微分積分学I

行木孝夫

2015年度2学期

目 次

1　数列の収束と関数の極限

1.1　数列の収束

数列の収束という概念を直観的に定めていた。これを論理的に導入する。

公理 1. 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する。単調増加数列とは $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \dots$ を満たす数列である。

定義 2 (上に有界な集合)**.** 実数の集合 A について、ある実数 a が存在して、A からどの要素 a をとっても $a \leq b$ が成立するとき、A を上に有界な集合とよぶ。

例 3. 閉区間 $[0,1]$ は上に有界。$b=1$（b は 1 以上であればなんでもよい）とすればよい。開区間 $(0,1)$ も同様。$\{1-\frac{1}{n}|n=1,2,\dots\}$ も同様。

反例 4. 自然数全体の集合、偶数全体の集合、実数全体の集合、$\{n^2|n=1,2,\dots\}$ は上に有界ではない。

本節の目標は、上の公理と定義に従って次の主張を示すことである。

命題 5. 自然対数の底 e を次のように数列の極限で定義する。

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

命題 6. 自然数 k を定めたとき、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=0$$

つまり、指数的な増大は多項式的な増大よりも（桁違いに）速い。

注意 7. 命題 *5* の証明には二項定理を使う。

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$\binom{n}{k}=\frac{1}{k!}n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

注意 8. 命題 *6* の証明は、$e = 1 + h$ とおいて e^n を n の $k+1$ 次の項をとる。

注意 9. 下に有界な単調減少数列の極限が存在することは、公理からわかる。

1.2 関数の極限

関数の極限という概念を数列の収束から定義する。同時に、中間値の定理を与える。

関数 $f(x)$ について $x \to a-0$ をとる左極限を次で定義する。$\{a_n\}$ は a に収束する単調増加数列とする。どのような $\{a_n\}$ についても右辺の値が一意に定まる時、左極限が確定（存在）するとよぶ。

$$\lim_{x \to a-0} f(x) := \lim_{n \to \infty} f(a_n)$$

また、関数 $f(x)$ について $x \to a+0$ をとる右極限を次で定義する。$\{a_n\}$ は a に収束する単調減少数列とする。どのような $\{a_n\}$ についても右辺の値が一意に定まる時、右極限が確定（存在）するとよぶ。

$$\lim_{x \to a+0} f(x) := \lim_{n \to \infty} f(a_n)$$

定義 10 (関数の連続性)**.** 関数の極限

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

が確定（存在）するとは、右極限と左極限とが等しいことで定義する。このとき、$f(x)$ は $x = a$ で連続という。定義域の各点で連続であれば連続関数という。

定理 11 (中間値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続、$f(a) \leq f(b)$ を満たすとする。実数 l が $f(a) \leq l \leq f(b)$ を満たすとき、$f(c) = l$ となる c が $[a, b]$ 内に存在する。

定理 12 (最大値と最小値の存在)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で最大値および最小値をとる。

開区間では成り立たない。$f(x) = 1/x$ を $(0, 1]$ で考えてみる。

2 導関数の定義と平均値の定理

導関数を定義し、平均値の定理を示す。テイラーの定理を証明するために必要になる。

2.1 導関数

定義 13 (導関数)**.** 関数 $f(x)$ について、その導関数 $f'(x)$ を次の極限値が確定する場合に定義する。

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2.2 平均値の定理

まずロルの定理を示す。

定理 14. 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定義され、$f(a)=f(b)$ を満たすとする。このとき、$f'(c)=0$ を満たす c $(a<c<b)$ が存在する。

ロルの定理から平均値の定理を導出する。

定理 15 (平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定義され、導関数が存在するとする。このとき、$f(a)-f(b)=f'(c)(a-b)$ を満たす c $(a<c<b)$ が存在する。

$g(x)=(f(x)-f(b))(a-b)-(x-b)(f(a)-f(b))$ にロルの定理を適用することで証明する。

定理 16 (コーシーの平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定義され、導関数が存在するとする。このとき、$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす c $(a<c<b)$ が存在する。

$\psi(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$ にロルの定理を適用することで証明する。

3 テイラーの定理とマクローリン展開、テイラー展開

3.1 テイラーの定理

平均値の定理を拡張するテイラーの定理が成立する。

定理 17 (テイラーの定理)**.** $n+1$ 回微分可能な関数 $f(x)$ について、任意の $h>0$ をとれば定数 c が $x<c<h$ で定まり、次を満たす。（$h<0$ であれば $x>c>h$ である。符号の正負をまとめて $c=\theta h, 0<\theta<1$ とも書く。）

