不定積分

10-1 原始関数

定義（原始関数）

微分して$f(x)$となる関数$F(x)$を$f(x)$の原始関数とよびます。つまり、$F'(x)=f(x)$です。$F(x)=\int f(x)\,dx$と書き$f(x)$の不定積分とよびます。

原始関数に定数を加えても導関数は変わりませんので、原始関数は定数項だけ決まりません。この定数を積分定数とよび、通常はCと書きます。

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\log x+C$$

10-2 置換積分法

合成関数の微分法から、次の関係を示せます。

$x=g(t)$とおくと

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)dt$$

なぜなら、原始関数$F(x)$について、$x=g(t)$とおけば$F(g(t))$です。これを t で微分すれば右辺の積分される関数と等しくなります。

10-3 部分積分法

積の微分法から、次の関係式を示せます。

$$\int f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)dx$$

右辺を微分すると、$F'(x)g(x)+F(x)g'(x)-F(x)g'(x)=f(x)g(x)$ですから、確かに成立しています。