(コピー)

微分積分学Ⅱ 第2回レポート(第8回～第12回の要約)

(2017年1月18日(水) 提出)

1. 重積分法

$K:[a,b]\times[c,d]$ のとき、

$f(x,y)$ が K で連続ならば重積分が可能で、
累次積分によって

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$
$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$
と表される。

(また、
$$\iint_K g_1(x)g_2(y)\,dxdy=\int_a^b g_1(x)\,dx\int_c^d g_2(y)\,dy$$
)

◎ $f(x,y)$ を見てどちらの文字から積分すべきか判断する。

一般に、
面積をもつ有界集合 D で定義された
有界連続関数 f は D で積分可能である。

(i) 線形性 $\iint_D(\alpha f+\beta g)\,dxdy=\alpha\iint_D f\,dxdy+\beta\iint_D g\,dxdy$

(ii) 加法性 $\iint_D f\,dxdy=\iint_{D_1} f\,dxdy+\iint_{D_2} f\,dxdy$

(iii) 単調性 D 上で $f\leqq g$
$\Rightarrow\iint_D f\,dxdy\leqq\iint_D g\,dxdy$ (等号成立は $f=g$)

(iv) $\left|\iint_D f\,dxdy\right|\leqq\iint_D|f|\,dxdy$

(v) D が弧状連結かつ f が連続
$\Rightarrow\iint_D f\,dxdy=f(p)\mu(D)$ をみたす点 p が存在する。

$D:\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}c\leqq y\leqq d, & l(y)\leqq x\leqq r(y)\\ (a\leqq x\leqq b & g_1(x)\leqq y\leqq g_2(x))\end{matrix}\right\}$ のとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{l(y)}^{r(y)}f(x,y)\,dx$$

積分順序の変更

$$=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)\,dy$$

◎ 区域を見てどちらの文字から積分すべきか判断する
(対称性・加法性・線形性を工夫して使う)

2. 変数変換

面積0の集合以外で1対1対応

$\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\end{cases}$ に変換。 $D\to E$ に変換

ヤコビアンは $J(u,v)=\det\begin{pmatrix}\varphi_u(u,v), & \varphi_v(u,v)\\ \psi_u(u,v), & \psi_v(u,v)\end{pmatrix}\neq 0$.

$$\iint_{D_{(x,y)}} f\,dxdy=\iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$$
と書ける

極座標への変換 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $J(r,\theta)=r>0$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_E f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

※変換の際には $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ で求められる。

3. 広義積分 (非有界関数、非有界区域があるとき)

$f(x,y)$ は D 上で連続かつ f は定符号のとき、
D の1つの近似増加列 $\{A_n\}$ に対する極限で定義する

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}f(x,y)\,dxdy$$
収束 or 発散

I,J:実数の区間、h は I で、g は J で連続
$h,g>0$
$$\iint_{I\times J}hg\,dxdy=\int_I h\,dx\int_J g\,dy$$

4 線積分

ベクトル場 $f:(P(x,y),Q(x,y))$ の C (方向アリ) に沿う
線積分は、P,Q が連続かつ C が C^1 級曲線ならば

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_{t(i)=a}^{t(f)=b}\left(Px'(t)+Qy'(t)\right)dt$$
と書ける

また $\int_{C_1+C_2}=\int_{C_1}+\int_{C_2}$

〈グリーンの定理〉
P,Q は $D\cup\partial D$ を含む開集合上で C^1 級とする。
∂D が D を左手に見て進むいくつかの C^1 級曲線からなるとき

$$\int_{\partial D}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D(Q_x-P_y)\,dxdy$$

特に $Q_x=P_y$ のとき $\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=0$

〈主な原始関数〉 $(a\neq 0)$

- $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$,
- $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{a\pm x^2}}dx=\pm\sqrt{a\pm x^2}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$
- $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$ $(a>0)$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$
- $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$
- $\displaystyle\int\tan ax\,dx=\frac{-1}{a}\log|\cos ax|$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x$