

序文

Calabi-Yau 多様体と呼ばれるコンパクト複素 3 次元 (実 6 次元) 多様体は 1990 年代から数学及び物理学の双方から注目を集めていた。今世紀に入り、必ずしもコンパクトとは限らない多様体へも Calabi-Yau 多様体の概念が拡張され、やはり数学、物理双方の興味を引くこととなった。この数学、物理の研究を意見交換する場として企画したのが、当研究集会である。当日は札幌史上始めてという大雪に見舞われ、参加者の一部が到着が遅れるなどのアクシデントがあった。また、参加を取り止めた方もおられたようで、この報告集がそうした方々の参考になることを祈っている。

今回の試みにあたってお世話になった方々への謝辞を述べたい。中村郁教授にはこの研究集会の開催を勤めて頂いた。講演者の方々には年末という何かと多忙な時期に都合をつけて頂いた。渡辺玲子事務官には講演者の事務手続き及び、当日の参加者の会場案内等で御尽力を頂いた。また、当研究集会では基盤研究 (A)(代表者中村郁) から財政的援助を受けた。以上をここに特記して感謝を表明するものである。

2002年2月13日 Newton 研究所にて。松下大介。

目次

1. Quiver varieties and McKay correspondence	
-- 中島啓1
2. Stringy Hodge numbers and p-adic Hodge theory	
-- 伊藤哲史50
3. 局所 GROMOV-WITTEN 不変量と相対 GROMOV-WITTEN 不変量	
-- 高橋宣能63
4. CFT Description of String Theory on G2 manifolds	
-- 菅原祐二68
5. Seiberg-Witten 可積分系と有理楕円曲面の周期	
-- 清水勇二85
6. Calabi-Yau 3-fold 上の Gromov-Witten 不変量	
-- 高橋篤史93
7. 対数的シンプレクティック多様体とパンルベ型方程式	
-- 斎藤政彦105
8. 局所ミラー対称性と 4 次元 N=2 超対称ゲージ理論	
-- 那珂通博126
9. Calabi-Yau threefolds with infinitely many divisorial contractions	
-- 上原北斗133
10. Stirling 理論における K-theory と非可換幾何	
-- 浅川嗣彦143

QUIVER VARIETIES AND MCKAY CORRESPONDENCE
– LECTURES AT HOKKAIDO UNIVERSITY, 2001 DEC. –

HIRAKU NAKAJIMA

LECTURE ANNOUNCEMENT

The theme of lectures is an interplay of representation theory and geometry. We will explain the author's *old* results [N3] in 1995, a geometric construction of affine Lie algebras and their representations. These are constructed by using convolution products on homology groups of so-called *quiver varieties*, which was introduced by the author. But here, we use the language of Hilbert schemes, instead of general quiver varieties, hoping this makes more accessible to readers. Drawbacks are

- (1) We can treat only affine Lie algebras, not general Kac-Moody algebras.
- (2) We can treat only basic representations, not whole irreducible integrable representations.

But the main feature of the theory still survives.

We also discuss on a construction of Kashiwara's crystal structure on the set of irreducible components of lagrangian subvarieties in Hilbert schemes. This construction is due to Kashiwara-Saito [KS].

Our method is an application of more general technique which has been used successfully in the representation theory during the last several decades (see [CG, G]). It is the construction of algebras by the *convolution product*, defined on homology groups (or their variants) of manifolds. For example, Weyl groups and affine Hecke algebras were constructed by convolutions on homology groups and equivariant K -homology groups of flag varieties (Springer, Borho-MacPherson, Lusztig, Ginzburg, Kazhdan-Lusztig, etc). Also upper triangular parts of quantum enveloping algebras and their canonical bases were constructed by convolutions using perverse sheaves on moduli spaces of representations of quivers (Lusztig).

We also discuss a geometric explanation of McKay correspondence given in [N2]. The McKay correspondence is roughly a correspondence between nontrivial irreducible representations of a finite subgroup Γ of $SL_2(\mathbb{C})$ and irreducible components of the exceptional set of the minimal resolution $X \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$. The original correspondence was constructed by identifying both with vertices of the Dynkin diagram corresponding to Γ . In [N2] we described irreducible components in terms of representation theory of Γ , where the minimal resolution was identified with a special quiver variety. Here we use the language of Hilbert schemes also. The explanation turns out to be same as one found afterward independently by Ito-Nakamura [IN].

Acknowledgement. The author is grateful to D. Matsushita who invited me to give talks in the workshop at Hokkaido University, 2001 Dec. The author also thanks to A. Ishii and K. Yoshioka for their comments on the preliminary version of this paper.

