  に対し、 $n \times n$  行列で行列式が  $1$  となるような行列をランダムに返すものとする。このコマンドを与えるプログラムを書け。