

特集 / モジュライの広がり

物理学から幾何学へ—モジュライと径路積分

中村 郁

1. 八重洲口, 3月

2005年3月末, 八重洲口の近くで大学1年のクラス会があった。久しぶりに東京に出た私のために, 友人数人がわざわざ集まってくれたのである。会社の社長もいれば, 大学卒業後もう一度大学に入り直して医者になったのもいる。卒業後すでに35年も経っている。私は理学部に進み数学を続けたが, 集まった友人の大半は工学部に進んでいた。しかし, 久しぶりに話して強く感じたことは, 分野も職業も違ってはいるが, みんな若いころと少しも変わらない知的好奇心を持ち続けていることであった。私が話したのは, 宇宙の次元は10か26かもしれない, もし10だとすると, 数学的にはすごく面白いのだ, というようなことであった。この特集記事の序文のようなものである。ここでは, その友人の顔を思い浮かべながら筆を進めたいと思う。Dさん, 執筆者のみなさんは一生懸命書いていますから, 「かざっ読」なんて言わないで読んで下さいね。

2. モジュライとは何か

近年, 理論物理学と数学, とりわけ, 数学のなかでも代数幾何学や微分幾何学との親密さが著しい。アインシュタインの一般相対性理論が, すでに

リーマン幾何学のひとつ顕著な実例を提供しているという歴史を振り返れば, それはさほど不思議なことではないかもしれない。理論物理学と数学は元来似たものである。少なくとも17世紀ニュートンにまで遡れば, 特に数学と物理学を区別する必要もない。当時のもっとも先鋭的な数学的手段は物理学から生まれたのだ。しかし現在では, 学問の細分化などと言うまでもなく, 数学と物理学はすでに大きく隔たっている。そのような現代にあって, Penroseのツイスター理論に始まる最近20年間の物理学と数学の接近は, とりわけ数学者にとって, 数学の実在感・現実感を確認すると言う意味できわめて魅力的なものであった。と同時に, 同じ数学的対象をまったく異なる座標軸で論ずるその視点の新鮮さにも, 心躍るものがあった。

今回の特集では, 物理学と幾何学, 特にモジュライとの関わりに焦点を絞る。小論では, まずモジュライとは何か, どういうことを問題にするのか, を説明したい。次に, 物理学がなぜモジュライに関わりを持つのかを説明したい。

一口で言えば, モジュライとは「幾何学的な対象の変化の様子」である。変化を記述するパラメーター空間を「モジュライ空間」という。数学ではしばしば, 与えられた幾何学的な対象のありうるすべての変化を求めよ, というような問題を考える。変化は明瞭にとらえたい。だから, 変化は関数で

記述されるものとする。幾何学的対象の変化がどんな関数で記述されるかは、問題に応じて適当に限定する。代数幾何学では、多項式で記述される変化を扱うし、微分幾何学ならば、おおむね無限回微分可能な関数で記述される変化を扱う。以下、簡単のため、モジュライが多項式で記述される場合は、代数的なモジュライと呼ぶことにする。

物理学ではどうかというと、物理現象が多項式で記述されるのか、無限回微分可能な関数で記述されるかは、本当は誰も知らない。しかし、起こりうる現象全部は、広い意味での幾何学的な対象の変化の様子だから、モジュライである。そこで、考えるべき現象を理論を進めやすいように、しかし説得力を失わない程度に十分一般的な範囲で適当に限定する。それでもなおこのモジュライ空間は途方もなく大きく、普通は無限次元である。しかも、この大きな無限次元のモジュライ空間の上で、径路積分という定義もあまり明確ではない計算を実行する。おおざっぱに言えば、起こりうる現象(から生ずるデータ)を確率に応じて全部足し合わせて、「期待値」を求める。ところが、この径路積分の計算を進めていくと、数学のモジュライ理論が姿を現わしてくるのである。第6節でその一例として、Polyakovの径路積分を紹介する。それは、この特集の他の論説への入門篇である。

なお、別冊・数理科学「現代物理と現代幾何」(2002年4月)はこの特集にきわめて近い。併せて読んでいただければいっそう面白いと思う。

3. 指導原理としての径路積分

物理学では、現象の真の理由を推定して観測量を理論的に求める。現象の理解の仕方も、ニュートン力学のように(運動)方程式を解くもの、最小作用の原理によるもの、あるいは径路積分によるものなどがある。この特集にもっとも関係深いのは最後の径路積分である。たとえば、光が点Pから点Qに到達する径路を考えよう。直進してPからQに到達する以外にもさまざまな径路があるが、最後にわれわれが観測できるのは、それぞれ

