科学・技術の世界

数式処理システムによる新時代の数学

行木 孝夫、松本 圭司 (北大 理 数学)

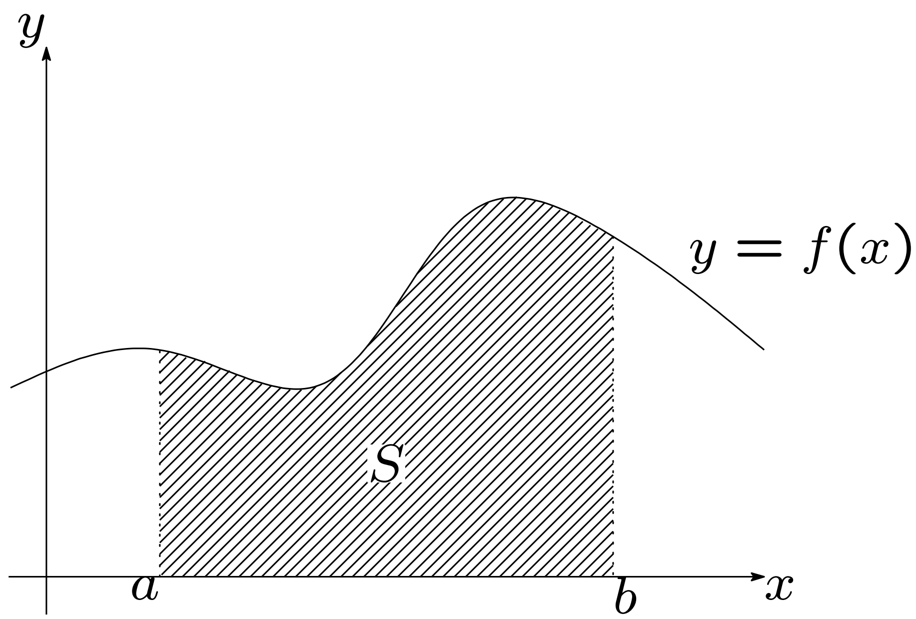
第10回, 2017 December 11

2 変数関数の積分，ヤコビアン

1 変数関数の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，集合

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

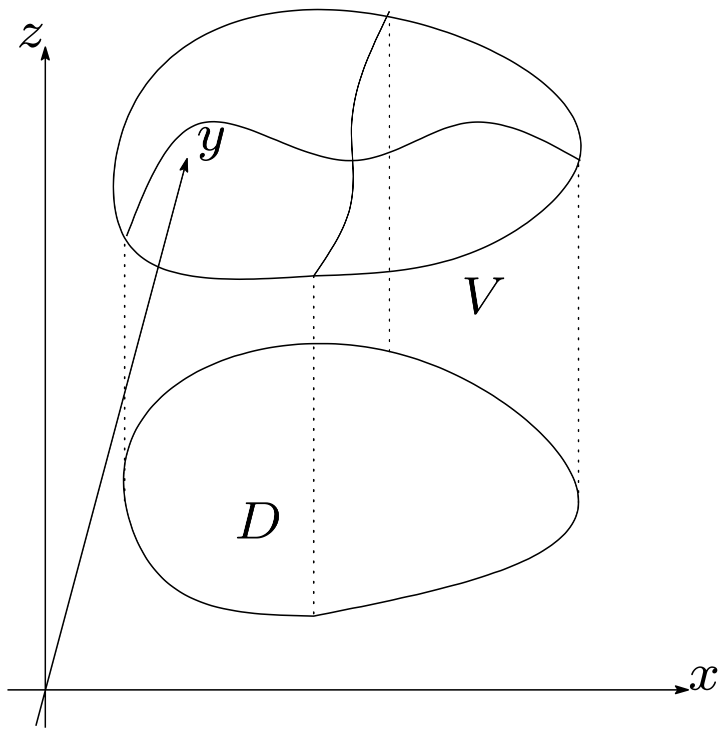
の (符号つきの) 面積であった．正確には，面積という概念を極限で再定義したもの．



2 変数関数の重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ は，集合

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

の (符号つきの) 体積という概念を極限で定義したもの.



