科学・技術の世界

数式処理システムによる新時代の数学

行木 孝夫、松本 圭司 (北大 理 数学)

第 6 回, 2017 November 13

行列の簡約化

Definition 1 (簡約な行列) (m,n)行列 X が次の4条件をみたしているとき, X は簡約であるという.
1. 行列 X の行ベクトルで零ベクトルが存在するならば, その行以下にある X の成分はすべて 0.
2. 零ベクトルでない行ベクトルの一番左にある 0 でない成分は 1. これを簡約な行列 X の主成分という.
3. i行の主成分が j_i 列にあるとする. そのとき

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$$

をみたす. つまり主成分は下へいくほど右にある.
4. 主成分を含む列は, 主成分以外の成分はすべて 0 となる.

簡約な行列の具体例 (下線を引いてあるものが主成分)

$$
\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \end{pmatrix}.
$$

簡約でない行列の具体例

$$
(1) \begin{pmatrix} 0 & {\color{red}2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & {\color{red}3} & 1 & {\color{red}2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {\color{red}1} & {\color{red}2} & {\color{red}3} \end{pmatrix}.
$$

(1) では $(1,2)$-成分が 1 でないといけない. (2) では $(1,3)$-成分, $(1,5)$-成分が 0 でないといけない. (3) では 2 行が零ベクトルであるが, 3 行に零でない成分がある.

Theorem 1 任意の (m,n) 行列 A は, 左基本変形により, 簡約な行列に変形できる. この簡約な行列は A によって一意的に定まる.

Definition 2 行列 A に対して, A の左基本変形により得られる簡約な行列を A の簡約化という.

Maxima には A の簡約化を計算するコマンドは実装されていない. しかし, 簡約行列の条件 1,2,3 をみたしている行列への変形コマンドは存在する.

```
A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]); echelon(A);
```

echelon(A) に対して, 簡約行列の条件 4 をみたすように変形するコマンドを作成する.

そのコマンドを kanyaku として定義する.

```
kanyaku(x):=block([cx,rk,xx,j1,j2,j3],
 cx:length(x[1]),
 rk:rank(x),
 xx:echelon(x),
if rk<2 then return(xx) else
for j1 : 2 thru rk do
block(
for j2 : j1 thru cx do
if xx[j1,j2]=1 then
(for j3 : 1 thru j1-1 do
if xx[j3,j2]#0 then
 xx[j3]:xx[j3]-xx[j3,j2]*xx[j1],
return(xx))),
return(xx))$
```

プログラムの意味

block( ): カッコ内をひとまとまりとみなす.
［cx,rk,xx,j1,j2,j3］: cx, rk, xx, j1, j2, j3 という変数は, kanyaku を定義するために一時的に利用される変数. このためだけに使われるもので, 他で別の記号としても影響がないようにする.
cx:length(x[1]), 入力された行列 x の列の個数を cx とする.
rk:rank(x), 入力された行列 x の rank を rk とする.
xx:echelon(x), 入力された行列 x に対して echelon(x) を xx とする. この行列を左基本変形して簡約化する.
if rk $<$ 2 then return (xx): x の rank が 1 なら xx は 簡約行列なので, xx をそのまま返す.
else for j1 : 2 thru rk do: x の rank が 2 以上なら j1 行にある主成分を見つけて, その列をその主成分で掃き出す. それを j1 が 2 から rk=rank(x) まで繰り返す.

for j2 : j1 thru cx do if xx[j1,j2]=1 then j1 行の主成分は j1 列以後にあるので，主成分を見つけにいく．主成分かの判定は xx[j1,j2] が 1 かをしらべればよい．

(for j3 :1 thru j1-1 do

if xx[j3,j2]#0 then xx[j3]:xx[j3]-xx[j3,j2]*xx[j1],return(xx)) 主成分がみつかったら j2 列を xx[j1,j2] を要として掃き出しを実行． xx の j3 行 ($1 \leq j3 \leq j1-1$) 行の j2列成分が 0 でなければ，j3行に j1 行の -xx[j3,j2]倍を加え，それを改めて xx の j3行とする．

return(xx) j2列の掃き出しが終わったら，j2 に関するループから抜け出し，xx を返す．return(xx) 二つ目の return(x) は，j1 のループが完了したら xx を返すことを意味する．j1 のループは途中で抜け出すことはない．

これを入力し，kanyaku が定義されたファイルをセーブし，エクスポートでバッチファイルに変換する． 正しく入力されているか，行列の簡約化を計算させて，チェックする．

演習問題: $\boxed{1}$ 以下の行列を簡約化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 8 & -a-1 & -12 & 2a+10 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (1) 前問の最後の行列を A とする. A の4列を取り除いてできる3次正方行列の行列式を因数分解せよ.