の径路をたどった光の総和である、というのがその考え方である。径路によってとりうる確率が違う。起こる現象に確率をかけて荷重平均とったものをわれわれは見ているのだ、という立場である。

したがって、径路積分は、統計の言葉を用いて「期待値の計算」と言い換えてもよい。もっとも幸運な場合は、あらゆる径路からなる無限次元のモジュライ空間の上での計算は、代数的なモジュライ空間の上での計算に書き換えられる。この場合には、代数的なモジュライを考えれば、物理現象の本質的な部分が捉えられるということになる。

その一方で、この特集に登場する数学的对象は、物理学的な出自を持つのではあるが、その出自はいったん忘れて、完全に数学的に厳密に定義を与え、厳密に構成するという立場から論じられている。大きな無限次元のモジュライの上での径路積分を、数学的に完全には正当化されない思考実験によって、いったん有限次元のモジュライの上での計算に書き換えて、なにか見かけの数学的对象を得る。そして、そこまでの計算を正当化するのは(ほとんど不可能に見えるから)放棄して、逆に、最後の数学的对象のみを厳密に数学的对象として構成し、それを出発点として議論を開始する。

このようにして得られた数学的对象の中には、従来の数学者の発想では到底発見できないであろうと思われるものもある。その出自は理論物理学ではありふれているにも関わらず、数学ではまったく新しい対象である、ということが起こるのだ。それをを用いると、従来証明できなかったことが証明できることも実際に起きる。結果として、数学の長い間懸案の難問を解決してしまうこともある。

その典型的な例がドナルドソン不変量である。ドナルドソン不変量はインスタントン^{*1)}という、時間方向にも空間方向にも局在する「素粒子」(局所的にのみ存在し、残りの部分ではゼロという波)のモジュライ空間の研究から生まれたもので、ひとつの多項式である。これは4次元の単連結な多

*1) インスタントンという名前は、空間的にも時間的にもインスタントな(つまり瞬間的な)素粒子、というところから来ている。

様体 (= 空間) に対していつも定義される. この不変量が異なれば, ふたつの多様体 (空間) は決して可微分同型ではない. つまり, 無限回部分可能な関数を用いて定義できる写像で, お互いを同一視することはできない. 一方から他方へ無限回部分可能な関数を用いて写像を作っても, 必ずどこかで写像がつぶれる (1対1写像でない) か, 特異点を持つ. こういうことが証明できるところが, 不変量の強力なところである.

K3 曲面と呼ばれる複素 2 次元の多様体がある. 数学的に面白く研究者の関心をひいてきた. 現在でもなお研究が続いている. この多様体は実 4 次元ではあるが, 複素 2 次元なので実数の場合にならって曲面と呼ぶ. たとえば, $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ を満たすすべての複素数の組 (x, y, z) の集合は, (ほぼ) この K3 曲面の例である. これと形はそっくりの (正確に言えば, 位相同型の) ホモトピー K3 曲面と呼ばれる別の複素 2 次元多様体もある. 形はそっくりでも単連結だが, 複素構造という精密な構造を比較すると, 両者はまったく異なる.

一般に, 複素構造が同じなら可微分同型である. 可微分同型ならば位相同型である. しかし, 逆はどちらも一般には正しくない. この K3 曲面とホモトピー K3 曲面の場合はちょうど微妙なところにあって, このふたつが可微分同型であるか否かは, 1970 年以来未解決の難問のひとつであった. しかし, 1986 年 Donaldson によって Donaldson 不変量が構成されると間もなく, Friedman と Morgan によってそれぞれの曲面の Donaldson 不変量が計算され, その結果, ふたつの曲面は可微分同型ではないことが証明された. Donaldson の理論はこのほかにも驚くべき多くの新しい結果をもたらした.

