

日本数学会
秋季総合分科会

モジュライの幾何

北海道大学理学部

中村 郁

於 北海道大学

2004年9月20日

この原稿は新井仁之氏のホームページに
あるものを借用して作成しました。

新井仁之，新井しのぶ

両氏にお礼を申し上げます。

G 有限群

G の有限次元表現

$$V = \mathbb{C}x_1 + \mathbb{C}x_2 + \cdots + \mathbb{C}x_n$$

(1次式の空間とみなす)

m 次式の空間に

同じ(同型な)表現 W, W' が現れたとする

W の基底 f_j ($j = 1, 2, \dots, N$)

W' の基底 g_j ($j = 1, 2, \dots, N$)



$$f_j - tg_j = 0$$

$$(t \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots, N)$$

射影空間 $P(V)$ の部分集合の族

例 1 $G = G(3)$

有限ハイゼンベルグ群 位数 27

G の 3次元表現 $V = \mathbb{C}x_0 + \mathbb{C}x_1 + \mathbb{C}x_2$

$$\sigma : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, \zeta_3 x_1, \zeta_3^2 x_2)$$

$$\tau : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_0)$$

ζ_3 は 1 の原始 3 乗根

$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3, x_0 x_1 x_2$ は 3 次の不変式



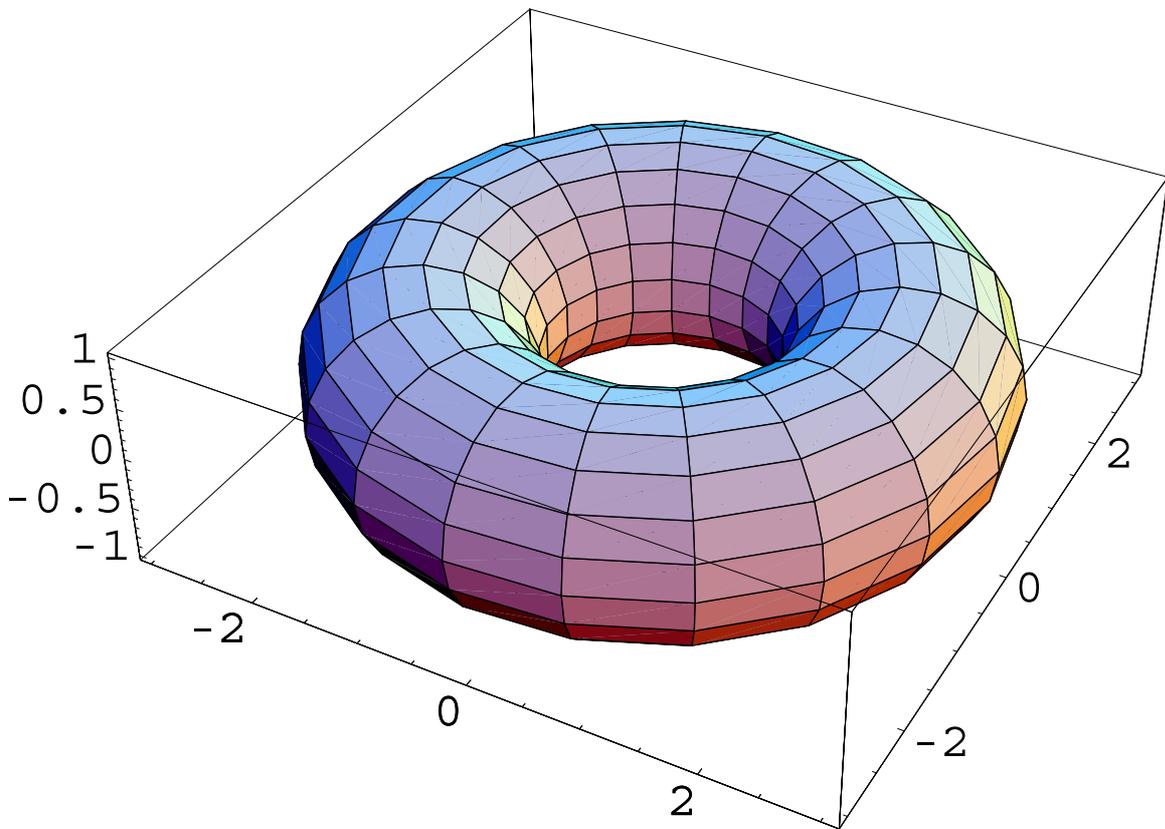
$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0 \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

射影空間 \mathbb{P}^2 の『ヘッセの 3 次曲線』の族



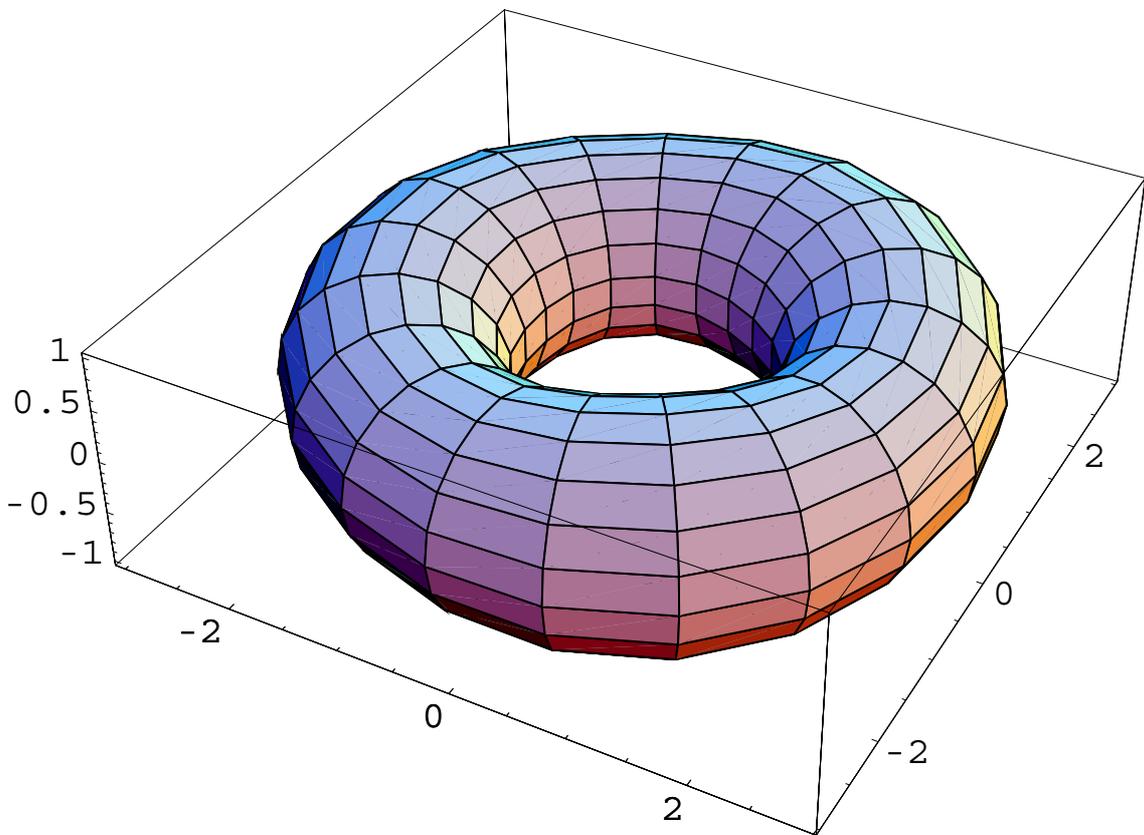
アーベル多様体のモジュライのコンパクト化

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0 \quad (\mu \in \mathbb{C})$$



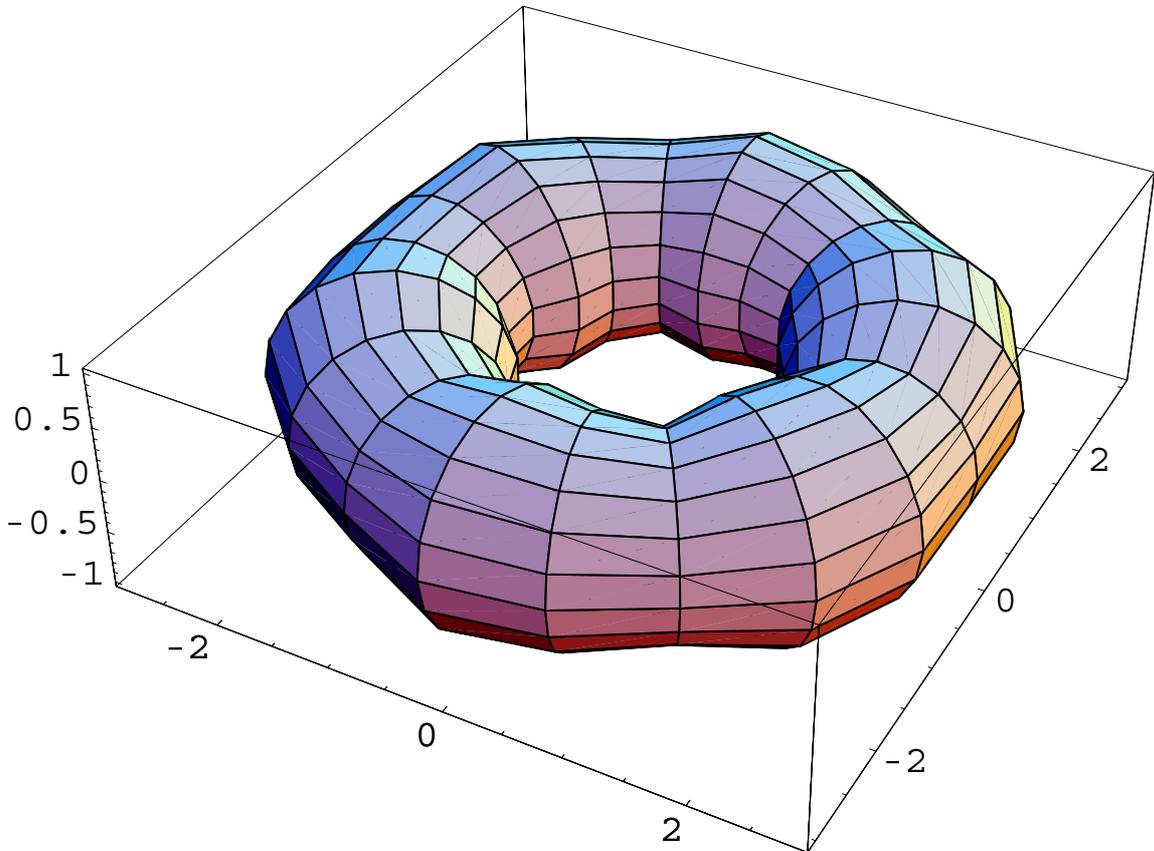
$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0$$