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+c)h^{n+1}$$

証明は、コーシーの平均値の定理を次の $g(h)$ と h^{n+1} に適用する。

$$g(h)=f(x+h)-(f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n)$$

3.2 テイラー展開

テイラーの定理における結論

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+c)h^{n+1}$$

を $f(x+h)$ の x を中心とする有限テイラー展開、$x=0$ の場合を有限マクローリン展開とよぶ。

$f(x)$ が何回でも微分できるとする。テイラーの定理で $n \to \infty$ とするときに $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + c)h^{n+1}$ が 0 に収束すると仮定する。次のべき級数を x を中心とする $f(x)$ のテイラー展開とよぶ。

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n$$

変数を間違えてはいけない。何通りか書いておこう。a を中心とするテイラー展開：

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n$$

$$f(a+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) x^n$$

$$f(b) = f(a + (b-a)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (b-a)^n$$

3.3 マクローリン展開

特に、0 を中心とするテイラー展開をマクローリン展開とよぶ。

$$f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) h^n$$

あるいは、次のように書ける。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

例 18 (指数関数のマクローリン展開)**.** 指数関数 $f(x) = e^x$ において、$f^{(n)}(x) = e^x$ である。$e^0 = 1$ だから、マクローリン展開はすぐにわかり、次を得る。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

例 19 (一般化二項定理)**.** $f(x) = (1+x)^\alpha$ について、$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$ となる。これらを用いて、マクローリン展開を得る。

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

n 次の係数を一般化二項係数とよぶ。

テイラー展開、マクローリン展開を求めるにあたって、等比数列の和の公式をうまく使うこともできる。

$1/(1-x)$ のマクローリン展開：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$1/(1+x)$ のマクローリン展開：

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

どちらも右辺は等比数列の和の公式から得られるが、マクローリン展開の定義通りに n 階の導関数を求めても同じ結果になる。

4　指数関数と対数関数のマクローリン展開

指数関数のマクローリン展開を再掲する。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

指数関数の導関数は $(e^x)' = e^x$ だから指数関数そのものである。マクローリン展開の極限操作と微分とが交換できるとして、次の変形が可能である。

$$(e^x)' = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

右辺をよく見れば、確かに指数関数のマクローリン展開そのものであるから、指数関数の導関数が指数関数であることはマクローリン展開からも確かめられる。

対数関数のマクローリン展開を、$\log x$ は $x = 0$ では定義できないから、$\log(x+1)$ という形で考える。上で用いた変形を応用する。

$$(\log(x+1))' = \frac{1}{x+1}$$

右辺を等比数列の和の形で表すことができれば、上の変形を逆に使うことができる。$x+1 = 1-(-x)$ と変形し、$|x| < 1$ を仮定すると等比数列の和の公式から次の関係が成立する。

$$(\log(x+1))' = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

変数を t と書き直し、

$$(\log(t+1))' = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$$

0 から x まで定積分すると、極限と積分の交換を認めれば次の関係を得る。

$$\log(x+1) - \log 1 = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$\log 1 = 0$ だから、結果として次のマクローリン展開が示された。

$$\log(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

5　三角関数のマクローリン展開

三角関数 $f(x)=\sin x$ において、$f^{(4k)}(x)=\sin x,\ f^{(4k+1)}(x)=\cos x,\ f^{(4k+2)}(x)=-\sin x,\ f^{(4k+3)}(x)=-\cos x$ である。$\sin(0)=0, \cos(0)=1$ からマクローリン展開はすぐにわかり、次を得る。

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\dots$$

逆三角関数については、次のようにマクローリン展開を求めることができる。

$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}$ を利用して、次の一般化二項定理を適用する。

$$(1+x)^a=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}x^k$$

$a=-1/2$ だから、$a(a-1)\cdots(a-k+1)=(-1)^k 1\cdot 3\cdots 2k-1$ より

$$(\sin^{-1}x)'=(1-x^2)^{-1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}x^{2k}$$

