三角関数の場合

8-1 三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x$$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$を示す。$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x$より、

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h}$$

ここで次の極限値を仮定すればよい。

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

同様に、

$$(\cos x)' = -\sin x$$

微分法の関係を繰り返し使うと

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + \tan^2 x$$

8-2 高次導関数

$(\sin x)' = \cos x$と$(\cos x)' = -\sin x$から、$(\sin x)'' = -\sin x$と$(\cos x)'' = -\cos x$がわかる。

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x$$
$$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$$