μ が ∞ にちかづくとき

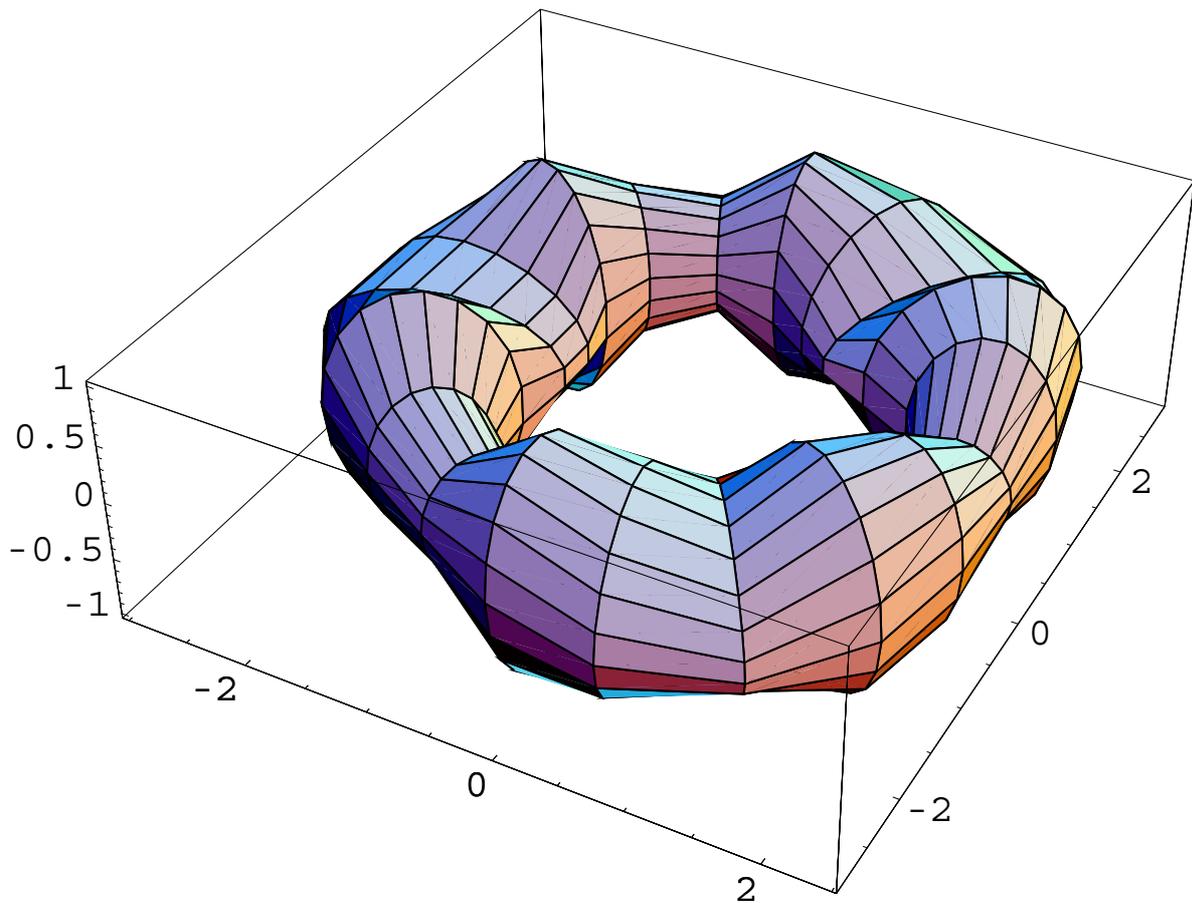


$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0$$

μ がもっと ∞ にちかづく



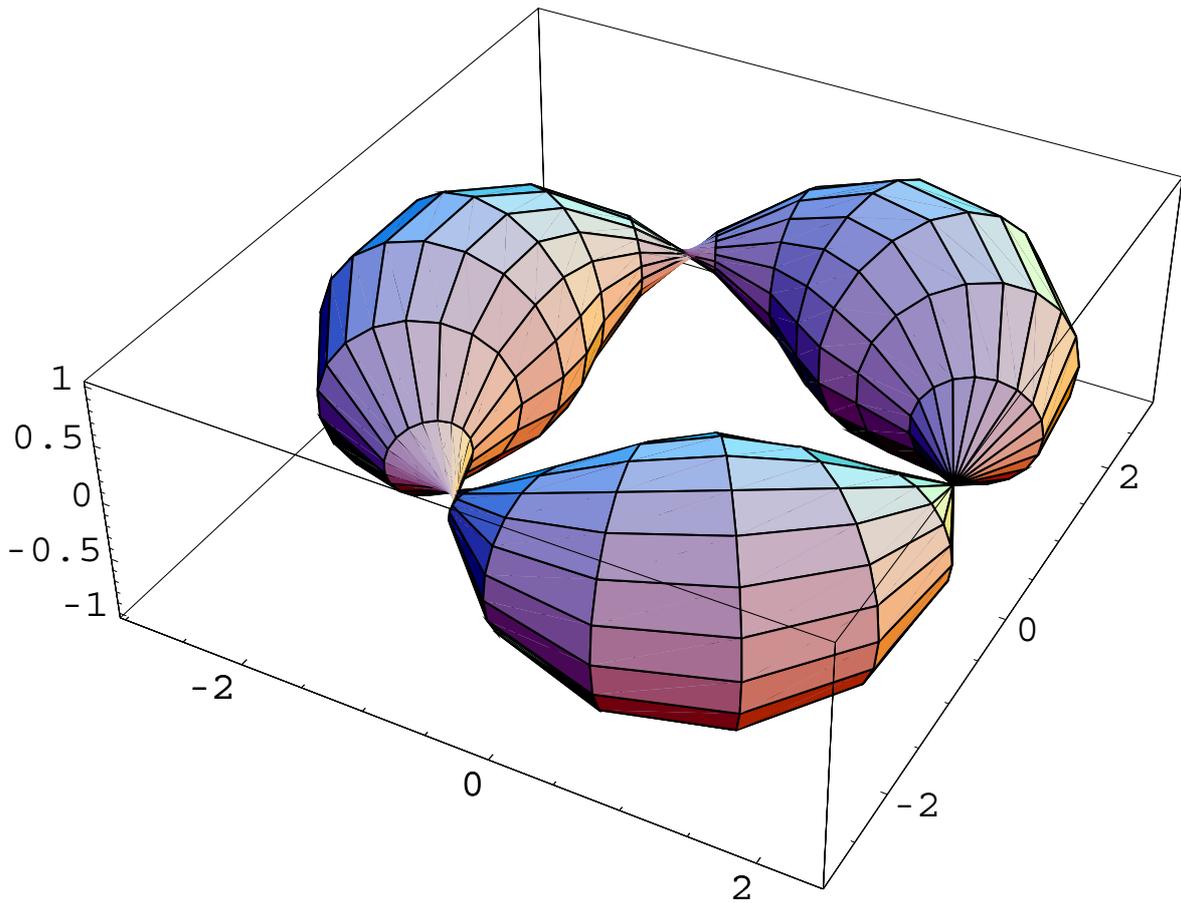
$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0 \quad (\mu \in \mathbb{C})$$



$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0 \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

$\mu = 1, \zeta_3, \zeta_3^2, \infty$ のときは,

3本の P^1 (2次元球面)に分かれる。



例 2 (伊藤-中村)

G は 2 変数 2 面体群 $G(D_5)$, 位数 12

目標：単純特異点の新しい特異点解消

G は二つの元 σ, τ で生成される：

$$\sigma = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

表現 $W = \{xy\}$, $W' = \{x^6 - y^6\}$ は同型



多項式 $F = xy - t(x^6 - y^6)$ ($t \in \mathbb{C}$)

G -不変ではないが G -同変 .

\mathbb{C}^2 内の零点集合 $\{F = 0\}$ は G -不変 .

特異点解消にどう関係するのか？

商空間 \mathbb{C}^2/G はただひとつ特異点をもつ
 \mathbb{C}^2/G をあえてモジュライ空間とみなす

G -同変モジュライ理論

$\mathbb{C}^2/G = \{12 \text{点からなる } G\text{-不変な集合}\}$
 (G -軌道のモジュライ空間)

その特異点解消は

$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) := \{\text{長さ } 12 \text{ の } \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\text{-}G\text{-加群}\}$

(環論的な『 G -軌道』のモジュライ空間)

加群 $M \in G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ に対して

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ (完全)}$$

イデアル I の生成 G -加群は, ほぼ G -既約.

I の生成元の例 : $F = xy - t(x^6 - y^6)$

定理 1 (Fogarty 1968)

自然な射 Hilbert-Chow 射 :

$\text{Hilb}^N(\mathbb{C}^2) \rightarrow (\mathbb{C}^2)^N / S_N$ は

(最小)特異点解消

ただし, S_N は N 次対称群 .

$\text{Hilb}^N(\mathbb{C}^2) := \{ \text{長さ } N \text{ の } \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \text{- 加群} \}$

$(\mathbb{C}^2)^N / S_N := \{ \mathbb{C}^2 \text{ の } N \text{ 点の組} \}$

$G \subset \text{SL}(2)$, $N = |G|$ のとき ,

$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) := \text{Hilb}^N(\mathbb{C}^2)$ の G -不変部分

$\mathbb{C}^2/G = (\mathbb{C}^2)^N / S_N$ の G -不変部分

上の定理の G -不変部分 = つぎの定理

ディンキン図形が計算の仕方を教えてくれる。

定理 2 (伊藤由佳理-中村 1999) :

$G \subset \mathrm{SL}(2)$ ならば,

$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ は表現論的にくわしい,

\mathbb{C}^2/G の最小特異点解消である。



マッカーイ対応の新しい説明。

「ディンキン図形(の頂点)」

⇕ (1対1対応)

「例外集合の既約成分」

(1対1対応) ⇕ (マッカーイ対応)

「 G の既約表現(\neq 単位表現)の同値類」

ディンキン図形が計算の仕方を教えてくれる。

定理 3 (伊藤由佳理-中村 1999) :

$G \subset \mathrm{SL}(2)$ ならば,

$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ は表現論的にくわしい,

\mathbb{C}^2/G の最小特異点解消である。



マッカーイ対応の新しい説明。

「ディンキン図形(の頂点)」

⇕ (1対1対応)

「例外集合の既約成分」

(1対1対応) ⇕ (マッカーイ対応)

「 G の既約表現(\neq 単位表現)の同値類」

ディンキン図形が計算の仕方を教えてくれる.