4. 楕円曲線のモジュライ空間

以下 \mathbf{R} は実数の全体を表す. 平面上の 3 角形のモジュライはどうなるか, 見てみよう. まず 3 角形の辺と角に図 1 のように名前をつける. よく知られているように, 2 辺挟角, つまり, $(a, b, \theta) =$

(p, q, ϕ) または, $(a, b, \theta) = (q, p, \phi)$ のとき, ふたつの 3 角形が合同になる. 簡単のために「辺の順番を入れ替えない」ものとし, それぞれの 3 角形を $\Delta(a, b, \theta)$ と $\Delta(p, q, \phi)$ と表す. そうすると

$$\Delta(a, b, \theta) \text{ と } \Delta(p, q, \phi) \text{ が合同} \\ \iff (a, b, \theta) = (p, q, \phi).$$

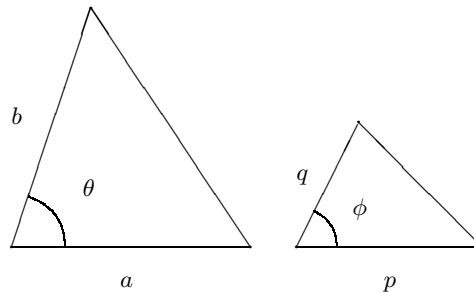


図 1 3 角形

3 つの正の量 (a, b, θ) ($a, b > 0, 0 < \theta < 180^\circ$) が一致すれば 3 角形は合同であり, またすべての組 (a, b, θ) にはひとつの 3 角形の合同類が定まる. 3 角形の合同類の集合を M_Δ で表すことにすると,

$$M_\Delta = \{(a, b, \theta) \in \mathbf{R}^3; a, b, > 0, 0 < \theta < 180^\circ\}.$$

M_Δ を 3 角形のモジュライ空間と言う. 3 辺相等という 3 角形の合同条件もある. それを上と同じように表すと,

$$M_\Delta = \left\{ (a, b, c) \in \mathbf{R}^3; \begin{array}{l} 0 < c < a + b \\ 0 < a < b + c \\ 0 < b < c + a \end{array} \right\}.$$

右側のパラメーターを用いた表わし方は, 上の場合のようにいろいろあり得る. 余弦定理は c を a, b, θ によって表示する. すなわち,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}.$$

上の特別な場合 $a = b = 1$ に限れば,

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 2 \sin(\theta/2) \\ &= i(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = i\left(\frac{1}{q} - q\right) \end{aligned} \quad (1)$$

となる. ただし, $q = e^{i\theta/2}$ である.

今度は種数が 1 のリーマン面 (歴史的な理由から楕円曲線とも言う) のモジュライを考える. \mathbf{C} を複素数平面とし, \mathbf{H} を

$$\mathbf{H} = \{\tau \in \mathbf{C}; \tau \text{の虚部 } \text{Im}(\tau) > 0\}$$

とする. まず $\tau \in \mathbf{H}$ をとり固定する. \mathbf{C} の変数を z として, 次のような平行移動

$$T_{m,n} : z \mapsto z + m\tau + n \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

を考える. τ は固定したまま, m, n を変えて, つぎつぎに二つの点 z と $z + m\tau + n$ を同一視する. そうすると, τ を決めるごとに, 新しい空間 (リーマン面) $E(\tau)$ ができる. 複素数 z は, 適当な整数 m, n を選べば平行移動 $T_{m,n}$ で図 2 の平行 4 辺形の内部に移動することができる.

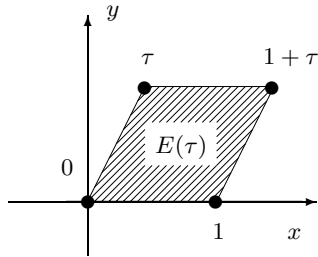


図 2 $E(\tau)$

だから $E(\tau)$ は, 図 2 で平行 4 辺形の向き合う辺を同一視して得られる図形, つまり, ドーナツの表面 (図 3) である. ドーナツの穴はひとつなので, リーマン面 $E(\tau)$ の種数は 1 に等しい, と言う. 種数が 1 に等しいリーマン面のすべての同型類の集合 (モジュライ空間) を M_1 で表す. ここで

$$\text{SL}(2, \mathbf{Z}) = \left\{ h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{matrix} ad - bc = 1 \\ a, b, c, d \in \mathbf{Z} \end{matrix} \right\}$$

と定め, 変数 $\tau \in \mathbf{H}$ を $h \in \text{SL}(2, \mathbf{Z})$ によって

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

と変換してみる. そうすると $\tau' \in \mathbf{H}$ となり, ふたつのリーマン面 $E(\tau)$ と $E(\tau')$ ができるが, ふたつのリーマン面は写像

$$\begin{array}{ccc} E(\tau) & \rightarrow & E(\tau') \\ \Psi & & \Psi \\ z & \mapsto & \frac{z}{c\tau + d} \end{array}$$

によって同一視できる. つまり, $E(\tau)$ と $E(\tau')$ はリーマン面のモジュライ空間 M_1 の中で同じ点を定める. ここで, 種数が 1 のリーマン面はみなドーナツの表面 (2 次元トーラスという) と同じ形だが, 複素構造はもう少し精密なもので, 同一視できないものもあることに注意したい.

