連続関数とその性質

5-1 連続な関数

関数$f(x)$が連続であることを定義します。関数のグラフを見れば明らかなことも、数学的に定義することで正しく議論することができます。

定義（連続関数）

$f(x)$の定義域から a をとり、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$が成立するとき、$f(x)$は a で連続と定義します。定義域の全てで連続な時に$f(x)$を連続関数とよびます。

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$とは、$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$と理解してください。極限をとる操作と関数値を計算する操作を交換できるという意味です。

5-2 中間値の定理

関数$f(x)$が区間$a \le x \le b$で連続、$f(a) > f(b)$とします。このとき、$f(a) > d > f(b)$となる d に対応して、$d = f(c)$となる c が閉区間$a \le x \le b$のなかに存在します。

中間値の定理を利用して、方程式の解の存在などを示せます。

5-3 連続関数の性質

1. 定数関数$f(x) = c$は連続関数です。
2. 連続関数$f(x)$の定数倍$cf(x)$は連続関数です。
3. $f(x)$と$g(x)$を連続関数とすれば、和$f(x) + g(x)$と積$f(x)g(x)$は連続関数です。
4. 連続関数$f(x)$と$g(x)$の合成関数$f(g(x))$は連続関数です。

これらの性質は連続関数の定義から示すことができます。

定理（最大値と最小値の存在）.

閉区間$[a, b]$ $(a \le x \le b)$ で連続な関数は最大値と最小値を持ちます。

この性質によって最大値と最小値の存在を保証することができます。