定理 4 (伊藤由佳理-中村 1999) :

$G \subset \mathrm{SL}(2)$ ならば,

$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ は表現論的にくわしい,

\mathbb{C}^2/G の最小特異点解消である.



マッカーイ対応の新しい説明.

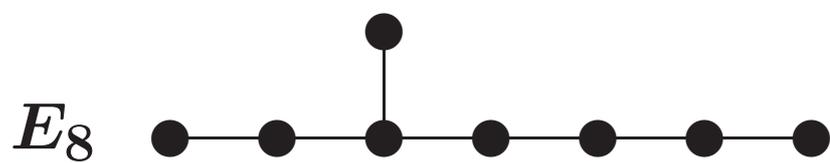
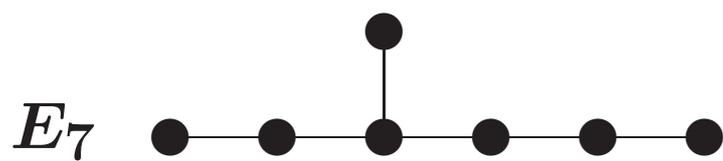
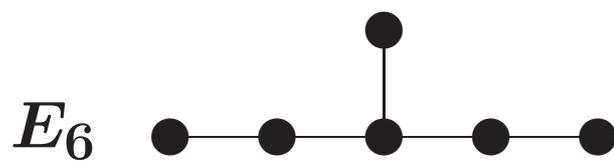
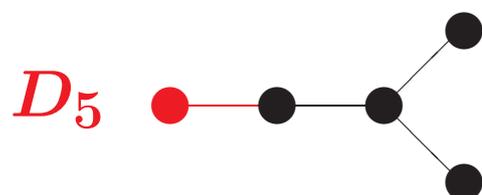
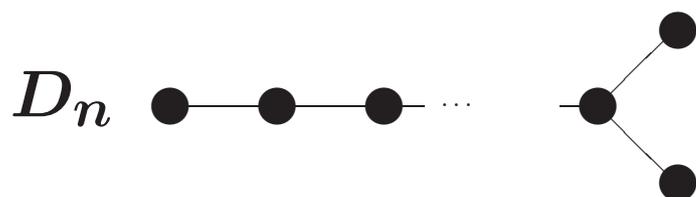
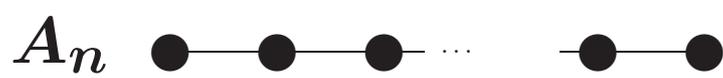
「ディンキン図形(の頂点)」

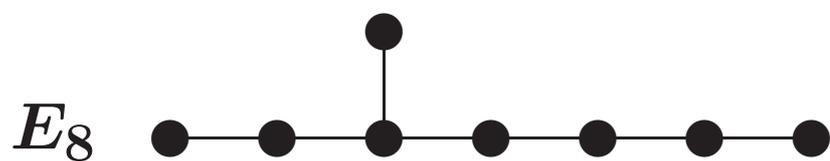
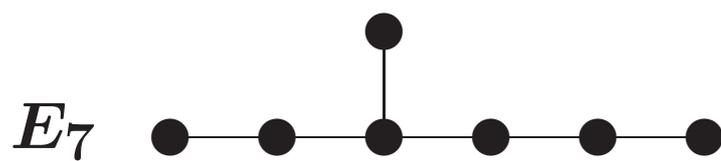
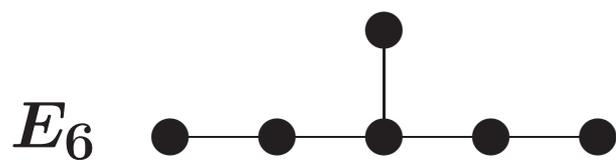
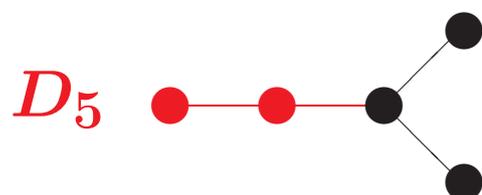
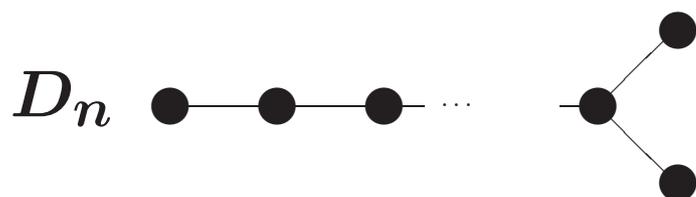
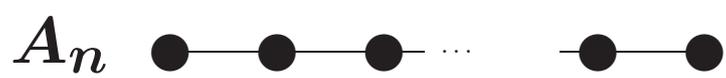
⇕ (1対1対応)

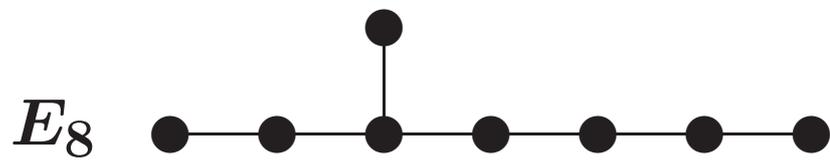
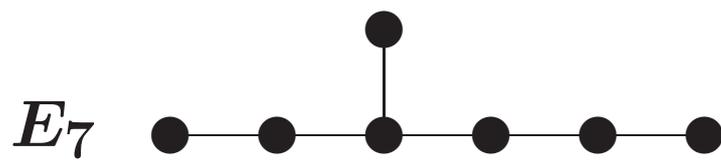
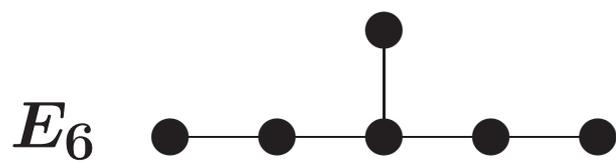
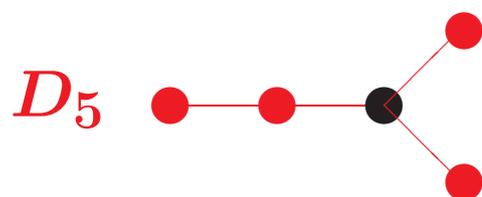
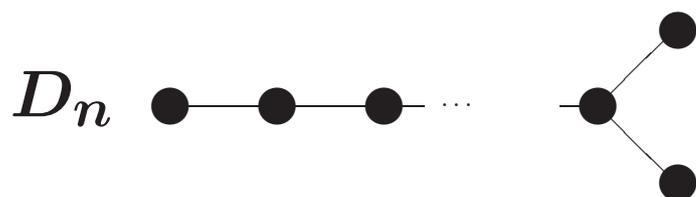
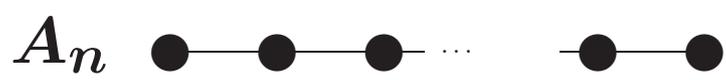
「例外集合の既約成分」

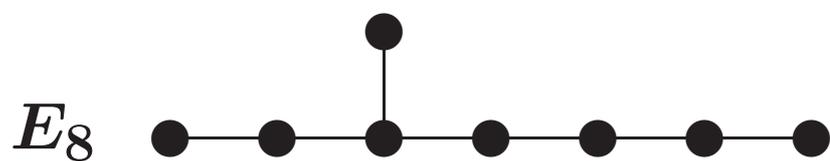
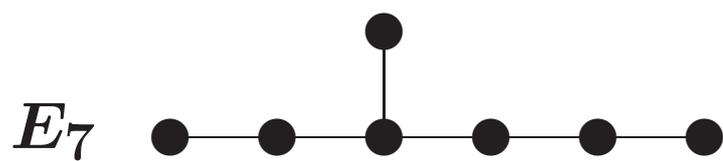
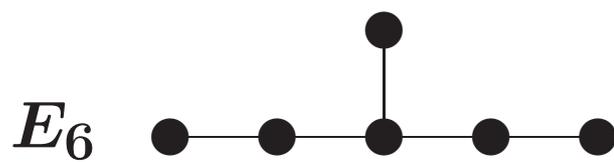
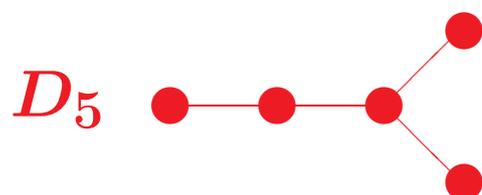
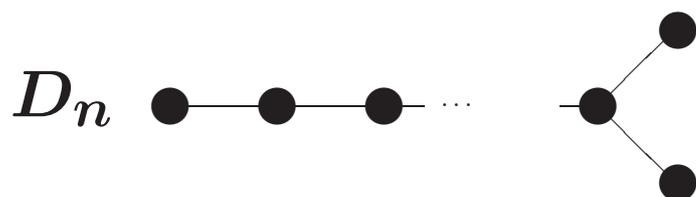
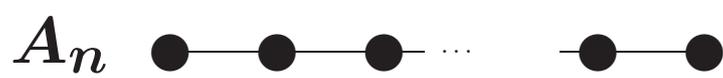
(1対1対応) ⇕ (マッカーイ対応)

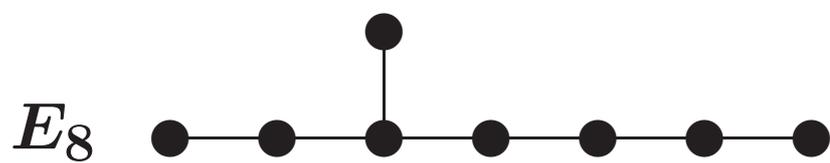
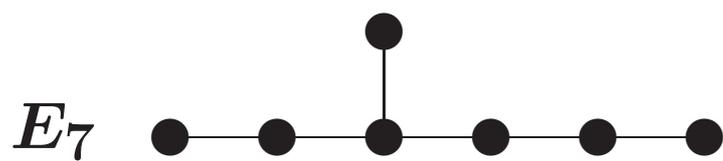
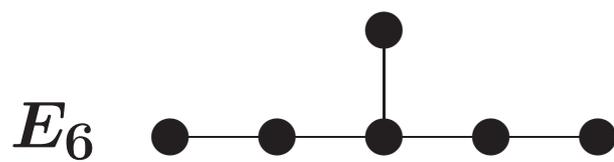
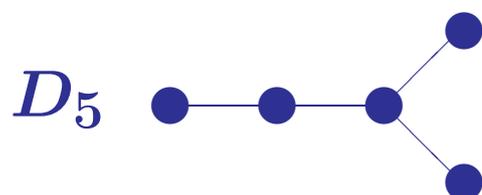
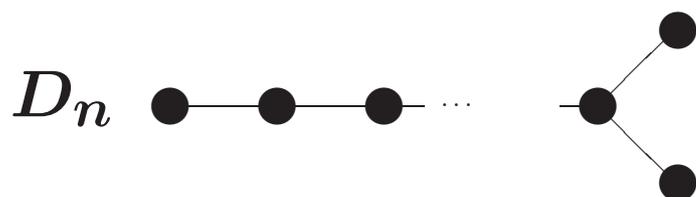
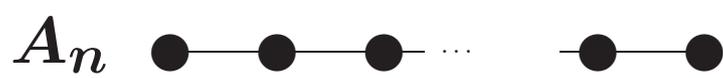
「 G の既約表現(\neq 単位表現)の同値類」