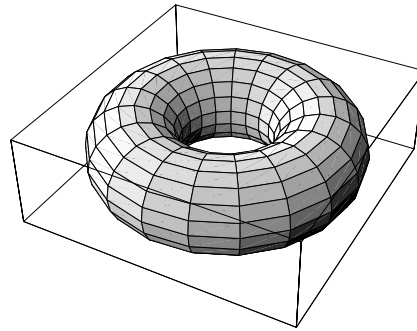


図 3 ドーナツの表面

詳細は省略するが, 種数が 1 のリーマン面のモジュライ空間 M_1 は, τ の空間 \mathbf{H} を $h \in \text{SL}(2, \mathbf{Z})$ をとって, 上のような変換で τ と τ' をつぎつぎに同一視した空間である. したがって,

$$M_1 = \mathbf{H}/\text{SL}(2, \mathbf{Z}) \quad (2)$$

となる. この $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$ による同一視は一見複雑のようだが, 実はたったふたつの特別な変換

$$\tau \mapsto \tau + 1, \quad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$$

を繰り返すことですべて得られるから, M_1 はさほど複雑なものではない. そこで

$$F = \left\{ \tau \in \mathbf{H}; |\tau| \geq 1, |\text{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

とする. この F を $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$ に関する \mathbf{H} の基本領域と呼ぶ. 図示すると図 4 のようになる.

まず, $\tau \mapsto \tau + 1$ を繰り返せば, τ を $|\text{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}$ とすることができる. つぎに, $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ を使えば, $|\tau| \geq 1$ とできる. したがって, $E(\tau)$ を定める τ

を基本領域 F の中から選ぶことができる． M_1 は F の境界を適当に同一視したものである．

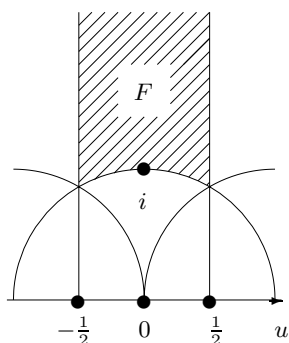


図 4 基本領域 F

こうして，種数が 1 のリーマン面のモジュライ空間 M_1 は完全に分かる．しかし，種数 (穴の個数) が g のリーマン面のモジュライ空間 M_g の構造は，種数 g が大きくなると非常に複雑になる．

ところでリーマン面 $E(\tau)$ は次の 3 次曲線 $C(\tau)$ と同一視可能である． $E(\tau)$ から $C(\tau)$ へ具体的に写像を書いて，1 対 1 であることが証明できる：

$$C(\tau) : y^2 = 4x^3 - \frac{4\pi^4}{3}E_4(\tau)x - \frac{8\pi^6}{27}E_6(\tau)$$

ただし， $q = e^{2\pi i\tau}$ とすると，

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n}$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1 - q^n}$$

である．さらにここで，

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \quad (3)$$

$$j := j(\tau) = 1728 \cdot \frac{E_4^3}{\Delta} \quad (4)$$

とすれば， $C(\tau)$ の代わりに

$$C^*(j) : y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{j - 1728}x - \frac{1}{j - 1728}$$

をとることもできる．三角形のモジュライ M_{Δ} と同じように， M_1 にも別の表示があり，それが最後の $C^*(j)$ によるものである．整理すると，

$$\begin{aligned} M_1 &= \{\tau \in F\} / F \text{ の縁の同一視} \\ &= \{j(\tau); \tau \in F\} = \{j \in \mathbf{C}\} \end{aligned}$$

となり， M_1 は j という複素数ひとつで記述できる．特に， $E(\tau)$ と $E(\tau')$ が同一視できるのは， $j(\tau) = j(\tau')$ の時に限る．また，(1) と同様に

$$j = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

と表すことができる．この右辺のべき級数の展開係数は有限単純群モンスターとの関係が 1978 年に指摘されて以来，多くの数学者の関心を集めたが，1992 年 Borcherds によってその関係 (Monstrous moonshine) は完全に解明された．このときの証明には，頂点作用素代数というやはり物理に由来するものが使われている．

5. 径路積分

径路積分は path integral の直訳である．すべての可能な道筋 (径路, path) について足し合わせるから，そう呼ばれる．さてこの節では径路積分を計算してみたい．そのために，まず正規分布の話から始める．つぎの積分 (ガウス積分) は大学 1 年か 2 年で習う：