REFERENCES

- [CG] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhahser, 1997.
- [G] V. Ginzburg, *Geometric methods in representation theory of Hecke algebras and quantum groups*, in "Representation theories and algebraic geometry" (Montreal, PQ, 1997), 127–183, Kluwer Acad. 1998, (math.AG/9802004).
- [IN] Y. Ito and I. Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, in New trends in algebraic geometry, Proc. European Algebraic Geometry Conf., Warwick 1996, Cambridge University Press, 1999, 151–233.

- [Lecture] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series, **18**, American Mathematical Society, 1999.
- [N1] ———, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 2, 365–416.
- [N2] ———, *Varieties associated with quivers*, in *Representation theory of algebras and related topics*, CMS conference proceedings **19**, AMS (1996) 139–157.
- [N3] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, *Duke Math. J.* **91** (1998), no. 3, 515–560.
- [KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, *Duke Math. J.* **89** (1997), no. 1, 9–36.

CONTENTS

Lecture Announcement	1
References	1
1. Convolution product	3
2. Convolution on Borel-Moore homology	8
3. Hilbert schemes of points	16
4. Quiver varieties (or Γ -Hilbert schemes)	21
5. Affine Lie algebra	33
6. Quiver varieties and affine Lie algebras	35
7. Lagrangian subvarieties and a crystal structure	42
References	48

1. CONVOLUTION PRODUCT

The first two sections are general theory of convolution products.

1.1. General definition. Let X, Y be finite sets. Let $\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)$ the vector space of \mathbb{C} -valued functions on X, Y . If a \mathbb{C} -valued function $K(x, y)$ on $X \times Y$ is given, we can define an operator $\mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ by

$$\mathcal{F}(Y) \ni f(y) \longmapsto (K * f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{y \in Y} K(x, y) f(y) \in \mathcal{F}(X).$$

This is called the *convolution product* of K and f .

Suppose X, Y, Z are finite sets. For given functions $K(x, y)$ on $X \times Y$ and $K'(y, z)$ on $Y \times Z$, we consider the composition of operators given by the convolution products:

$$K * (K' * f)(x) = \sum_{y \in Y} K(x, y) \left(\sum_{z \in Z} K'(y, z) f(z) \right).$$

This is equal to

$$\sum_{z \in Z} \left(\sum_{y \in Y} K(x, y) K'(y, z) \right) f(z).$$

Hence if we define $(K * K')(x, z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{y \in Y} K(x, y) K'(y, z)$, then the composite of operators is given again by the convolution product.

If we take $X = Y$, then the vector space of \mathbb{C} -valued functions on $X \times X$, which we denote by $\mathcal{F}(X \times X)$ is an algebra by the above convolution product $K * K'$. It is clearly associative:

$$(K * K') * K'' = K * (K' * K'').$$

And the unit is given by the characteristic function of the diagonal Δ_X :

$$K * \Delta_X = \Delta_X * K = K, \quad \text{where } \Delta_X(x, x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \neq y. \end{cases}$$

The algebra $\mathcal{F}(X \times X)$ has a natural representation. Namely $\mathcal{F}(X)$ under the convolution product !

Example 1.1 (Trivial). Suppose $\#X = n$. Then $\mathcal{F}(X \times X)$ is the matrix algebra of $n \times n$ matrices. $\mathcal{F}(X)$ is the vector representation.

This example means that we need to consider a subalgebra of $\mathcal{F}(X \times X)$ in order to get an interesting algebra.

1.2. Iwahori-Hecke algebra (due to Iwahori). The Iwahori-Hecke algebra \mathcal{H}_q is a q -analogue of the group ring of the Weyl group W associated with a complex simple Lie algebra \mathfrak{g} . Here q is an indeterminate (parameter). We consider the simplest case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. In this case, the Weyl group W is $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. The Iwahori-Hecke algebra \mathcal{H}_q is the $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -algebra with generator T and the defining relation

$$(T - q)(T + 1) = 0.$$

Note that the relation reduces to $T^2 = 1$ if $q = 1$.

Let $k = \mathbb{F}_q$ be the finite field of q elements. We consider the projective line $\mathbb{P}^1(k)$ of k , the space of 1-dimensional subspaces of k^2 . We consider a natural action of $\text{SL}_2(k)$ on $\mathbb{P}^1(k)$, and the diagonal action on the product $\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k)$. Let $\mathcal{F}(\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k))^{\text{SL}_2(k)}$ be the vector space of \mathbb{C} -valued functions on $\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k)$ which is invariant under the $\text{SL}_2(k)$ -action.

By the following elementary result, $\mathcal{F}(\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k))^{\text{SL}_2(k)}$ is an associative algebra (with unit) by the convolution.