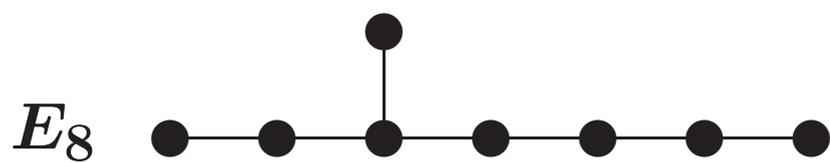
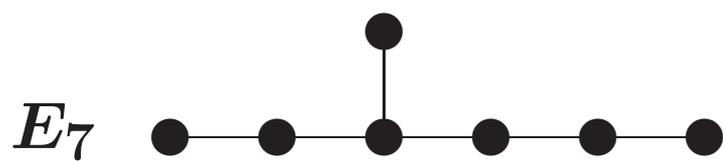
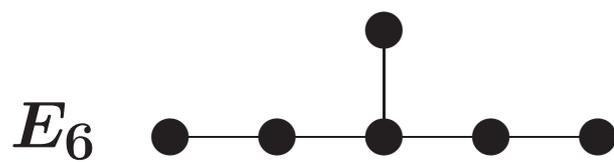
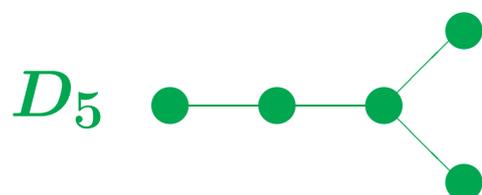
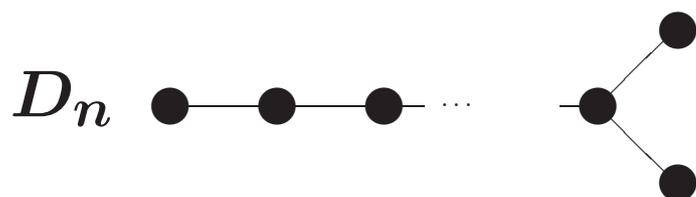
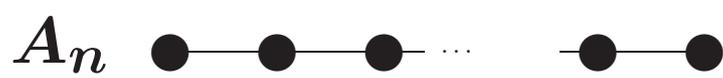












ふたつの例は良く似ている。

どちらも同変モジュライ理論として扱う。

P^2 の3次曲線全体

$= x_0, x_1, x_2$ の3次同次式全体/ C^*

$= P^9$: 9次元射影空間

ヘッセ 3 次曲線全体

$= G(3)$ - 不変な3次曲線全体

$G \subset SL(2)$, $N = |G|$ とすると,

G - Hilb(C^2)

$= \text{Hilb}^N(C^2)$ の G - 不変部分

$= G$ - 不変な『 N 点』全体

以後は
アーベル多様体のモジュライ
に限る

1 ヘッセの3次曲線

$$C(\mu) : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_0 x_1 x_2 = 0$$

$$(\mu \in \mathbb{P}_C^1)$$

定理 5 (ヘッセ1849)

- (1) どんな非特異3次曲線も, $SL(3)$ の作用で $C(\mu)$ に変換される.
- (2) $C(\mu)$ は9個の変曲点 $[1 : -\beta : 0]$, $[0 : 1 : -\beta]$, $[-\beta : 0 : 1]$ を持つ.
 $\beta \in \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}$.
- (3) $C(\mu)$ と $C(\mu')$ が9個の変曲点を動かさずに同型 $\Leftrightarrow \mu = \mu'$.

3次曲線のモジュライ

定理 6 (モジュライのコンパクト化-古典型)

$A_{1,3} := 9$ 点つき非特異3次曲線のモジュライ

$= \{ \text{非特異3次曲線} \} / 9$ 点つき同型

$= \mathbb{C} \setminus \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}$

$\overline{A_{1,3}} := \{ \text{やや一般の3次曲線} \} / 9$ 点つき同型

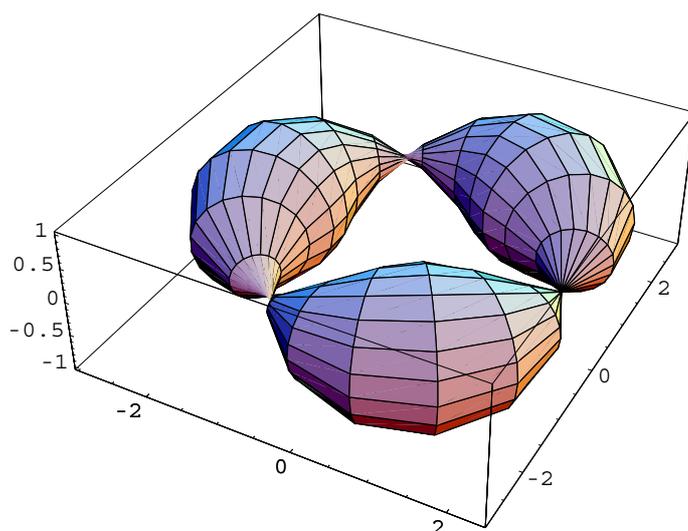
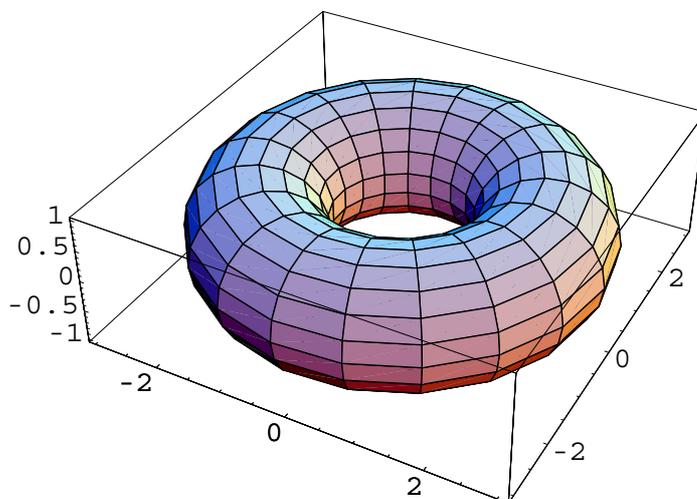
$= \{ \text{ヘッセ3次曲線} \} / \text{同型} = \text{同一}$

$= \{ \text{ヘッセ3次曲線} \}$

$= A_{1,3} \cup \{C(\infty)\}$

$\cup \{C(1), C(\zeta_3), C(\zeta_3^2)\}$

$= \mathbb{P}^1$



$\mu = 1, \zeta_3, \zeta_3^2, \infty$ のときは ,
 3本の直線 (= $P^1 = 2$ 次元球面)

2 モジュライコンパクト化の原理

モジュライ = 同型類の集合

感じ: 「モジュライ」= X/G , G :代数群

比較対照表

| | |
|----------------|----------------|
| X | 幾何学的対象全体 |
| G | 同型写像のなす群 |
| x, x' が同型 | G -軌道が一致 |
| | $O(x) = O(x')$ |
| X_{ps} | 安定な対象 |
| X_{ss} | 半安定な対象 |
| 商空間 X_{ps}/G | 「モジュライ」 |
| $X_{ss} // G$ | 『コンパクト化』 |

すでにアーベル多様体のモジュライの
コンパクト化はいろいろ知られている。
佐武, Baily-Borel, Mumford etc, 浪川

どれがいいのか? 自然なのか?

素朴には『同型類を不変量で識別したい』

『モジュライ』 := 代数的モジュライ
= 同型類を識別する不変量
の定める空間

しかし, これは調べるのは難しい

それではどうしたらよいか?

『モジュライ』 := 代数的モジュライ

= 識別する不変量の定める空間

幾何学的に調べるほうがやさしい

幾何学的対象を

不変量の定義できるものに限る



安定性と半安定性 (Mumford:GIT)

さらに、

『同型類を不変式で完全に識別する』には



閉軌道の空間に行き着く

3 閉軌道の空間

もういちど復習

比較対照表

| | |
|---------------|----------------|
| X | 幾何学的対象全体 |
| G | 同型写像のなす群 |
| x, x' が同型 | G -軌道が一致 |
| | $O(x) = O(x')$ |
| X_{ss} | 半安定な対象全体 |
| $X_{ss} // G$ | 『モジュライ』 |

注意

安定 \implies 閉軌道 \implies 半安定

例 3 $G = \mathbb{C}^*$ の \mathbb{C}^2 への作用, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$
 $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha^{-1} y) \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$

商空間 $\mathbb{C}^2 // G$ はどう定義すべきか？

素朴な答え： G -軌道全体 (×)

答え： G の不変式で定める空間 ()

$\mathbb{C}^2 // G = \{t \in \mathbb{C}\}$ ただし, $t = xy$

ふたつは一致しない

理由 : $\{xy = t\}$ ($t \neq 0$: 定数) は G -軌道

しかし, $\{xy = 0\}$ は3個の G -軌道

$\mathbb{C}^* \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{C}^*, \{(0, 0)\}$