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (5)$$

これは，事象 x がおきる確率が $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ ならば (正しくは， $a \leq x \leq b$ となる確率が $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ の区間 $[a, b]$ での積分に等しいならば)，全ての事象の起きる確率を合計すると 1 になる，と読むことができる．計算すると

$$0.9907 < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-2}^2 e^{-x^2} dx < 1$$

つまり，この積分の 99% は $|x| \leq 2$ に集中して， $|x| \geq 2$ にはほとんど何も無い．この分布のもとでの x の期待値 $\langle x \rangle$ や x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$ は

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

と計算される。

さて $a > 0$ ならば, (5) の積分を少し変形して,

$$1 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (6)$$

となる。量子力学などで問題になるときは, $(\sqrt{a})^{-1} = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm}$ (ボーア半径) 程度であって, $|x| \leq 2(\sqrt{a})^{-1} = 1.06 \times 10^{-8} \text{ cm}$ に積分の 99% が集中する。つまり, 関数 $\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}$ は $x = 0$ の近くに集中して, ほとんどデルタ関数と同じである。 f が $x = 0$ の近くでほとんど一定の関数ならば, その期待値は,

$$\langle f(x) \rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ax^2} dx \approx f(0)$$

となる。つまり, $x = 0$ に積分が集中したのものとしても大差ない(場合も多い)。この $x = 0$ という点は, e の肩にのっている関数 $S(x) = x^2$ の極小臨界点, つまり, 1 回微分が消えて 2 回微分が正の点であることに注意する。

無限変数の径路積分でもこれは同様であって, 多くの場合, 積分は e の肩にのっている関数 $S(x)$ (通常, $S(x)$ は作用とか作用関数と呼ばれる) の臨界点に集中する。 $S(x)$ の臨界点は, 実際上は $S(x)$ の極小値に対応する場合が多いから, 径路積分に効いてくるのは $S(x)$ の極小点 (= $S(x)$ の極小値を実現する点 x) での f の値である。したがって, 径路積分での期待値はほぼ

$$\langle f(x) \rangle \approx S(x) \text{ の極小点での } f \text{ の値の総和}$$

で与えられる。言い換えれば,

$$\text{観測量} \approx S(x) \text{ の極小点でのデータの総和}$$

となる。すなわち, 観測される現象は作用 S を極小にする現象である。これが第 3 節で述べた「最小作用の原理」であるが, 数学ではそれは変分原理と呼ばれ, よい数学的対象をとりだすためによく使われる手法である。すでに述べた「インスタントン」もこのようにして抽出された一例である。

今度は点 P から点 Q へ光が進む場合を考えてみよう。どの径路をとって光が進むか, 作用を用

いて考えてみる。点 P を $(-1, 0)$, 点 Q を $(1, 0)$ として, P から Q へ進む径路を

$$\mathbf{p}(t) = (t, g(t)) \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

とする。ただし, $g(t)$ は $g(-1) = g(1) = 0$ を満たす関数である。通常この径路 \mathbf{p} の長さを作用 S に選ぶが, それでは計算が大変なので簡単のために, ここでは S を次のように決める。作用 S は径路 \mathbf{p} , したがって, g の関数である。そこで

$$S(g) = \int_{-1}^1 \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 dt$$

と定義する。

径路積分とは, この場合

$$Z = \int e^{-S(g)} Dg$$

と書かれる積分であって, 「適当な測度 (積分の体積素) Dg を定めてこの積分を意味あるものとせよ」というのが問題である。 Z は分配関数と呼ばれ, 正規分布のガウス積分に相当する。今の場合は簡単なので, すべて具体的に書き下してみよう。そのために Legendre(ルジャンドル) の球関数を思い出す ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$\phi_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

このとき, つぎが成り立つ:

$$\int_{-1}^1 \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

そこで $\frac{dg}{dt}$ を ϕ_n を用いて

$$\frac{dg}{dt} = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots$$

と表す。 $g(\pm 1) = 0$ なので, $a_0 = 0$ である。そのほかの係数 a_n は実数で, 無限和 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots$ が収束し, 径路 \mathbf{p} が変わるとき, a_n はこの条件を満たして自由に変わるものとする。そうすると,

$$\begin{aligned} S(g) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n\right)^2 dg \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} a_m a_n \int_{-1}^1 \phi_m \phi_n dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int e^{-S(g)} Dg &= \int e^{-\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} Dg \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_n^2} Da_n \end{aligned}$$