Lemma 1.2. *Suppose a group G acts on X . Let $\mathcal{F}(X \times X)^G$ be the vector space of functions on $X \times X$ invariant under the diagonal action of G . Then it is a subalgebra of $\mathcal{F}(X \times X)$ with respect to multiplication given by the convolution.*

The vector space $\mathcal{F}(X \times X)^G$ has a base given by characteristic functions of G -orbits in $X \times X$. In our case $X = \mathbb{P}^1(k)$, $G = \mathrm{SL}_2(k)$, it is easy to see that the diagonal action has two orbits: the diagonal Δ and the complement of the diagonal $U \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k) \setminus \Delta$. Let us denote the characteristic functions by the same notation: Δ and U . In order to identify the algebra $\mathcal{F}(\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k))^{\mathrm{SL}_2(k)}$, it is enough to compute the convolution products $\Delta * \Delta$, $\Delta * U$, $U * \Delta$, $U * U$. But the first three are trivial. Δ is unit, so $\Delta * \Delta = \Delta$, $\Delta * U = U$, $U * \Delta = U$. Let us compute the last one:

$$\begin{aligned} (U * U)(x, z) &= \sum_{y \in \mathbb{P}^1(k)} U(x, y)U(y, z) = \#\{y \in \mathbb{P}^1(k) \mid y \neq x, y \neq z\} \\ &= \begin{cases} q - 1 & \text{if } x \neq z, \\ q & \text{if } x = z, \end{cases} \end{aligned}$$

where we have used $\#\mathbb{P}^1(k) = q + 1$. Thus we finally get

$$U * U = (q - 1)U + q\Delta,$$

Or, equivalently

$$(U - q\Delta) * (U + \Delta) = 0.$$

After the substitution $U \rightarrow T$, $\Delta \rightarrow 1$, this is the defining relation of the Iwahori-Hecke algebra for \mathfrak{sl}_2 .

This example can be generalized to the case of arbitrary Iwahori-Hecke algebra associated with a complex simple Lie algebra \mathfrak{g} , by considering the flag variety G/B instead of $\mathbb{P}^1(k)$.

1.3. The quantum universal enveloping algebra $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ (due to Beilinson-Lusztig-MacPherson). Consider the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. It is the complex Lie algebra generated by

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

with the defining relation

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = 2f, \quad [e, f] = h.$$

The universal enveloping algebra $\mathbf{U}(\mathfrak{sl}_2)$ is the associative algebra with generators e, f, h and the same defining relation, where $[x, y]$ is understood as $xy - yx$. Geometrically $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ is the space of left invariant vector fields on the Lie group $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, and $\mathbf{U}(\mathfrak{sl}_2)$ is the ring of invariant differential operators on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. (A vector field is a 1st order differential operator.)

Let us define a q -analogue of $\mathbf{U}(\mathfrak{sl}_2)$, called the quantum enveloping algebra of Drinfeld-Jimbo, attached to \mathfrak{sl}_2 . Let v be an indeterminate. (We will use the finite field \mathbb{F}_q again, and the parameter v will be given by \sqrt{q} .)

Let us introduce v -integers:

$$[n]_v = \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}}.$$

Let $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$ be the associative $\mathbb{C}(v)$ -algebra with generators e, f, k^\pm and the defining relations

$$(1.3) \quad \begin{aligned} kk^{-1} &= k^{-1}k = 1, \\ kek^{-1} &= v^2e, \quad kfk^{-1} = v^{-2}f, \\ ef - fe &= \frac{k - k^{-1}}{v - v^{-1}}. \end{aligned}$$

Heuristically we can think $k = v^h$. If we make $v \rightarrow 1$, then we recover the defining relations of \mathfrak{sl}_2 .

The representation theory (finite dimensional representations) of $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$ is known to be the same as that of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. In particular, we have the unique irreducible representation of dimension $N + 1$ for each $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. It is realized on the space of polynomials in x with degree $\leq N$ as

$$\begin{aligned} kx^d &\stackrel{\text{def.}}{=} v^{N-2d}x^d, & ex^d &\stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} [N - d + 1]_v x^{d-1} & \text{if } d > 0, \\ 0 & \text{if } d = 0, \end{cases} \\ fx^d &\stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} [d + 1]_v x^{d+1} & \text{if } d < N, \\ 0 & \text{if } d = N. \end{cases} \end{aligned}$$

(The defining relation (1.3) follows from the identity $[N - d]_v[d + 1]_v - [d]_v[N - d + 1]_v = [N - 2d]_v$.)

We give a geometric realization of $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$, which is nothing to do with the ring of differential operators on $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. In fact, the Lie group $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ is absent in the following construction.