D が長方形 $[a,b]\times[c,d]$ で，$f(x,y)$ が D 上で連続のときの重積分は，累次積分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

または積分する変数の順序を変更した累次積分

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$$

により，計算できる．

Maxima においては，以下を実行すればよい．

```
integrate(integrate(f(x,y),y,c,d),x,a,b);
```

```
integrate(integrate(f(x,y),x,a,b),y,c,d);
```

計算がしやすそうな順番で累次積分を実行すること．

Example 1 以下の重積分を計算せよ.

1. $\displaystyle\int_0^1\int_2^3 (x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)dxdy$
2. $\displaystyle\int_0^1\int_{\pi/2}^{\pi} ye^{xy}\sin(y)dxdy$
3. $\displaystyle\int_1^e\int_1^{\infty} \frac{\log(x)-\log(y)}{y^2}dxdy$

```
1. integrate(integrate((x^2+x*y+y^2)*(x^2+y^2),x,0,1),y,2,3);
   integrate(integrate((x^2+x*y+y^2)*(x^2+y^2),y,2,3),x,0,1);

2. integrate(integrate(y*exp(x*y)*sin(y),x,0,1),y,%pi/2,%pi);
   integrate(integrate(y*exp(x*y)*sin(y),y,%pi/2,%pi),x,0,1);

3. integrate(integrate((log(x)-log(y))/y^2,x,1,%e),y,1,inf);
   integrate(integrate((log(x)-log(y))/y^2,y,1,inf),x,1,%e);
```

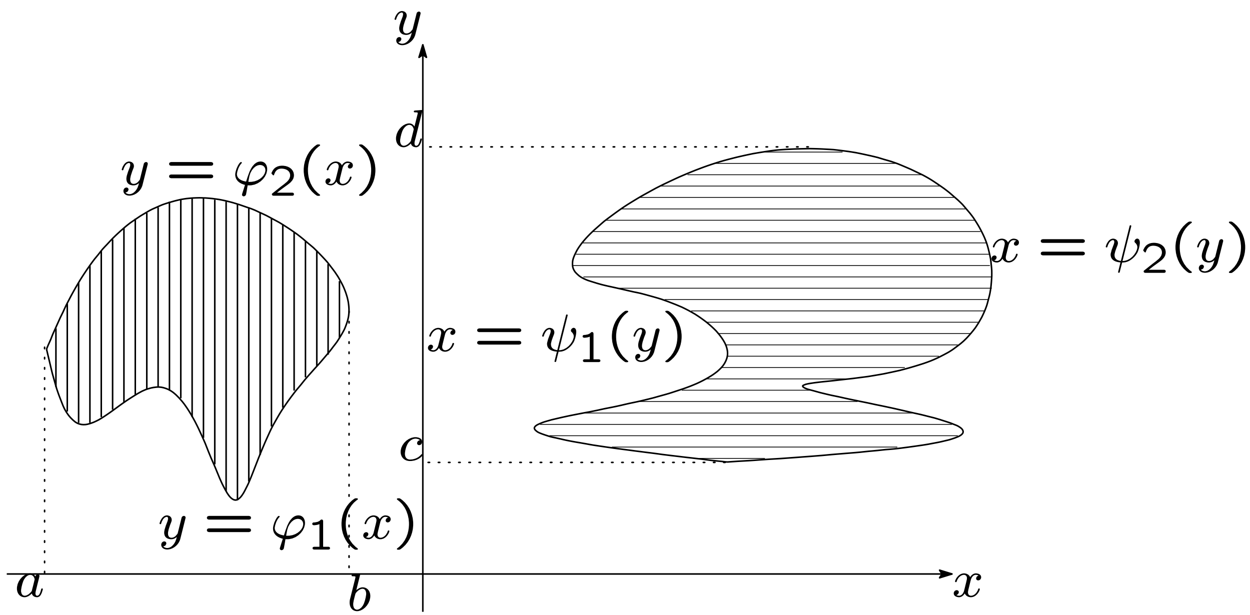
１変数の積分では区間もしくは区間の和集合上でしか現れないが，重積分では D が長方形とは限らない.

