

入門微分積分学 第三回 要約

合成関数と逆関数

3-1 合成関数と逆関数の定義

合成関数

関数 $f(x)$ と $g(x)$ について、 $h(x) = f(g(x))$ と書いて、二つの関数の合成関数と呼びます。

逆関数

二つの関係 $f(g(x)) = x$ と $g(f(x)) = x$ をみたす $g(x)$ を $f(x)$ の逆関数と呼びます。 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と書きます。

具体例

合成関数も、逆関数も、 $f(x)$ の定まる x の値と $g(x)$ の取りうる値が食い違っていると $f(g(x))$ は定まりません。

例として $g(x) = 2x - 1$ と $f(x) = 1/x$ を考えると、 $f(g(x)) = \frac{1}{2x-1}$ となり、 $g(x) \neq 0$ つまり、 $2x - 1 \neq 0$ でなければいけません。

逆関数のグラフ

$y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、 $y = x$ に関して対称になります。

3-2 定義域と値域

定義域

関数 $f(x)$ について、 x の取りうる範囲を定義域と呼びます。 $f(x) = 2x - 1$ であれば x は全ての実数値をとり、 $f(x) = 1/x$ であれば、 x は0以外の実数値をとります。

値域

関数 $f(x)$ について、 x が定義域で決まる値を取るときに $f(x)$ の値の範囲を値域とよびます。

具体例

1. $f(x) = 2x - 1$ であれば定義域は全ての実数値でした。このときの値域は次のように決めます。 $y = 2x - 1$ から、 $x = (y + 1)/2$ です。 y を決めれば対応する x が必ず存在しますから、値域は全ての実数値をとります。
2. $f(x) = 1/x$ であれば、定義域は 0 以外の実数値でした。 $y = 1/x$ から、 $x = 1/y$ であり、 y が 0 以外の実数値をとれば対応する x の値が決まります。 y が 0 となるような x の値はありませんから、値域も 0 以外の全ての実数値です。