Let $k = \mathbb{F}_q$ be the finite field of q elements. Set $v = \sqrt{q}$. Fix a positive integer N . Let \mathcal{G} be the Grassmann variety of all subspaces of k^N . It is a disjoint union of \mathcal{G}_d with $0 \leq d \leq N$, where \mathcal{G}_d is the Grassmann variety of d -dimensional subspace of k^N . We consider the action of $\text{GL}_N(k)$ on \mathcal{G} and the diagonal action on $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Then the vector space $\mathcal{F}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})^{\text{GL}_N(k)}$ of \mathbb{C} -valued $\text{GL}_N(k)$ -invariant functions on $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ is an associative algebra by the convolution.

It has a base given by the characteristic functions of orbits.

Lemma 1.4. *The $\text{GL}_n(k)$ -orbits in $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ are parametrized by 2×2 -matrices*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

with entries $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfying $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = N$. The corresponding orbit is the set of pairs (V, V') of subspaces of k^N with

$$\begin{aligned} \dim(V \cap V') &= a_{11}, & \dim(V/V \cap V') &= a_{12}, \\ \dim(V'/V \cap V') &= a_{21}, & \dim(k^N/V + V') &= a_{22}. \end{aligned}$$

Let Δ_d denote the diagonal in $\mathcal{G}_d \times \mathcal{G}_d$. The corresponding matrix is $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & N - d \end{bmatrix}$. Let e_d be the orbit

$$\{(V, V') \mid V \subset V', \dim V = d - 1, \dim V' = d\}.$$

The corresponding matrix is $\begin{bmatrix} d - 1 & 0 \\ 1 & N - d \end{bmatrix}$. Exchanging the role of V and V' , we also define f_d :

$$f_d = \{(V, V') \mid V \supset V', \dim V = d + 1, \dim V' = d\} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} d & 0 \\ 1 & N - d - 1 \end{bmatrix}.$$

Let us denote the characteristic functions by the same symbol as orbits. Let $\tilde{e} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{d=0}^N e_d$, $\tilde{f} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{d=0}^N f_d$. We compute the convolution products of these functions. The followings are obvious:

$$\Delta_d * \Delta_{d'} = \delta_{dd'} \Delta_d, \quad \Delta_d * \tilde{e} = \tilde{e} * \Delta_{d+1}, \quad \Delta_d * \tilde{f} = \tilde{f} * \Delta_{d-1}.$$

Let us compute the commutator $[\tilde{e}, \tilde{f}] = \tilde{e} * \tilde{f} - \tilde{f} * \tilde{e}$. We have

$$\begin{aligned} (\tilde{e} * \tilde{f})(V, V') &= \#\{V'' \subset k^N \mid V \subset V'' \supset V', \dim V'' = \dim V + 1 = \dim V' + 1\}, \\ (\tilde{f} * \tilde{e})(V, V') &= \#\{V''' \subset k^N \mid V \supset V''' \subset V', \dim V''' = \dim V - 1 = \dim V' - 1\}. \end{aligned}$$

In particular, the both are 0 unless $\dim V = \dim V'$ and $\dim V \cap V' = \dim V - 1$ (or equivalently $\dim V + V' = \dim V + 1$). Moreover, if $V \neq V'$, then we must have $V'' = V + V'$, $V''' = V \cap V'$. This means that the both functions take values 1 on this pair (V, V') . The only remaining case is $V = V'$. We have

$$\begin{aligned} (\tilde{e} * \tilde{f})(V, V) &= \#\{V'' \subset k^N \mid V \subset V'', \dim V'' = \dim V + 1\} = \#\mathbb{P}(k^N/V), \\ (\tilde{f} * \tilde{e})(V, V) &= \#\{V''' \subset k^N \mid V \supset V''', \dim V''' = \dim V - 1\} = \#\mathbb{P}(V^*), \end{aligned}$$

where $\mathbb{P}(\)$ is the projective space of 1-dimensional subspace of a given vector space. We have

$$\#\mathbb{P}(k^N/V) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-\dim V-1}, \quad \#\mathbb{P}(V^*) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{\dim V-1}.$$

Thus we have

$$\begin{aligned} v^{1-N}(\tilde{e} * \tilde{f})(V, V) - v^{1-N}(\tilde{f} * \tilde{e})(V, V) &= v^{1-N} (v^{2\dim V} + v^{2\dim V+2} + \cdots + v^{2N-2\dim V-2}) \\ &= v^{2\dim V-N+1} + v^{2\dim V-N-1} + \cdots + v^{N-2\dim V-1} = [N - 2\dim V]_v. \end{aligned}$$

