科学・技術の世界

数式処理システムによる新時代の数学

行木 孝夫、松本 圭司 (北大 理 数学)

第１２回, 2017 December 25

考える線形空間は $\mathbb{C}^n$ とし，スカラー倍は複素数体 $\mathbb{C}$ で考える．

Definition 1 (行列の固有値，固有ベクトル，固有空間) n次正方行列 A に対して，複素数 α と n次複素列ベクトル $\mathbf{v}(\neq \mathbf{0})$ が

$$A \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v}$$

をみたすとき，α を A の固有値 *(an eigenvalue of A)* といい，$\mathbf{v}$ を A の固有値 α の固有ベクトル *(an α-eigenvector of A)* という．また，集合

$$V_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x}\}$$

は，A の固有値 α の固有ベクトルと $\mathbf{0}$ からなる$\mathbb{C}^n$ の部分線形空間である．これを A の固有値 α の固有空間 *(the α-eigenspace of A)* という．

Remark 1 固有ベクトルという場合は，零ベクトルは対象としない．任意の複素数 β に対して，

$$A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \beta \cdot \mathbf{0}$$

より，零ベクトルはあらゆる値 β の固有空間に含まれているとみなせる．その β-固有空間に零ベクトル以外のものあるような β は有限個しかないことが後にわかる．

Example 1 *1.* n次正方零行列 O_n に対して,

$$O_n \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$$

より, 0 は O_n の固有値であり, 零ベクトルでない任意のベクトルは, O_n の固有値 0 の固有ベクトル. O_n の 0-固有空間は $\mathbb{C}^n$ であり, 0 以外の O_n 固有値の固有空間は $\mathbf{0}$ のみからなる.

2. n次単位行列 E_n に対して,

$$E_n \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$$

より, 1 は E_n の固有値であり, 零ベクトルでない任意のベクトルは, E_n の固有値 1 の固有ベクトル. E_n の 1-固有空間は $\mathbb{C}^n$ であり, E_n の 1 以外の固有値の固有空間は $\mathbf{0}$ のみからなる.

Proposition 1 異なる固有値の固有ベクトルたちは, 線形独立.
相異なる固有値 α, α' の固有空間 $V_\alpha, V_{\alpha'}$ の共通部分は $\mathbf{0}$ のみからなる.

A の固有値, 固有ベクトルの求め方:

等式 $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$ の右辺を $\alpha \cdot E\mathbf{v}$ に書き直して, 左辺に移項すると

$$(A - \alpha E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となる. つまり, 固有ベクトル $\mathbf{v}$ は係数行列が $A - \alpha E$ の同次形連立 1 次方程式系の自明でない解であることを意味する. 同次形連立 1 次方程式系が自明でない解をもつための必要十分条件は $\det(A - \alpha \cdot E) = 0$ である. α を t に変えて得られる $\det(A - t \cdot E)$ を A の固有多項式 (the eigenpolynomial of A, the characteristic polinomial of A) といい, $\det(A - t \cdot E) = 0$ を A の固有方程式 (the eigenequtìon of A, the characteristic equation A) という. α が A の固有値であるための必要十分条件は, α が A の固有方程式の解であること. 固有方程式の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ に対して, 連立 1 次方程式

$$(A - \alpha_j E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

は, $\det(A - \alpha_j E) = 0$ より必ず自明でない解をもつので, それを解くことで A の固有値 α_j の固有ベクトル $\mathbf{v}_j$ が求まる.

A の固有方程式は複素数体で考えているので，解の重複度を込めれば n 個の解が存在する．その解ごとにかならず固有ベクトルが存在する． α が A の固有方程式の重解でなければ，A の固有値 α の固有ベクトルは, 定数倍を除いて一意的に定まる．

α が A の固有方程式の重複度が r の重解となる場合，連立１次方程式 $(A - \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元 k は $1 \leq k \leq r$ となる．

Maxima における A の固有多項式，固有値，固有ベクトルの求め方

```
expand(charpoly(A,t));
eigenvalues(A);
eigenvectors(A);
```