両辺を不定積分する。

$$\sin^{-1}x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}+C$$

$\sin^{-1}(0)=0$ だから、積分定数 $C=0$ である。したがって、次のマクローリン展開を得る。

$$\sin^{-1}x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

6　双曲線関数

$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$ とおいて双曲線関数とよぶ。

双曲線関数の逆関数は、逆関数の定義に従って求めることができる。それぞれ次の通り。

$$\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$\cos^{-1}x\geq 0$ について

$$\cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

$\cos^{-1}x\leq 0$ について

$$\cosh^{-1}x=\log(x-\sqrt{x^2-1}).$$

逆双曲線関数の導関数は次の通り。

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\cos^{-1}x \geq 0$ の場合は

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$\cos^{-1}x \leq 0$ の場合は

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

双曲線関数 $\sinh x$, $\cosh x$ のマクローリン展開は指数関数のマクローリン展開を応用する。

7　2 変数関数の極限値と連続性、偏導関数

変数が x, y と二つある関数を 2 変数関数とよび、$f(x, y)$ などと書く。

7.1　極限値

2 変数関数についての極限値を考える。

変数の組 (x, y) は座標平面の一点を表すから、点と呼ぶこともある。(x, y) が特定の点 (a, b) へ近づくことを、$(x, y) \to (a, b)$ と書くことにする。これは、$h \to 0$ かつ $k \to 0$、つまり $(h, k) \to (0, 0)$ として $(a+h, b+k) \to (a, b)$ とも表すことができる。

2 変数関数 $f(x, y)$ について、(x, y) を (a, b) に近づける極限値を次のように書く。

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$$

次のように書いてもよい。

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k)$$

1 変数関数の場合は右からの極限、左からの極限など、極限を取る値への近づき方はいろいろとあった。2 変数関数の場合は平面の上で近づくから、もっと様々な近づけ方がある。

注意：$(h, k) \to (0, 0)$ とは、(h, k) から原点への距離が 0 に近づくことである。次のように考えてもよい。この距離を $r = \sqrt{h^2+k^2}$ として $r \to 0$ と同値である。

7.2　連続性

定義 20. *1* 変数関数の場合と同様に、*2* 変数関数が点 (a, b) で連続とは次が成立することとする。

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

7.3 偏導関数

2 変数関数 $f(x,y)$ について、第 1 変数 x についての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を次で定義する。変数 y を固定していることに注意。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

変数 x で $f(x,y)$ を偏微分するともいう。

第 2 変数 y についての偏導関数は次の通り。

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

変数 x についての偏導関数を $f_x(x,y)$, 変数 y での偏導関数を $f_y(x,y)$ とも書く。

8 2 変数関数の微分可能性と合成関数の微分法、変数変換

8.1 微分可能性

定義 21. $f(x,y)$ について、次が成り立つ時、点 (a,b) で微分可能という。

$$f(a+h_x, b+h_y) = f(a,b) + m_a h_x + m_b h_y + o(\sqrt{h_x^2+h_y^2})$$

を満たす定数 m_a, m_b が存在すること。

微分可能なら、$m_a = f_x(a,b)$, $m_b = f_y(a,b)$ である。

微分可能性と偏導関数の関係について、次の命題が成立する。（証明略）

命題 22. $f_x(a,b)$ と $f_y(a,b)$ が点 (a,b) を含む半径 r の円の内部で連続となるような r が存在すれば、$f(x,y)$ は (a,b) で微分可能である。

8.2 合成関数の微分法

1 変数関数について、$f(x)$ と $g(u)$ との合成関数 $h(u) = f(g(u))$ を u で微分すると $h'(u) = f'(g(u))g'(u)$ だった。

$f(x,y)$ と $\phi(u,v)$,$\psi(u,v)$ の合成関数 $g(u,v) = f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ について、u での偏微分は次の通り。

$$\frac{\partial g}{\partial u} = f_x(\phi(u,v),\psi(u,v))\phi_u(u,v) + f_y(\phi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)$$

v での偏微分も同様。

$$\frac{\partial g}{\partial v} = f_x(\phi(u,v),\psi(u,v))\phi_v(u,v) + f_y(\phi(u,v),\psi(u,v))\psi_v(u,v)$$