We define

$$e \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_d v^{d-N} e_d, \quad f \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_d v^{-d} f_d,$$

and also define

$$k = \sum_d v^{N-2d} \Delta_d.$$

Then the above computation means that e, f, k satisfy the defining relation (1.3) with parameter $v = \sqrt{q}$. Thus we have an algebra homomorphism

$$\Phi: \mathbf{U}_{v=\sqrt{q}}(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})^{\text{GL}_N(k)}.$$

This cannot be an isomorphism since $\dim \mathcal{F}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})^{\text{GL}_N(k)} < \infty$, while $\dim \mathbf{U}_{v=\sqrt{q}}(\mathfrak{sl}_2) = \infty$. However one can show that

Proposition 1.5. *The homomorphism Φ is surjective. So $\mathcal{F}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})^{\text{GL}_N(k)}$ is a quotient of $\mathbf{U}_{v=\sqrt{q}}(\mathfrak{sl}_2)$ divided by a two-sided ideal I_N .*

Consider the constant function c_d on \mathcal{G}_d . Then we have

$$\begin{aligned}
 k * c_d &= v^{N-2d} c_d, \\
 (e * c_d)(V) &= v^{d-N} \#\{V' \mid V \subset V', \dim V + 1 = \dim V' = d\} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{if } \dim V \neq d - 1, \\ v^{d-N} \#\mathbb{P}(k^N/V) & \text{otherwise,} \end{cases} \\
 &= [N - d + 1]_v c_{d-1}(V) \\
 (f * c_d)(V) &= v^{-d} \#\{V' \mid V \supset V', \dim V - 1 = \dim V' = d\} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{if } \dim V \neq d + 1, \\ v^{-d} \#\mathbb{P}(V^*) & \text{otherwise,} \end{cases} \\
 &= [d + 1]_v c_{d+1}(V).
 \end{aligned}$$

These equations mean that the representation $\mathcal{F}(\mathcal{G})^{\mathrm{GL}_N(k)}$ of $\mathcal{F}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})^{\mathrm{GL}_N(k)}$ is isomorphic to the $(N + 1)$ -dimensional irreducible representation of $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$ via the homomorphism Φ .

This example can be generalized to the quantized universal enveloping algebra $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_n)$ by considering the n -step partial flag varieties

$$\{0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = k^N\}$$

instead of the Grassmann variety. Here the dimensions of V_i is not fixed as above. So the above variety is a disjoint union of varieties of various dimensions.

However, a generalization of this example to $\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ for arbitrary \mathfrak{g} is still open, even for \mathfrak{g} of classical type.

2. CONVOLUTION ON BOREL-MOORE HOMOLOGY

2.1. Convolution on cohomology. We can replace finite sets by the Euclidean space \mathbb{R}^m , the summation over the finite set by the integration in the definition of the convolution product. Namely, if $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ with coordinates (x_1, \dots, x_m) , (y_1, \dots, y_n) , then a given function $K(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ on $X \times Y$ defines an operator from the space of functions on Y to the space of functions X by the formula

$$(K * f)(x_1, \dots, x_m) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

The Fourier transform is an example of an operator given by the convolution. Strictly speaking, we must impose some restrictions on functions to have convergence of the integration.

We can further replace \mathbb{R}^m , \mathbb{R}^n by oriented C^∞ -manifolds and functions by differential forms on the manifolds. Let M and N be oriented C^∞ -manifolds. Let $A^*(M)$, $A^*(N)$ be the vector space of all (complex valued) differential form on M and N . If a differential form K on $M \times N$ is given, we want to define an operator $A^*(N) \rightarrow A^*(M)$ by

$$(2.1) \quad A^*(N) \ni \alpha \longmapsto K * \alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \int_N K \wedge \alpha \in A^*(M).$$

More precisely, $K \wedge \alpha$ is the exterior product of K and the pullback of α to $M \times N$, and \int_N is the integration of $K \wedge \alpha$ over each $\{x\} \times N$. If M and N are compact, the integration is well-defined. We assume this condition for a moment. However it will be too restrictive for our later purpose.

The composite of this convolution is again a convolution of this type: If K (resp. K') is a differential form on $M \times N$ (resp. $N \times O$) with the above condition, then we have

$$K * (K' * \alpha) = \int_O \left(\int_N K \wedge K' \right) \wedge \alpha.$$

The space $A^*(M)$ of differential forms is too big. We work on the de Rham cohomology group $H^*(M)$, which is by definition, the space of closed forms modulo the space of exact forms:

$$H^k(M) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\{\alpha \in A^k(M) \mid d\alpha = 0\}}{\{d\beta \in A^k(M) \mid \beta \in A^{k-1}(M)\}}.$$

(We always consider the cohomology group with complex coefficients. So we do not write $H^k(M, \mathbb{C})$. Moreover, all results which we will use on cohomology can be found in a standard textbook, e.g., [3].)