しかし，Maxima のコマンド “eigenvectors” には，固有方程式が重解をもつと正しい答えを返さないというバグがある．この講義で定義した行列の簡約化を求めるプログラムが使える状態のときに，固有ベクトルを正しく求めるプログラムを作成した．

```
eigenspace(x):=block(
[eigv,mul,n,r,j1,j2,j3,j4,i1,i2,k0,k1,k2,g,y,z,w,ww,v,vv],
n:length(x),eigv:eigenvalues(x),k0:length(eigv[1]),
for j1 from 1 thru k0 do block(kill(g),kill(w),kill(ww),
y:kanyaku(x-eigv[1][j1]*ident(n)),r:rank(y),z:-copymatrix(y),
(for j2 from r+1 thru n do z:submatrix(r+1,z)),
 for j2 from r step -1 thru 1 do
block(for j3 from 1 thru n
do if y[j2,j3]=1 then (z:submatrix(z,j3),g[j2]:j3,return(z))),
i1:1, i2:1, for j4  from 1 thru n do
(if j4=g[i1] then (w[j4]:z[i1],i1:i1+1)
else (w[j4]:ident(n-r)[i2],i2:i2+1)),
for k1 from 1 thru n do for k2 from 1 thru n-r
do ww[k1,k2]:w[k1][k2],vv:genmatrix(ww,n,n-r,1,1),
print(eigv[1][j1],",",eigv[2][j1],"-ple,",n-r,"-dim,",vv),
if j1=1 then v:vv else v:addcol(v,vv)),return(v))$
```

$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有多項式，固有値，固有ベクトルを求めよ．

```
A:matrix([4,-3,-1],[1,0,-1],[6,-2,-3]);
expand(charpoly(A,t)); factor(charpoly(A,t));
eigenvalues(A);
eigenspace(A);
```

```
 [[3,-1],[1,2]]
```

は，固有値は $3, -1$ で 3 は単解，-1 は重複度 2 の重解を意味する．

eigenspace による出力は，固有値 3 は固有方程式の単解で，その固有空間は 1 次元であり，固有ベクトル ${}^t(1, 0, 1)$ で生成されていることを意味する．固有値 -1 固有方程式の 2 重解で，その固有空間は 1 次元であり，固有ベクトル ${}^t(1, 1, -2)$ で生成されていることを意味する．A の固有値 -1 は固有多項式の重解であるが，その固有空間は 1 次元である．最後に固有ベクトルを並べてできる行列を返す．

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有多項式，固有値，固有ベクトルを求めよ．

```
B:matrix([3,-4,4],[4,-5,4],[4,-4,3]);
expand(charpoly(B,t)); factor(charpoly(B,t));
eigenvalues(B);
eigenspace(B);
```

```
 [[3,-1],[1,2]]
```

は，固有値は $3, -1$ で 3 は単解，-1 は重複度 2 の重解を意味する．固有値 3 の固有ベクトルは，${}^t(1,1,1)$，固有値 -1 の固有ベクトルは，1次独立なものが ${}^t(1,1,0)$，${}^t(-1,0,1)$ 2つ見つかる．これらのベクトルの自明でない1次結合はすべて A の固有値 -1 の固有ベクトルとなる．B の固有値 -1 は固有多項式の重解であり，固有空間は 2次元である．Maxima は2つのベクトルを求めるているが，それらは固有空間の基底であってその一意性はない．

演習問題: 以下の 3 次正方行列 C_1, C_2, C_3 はみな固有多項式が $(t-1)^3$ となることを確かめよ．それらの行列の 1-固有空間の基底を与え次元を答えよ．

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 5 \\ -9 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -9 & 7 & 9 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

```
C1:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
C2:matrix([-6,4,5],[-9,6,7],[-2,1,3]);
C3:matrix([-8,6,9],[-9,7,9],[-3,2,4]);
factor(charpoly(C1,t)); eigenspace(C1);
factor(charpoly(C2,t)); eigenspace(C2);
factor(charpoly(C3,t)); eigenspace(C3);
```

Definition 2 n次正方行列 A に対して，n次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在するとき，A は対角化可能 であるという．P を A を対角化する行列という．

Theorem 1 n次正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件はAの固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底が存在する．とくに A の固有方程式に重解がなければ，A は対角化可能．