D が縦線形または横線形

$$\{(x,y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$

$$\{(x,y) \mid c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

の場合



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ または $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ の具体形を与えて,

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy)dx,$$

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d (\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx)dy$$

により, 計算できる.

Maxima においては, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ または $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ の具体形を,
以下を実行すればよい.

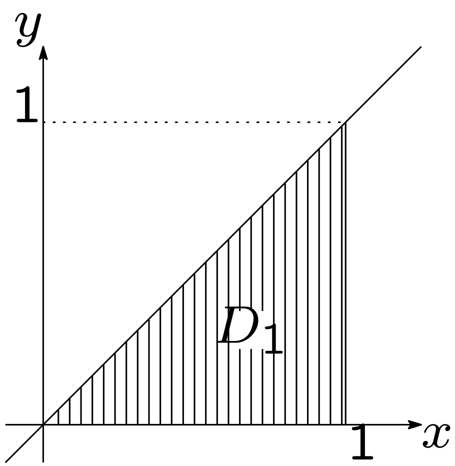
```
integrate(integrate(f(x,y),y,phi_1(x),phi_2(x)),x,a,b);
```

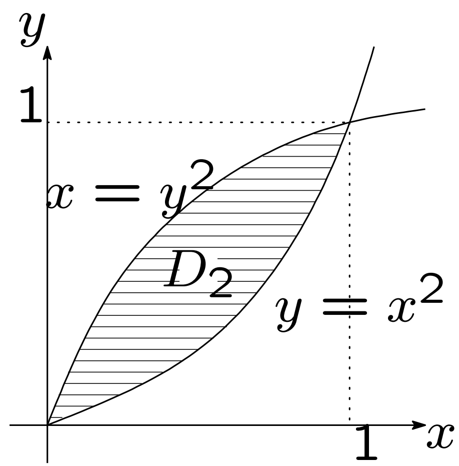
```
integrate(integrate(f(x,y),x,psi_1(y),psi_2(y)),y,c,d);
```

計算がしやすそうな順番で累次積分を実行すること.

Example 2 以下の重積分を計算せよ.

1. $\displaystyle\iint_{D_1} e^{x^2} y^2 dxdy$,
2. $\displaystyle\iint_{D_2} x^3 y(1-y)^2 dxdy$,





領域 D_1, D_2 はそれぞれ縦線形，横線形とするのがよい．

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$,

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

1.
```
integrate(integrate(exp(x^2)*y^2,y,0,x),x,0,1);
integrate(integrate(exp(x^2)*y^2,x,y,1),y,0,1);
```

2.
```
integrate(integrate(x^3*y*(1-y)^2,x,y^2,y^(1/2)),y,0,1);
integrate(integrate(x^3*y*(1-y)^2,y,x^2,x^(1/2)),x,0,1);
```

Theorem 1 (変数変換公式) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D から $\mathbb{R}^2$ 内の領域 E への上への 1 対 1 C^1 級写像

$$\Phi : D \ni (u,v) \mapsto (x,y) = \Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in E$$

に対して，D 内の各点 (u,v) で Φ のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix}$$

が 0 でないとする．ここで，$\varphi_u(u,v)$，$\varphi_v(u,v)$，$\psi_u(u,v)$，$\psi_v(u,v)$ は φ, ψ の u,v に関する偏導関数を表す．E 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Maxima におけるヤコビアンの計算方法:

```
determinant(jacobian([phi(u,v), psi(u,v)],[u, v]));
```