If K is a closed p -form on $M \times N$, then we have

$$d_M \left(\int_N K \wedge \alpha \right) = \int_N d_{M \times N} (K \wedge \alpha) = \pm \int_N K \wedge d_N \alpha,$$

where we put the suffix to the exterior differential operator in order to emphasize the manifold where the relevant differential form is defined. In particular, the convolution product maps closed (resp. exact) forms to closed (resp. exact) forms. Therefore, we have a well-defined operator

$$(2.2) \quad K * \cdot : H^*(N) \rightarrow H^*(M).$$

Let us consider the degree more precisely. If α is a k -form, then $K \wedge \alpha$ is $(k + p)$ -form, so $\int_N K \wedge \alpha$ is $(k + p - \dim N)$ -form.

Moreover, if K is written as $K = d_{M \times N} F$, then the operator on the de Rham cohomology group is 0 as

$$\int_N K \wedge \alpha = \int_N (d_{M \times N} F) \wedge \alpha = \int_N d_{M \times N} (F \wedge \alpha) = 0,$$

where we have used the Stokes theorem in the last equality. This means that the operator (2.2) depends only on the class in

$$[K] \in H^*(M \times N).$$

Take $M = N$. Then the cohomology group $H^*(M \times M)$ has a structure of an associative algebra by the convolution.

Example 2.3. Suppose that M is a compact oriented C^∞ -manifold as above. By the Künneth isomorphism $H^*(M \times M) \cong H^*(M) \otimes H^*(M)$, together with the Poincaré duality $(H^k(M))^* \cong H^{\dim M - k}(M)$, the algebra $H^*(M \times M)$ is isomorphic to the matrix algebra $\text{End}(H^*(M))$.

2.2. Borel-Moore homology. As illustrated by above example, the condition that M is compact is restrictive, and we do not get an interesting algebra by the convolution product on cohomology groups.

If we carefully see the definition (2.1), we find that it is enough to impose the following:

the restriction of the projection $M \times N \rightarrow M$ to the support of K is proper.

Recall that a continuous map between topological spaces is *proper*, if the inverse image of a compact set is again compact. Then the above integration is convergent. Thus the operator is well-defined.

In our later examples, we have the following situation: Let Z be a fixed closed subset $Z \subset M \times N$ such that

the restriction of the projection $M \times N \rightarrow M$ to Z is proper.

Then we consider a variant of the de Rham cohomology group

$$\frac{\{K \mid d_{M \times N} K = 0, \text{ the support of } K \text{ is contained in a small neighbourhood of } Z\}}{\{d_{M \times N} F \mid \text{ the support of } F \text{ is contained in a small neighbourhood of } Z\}}.$$

Then the operator $H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ is well-defined. Namely the integration is convergent, and the result is independent of the choice of the representative in the above coset.

The above definition is a little bit naive. A rigorous definition is given by the relative cohomology group

$$H^*(M \times N, M \times N \setminus Z),$$

which is, by definition, the cohomology groups of the following complex:

$$\cdots \rightarrow A^k(M \times N) \oplus A^{k-1}(M \times N \setminus Z) \xrightarrow{\begin{bmatrix} d & 0 \\ j^* & -d \end{bmatrix}} A^{k+1}(M \times N) \oplus A^k(M \times N \setminus Z) \rightarrow \cdots,$$

where $j: M \times N \setminus Z \rightarrow M \times N$ is the inclusion. For most of our purpose, the above naive definition is sufficient.

For the study of the convolution product, it is more natural to consider the above cohomology group than the usual cohomology group. The above is (a variant of) the so-called Borel-Moore homology group. We give the definition and list its properties.

When X is a topological space which can be embedded as a closed subset in an oriented C^∞ -manifold M , we define

$$H_k(X) \stackrel{\text{def.}}{=} H^{\dim M - k}(M, M \setminus X).$$

The relative cohomology group is defined as above. (**NB:** We will never use the ordinary homology group. So there is no confusion in the notation.)

We must check that the right hand side is independent of the choice of M . Let us study it in an example.

$$H_k(\mathbb{R}^n) = H^{n-k}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq n, \\ \mathbb{C} & \text{if } k = n. \end{cases}$$

In particular, our Borel-Moore homology is different from the usual homology. Consider the embedding \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^{n+1} as a linear subspace. So we might define as

$$H_k(\mathbb{R}^n) = H^{n+1-k}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n).$$

Let us check that this gives us the same answer. By the Künneth theorem, the above is equal to

$$\bigoplus_{p+q=n+1-k} H^p(\mathbb{R}^n) \otimes H^q(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

So the assertion follows from

Lemma 2.4.

$$H^q(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq 1, \\ \mathbb{C} & \text{if } q = 1. \end{cases}$$

Since the proof is so simple. We give it.

