入門微分積分学　第二回　まとめ

数列の極限と無限級数

1.　数列の復習

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ と数を並べて数列とよびます。一つの数列全体を表現するために、集合の記号を使って$\{a_n\}$と書くことがあります。有限個の数から成る数列を有限数列、無限個の数から成る数列を無限数列とよびます。

等差数列

一定の公差 r で変化する数列を等差数列というのでした。$a_{n+1} = a_n + r$ と定義すれば、一般項を$a_n = a_0 + nr$ と表すことができます。公差は 0 でないとします。

等比数列

一定の公比 r で変化する数列を等比数列というのでした。$a_{n+1} = ra_n$と定義すれば、一般項を$a_n = a_0 r^n$と表すことができます。初項a_0は 0 でないとします。

2.　数列の収束

無限数列$\{a_n\}$について、n を大きくするとa_nが一定値aに限りなく近づくとき、a_nがaに収束するといいます。記号として次のように書きます。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

収束する数列

$a_n = {}^1\!/_n$ と定義すると、$\{a_n\}$は無限数列で、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$となります。

収束する等比数列

等比数列$\{a_n\}$では公比が$-1 < r < 1$ であれば$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$となります。

3.　数列の発散

無限数列$\{a_n\}$について、n を大きくするとa_nが限りなく大きくなるとき、a_nが正の無限大に発散するといいます。記号として次のように書きます。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

発散する等比数列

等比数列$\{a_n\}$では公比が$r > 1$ であれば正の無限大に発散します。

発散する等差数列

等差数列$\{a_n\}$では公差が$r > 0$ であれば正の無限大に発散します。

4. 負の無限大へ発散

無限数列$\{a_n\}$について、n を大きくするとa_nが負の値でかつ絶対値が限りなく大きくなるとき、a_nは負の無限大に発散するといいます。記号として次のように書きます。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

負の無限大に発散する等差数列

等差数列$\{a_n\}$では公差が$r < 0$ であれば負の無限大に発散します。

5. 振動する数列

収束せず、正の無限大にも負の無限大にも発散しない無限数列は振動するとよびます。

振動する等比数列

等比数列$\{a_n\}$では公比が$r = -1$ であれば振動します。

6. 極限値の関係

全ての n について$a_n \le b_n$であれば、次の不等式が成立します。

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

また、$a_n \le c_n \le b_n$で、$\{a_n\}$と$\{b_n\}$がともに収束すれば次の不等式が成立します。

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

7. 数列の和と無限級数

数列$\{a_n\}$のa_0からa_nまでの和を$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$と書くことにします。$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$を無限級数と呼びます。

無限等差級数と無限等比級数

等差数列の和を等差級数、その無限級数を無限等差級数と呼びます。

$a_n = a_0 + nr$ ですから、 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)a_0 + n(n+1)/2$ です。

等比数列の和を等比級数、その無限級数を無限等比級数と呼びます。

$a_n = a_0 r^n$ から、$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$です。