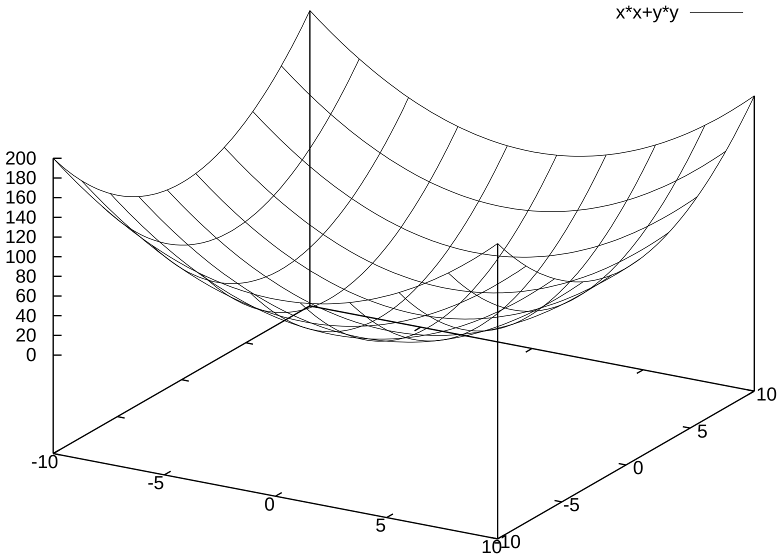

図 1: $f(x,y)=x^2+y^2$

8.3　変数変換

半径 r の円を表す時に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ というパラメータ表示を用いることができる。r と θ を用いることで xy 平面の各点を (r,θ) で表せるから、新しい座標を導入したことになる。これを変数変換あるいは座標変換という。(x,y) から (r,θ) への変換を特に極座標変換とよぶ。

座標変換によって関数 $f(x,y)$ の形が簡単になることがある。例えば、$f(x,y)=x^2+y^2$ は極座標変換によって $f(r,\theta)=r^2$ となる。

座標変換、変数変換のもとでの偏微分は合成関数の微分法を用いればよい。

9　2 変数関数の極値

$f(x,y)$ が (a,b) で極値を持つには、$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ となる必要がある。1 変数関数の場合と同じく、これだけでは十分でない。例えば、$f(x,y)=x^2+y^2$ と $f(x,y)=x^2-y^2$ を比べると、原点は前者で極小、後者で極値とならない。

1 変数関数の場合に $f'(a)=0$ となる a で極大となるか極小となるか判定するには $f''(a)$ の符号を考慮した。2 変数関数の場合には $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$ の符号を考慮する。証明は後述する。

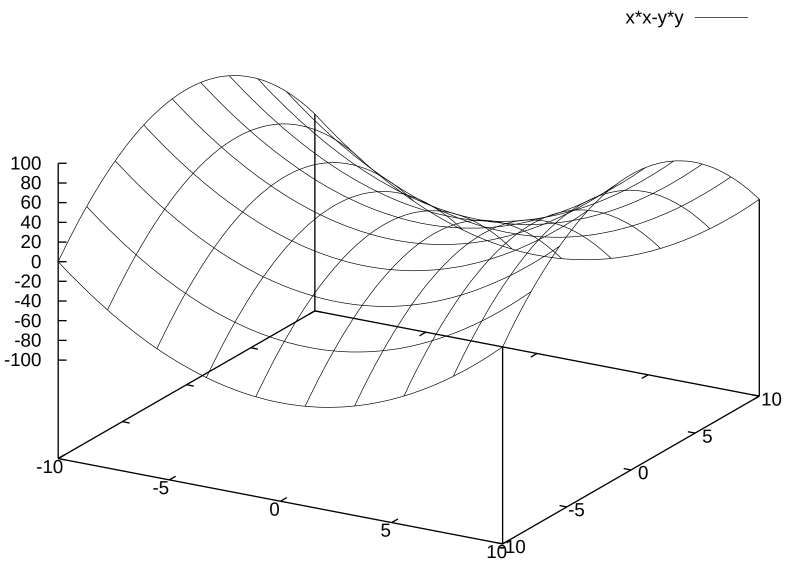

図 2: $f(x, y) = x^2 - y^2$

9.1 高次の偏導関数

f_x, f_y をさらに x, y で偏微分することができれば、$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x$, $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f_y$ などと書く。十分に微分可能であれば $f_{xy} = f_{yx}$ などが成立する。

9.2 極値判定

f_x, f_y も微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b), ベクトル (u, v) について、$g(t) = f(a+ut, b+vt)$ を考える。$g'(0) = f_x(a, b)u + f_y(a, b)v$ だから、$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ならば $g'(0) = 0$ である。$g'(t)$ を (u, v) 方向の方向微分とよぶ。

$g(t)$ のマクローリン展開は

$$g(t) = f(a, b) + f_x(a, b)ut + f_y(a, b)vt + f_{xx}(a, b)u^2t^2/2 + f_{yy}(a, b)v^2t^2/2 + f_{xy}(a, b)uvt^2 + o(t^3)$$