(2) A を rowop または gyouop を用いて3行の第1成分と第2成分が 0 になるように変形し, その行列の各成分を因数分解せよ.

行列の成分に変数がある場合は, 簡約化において多項式の割り算の実行により, 大切な因数が消されている可能性があることに留意する.

簡約化の応用例:

連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 & = & 10 \end{array}\right.$$

を拡大係数行列を簡約化することで解く.

拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ の簡約化は

$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 拡大係数行列の簡約化に対応する方程式系は

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \underline{x_1} & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & & & = & 4, \\ & & & & \underline{x_3} & + & 5x_4 & + & x_5 & = & 6. \end{array}\right.$$

簡約化の主成分以外に対応している変数 x_2, x_4, x_5 を右辺に移項して，それらが任意に動ける媒介変数とみなして，以下のすべての解の表示が得られる．

$$\begin{cases} x_1 &= 4 \quad -2x_2 \quad - \quad 3x_4 \\ x_3 &= 6 \qquad\qquad\quad - \quad 5x_4 \quad - \quad x_5 \end{cases} \qquad (x_2, x_4, x_5 \text{ は任意の数}).$$

また，x_2, x_4, x_5 が媒介変数 s_1, s_2, s_3 であると明示して，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2s_1 - 3s_2 \\ s_1 \\ 6 - 5s_2 - s_3 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(s_1, s_2, s_3 は任意の数) という表示も得られる．

この解の表示における s_1，s_2，s_3 を係数としているベクトルは，元の方程式の右辺を零ベクトルの変更した同次形の連立方程式系の解となっている．

n を方程式系の変数の個数とすると，同次形の連立方程式系の解全体は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となっていて，その基底が上記の計算から得られている．

線形写像の核と像の基底の導出.

例題: 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ により定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^5 \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

に対して, $\mathrm{Im}(f)$ と $\ker(f)$ の基をそれぞれ 1 組与え, $\mathrm{rank}(f)$ と $\dim(\ker(f))$ を求めよ.

解答例: 行列 A を簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Im}(f)$ は A の列ベクトルで 1 次独立な最大個数を与えるものが基となる.
A の列ベクトルたちは, 簡約化した列ベクトルたちと同じ 1 次関係式をみたしている.

一方 A の簡約化では主成分を有する列ベクトルがその性質をもつ．それは第 1, 2 列にあるので，$\mathrm{Im}(f)$ の基は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる．これらは 2 個のベクトルなので，$\mathrm{rank}(f) = 2$.

$\ker(f)$ は連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_3$ の解空間と一致している．上記の簡約化によりその解たちは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - 2x_4 - x_5 \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ここで x_3, x_4, x_5 は 任意の実数．この解の表示式の右辺にある 3 つのベクトルが $\ker(f)$ の基を与え，その個数が 3 なので，$\dim(\ker(f)) = 3$.

$\mathrm{rank}(f) + \dim(\ker(f))$ が定義域の線形空間の次元であるという次元公式から $\mathrm{rank}(f)$ または $\dim(\ker(f))$ のいずれかがわかれば，他方は容易に計算できる．

References

[1] 上見練太郎，勝股脩，加藤重雄，久保田幸次，神保秀一，山口佳三 共著，微分 改訂版，共立出版，東京，2014.

[2] 上見練太郎，勝股脩，加藤重雄，久保田幸次，神保秀一，山口佳三 共著，積分 改訂版，共立出版，東京，2014.

[3] 泉屋周一，石川剛郎，陳蘊剛，上見練太郎，三波篤郎，西森敏之 共著，行列と連立一次方程式，共立出版，東京，1996.

[4] 泉屋周一，石川剛郎，陳蘊剛，上見練太郎，三波篤郎，西森敏之 共著，線形写像と固有値，共立出版，東京，1996.

[5] 三宅 敏恒 著,
入門線形代数, 培風館, 東京, 1991.

[6] 三宅 敏恒 著,
入門微分積分, 培風館, 東京, 1992.