指数関数と対数関数の場合

9-1 自然対数の底

定義（自然対数の底）

次の極限を成立させる定数 e を自然対数の底と定めます。

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

今後、単に$\log x$と書いたら$\log_e x$です。

9-2 指数関数の導関数

$f(x) = a^x$ について、変形すると$f(x) = e^{x \log a}$です。自然対数の底の定義を使い、導関数は次のようになります。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a \lim_{h \to 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a} = a^x \log a$$

9-3 対数関数の導関数

$\log_a x$ について逆関数の微分法から導関数を求めます。

$f(x) = a^x$と置いて、逆関数$y = f^{-1}(x)$とすると、$a^y = x$です。両辺を x で微分すると$a^y \log a \; y' = 1$となり、$y' = \frac{1}{x \log a}$です。

9-4 高次導関数

定義（2 階の導関数）

導関数$f'(x)$をあらためて x で微分して（つまり 2 回微分して）、2 階の導関数とよび$f''(x)$と書きます。

さらに微分しても同じである。

定義（n 階の導関数）

$f(x)$を n 回微分した関数を n 階の導関数とよび、$f^{(n)}(x)$と書きます。