となる．発散をさけるため，ここでは測度 Da_n を

$$Da_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} da_n$$

とするが，これはあまり本質的なことではない．したがって，(5) により

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_n^2} da_n = 1$$

となる．分配関数 Z は正規分布のガウス積分に相当するものだから，計算結果が 1 になっても不思議はない．元来 Z の値に深い意味があるのではなく， $S(g)$ や Z の形に現象の本質が現れている，と考えるべきである．作用 $S(g)$ は

$$S(g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

であり，無限個の変数 a_n に依存し，すべての a_n がゼロのとき作用 S は最小になる．そのとき $g' = 0$ ， g は定数， $g(\pm 1) = 0$ だから g は恒等的にゼロである．これは， P から Q へ向かう直線が作用 S を最小にする径路であることを示している．

次の節でも同じような計算を実行する．今度はもう少し面倒になるが，その結果，楕円曲線のモジュライ空間上の積分が現れる．

6. Polyakov の径路積分

Polyakov の弦理論では，点粒子の代わりに究極の微小粒子として閉じた弦（円周）を考える． $(d-1)$ -次元空間 \mathbf{R}^{d-1} の中を運動する閉じた弦は，時間 t とともに運動し，ある時刻では突然発生したり，分かれたりくっついたり，消えてなくなってしまうことを繰り返しながら変化する．その過程で，弦の運動した軌跡は d -次元時空 \mathbf{R}^d の中で閉じたリーマン面を描く．リーマン面には，向

き付けられたものとそうでないもの，つまり，裏表の区別のあるものとそうでないものがあるが，Polyakov の弦理論では向き付けられたもののみを考える．(向き付けられた) リーマン面は，連続的に変化する限り種数（穴の個数）が変化することはない．種数が 1 に等しい場合は，第 4 節で説明した 2 次元トーラスと位相同型（同じ形）である．

いま，種数 g のリーマン面 M をひとつ固定し， M から \mathbf{R}^d への埋め込み写像を

$$\begin{array}{ccc} X: M & \longrightarrow & \mathbf{R}^d \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & (X^1(x), X^2(x), \dots, X^d(x)) \end{array}$$

とする． M 上の計量（正しくは，リーマン計量）を

$$\begin{aligned} g &= \sum_{a,b} g_{ab} dx^a dx^b \quad (g_{12} = g_{21}) \\ &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}(dx^1)(dx^2) + g_{22}(dx^2)^2 \end{aligned}$$

とする．各 g_{ab} は $x \in M$ の関数で， g は M の点 x での長さの測定規準である．この表示は， x^a 方向にわずかに ε^a ($a = 1, 2$) だけ移動するとき， M 上での移動距離を g を規準に測定すれば

$$\sqrt{g_{11}(\varepsilon^1)^2 + 2g_{12}(\varepsilon^1)(\varepsilon^2) + g_{22}(\varepsilon^2)^2}$$

で与えられる，ということの意味する．根号の中はもちろん正である． g の表示は M 上局所的なもので，たくさん移動したときは，道に沿って座標を換えながら積分して移動距離を計算する． g によって長さを測ることができるから， M 上で面積も測定できるし面積分もできる． 2×2 行列 (g_{ab}) の行列式を $\det(g_{ab})$ ， $\sqrt{\det(g_{ab})}$ を \sqrt{g} ， (g_{ab}) の逆行列を (g^{ab}) で表す．また，面積素 $dx^1 dx^2$ を d^2x で表す．そこで，Polyakov の作用 S を

$$S[X, g] = \int_M \left\{ \sum_{a,b,\mu} g^{ab} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^b} \right\} \sqrt{g} d^2x$$

と定義し，その径路積分を考える：

$$Z = \int e^{-S[X,g]} DX Dg$$

ただし，最後の積分は，すべての埋め込み写像 X

と M のすべての計量 g について積分する．径路積分は種数ごとに別々に計算されるので，以下では， M が種数 1 のリーマン面の場合を考える．さらに平行移動の自由度を消すために，点 $z = 0$ の像 $X(0)$ が \mathbf{R}^d の原点であると仮定する．