$\therefore G$ -軌道を不変式で区別できない

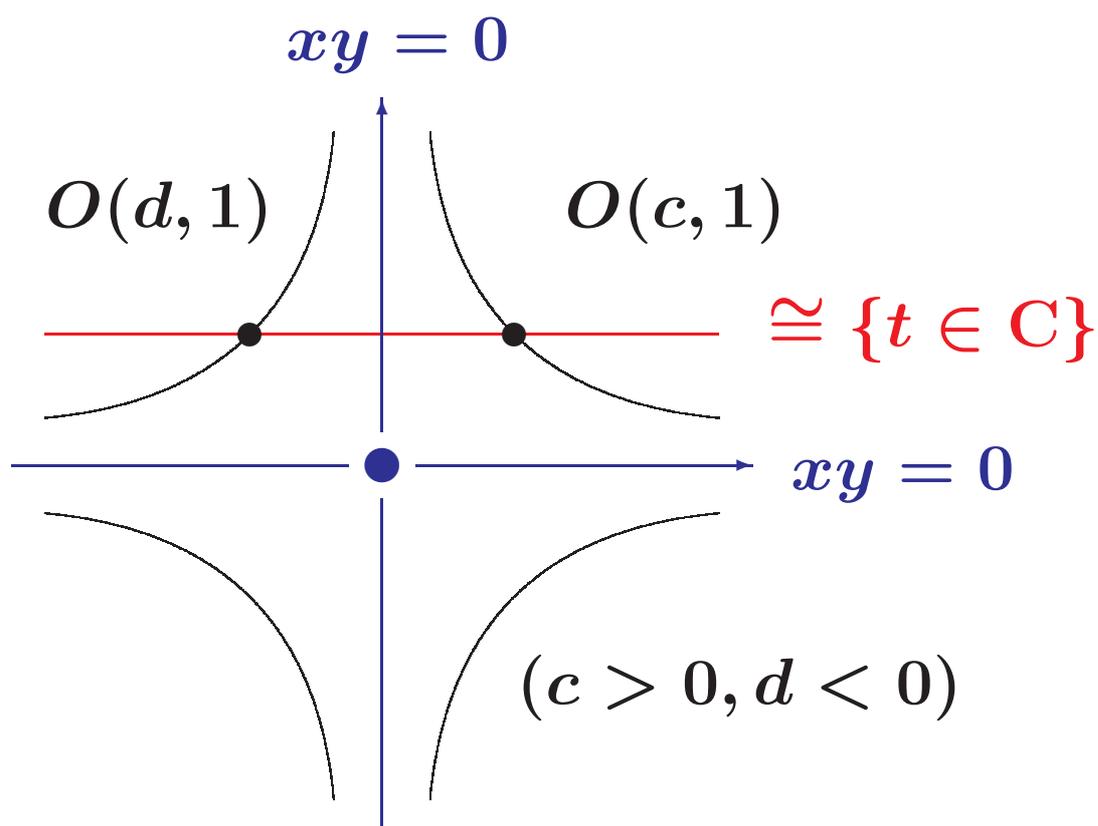
$C^2 // G = \{t \in C\}$ ただし, $t = xy$

これは『 G -軌道の集合』とはちがう

理由 : $t = 0$ はひとつの点

$\{xy = 0\}$ は3個の G -軌道

$C^* \times \{0\}, \{0\} \times C^*, \{(0, 0)\}$



注意

$\{(0, 0)\}$ は $\{xy = 0\}$ のただひとつ
の閉軌道

$\{(0, 0)\}$ は $\{xy = 0\}$ のただひとつの閉軌道

定理 7 不変式の定める空間 = 閉軌道全体

定理 8 G : 簡約群, (例: $G = \mathbb{C}^*$)

$X_{ss} =$ 半安定なもの全体, とすれば,

$X_{ss} // G =$ 不変式の空間 = 閉軌道全体

ただし, X_{ss} で閉じた軌道, という意味.

考える対象を

閉軌道を持つものに限る



アーベル多様体とPSQAS

PSQAS : 閉軌道を持つ退化アーベル多様体



アーベル多様体のモジュライの

コンパクト化はこれでできる

4 GIT-安定性と臨界点の安定性

『GIT-安定性』何が安定なのか？

臨界点の安定性と関係はある

V : ベクトル空間, G : 簡約群

K : G の実形の最大コンパクト群

$\|\cdot\|$: K -不変計量

$p_v(g) := \|g \cdot v\|$ と定義 $v \in V$

定理 9 (Kempf-Ness 1979) 次は同値

- (1) v が閉軌道を持つ
- (2) p_v が軌道 $O(v)$ 上最小値をもつ
- (3) p_v が軌道 $O(v)$ 上臨界点をもつ

5 Deligne-Mumford の安定曲線

定義 10 C が種数 g の安定曲線



- (1) 連結な射影曲線, 自己同型群は有限
- (2) 特異点はあっても, $xy = 0$ の形
- (3) $\dim H^1(O_C) = g$

定理 11 (Deligne-Mumford)

\overline{M}_g はコンパクト, M_g は \overline{M}_g の開集合
ただし

M_g : 種数 g の非特異曲線のモジュライ

\overline{M}_g : 種数 g の安定曲線のモジュライ

定理 12 次は同値.

- (1) C が安定曲線.
- (2) $\Phi_{|mK|}(C)$ の Hilbert-点 が GIT-安定 .
- (3) $\Phi_{|mK|}(C)$ の Chow-点 が GIT-安定 .

(1) \Leftrightarrow (2) Gieseker 1982

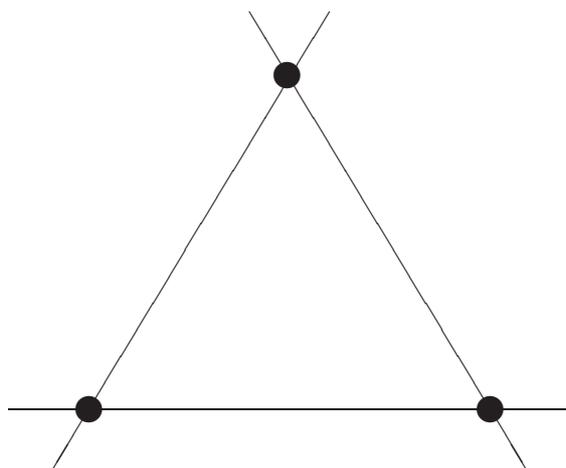
(1) \Leftrightarrow (3) Mumford 1977

6 3次曲線の安定性

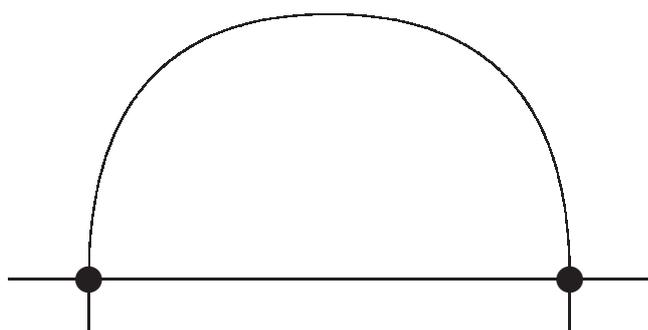
| 3次曲線 | 安定性 |
|---------------|---------|
| 楕円曲線 | 閉軌道, 安定 |
| 3本の直線, 3重点なし | 閉軌道 |
| 直線と2次曲線, 接点なし | 半安定 |
| 既約, 通常2重点あり | 半安定 |
| そのほか | 半安定でない |

結論 次は同値

- (1) 閉軌道をもつ
- (2) 楕円曲線 または 3本の直線の輪 (3-gon)
- (3) ヘッセ3次曲線, つまり, $G(3)$ -不変

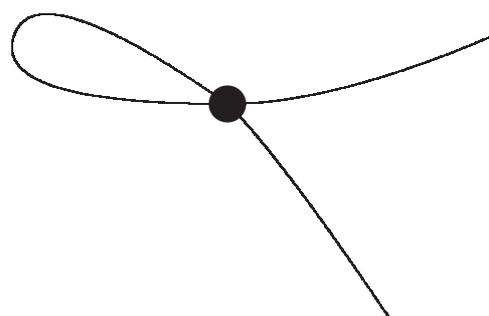


3本の直線，3重点を持たない



直線と2次曲線
接点なし

既約
通常2重点あり



半安定3次曲線

7 安定性-高次元の場合

定理 13 k 代数閉体, k の標数は $|K|$ と素

K :有限可換シムプレクテック群, 十分大

$G(K)$: K に付随したハイゼンベルグ群

$V = k[\sqrt{K}]$: 群環

X は K -分点をもつアーベル多様体の極限 .

(このとき $X \subset P(V)$ であるが)

そのとき, X について次は同値

- (1) 閉 $SL(V)$ -軌道をもつ
- (2) $G(K)$ -作用で X は不変
- (3) 具体的に構成できる PSQAS と一致

定理 14 3次曲線について次は同値

- (1) 閉 $SL(3)$ -軌道をもつ
- (2) ヘッセ3次曲線と同値, つまり, $G(3)$ -不変
- (3) 楕円曲線 または 3本の直線の輪 (3-gon)

定理 15 X を退化アーベル多様体とする

(X がアーベル多様体のときも含む)

いくつかの自然な仮定のもとで次は同値

- (1) 閉 $SL(V)$ -軌道をもつ
- (2) $G(K)$ -作用で X は不変
- (3) 具体的に構成できる PSQAS と一致

8 $Z[\zeta_N, 1/N]$ 上のモジュライ

定理 16 (ヘッセの定理-現代版)

$$SQ_{1,3} = P^1$$

$Z[\zeta_3, 1/3]$ 上射影的なモジュライ

(1) 普遍的な3次曲線は

$$\begin{aligned} \mu_0(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) - 3\mu_1 x_0 x_1 x_2 &= 0 \\ (\mu_0, \mu_1) &\in SQ_{1,3} = P^1 \end{aligned}$$

(2) k が標数が3でない代数閉体のとき

$SQ_{1,3}$ の k 点全体

$$\begin{aligned} &= \left\{ \text{閉軌道3次曲線のレベル3-構造} \right\} / \text{同型} \\ &= \left\{ \text{ヘッセ3次曲線のレベル3-構造} \right\} \end{aligned}$$

定理 17 (ヘッセの定理-高次元暫定版)

$\mathbb{Z}[\zeta_N, 1/N]$ 上射影的な

精密なモジュライ $SQ_{g,K}$ が存在

k : 代数閉体, 標数が N と素ならば

$SQ_{g,K}$ の k 点全体

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{閉軌道広義アーベル多様体} \\ \text{のレベル } G(K)\text{-構造} \end{array} \right\} / \text{同型} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} G(K)\text{-不変広義アーベル多様体} \\ \text{のレベル } G(K)\text{-構造} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} G(K)\text{-不変 PSQAS} \\ \text{のレベル } G(K)\text{-構造} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

よく似たモジュライが
Alexeev によっても構成されている
 $\overline{A_{g,1}}$ over \mathbb{Z}

9 PSQASの形

テータ関数の極限

PSQASは3-gonの一般形

これは, デロネ分割 で分かる

『テータ関数の極限はデロネ分割で分かる』

デロネ分割 : 2次形式の標準形

を求める問題に関連して

前世紀始めに考察された (Voronoi 1908)

PSQAS : ほとんど同じものが1975頃に

すでに浪川, 中村によって導入された

PSQAS : テイト曲線の一般化

テイト曲線 : $C^*/w \mapsto qw$

もう少し正確には

$\{(q, w) \in C \times C^*; |q| < 1\} / w \mapsto qw$

ヘッセ曲線 : $C^*/w \mapsto q^3w$

テイト曲線 :

$C^*/w^n \mapsto q^{mn}w^n (m \in \mathbb{Z})$

ヘッセ曲線 : $C^*/w^n \mapsto q^{3mn}w^n (m \in \mathbb{Z})$

一般の場合 : B 正定値

$(C^*)^g / w^x \mapsto q^{B(x,y)} w^x (y \in \mathbb{Z}^g)$

『自然な $q = 0$ への拡張』 \implies

3-gon や PSQAS が極限

$X = \mathbb{Z}^g$ とし, B を $X \times X$ 上の
正定値双1次形式とする.

