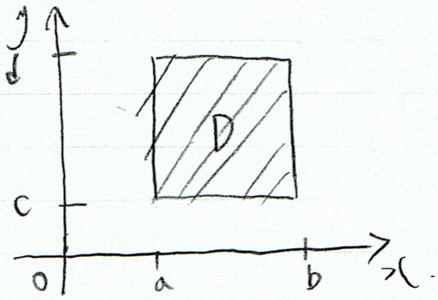
微分積分学II　レポート

@ 長方形領域での重積分



$$f(x,y) = \begin{cases} a \leq x \leq b, & c \leq y \leq d \end{cases}$$

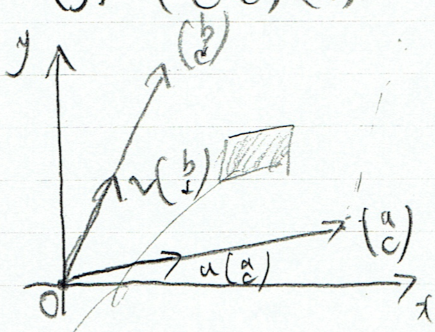
$$長方形の面積 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

※ここで x, y のどちらから積分しても構わないが計算しやすい方からはじめるのがよい

@ 変数変換（一般）

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$



$$|ad-bc|(u_{k+1}-u_k)(v_{k+1}-v_k)$$

$(x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k)$ 縮小値

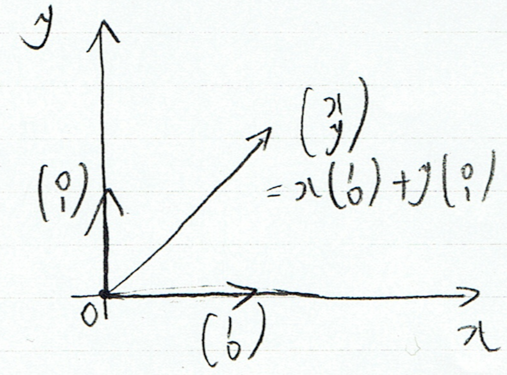
また

$$dx\,dy = |ad-bc|\,du\,dv$$

したがって

$$\iint_{D(x,y)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D(u,v)} f(au+bv, cu+dv)\,|ad-bc|\,du\,dv$$

@ 変数変換（原点中心の回転）

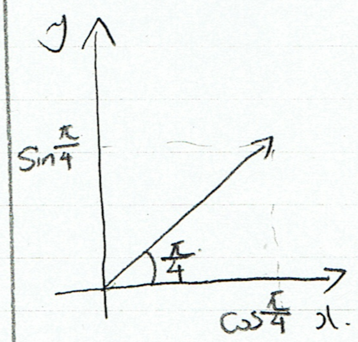


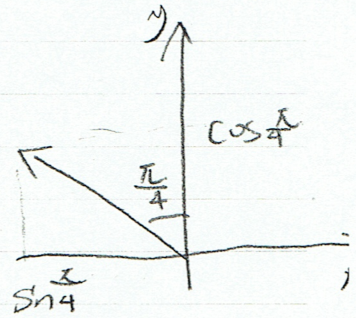
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

変数変換：$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　これを取り換える

$$\begin{cases} u = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ v = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$





$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ への変換：原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

t：$0 \leq t < 2\pi$，回転角

線積分とグリーンの定理

閉曲線

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$