Proof. Obviously the cohomology group vanishes unless $q = 0, 1$. Consider the case $q = 0$ first. Let $j: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ be the inclusion. By the above definition of the relative cohomology group, a class is represented by a closed form α such that $j^*\alpha = 0$. A closed 0-form on \mathbb{R} is nothing but a constant function. And $j^*\alpha = 0$ means that the constant must be 0.

Next consider the case $q = 1$. A 1-form α on \mathbb{R} is written as

$$\alpha = f(x)dx.$$

By the definition of the relative cohomology group, $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ is represented by a pair $(f(x)dx, g(x))$ of 1-form on \mathbb{R} and a function on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $dg = j^*f(x)dx$, i.e., $g'(x) = f(x)$ for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. If there exists a function $F(x)$ on \mathbb{R} such that $F'(x) = f(x)$, $j^*F(x) = g(x)$, then the class $(f(x)dx, g(x))$ is zero. We define a map

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni (f(x)dx, g(x)) \longmapsto \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx - (g(\varepsilon) - g(-\varepsilon)) \in \mathbb{C},$$

where ε is a positive real number. It is independent of the choice of the representative of the class. Namely, if $F'(x) = f(x)$, $j^*F(x) = g(x)$ for some $F(x)$, then the above is 0. Moreover, since $g'(x) = f(x)$ outside $\{0\}$, the above is independent of ε .

Obviously the map is linear and surjective. Let us show that it is injective. Define

$$F(x) = \int_{-\varepsilon}^x f(t)dt + g(-\varepsilon).$$

It defines a function on \mathbb{R} and satisfies $dF = f(x)dx$. It satisfies $F(-\varepsilon) = g(-\varepsilon)$. If $(f(x)dx, g(x))$ is contained in the kernel of the above homomorphism, then it means that $F(\varepsilon) = g(\varepsilon)$. Then $(f(x)dx, g(x)) = dF$, so it is 0 as a cohomology class. \square

Note that we can take a representative $(f(x)dx, g(x))$ so that its support is contained in a given arbitrary small neighbourhood of 0. In this sense, we recover the naive definition.

Our canonical isomorphism

$$H^{n-k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{n+1-k}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

is given by

$$[\alpha] \longmapsto [\alpha \wedge f(x_{n+1})dx_{n+1}, \alpha \wedge g(x_{n+1})] = [\alpha] \wedge [f(x_{n+1})dx_{n+1}, g(x_{n+1})],$$

where $(f(x)dx, g)$ is a class such that

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx - (g(\varepsilon) - g(-\varepsilon)) = 1.$$

This $[f(x_{n+1})dx_{n+1}, g(x_{n+1})]$ is an example of the *Thom class*.

Theorem 2.5. *If E is an oriented C^∞ vector bundle over a C^∞ -manifold M of rank r , then there exists a unique class $\Phi \in H^r(E, E \setminus M)$ such that*

$$\int_{E_x} \Phi = 1$$

for each fiber E_x of E . Here M is embedded in E as the 0-section.

This class is called the *Thom class* of E . And as above, the support of Φ is contained in arbitrary small neighbourhood of M .

If S is an oriented closed submanifold of M , then its tubular neighbourhood is diffeomorphic to the normal bundle $N_{S/M}$. We can consider the Thom class of $N_{S/M}$ as a class of $H^{\text{codim } S}(M, M \setminus S)$. If X is a closed subset of S , then the homomorphism

$$H^{\dim S - k}(S, S \setminus X) \ni \alpha \mapsto \alpha \wedge \Phi \in H^{\dim M - k}(M, M \setminus X)$$

is an isomorphism. This means that two definitions of the Borel-Moore homology group $H_k(X)$, one using S and the other using M , are canonically isomorphic. Based on this result, one can prove

Proposition 2.6. *The Borel-Moore homology group $H_k(X) = H^{\dim M - k}(M, M \setminus X)$ is independent of the choice of the ambient manifold M .*

We list up properties of the Borel-Moore homology, which we will use later.

(Fundamental class of manifolds) Suppose M is a connected oriented C^∞ manifold. Then

$$H_k(M) = H^{\dim M - k}(M).$$

If $k = \dim M$, then a constant function on M with value 1 is a generator of $H^0(M)$. We call the corresponding element in $H_{\dim M}(M)$ the *fundamental class* of M , and denote it by $[M]$. Note that it is always nonzero. If M is not necessarily connected, its fundamental class is defined as a sum of the fundamental classes of connected components.