$\|x\| = \sqrt{B(x, x)}$: $X \otimes \mathbb{R}$ の距離 (固定)

定義 18 D がデロネ胞体

\Leftrightarrow (ある $\alpha \in X \otimes \mathbb{R}$ に対して)

D は α に一番近い格子点 (X の点) の凸閉包

$\alpha \in X \otimes \mathbb{R}$ に依存, $D = D(\alpha)$ と書く

$\alpha \in X$ ならば, $D = \{\alpha\}$.

デロネ胞体を全て集めると

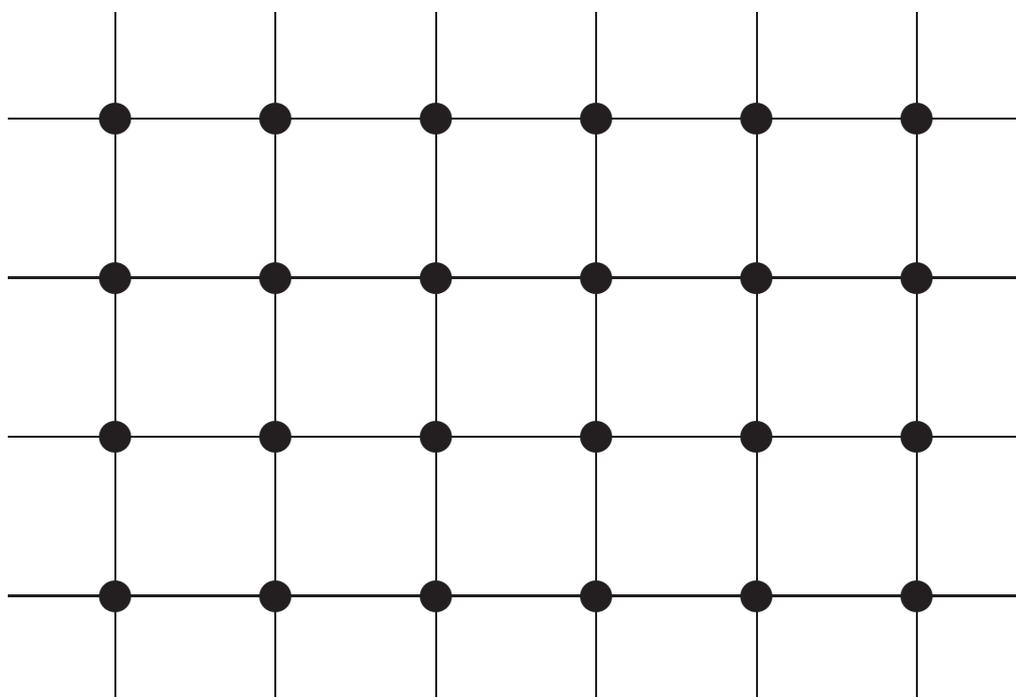
$X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の多面体分割