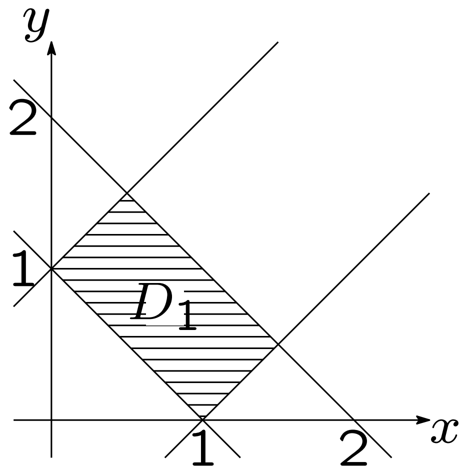
Remark 1 *Maxima* におけるコマンド *jacobian* は, ヤコビ行列

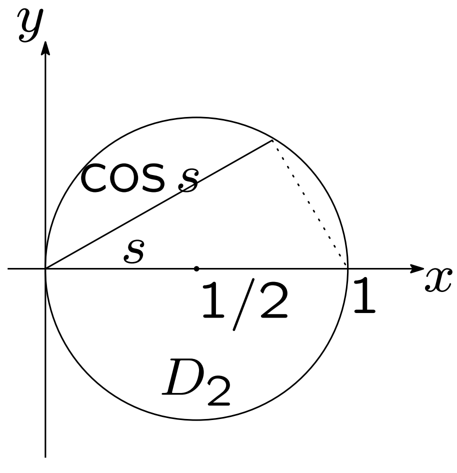
$$\begin{pmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix}$$

を構成する. 北大の微分積分学*II* におけるヤコビアンは, その行列式なので, 行列式を計算するコマンド *determinant* を合成する必要がある.

Example 3 以下の重積分を計算せよ．

1. $\displaystyle\int_{D_1} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$, $\quad D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \le x+y \le 2 \\ -1 \le x-y \le 1 \end{array} \right\}$.
2. $\displaystyle\int_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\quad D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le x\}$.





1．$x+y=u$, $x-y=v$ とおけば，積分は長方形 $[1,2]\times[-1,1]$ 上の積分になる．この変数変換を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ への線形写像とみなし，行列で表示した逆行列により $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ が得られる．逆行列の行列式は，元の行列の逆数なので求めるヤコビアンは $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} = \dfrac{-1}{2}$ で，その絶対値は $1/2$.

```
integrate(integrate(v^2/u^3*(1/2),u,1,2),v,-1,1);
integrate(integrate(v^2/u^3*(1/2),v,-1,1),u,1,2);
```

```
integrate(integrate((x-y)^2/(x+y)^3,y,1-x,1+x),x,0,1/2)+
integrate(integrate((x-y)^2/(x+y)^3,y,1-x,2-x),x,1/2,1)+
integrate(integrate((x-y)^2/(x+y)^3,y,-1+x,2-x),x,1,3/2);
```

極座標に変換する．つまり $x = r\cos s$, $y = r\sin s$ とおく．極座標とは平面内の点 P の位置を原点 $O = (0,0)$ と距離 r と線分 OP と x軸の正の部分との角度 s で表示する手段．ただし，P が原点の時は，s は定義しない．そのヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \cos s & -r\sin s \\ \sin s & r\cos s \end{vmatrix} = r(\cos s)^2 + r(\sin s)^2 = r.$$

原点が中心で半径が R，中心角が α の扇型の内部は，極座標を用いると長方形 $[0,R]\times[0,\alpha]$ で表示できる．

この問題の D_2 は極座標を用いて横線形として表示できる．D_2 を原点を通る傾き s の線分の集まりとみなす．その線分の長さは，直径の円周角が直角であることから $\cos s$．つまり $D_2 = \{(r,s) \mid -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos s\}$ と表示できる．

```
integrate(integrate(sqrt(1-(r*cos(s))^2-(r*sin(s))^2)*r,
r,0,cos(s)),s,-%pi/2,%pi/2);
```

