

関数の極限

4-1 極限の意味

関数 $f(x)$ について、 x の値を限りなく a に近づけたとき、 $f(x)$ の値が限りなく b に近づくなれば、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow b$ 」あるいは「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 」と書きます。

例. $f(x) = x^2 + 3$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 + 3 = 4$ となる。

4-2 様々な極限

関数 $f(x)$ について、 x の値を限りなく a に近づけたとき、 $f(x)$ の値が限りなく大きくなるなら、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \infty$ 」あるいは「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 」と書きます。

注意. 決して $f(x) = \infty$ とは書きません。無限大は極限值だけに出現します。

関数 $f(x)$ について、 x の値を限りなく a に近づけたとき、 $f(x)$ の値が負で、その絶対値が限りなく大きくなるなら、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$ 」あるいは「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 」と書きます。

4-3 極限の計算

分数式は約分を目指して変形します。

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = x^2 + ax + a^2$$

より、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = 3a^2$$

無理式は分子を有理化します。

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x} = \frac{1 - |1 - 2x|}{x(1 + \sqrt{1 - 2x})}$$

より、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - |1 - 2x|}{x(1 + \sqrt{1 - 2x})} = \frac{1 - |1 - 2a|}{a(1 + \sqrt{1 - 2a})}$$

4-4 極限値の性質

数列の極限値と同様に、関数の極限値の大小関係は関数の大小関係を引き継ぎます。 $x = a$ の近くで $f(x) \leq g(x)$ であれば両辺の極限値も同様です。

数列の場合と同様にはさみうちの原理が成立します。

4-5 右極限と左極限

右極限

$x > a$ の範囲で x を a に近づける極限を右極限とよび、次のように書きます。

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

左極限

$x < a$ の範囲で x を a に近づける極限を左極限とよび、次のように書きます。

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$