積分学Ⅱ 要約

・重積分

→ 長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 領域の場合

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

$$=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

☆定義

$$\overline{S}_{n,n'}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n'-1} M_{kl}(x_{k+1}-x_k)(x_{l+1}-x_l)$$

$\underline{S}_{n,n'}=$ 〃 m_{kl} 〃 として

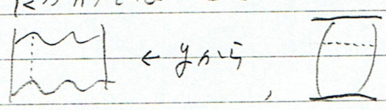
$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}}\overline{S}_{n,n'}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}}\underline{S}_{n,n'}<\infty$$

のとき 可積分.

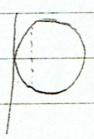
また $f(x,y)$ が D 上 連続なら可積分

・$f(x,y)=y\cos(xy)$ は先に x で積分

→ 長方形でないとき



← yから , ← xから



← yから?

☆ $f(x,y)=e^{-y^2}$ ← xから.

$$\int_0^a ye^{-y^2}dy=\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^a=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})$$

↑ $(e^{-y^2})'=-2ye^{-y^2}$ より

・変数変換

$$\begin{cases}x=au+bv\\ y=cu+dv\end{cases}$$

絶対値

$\lim M_{kl}|ad-bc|(u_{k+1}-u_k)(v_{k+1}-v)$

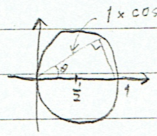
$$\Rightarrow\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D(u,v)}f(au+bv,\ cu+dv)\,|ad-bc|\,dudv$$

・極座標変換

〈例〉 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq x\}$

↓

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2$$



$D=\{r,\theta\mid r^2\leq r\cos\theta$

$r\leq\cos\theta$

$0\leq r$ なので $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases}x=r\cos x\\ y=r\sin x\end{cases}$$

$(r^2=x^2+y^2)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\right)d\theta$$

ヤコビアン

※ $e^{-x^2-xy-y^2}$

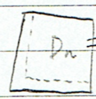
$$=e^{-(x+\frac{1}{2}y)^2-\frac{3}{4}y^2}\Rightarrow\iint_D e^{-u^2-v^2}\frac{2}{\sqrt{3}}\,dudv$$

$$\begin{cases}u=x+\frac{1}{2}y\\ v=\sqrt{\frac{3}{4}}\,y\end{cases}\quad J(u,v)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

・広義積分 ← Dの境界で $f(x,y)$ が定義されない

(or) Dが非有界

$f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ のとき



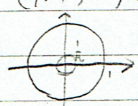
$D_n=[\frac{1}{n},1]\times[\frac{1}{n},1]$ で

積分 → $\left[\log(x+\frac{1}{n})-\log(x+1)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$ ここで発散 考える

・近似積分

(例) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$

$D_n=\{(r,\theta)\mid\frac{1}{n}\leq r\leq 1, 0\leq\theta<2\pi\}$



$$2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}2\pi$$

・線積分

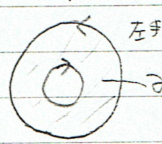
$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt+\int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt$$

とかき $(P(x,y),Q(x,y))$ の C上の線積分という

・グリーンの定理

$$\int_{\partial D}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$



$$=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

$Q_x=P_y$ ならば任意の2点を結ぶ 線積分は等しい

$$Q_x=P_y\Rightarrow\int_{\partial D}Pdx+Qdy=0$$