Proof. ($\Leftarrow$) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ を固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の固有ベクトルで $\mathbb{C}^n$ の基底とする．ここで $i \neq j$ に対して $\alpha_i = \alpha_j$ となることも許し，その場合は $\alpha_i (= \alpha_j)$ は固有方程式の重解となっているとみなす． $P = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ とし，$P^{-1}AP$ を P を列ベクトルに分解した区分けによる計算で実行する．

$$\begin{aligned}
&P^{-1}AP = P^{-1}A(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = P^{-1}(A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n) \\
=&P^{-1}(\alpha_1\mathbf{v}_1, \ldots, \alpha_n\mathbf{v}_n) = P^{-1}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix} \\
=&P^{-1}P\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(⇒) 逆に $P^{-1}AP$ が対角行列 Δ であれば，$AP = P\Delta$ より P の各列ベクトルが A の固有ベクトルとなっている． □

正方行列 A が対角化可能かどうかの判定は，A の固有ベクトルを求めて，線形独立なものが A のサイズ分だけあるかを調べればよい．Maxima においては，eigenspace を実行し，最後に出力された行列が正方行列であれば A は対角化可能で，A を対角化する行列となる．最後に出力された行列が正方行列でなければ，A は対角化可能でない．

演習問題: 以下の行列が対角化可能か判定し，対角化可能であれば対角化する行列 P を求めよ．

$$D_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 & -2 \\ -4 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -8 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & -5 \\ -5 & 2 & 5 & -5 \\ -5 & 5 & 2 & -5 \\ -5 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

```
D1:matrix([6,1,-9,-2],[-4,-3,4,1],[5,1,-8,-1],[1,0,-1,3]);
D2:matrix([-3,0,5,-5],[-5,2,5,-5],[-5,5,2,-5],[-5,5,0,-3]);
P1:eigenspace(D1);
P2:eigenspace(D2);

P2^^(-1).D2.P2;
```

レポート問題 1 行列 $M = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 18 & -24 & -18 \\ 8 & 14 & -23 & 30 & 23 \\ -24 & -38 & 67 & -82 & -68 \\ -12 & -19 & 33 & -41 & -33 \\ -12 & -19 & 33 & -40 & -34 \end{pmatrix}$ と

行列 $N = \begin{pmatrix} -23 & 22 & -66 & 0 & 0 \\ -12 & 11 & -36 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，対角化可能であれば対角化する行列を求めよ．

Definition 3 ($\mathbb{C}^n$ における内積) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ を

$$ {}^t\mathbf{x}\,\overline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n} \in \mathbb{C} $$

で定義する. ベクトルの内積の値はスカラーであり, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ の場合は,

$$ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}. $$

Proposition 2 (内積の性質) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}$ に対して以下が成立.

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}', \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}') = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}')$.
3. $(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, c\mathbf{y}) = \overline{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
4. $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$.

ほとんどの線形代数学IIの講義では，$\mathbb{R}^n$ の内積しか扱われていないと思うが，複素ベクトル空間での内積もとても重要である．

$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ を $\mathbf{x}$ のノルムといい $\|\mathbf{x}\|$ で表す．

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ の 内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が 0 になるとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交 するという．$\mathbb{C}^n$ の基底 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ が

$$i \neq j \Rightarrow (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$$

をみたすとき，この基底を $\mathbb{C}^n$ の直交基底という． さらに $\mathbb{C}^n$ の直交基底 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ が

$$\|\mathbf{x}_1\| = \cdots = \|\mathbf{x}_n\| = 1$$

をみたすとき，この基底を $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底という．

Maxima では，行ベクトル $(x_1, \ldots, x_n)$，$(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して，内積を以下のように定義し，

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$

inprod$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ で計算できる(左側のベクトルを複素共役にしている)．

$\mathbf{x} = (\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i})$, $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$ に対して，内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ を計算せよ．

```
load("eigen");
x:matrix([%i,%i,%i]); y:matrix([1,1,1]);
inprod(x,y);
inprod(y,x);
```

load("eigen") は，inprod コマンドが使えるようにするために実行する．内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -3\mathbf{i}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 3\mathbf{i}$ という答えを返す．複素ベクトルに対する内積は，inprod を用いるより行列の積と複素共役を用いる以下のような方法を推奨する．

```
x.conjugate(transpose(y));
```

