平面の回転と空間の回転

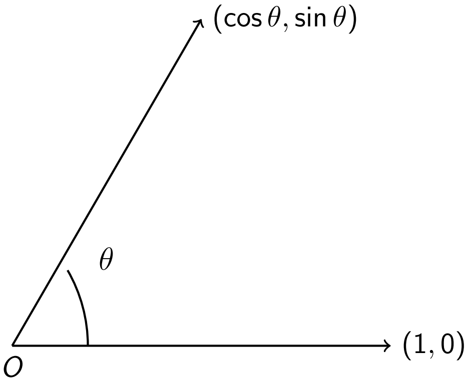
2017.11.27

平面の回転

- 平面上の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点中心に角度 θ だけ回転する操作を考える。線形変換を用いることにしよう。
- まず、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点中心に角度 θ だけ回転したベクトル e_1' と e_2' を見つければ、原点中心の角度 θ 回転を表す線形変換を作ることができる。。

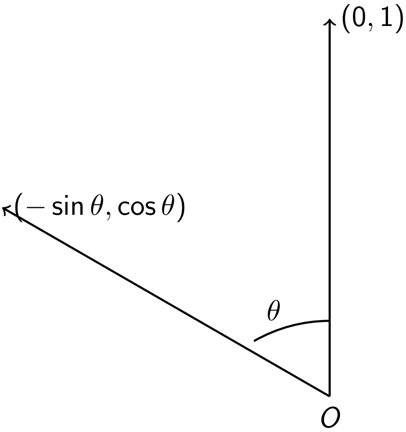
標準基底の像

図形的に考えて、まず $e_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ である。



標準基底の像

図形的に考えて、まず $e_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ である。



表現行列

基底 $\{e_1, e_2\}$ を $\{e'_1, e'_2\}$ に写す線形変換 T, $T(e_1) = e'_1$, $T(e_2) = e'_2$ の表現行列 $R(\theta)$ は次の関係から求められる。

$$(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2)R(\theta)$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

実際、

$$R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xR(\theta)e_1 + yR(\theta)e_2 = x\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

となっている。この行列 $R(\theta)$ を平面の (2 次元の) 回転行列とよぶことにする。

演習（15 分程度）: Maxima で $R(\theta)$ を作成し、ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を $\pi/2$,$\pi/4$ 回転してみる。

回転行列と複素数

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおいて、回転行列を次のように分解する。

$$R(\theta) = \cos\theta E + \sin\theta I$$

$I^2 = -E$ に注意すると、I は虚数単位に相当し、回転行列は複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ に相当することが直観的に予想できる。（複素平面での回転を複素数の積で表すことは知っているのだった。）

空間の回転

- 平面の回転は理解したから、平面の回転をもとにして空間の回転を考えていく。ここで、空間の回転とは原点を通る直線を軸とした回転である。
- 空間ベクトル $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ を z 軸の周りに角度 θ だけ回転すると、z 成分 v_z は変わらない。
- 平面 $z = v_z$ の上で、平面ベクトル $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ を角度 θ だけ回転すると、$R(\theta) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \cos\theta - v_y \sin\theta \\ v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \end{pmatrix}$ となる。

$R(\theta)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x\cos\theta - v_y\sin\theta \\ v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \end{pmatrix}$ と、$z = v_z$ を合わせて、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

この行列を z 軸に関する回転行列とよび、$R_z(\theta)$ と書くことにする。

y 軸、x 軸に関する回転行列も同様に構成できる。

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

原点を通る一般の直線の方向ベクトルは次の通り。

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

z 軸を $z-x$ 平面上で角度 ψ 回転し（y 軸について ψ 回転し）、z 軸について φ 回転して得られる。

一般の直線に関する角度 θ 回転は、まず直線を z 軸に戻して θ 回転し、

$$R_z(\theta)(R_y(-\psi)R_z(-\varphi))$$

z 軸を直線に戻す。

$$(R_z(\varphi)R_y(\psi))R_z(\theta)(R_y(-\psi)R_z(-\varphi))$$

演習 $\varphi = \pi/4$, $\psi = \pi/4$ として定まる直線を軸として点 $(1, -1, 0)$ を $\pi/2$ 回転してみよ。

四元数と行列表示: 四元数

複素数は虚数単位 i を用いて $z = a + bi$ と表す数だった。3 個の虚数単位 i, j, k を用いて $q = a + bi + cj + dk$ と表す数を四元数 (しげんすう, quaternion) とよぶ。i, j, k については
$i^2 = k^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j$,
$ji = -k, kj = -i, ik = -j$ という関係をおく。

四元数と行列表示: 行列表示

四元数に現れる i, j, k を行列で表わそう。実数成分の 4 次正方行列で表す方法と複素数成分の 2 次正方行列で表す方法がある。ここでは後者を使う。

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と定め、$q = a + bi + cj + dk$ に対応する行列
$Q = aE + bI + cJ + dK$ は次の通り。

$$Q = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

参考図書: 斎藤正彦『線形代数演習（基礎数学 4）』（東大出版会）

四元数と回転

1. 空間の単位ベクトル v について、四元数 $q = v_x i + v_y j + v_z k$ を与える。
2. これを軸とする θ 回転に相当する四元数を $r = \cos(\theta/2) + (v_x i + v_y j + v_z k)\sin(\theta/2)$ と定義する。
3. 空間ベクトル a を四元数 $p = a_x i + a_y j + a_z k$ と表し、これについて v を軸に θ 回転する操作を次で決める。

$$r p \bar{r}$$

行列表示を使う。

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) + v_x i \sin(\theta/2) & (v_y + v_z i)\sin(\theta/2) \\ (-v_y + v_z i)\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) - v_x i \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} a_x i & a_y + a_z i \\ -a_y + a_z i & -a_x i \end{pmatrix}$$

R^* を R の転置かつ複素共役として、次の通り。

$$RPR^*$$

この行列が表す四元数の虚部が回転結果である。R^* は R の転置と複素共役をとる。
演習: RR^* を計算してみよ。