デロネ分割

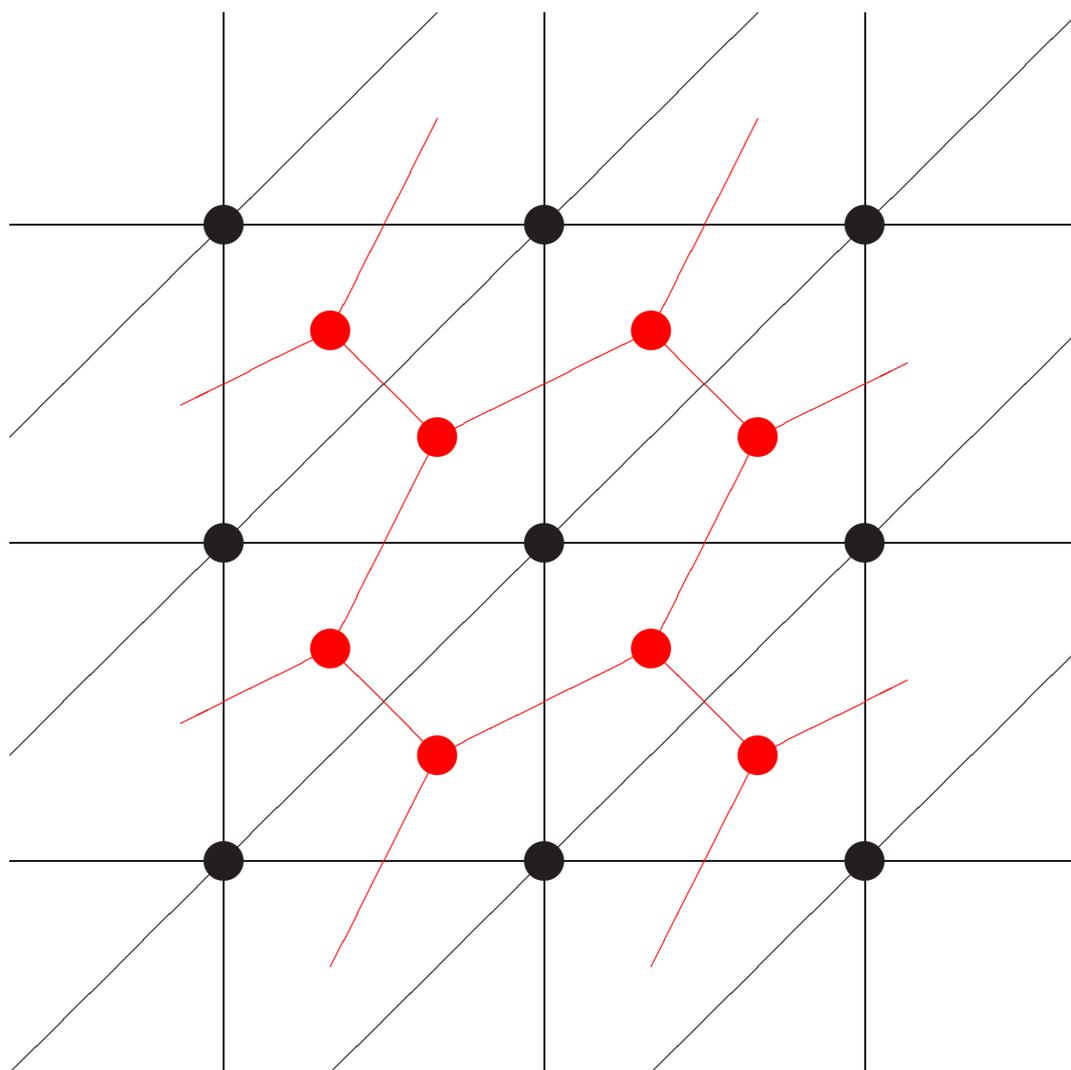
例 4

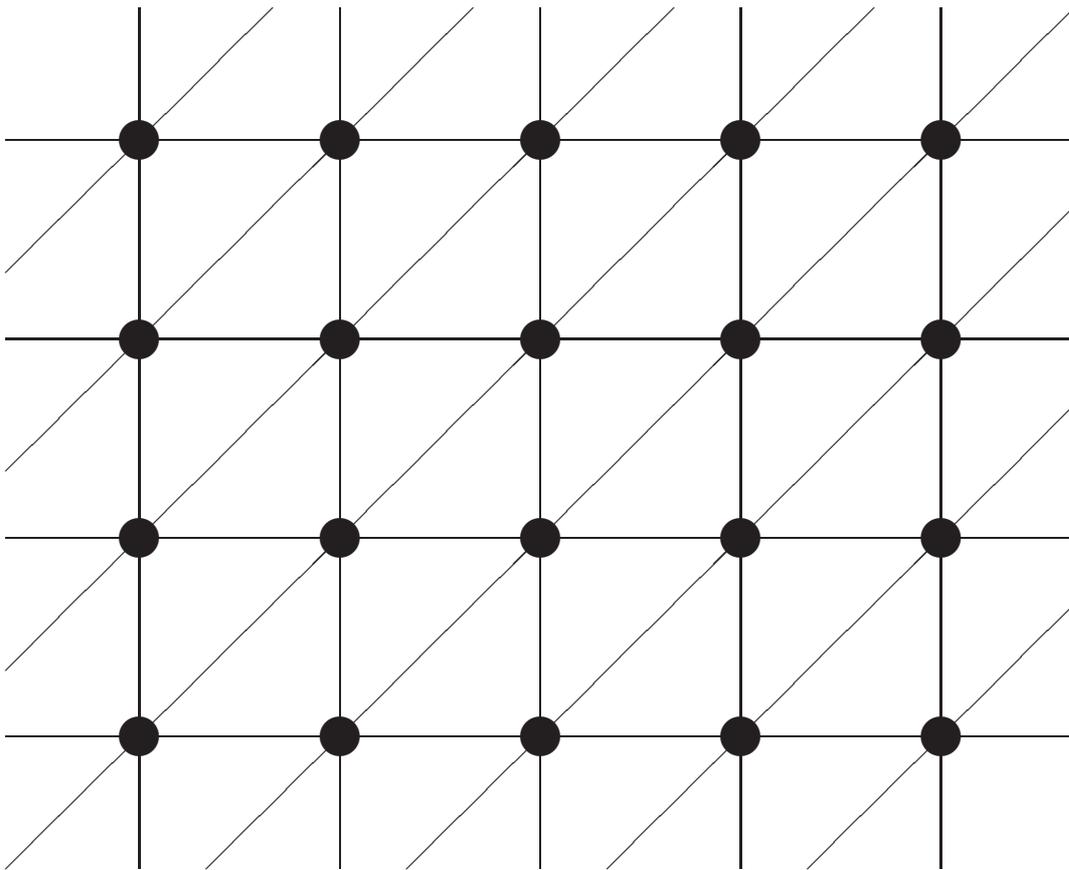


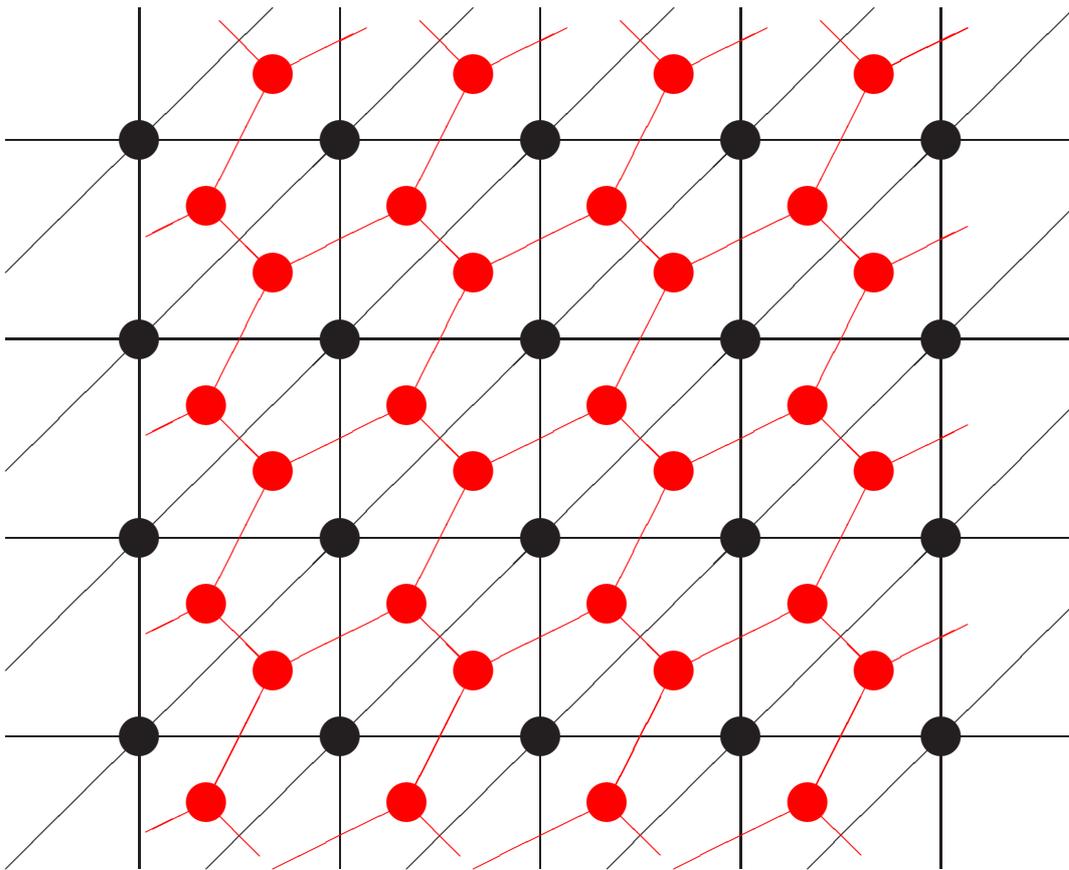
例 5 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

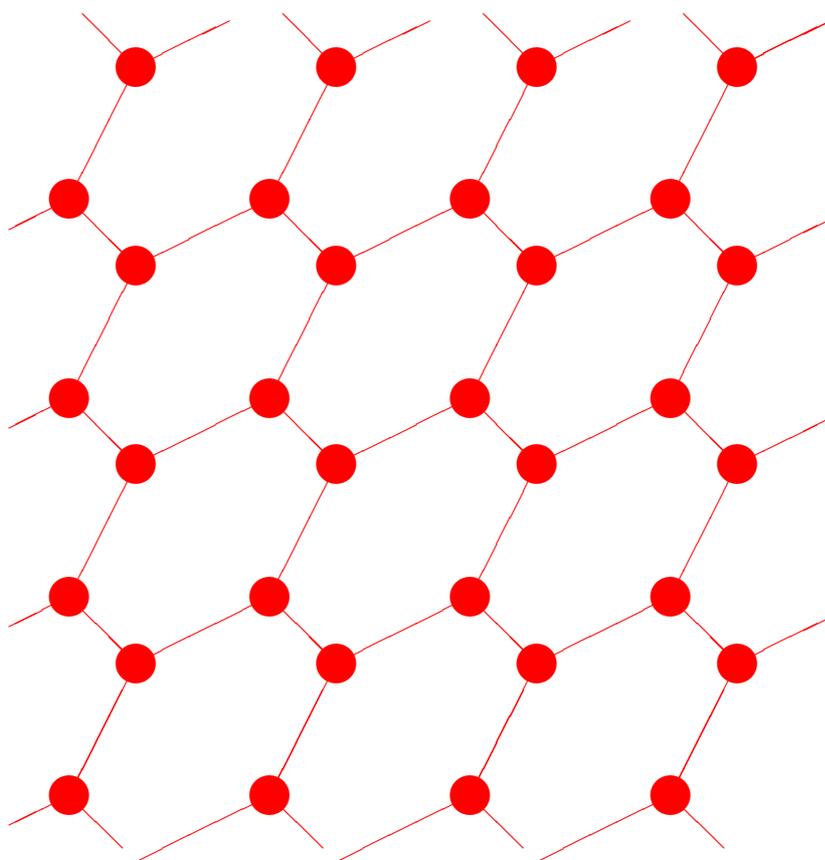


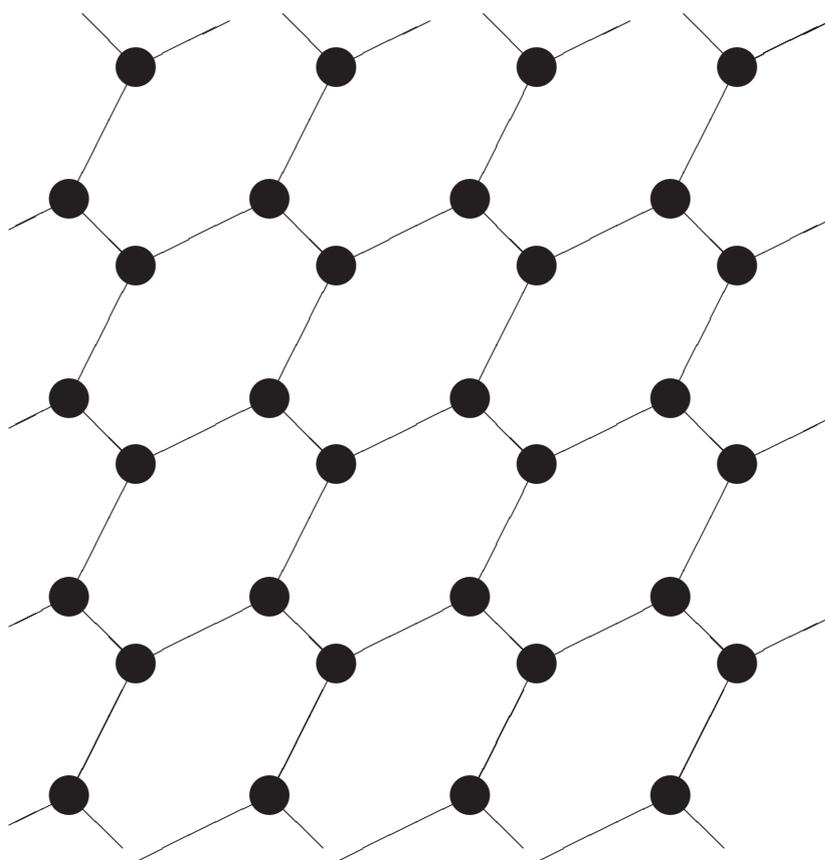
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$











ボロノイ分割

定義 19 D : デロネ胞体 にたいして

$$V(D) := \{\lambda \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}; D = D(\lambda)\}$$

ボロノイ胞体 と呼ぶ

$\{V(D); D \in \text{デロネ胞体}\}$ は

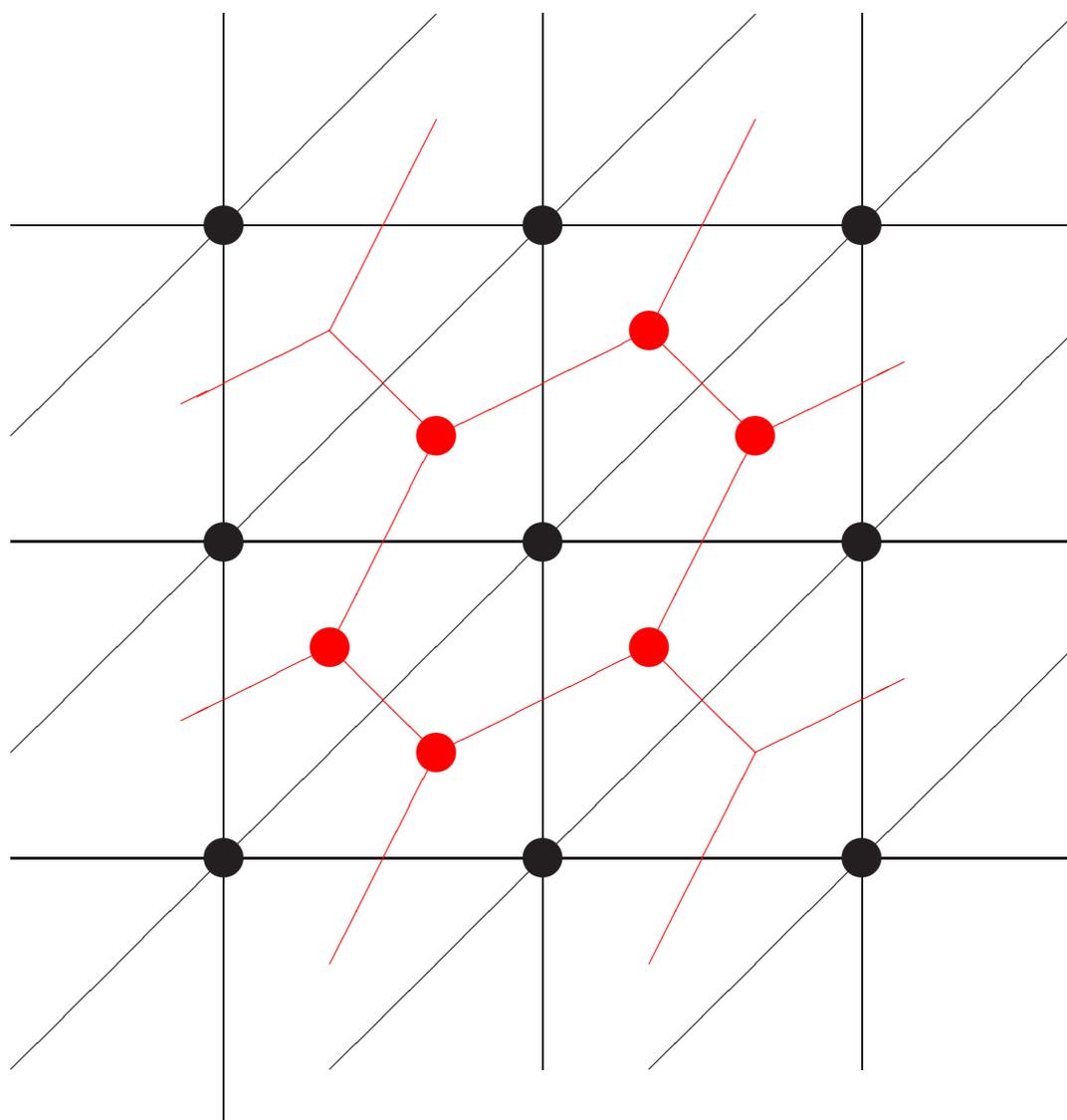
$X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の多面体分割 : ボロノイ分割

$$\overline{V(0)} = \{\lambda \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R};$$

$$\|\lambda\| \leq \|\lambda - q\|, (\forall q \in X)\}$$

$V(0)$ が分かればデロネ分割も分かる .