$\mathbb{C}^n$ の基底を直交基底や正規直交基底に変換するアルゴリズム Gram Schmidt の直交化法がある．それについては線形代数学II の講義で説明されるので，ここでは解説しない．Maxima には行ベクトルで与えられたベクトルを互いに直交するベクトルに変換するコマンド gramschmidt が用意されている．

$\mathbf{x}_1 = (8, 4, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (-7, -8, 7)$, $\mathbf{x}_3 = (-5, 11, -4)$ を直交基底に変換せよ.

```
load("eigen");
X:matrix([8,4,1],[-7,-8,7],[-5,11,-4]);
Y:gramschmidt(X);
expand(Y[1].transpose(Y[2]));
expand(Y[1].transpose(Y[2]));
expand(Y[2].transpose(Y[3]));
```

load("eigen") は, gramschidt コマンドが使えるようにするために実行する. さらにこれを正規直交基底に変換するには, 各行ベクトルをノルムで割ればよい.

```
Gschmidt(x):=block([y,j],y:gramschmidt(x),
for j thru length(y) do
    y[j]:y[j]/sqrt(conjugate(y[j]).transpose(y[j])), return(y))$
```

レポート問題 2 *Gschmidt* を用いて, $\mathbb{C}^4$ のベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (1,1,1,1), & \mathbf{x}_2 &= (2, 1+\mathbf{i}, 0, 1-\mathbf{i}), \\ \mathbf{x}_3 &= (1+2\mathbf{i}, -2+\mathbf{i}, 1, \mathbf{i}), & \mathbf{x}_4 &= (-3, -2-3\mathbf{i}, -1, -2+3\mathbf{i}), \end{aligned}$$

を正規直交基底に変換せよ. ただし, 内積は *Maxima* における定義

$$((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3 + \overline{x_4}y_4$$

を用いる.

複素n次正方行列 H が ${}^t\overline{H} = H$ をみたすとき，H をエルミート行列という．エルミート行列 H が実数行列ならば$\overline{H} = H$ なので，対称行列となる．

Theorem 2 n次エルミート行列 H の固有値はすべて実数で，相異なる固有値の固有空間の元は，互いに直交する． H は対角化可能で，H を対角化する行列 U でその列ベクトルたちが$\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となるものが存在する．

複素 n次正方行列 U の列ベクトルたちが $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となるとき，U をユニタリ行列という．ユニタリ行列 U の逆行列は ${}^t\overline{U}$ で求めることができる．

Theorem 3 実n次対称行列 S の固有値はすべて実数で，相異なる固有値の固有空間の元は，互いに直交する．S は対角化可能で，S を対角化する行列 P でその列ベクトルたちが $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるものが存在する．

実 n次正方行列 P の列ベクトルたちが $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるとき，P を直交行列という．直交行列 P の逆行列は ${}^tP$ で求めることができる．

行列 $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 3 & 1 & 3\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 3\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 1 & 3 \\ -3\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 3 & 1 \end{pmatrix}$ をユニタリ行列で対角化せよ.

```
H:matrix([1,3,-3*%i,3*%i],[3,1,3*%i,-3*%i],[3*%i,-3*%i,1,3],
[-3*%i,3*%i,3,1]);
P:eigenspace(H);
Q:Gschmidt(transpose(conjugate(P)));
R:matrix(Q[1],Q[2],Q[3],Q[4]);
U:transpose(conjugate(R));
factor(U^^(-1).H.U);
factor(U.transpose(conjugate(U)));
```

レポート問題 3 実対称行列 $S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ.

References

[1] 上見練太郎，勝股脩，加藤重雄，久保田幸次，神保秀一，山口佳三 共著，
微分 改訂版，共立出版，東京，2014.

[2] 上見練太郎，勝股脩，加藤重雄，久保田幸次，神保秀一，山口佳三 共著，
積分 改訂版，共立出版，東京，2014.

[3] 泉屋周一，石川剛郎，陳蘊剛，上見練太郎，三波篤郎，西森敏之 共著，
行列と連立一次方程式，共立出版，東京，1996.

[4] 泉屋周一，石川剛郎，陳蘊剛，上見練太郎，三波篤郎，西森敏之 共著，
線形写像と固有値，共立出版，東京，1996.

[5] 三宅 敏恒 著,
入門線形代数, 培風館, 東京, 1991.

[6] 三宅 敏恒 著,
入門微分積分, 培風館, 東京, 1992.