実はその答えは間違い.

```
trigsimp(integrate(
sqrt(trigsimp(1-(r*cos(s))^2-(r*sin(s))^2))*r,
r,0,cos(s)));
```

trigsimp は, 三角関数の表示式の簡略化を行う. Maxima は絶対値のある積分計算を苦手としている.

```
integrate(2*(-sin(s)^3+1)/3,s,0,%pi/2);
```

３重積分についても同様に定義され，累次積分で計算できる．変数変換公式も成立している．

Example 4 *1.* $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(x^2+2y)(x^3+2xy+3z)dxdydz.$

2. $\iiint_D x^4y^3z^2(1-x-y-z)dxdydz,$
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}.$

```
1. integrate(integrate(integrate(
x*(x^2+y)*(x^3+x*y+z),z,0,1),y,0,1),x,0,1);
2.plot3d(1-x-y,[x,0,1],[y,0,1],[z,0,1]);
integrate(integrate(integrate(
x^4*y^3*z^2*(1-x-y-z),z,0,1-x-y),y,0,1-x),x,0,1);
```

Definition 1 (３次元の極座標変換)

$$\begin{array}{rcl}\Phi : (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,s,t) & \mapsto & (x,y,z)=\Phi(r,s,t),\end{array}$$

ここで $(x,y,z)=\Phi(r,s,t)=(r\sin s\cos t, r\sin s\sin t, r\cos s)$.

Φ は, $(0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$ から $\mathbb{R}^3$ から z-軸を除いた集合への上への１対１写像で, そのヤコビアンは

$$\det\begin{pmatrix}\sin s\cos t & r\cos s\cos t & -r\sin s\sin t \\ \sin s\sin t & r\cos s\sin t & r\sin s\cos t \\ \cos s & -r\sin s & 0\end{pmatrix}=r^2\sin s$$

であり, 定義域上 0 にはならない.

```
JM:jacobian([r*sin(s)*cos(t),r*sin(s)*sin(t),r*cos(s)],[r,s,t]);
Jac:trigsimp(determinant(JM));
```

Remark 2 空間内の点 P の位置を原点 $O=(0,0,0)$ からの距離 r, 線分 OP と z-軸の正の部分との角度 s (緯度), および線分 OP の (x,y)-平面へ射影と x-軸の正の部分との角度 t (経度) で表示する方法. P が z-軸上にあるときは, t は定義しない. $P=O$ に対しては, さらに s,t は定義しない. *Theorem 1* の仮定をみたさなくなるが, $\mathbb{R}^3$ の連続関数に対しては, この公式は適用可能.

Example 5 $\iiint_D dxdydz$, $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ (a は正定数).

極座標に変換すると D は, 直方体 $[0,a]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ で表示できるので, $\iiint_D dxdydz=\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin s\,drdsdt$.

```
integrate(integrate(integrate(r^2*sin(s),
t,0,2*%pi),s,0,%pi),r,0,a);
```

レポート問題 1 以下の積分を計算せよ.

1. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx.$

2. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy.$

3. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy, \qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 0\le x-y\le 1 \\ 1\le x+y\le 2\end{matrix}\right\}.$

4. $\displaystyle\iint_D (y-x^2)dx\,dy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le y\}.$

5. $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dx\,dy\,dz,$
$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}.$

References

[1] 上見練太郎，勝股脩，加藤重雄，久保田幸次，神保秀一，山口佳三 共著，微分 改訂版，共立出版，東京，2014.

[2] 上見練太郎，勝股脩，加藤重雄，久保田幸次，神保秀一，山口佳三 共著，積分 改訂版，共立出版，東京，2014.

[3] 泉屋周一，石川剛郎，陳蘯剛，上見練太郎，三波篤郎，西森敏之 共著，行列と連立一次方程式，共立出版，東京，1996.

[4] 泉屋周一，石川剛郎，陳蘯剛，上見練太郎，三波篤郎，西森敏之 共著，線形写像と固有値，共立出版，東京，1996.

[5] 三宅 敏恒 著,
入門線形代数, 培風館, 東京, 1991.

[6] 三宅 敏恒 著,
入門微分積分, 培風館, 東京, 1992.