と書くことができて、2 次の項の符号によって 1 変数関数として $g(0)$ が極値をとるかどうか判定できる。

$g(0)$ が (u, v) の選び方によらず極大となるならば、$f(a, b)$ は 2 変数関数として極大となると考えてよいだろう。極小についても同様である。

$g(0)$ が極大となる $g''(0) < 0$ という条件は、次のように書き直せる。

$$f_{xx}(a, b)u^2 + f_{yy}(a, b)v^2 + 2f_{xy}(a, b)uv < 0$$

$u = 0$ では $f_{yy}(a,b) < 0$ が必要で、$v = 0$ では $f_{xx}(a,b) < 0$ が必要。両者を前提とする。$u = \cos\theta/\sqrt{-f_{xx}(a,b)}$, $v = \sin\theta/\sqrt{-f_{yy}(a,b)}$ とおいて一般性を失わず、u, v を上式に代入すれば、どんな θ についても次が成立しなければならない。

$$-1 + f_{xy}(a,b)\sin(2\theta)/\sqrt{f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)} < 0$$

従って、

$$\sqrt{f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)} > |f_{xy}(a,b)|$$

より

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$$

を得る。極小の場合も全く同じ。これが、(a,b) の極値判定条件である。

10　2変数関数のテイラー展開

極値判定に用いた関数 $g(t)$ のマクローリン展開を再掲すると

$$g(t) = f(a,b) + f_x(a,b)ut + f_y(a,b)vt + f_{xx}(a,b)u^2t^2/2 + f_{yy}(a,b)v^2t^2/2 + f_{xy}(a,b)uvt^2 + o(t^3)$$

である。$(h_x, h_y) = (vt, ut)$ とおけば次の通り。

$$f(a+h_x, b+h_y) = f(a,b)+f_x(a,b)h_x+f_y(a,b)h_y+f_{xx}(a,b)h_x^2/2+f_{yy}(a,b)h_y^2/2+f_{xy}(a,b)h_xh_y+o(t^3)$$

A　マクローリン展開の理解

指数関数、対数関数や三角関数などの初等関数を理解するために、多項式でうまく表したい。まず、$f(x) = e^x$ を例にとる。

- $f(x)$ を $x = 0$ でうまく表す定数関数 $g(x) = a_0$ は、$f(0) = 1$ だから $a_0 = 1$ とする。
- 1 次関数 $g(x) = a_0 + a_1x$ は、$x = 0$ での微分係数 $f'(0) = 1$ と $g'(0) = a_1$ も等しくなるよう、$a_1 = 1$ として、$g(x) = 1 + x$ とする。
- 2 次関数 $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ は、2 階の微分係数 $f''(0) = 1$ と $g''(0) = 2a_2$ も等しくなるよう、$a_2 = 1/2$ として $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ とする。
- $g(x)$ を n 次関数とすると、$f^{(n)}(0) = 1$ と $g^{(n)}(0) = n!a_n$ も等しくなるように、$a_n = 1/n!$ とする。つまり、$g(x) = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$ である。

$f(x)$ を一般の関数とすると、全く同じ議論から、$a_n = f^{(n)}(0)/n!$ である。これは、マクローリン展開の n 次の係数に他ならない。

B　初等関数と複素数

e^x や $\sin x$ などは、x を与えれば関数値を計算できるものとしてずっと考えてきた。しかし、実際に x の値について e^x なり $\sin x$ を計算することは難しい。

マクローリン展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ や $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ によって e^x や $\sin x$ を定義することによって、x の具体的な値についてそれぞれの関数値を必要な精度のもとに計算することは計算機を利用すれば難しくない。

さらに、マクローリン展開によって与えられる式を初等関数の定義として与えることで、x の値を実数から複素数へ拡張することができる。(i^n を計算することは難しくないが、突然 $\sin i$ といわれても困る。)

次の関係式をオイラーの公式と呼ぶ。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

C　2 変数関数と 2 次曲線

楕円の方程式と双曲線の方程式は次の通りであった。

楕円：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

双曲線：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

これらは、次のように 2 変数関数が一定値をとる点 (x, y) の集合として定義できる。

楕円： $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ として、$f(x,y) = 1$。あるいは、$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ として、$f(x,y) = 0$。

双曲線： $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ として、$f(x,y) = \pm 1$。あるいは、$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \pm 1$ として、$f(x,y) = 0$。

一般に、$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d$ が一定値をとるような点 (x, y) の集合を 2 次曲線とよぶ。係数 a, b, c と定数 d の値に応じて楕円、双曲線、放物線などに対応する。