レポート問題について

1. $f(x,t) = e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{t}$ について、$f_t - f_{xx}/2$ を求めよ。
2. 上の $f(x,t)$ について、$t = 1, 4, 16$ のそれぞれについて $y = f(x,t)$ のグラフを描け（3 つのグラフを同時に描く）。どのグラフがどの t に対応するか明記すること。
3. i を虚数単位とし、複素数値をとる関数 $exp(ix)$ を考える（指数関数 $exp(x)$ をマクローリン展開として定義し、x に改めて ix を代入する）。適当な次数を決めて $exp(ix)$ をマクローリン展開し、実部と虚部を $sin(x)$, $cos(x)$ のマクローリン展開と比較する。わかった結果を述べよ。

1と2の背景

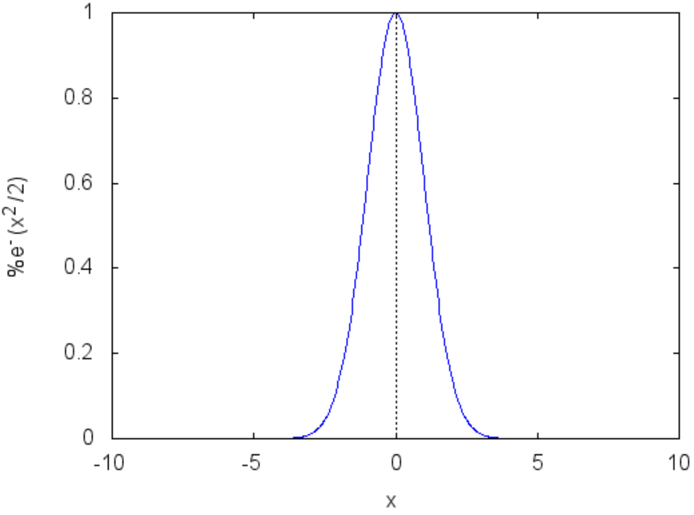
- よく冷えた細長い鉄棒の真ん中を火で熱すると、熱した部分の左右が徐々に暖かくなり、熱した部分の温度は徐々に下がることが体感できるはず。
- そのような熱伝導を表す方程式が 1. に示した偏微分方程式である。

$$f_t(x,t) = \frac{1}{2} f_{xx}(x,t)$$

- これを満たす関数 $f(x,t)$ の 1 つが次のようになることを確かめる問題。

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$t = 1$の場合のグラフ



3 の背景

- 指数関数のマクローリン展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ について、x に複素数を代入すれば指数関数を複素数について定義できる。
- e^{x+iy} でも $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ が成立するとして、e^{iy} の正体がわかれば e^{x+yi} を理解することができる。
- 指数関数のマクローリン展開をよく観察するとわかる（実際、$e^{iy} = \cos y + i \sin y$）のだが、Maxima を使って考える。
- 例えば 10 次までのマクローリン展開 `taylor(exp(%i*x),x,0,10)` を実行して、実部と虚部をとってみる。
- それぞれ見覚えがあるはずなので、問題の通り $\cos(x)$, $\sin(x)$ の同次数のマクローリン展開と比較。差を取るのが良いと思うが、単純に出力して比べるだけでもわかるはずである。