まず， M として $E(i)$ をとる． $E(i)$ の座標を $z = x + iy$ ， $x^1 = x$ ， $x^2 = y$ とすれば， $E(i)$ の点の代表は基本領域 $0 \leq x, y \leq 1$ からとれる．また，異なる X や g に対し，同じ積分値 $S[X, g]$ の得られる場合が無数にあり，このままでは積分は発散する．この重複をなくすため， $\tau \in \mathbf{H}$ に対し，

$$g(\tau) = (dx)^2 + 2\operatorname{Re}(\tau)(dx)(dy) + |\tau|^2(dy)^2$$

と定め， g として $g(\tau)$ をとる． $w = x + \tau y$ とすると， x, y が $0 \leq x, y \leq 1$ を動くとき， w は $E(\tau)$ の基本領域である平行四辺形 (図 2) を動く．だから， $E(\tau)$ がこの座標 w から回復される．さらに

$$(dw)(\overline{dw}) = (dx + \tau dy)(dx + \overline{\tau} dy) = g$$

なので，座標 w が g から (絶対値 1 の定数倍の差を除いて) 回復され，したがって $E(\tau)$ も回復される．つまり， $g = g(\tau)$ として \mathbf{H} 上のリーマン計量の族を考えているようだが，実質的には \mathbf{H} 上の $E(\tau)$ の族を考えていることになる．

ところで， $\int e^{-S[X, g]} DX$ は μ ごとに別々に和をとればよい形なので， $d = 1$ ， $Y : M \rightarrow \mathbf{R}$ ， $Y(0) = 0$ の場合に $\int e^{-S[Y, g]} DY$ を計算する．

まず， g^{ab} はこの場合には x, y に依存しないので，ストークスの定理により，つぎが成り立つことに注意する：(ただし， $d^2x = dx dy$)

$$S[Y, g(\tau)] = - \int_{E(i)} Y \left(\sum_{a,b} g^{ab} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^a \partial x^b} \right) \sqrt{g} d^2x.$$

ここで次のように定義する：

$$\phi_{m,n} = \begin{cases} \sqrt{2} \cos 2\pi(mx + ny) & \text{(場合 (i))} \\ \sqrt{2} \sin 2\pi(mx + ny) & \text{(場合 (ii))} \end{cases}$$

場合 (i) は $m > 0$ または $m = 0, n > 0$ ，場合 (ii) は $m < 0$ または $m = 0, n < 0$ である．このとき

$$\int_{E(i)} \phi_{m,n} \phi_{j,k} dx dy = \begin{cases} 1 & (m = j, n = k) \\ 0 & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

が成り立つ． $Y(0) = 0$ の仮定により

$$Y = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} a_{m,n} \phi_{m,n}$$

$$\Delta_0 = - \sum_{a,b} g^{ab} \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b}$$

とおけば，

$$\Delta_0 \phi_{m,n} = \frac{4\pi^2}{\operatorname{Im}(\tau)^2} |m\tau - n|^2 \phi_{m,n}$$

だから，第 5 節と同様に $\phi_{m,n}$ の直交関係により，

$$S[Y, g(\tau)] = \int_{E(i)} Y(\Delta_0 Y) \sqrt{g} dx dy$$

$$= \frac{4\pi^2}{\operatorname{Im}(\tau)^2} \sum_{m,n} |m\tau - n|^2 a_{m,n}^2$$

$Da_{m,n} = 2\sqrt{\pi} da_{m,n}$ として公式 (6) を使うと，

$$\int e^{-S[Y, g(\tau)]} DY = \prod' \frac{\sqrt{\operatorname{Im}(\tau)}}{|m\tau - n|}$$

ただし， \prod' は $(m, n) = (0, 0)$ 以外の積を表す．この右辺は収束しないが，適当に解釈して意味を与え，有限の値 (正規積という) とみなすことができる．しかも，その有限の値は (3) の $\Delta(\tau)$ を用いて表すことができる (Kronecker の極限公式)：

$$\prod' \frac{\sqrt{\operatorname{Im}(\tau)}}{|m\tau - n|} = \frac{1}{2\pi ((\operatorname{Im}(\tau))^6 |\Delta(\tau)|)^{\frac{1}{12}}}.$$

$d = 1$ ， $Y = X^\mu$ として計算したので，これを d 個とり Dg も考慮すると，計算結果は

$$Z = \int_F \left(\frac{1}{2\pi (\operatorname{Im}(\tau))^6 |\Delta(\tau)|} \right)^{\frac{d-2}{12}} \frac{dudv}{\operatorname{Im}(\tau)^2}$$

となる．ただし， $u = \operatorname{Re}(\tau)$ ， $v = \operatorname{Im}(\tau)$ ， F は $\operatorname{SL}(2, \mathbf{Z})$ に関する \mathbf{H} の基本領域を表す． $\Delta(\tau)$ は重さ 12 の保型形式，すなわち，

$$\Delta(\tau + 1) = \Delta(\tau), \quad \Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12} \Delta(\tau)$$