以下 , $\overline{V(0)}$ を図示する . $\overline{V(0)}$ は鉍物の結晶 .

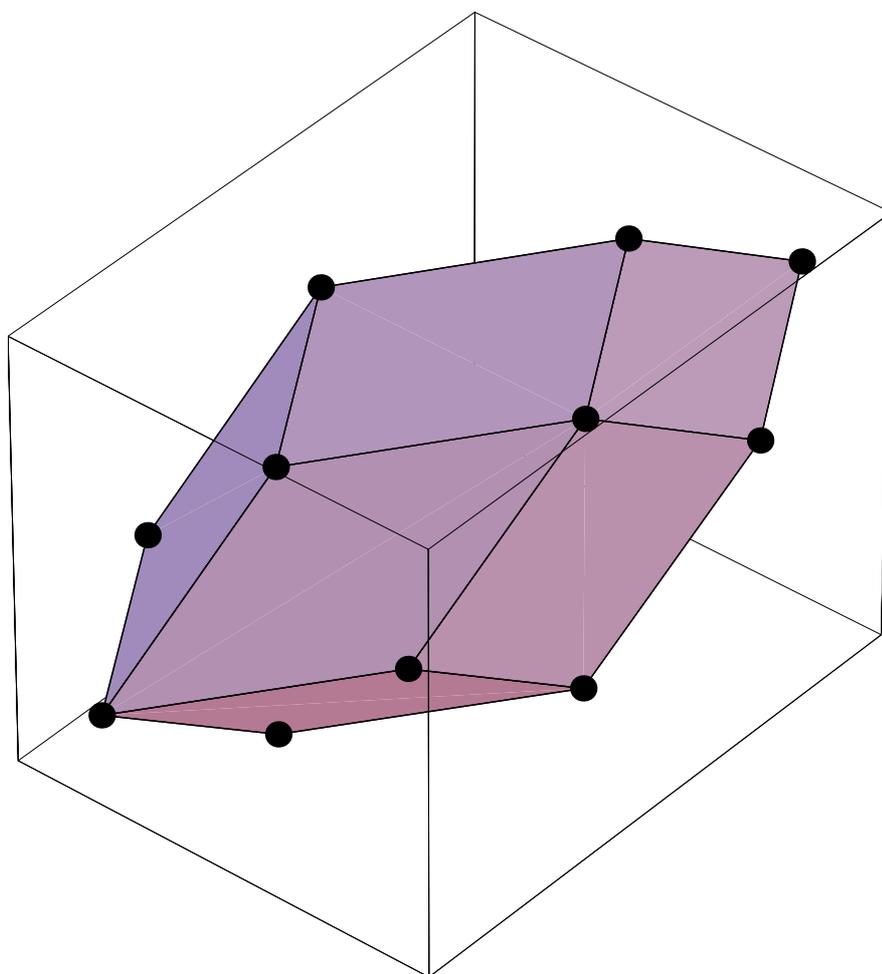


これは雲母の結晶

3次元 $\overline{V(0)}$ は最初に 立方体 (食塩),
六角柱 (方解石), そのつぎは

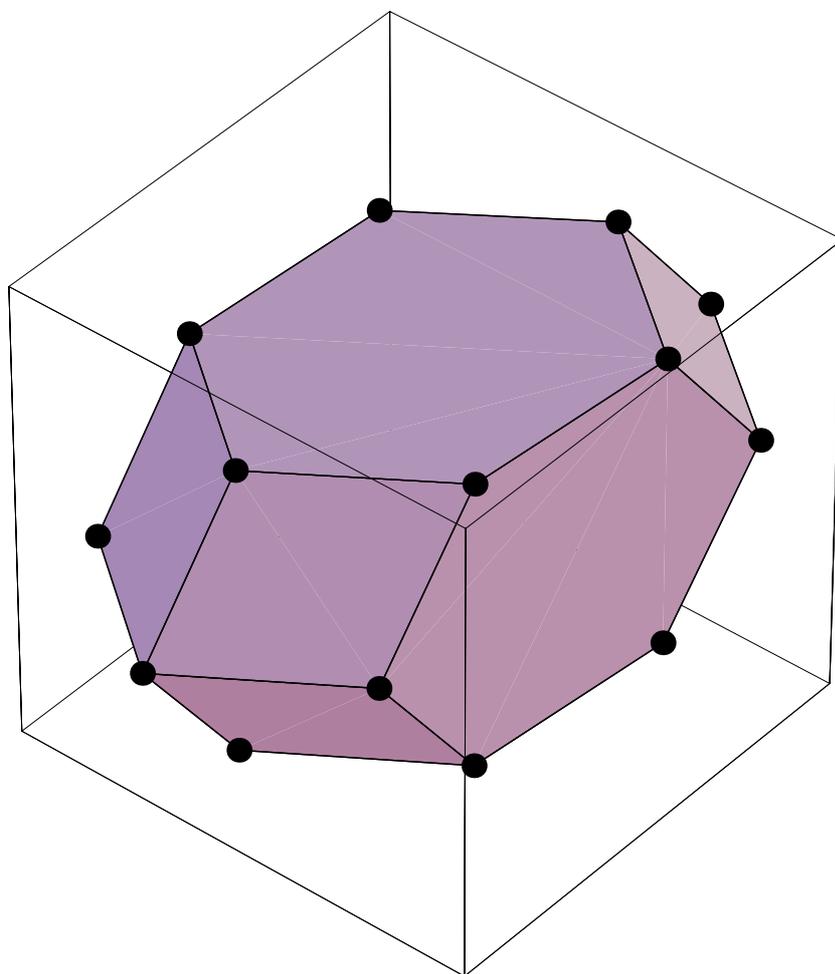
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A Dodecahedron (Garnet)



$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

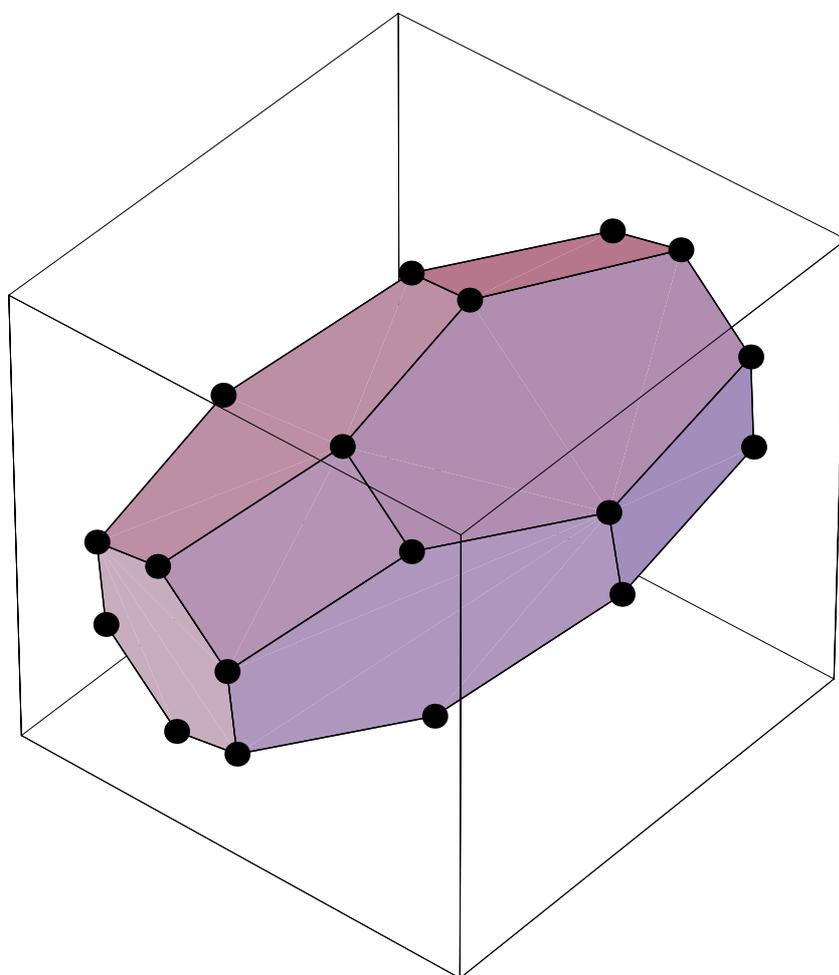
Apophyllite $KCa_4(Si_4O_{10})_2F \cdot 8H_2O$



$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

A Trunc. Octahed. — Zinc Blende ZnS

和名 閃亜鉛鉱



2000年11月末のある日，私はふたりの外国人数学者 W.Wang と A.King と一緒に京都の修学院離宮の庭を歩いておりました．

その庭には比叡の水を引いてせき止めてつくった池があります．その池のほとりにはいくつかの小さな建物があります．

すこし離れたところからその屋根を見ていたときです．King が言いました．

「なにか変な立体が屋根の上についている！」

その細工をよくよく見ると，驚いたことには，『それがこの閃亜鉛鉱の結晶 — ボロノイ胞体でありました』

とそのときは私はそう思ったのですが、その後のKingとのメールのやり取りで、どうもよく分からなくなりました。お互いに自分のイメージで意見が一致したように思っていただけで、ふたりともに確信がゆらいでいます。

どなたか機会がありましたら、確認して教えていただけると、大変ありがたく存じます。

御静聴ありがとうございました。

おわり