なので， $\frac{dudv}{\operatorname{Im}(\tau)^2}$ も $(\operatorname{Im}(\tau))^6 |\Delta(\tau)|$ も $\operatorname{SL}(2, \mathbf{Z})$ で不変である．したがって， \mathbf{H} で積分すると重複の

ためにやはり発散するので、 F 上の、あるいは商空間 $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 上の積分と見なす。

こうして、(2) により経路積分 Z を楕円曲線のモジュライ空間 M_1 での積分とみなすことができる。実を言えば、 $d = 26$ の場合も含め、この積分 Z は収束しない。しかし、計算したい期待値は

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} \int f e^{-S[X, g]} DX Dg$$

であり、分母分子の無限大が相殺して期待値が有限になることもあるから、 Z が無限大になると直ちに不都合だというわけではない。

ここからは数学的には少し不完全な議論になるが、 $d = 26$ を導くことができる。このほか、このままではこの理論には質量が負の粒子 (タキオン) が存在するという不都合があるが、 $d = 26$ の場合だけはその問題も解消されることが知られている。したがって、物理学からの要請を考慮して、最終的な答は、 $d = 26$,

$$Z = \int_{M_1} \frac{dudv}{(2\pi)^2 (\mathrm{Im}(\tau))^{14} |\Delta(\tau)|^2}$$

となる。

7. 他の論説へのコメント

ミラー対称性はすでに常識となっており、この特集でも格別の説明は与えられていないが、多くの論説を読む前提となるので、ここでミラー対称性について簡単に説明しよう。これは 4 人の物理学者 Candelas-Ossa-Green-Parkas の 1991 年の発見に基づく。 \mathbb{P}^4 の一般の 5 次超曲面 Y に対するミラー (幾何学的な双対) を、次のように定める:

$$Y'_\lambda = \{(y_i) \in \mathbb{P}^4; y_0 y_1 \cdots y_4 = \lambda(y_0^5 + \cdots + y_4^5)\}$$

G を、成分を 1 の 5 乗根とする 5×5 対角行列で、行列式が 1 に等しいものすべてからなる群とする。この Y'_λ には、 G が自明な仕方で作作用する。商空間 Y'_λ/G の極小特異点解消 Y_λ は Y 同様 Calabi-Yau 多様体となり、ゼロでない正則な 3 型 ω を持つ。COGP は、適当なパラメーター t を選べば、 ω の周期積分の t に関するべき級数展開の第 n 番目の

係数は、一般の 5 次超曲面上の次数 n の有理曲線の個数を与えるであろう、という驚くべき予想を提出した。これはその後数学者によって「適当な解釈のもとに証明された」が、この予想のもとにあったのが、超対称性を持つ弦理論でありその経路積分であった。江口、秦泉寺、深谷、中島 4 氏の論説は、この事実および Donaldson 理論 (第 3 節参照) のその後の発展を解説したものである。そこに登場するグロモフ・ヴィテン不変量は有理曲線の個数を一般化したものである。また、これらの論説には経路積分や分配関数が (実質的には) しばしば登場する。

河野氏の論説は、曲線のモジュライ理論を位相幾何な立場から解説する。これは物理学、位相的場の理論との関連で重要だが、やはり背後に経路積分がある。斉藤氏の論説は古典的な対象「パンルベ方程式」をモジュライ理論的に解説する。関数をやさしい順に有理関数、代数的関数、古典的特殊関数などのよく知られた関数とすれば、パンルベ方程式の解はその次に来る関数であって、物理学にもしばしば登場する。

最後になったが、森下氏の論説は数論と幾何学の類似する現象を論ずる。たとえば、素数は結び目に対応する。また、数論には岩沢多項式とよばれる重要な多項式があるが、これは結び目の Alexander 多項式を彷彿させる。これらの事実は、背後のなにか新しい理論の存在を予感させる。この論説はそうした新しい問題を提起している。

参考文献

- 1) Belavin and Kniznik: Complex geometry and the theory of quantum strings, Soviet Phys. JETP **64** (1986) 214-228.
- 2) Bilinson and Manin: The Mumford form and the Polyakov measure in string theory. Comm. Math. Phys. **64** (1986) 359-376.
- 3) Michio Kaku: 超弦理論, シュプリンガー・フェアラーク, 1989.
- 4) 上野健爾: 代数幾何学と弦理論 (数理論理学の展開, 第 4 章), 東京図書, 1988.

(なかむら・いく, 北海道大学)