If S is an oriented submanifold of M , then the fundamental class $[S]$ is identified with the Thom class of the normal bundle under the two realization of the Borel-Moore homology:

$$\begin{array}{ccc} H^0(S) \ni 1 & \longleftrightarrow & \Phi \in H^{\text{codim } S}(M, M \setminus S) \\ \parallel & \updownarrow & \parallel \\ H_{\dim S}(S) \ni [S] & \longleftarrow & [S] \in H_{\dim S}(S) \end{array}$$

(Pull-back with support) Suppose that M and N are oriented C^∞ manifolds with $\dim M = m$, $\dim N = n$, and $f: M \rightarrow N$ is a smooth map. If $X \subset M$, $Y \subset N$ are closed subsets with $f^{-1}(Y) \subset X$, then we have a homomorphism

$$f^*: H_k(Y) \rightarrow H_{k-n+m}(X)$$

as a composite

$$H^{n-k}(N, N \setminus Y) \xrightarrow{f^*} H^{n-k}(M, M \setminus f^{-1}(Y)) \rightarrow H^{m-(k-n+m)}(M, M \setminus X).$$

This map depends on manifolds M , N , f . A continuous map $\bar{f}: X \rightarrow Y$ does *not* necessarily induce a homomorphism $\bar{f}^*: H_k(Y) \rightarrow H_{k-n+m}(X)$.

In particular, we consider the following situation:

- X is an open subset of Y ,
- Y is a closed subset of an oriented C^∞ -manifold N .

Then we take $M = N \setminus (Y \setminus X)$, which is an open submanifold of N containing X as a closed subset. Then we have a homomorphism

$$H_k(Y) \rightarrow H_k(X).$$

(Pushforward) (See also Remark 2.11 below) Suppose $f: X \rightarrow Y$ is a *proper* continuous map. Then we have a homomorphism

$$f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y).$$

This is defined as follows. Suppose that X (resp. Y) is embedded in $(0, 1)^m$ (resp. \mathbb{R}^n) as a closed subset. Then the composition

$$X \xrightarrow{f \times i} Y \times (0, 1)^m \rightarrow Y \times [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

is a closed embedding. The properness of f is used to show that the image is closed. Thus

$$H_k(X) = H^{m+n-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus X).$$

We have a map

$$H^{m+n-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus X) \rightarrow H^{m+n-k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus Y \times [0, 1]^m),$$

i.e.,

$$H_k(X) \rightarrow H_k(Y \times [0, 1]^m).$$

By the Künneth theorem, we have $H_k(Y \times [0, 1]^m) = \bigoplus_{p+q=k} H_p(Y) \otimes H_q([0, 1]^m)$. But it is easy to see

$$H_q([0, 1]^m) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq 0, \\ \mathbb{C} & \text{if } q = 0. \end{cases}$$

The isomorphism for $q = 0$ is given by

$$H_0([0, 1]^m) = H^m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus [0, 1]^m) \ni [\alpha, \beta] \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \alpha \in \mathbb{C},$$

where we suppose α, β have support contained in a neighbourhood of $[0, 1]^m$ as before.

Thus we have a homomorphism

$$f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y).$$

Exercise 2.7. Show that f_* is independent of various choices. Show that $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

If X is compact, then the projection $P: X \rightarrow \text{point}$ is proper. Thus we have a map $P_*: H_0(X) \rightarrow H_0(\text{point})$. But $H_0(\text{point})$ is isomorphic to \mathbb{C} , where the constant function on point with value 1 corresponds to 1 in \mathbb{C} . This map is identified with

$$H_0(X) = H^{\dim M}(M, M \setminus X) \ni [\alpha, \beta] \mapsto \int_M \alpha \in \mathbb{C},$$

where we take the representative $[\alpha, \beta]$ so that its support is contained in a small neighbourhood of X .

Exercise 2.8. Check the above assertion from the definition.

(Long exact sequence) Let U be an open set of X , and $Y = X \setminus U$ be the complement. Let $i: Y \rightarrow X$, $j: U \rightarrow X$ be inclusions. We have a long exact sequence

$$\cdots \rightarrow H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j^*} H_k(U) \xrightarrow{\delta^*} H_{k-1}(Y) \rightarrow \cdots,$$

where δ^* is the boundary homomorphism.

(Intersection with support) Suppose X, Y are closed subsets of an oriented C^∞ manifold M with $\dim M = m$. Then we can define a cap product (in M)

$$\cap: H_k(X) \otimes H_l(Y) \rightarrow H_{k+l-m}(X \cap Y)$$

from a cup product in the relative cohomology:

$$\cup: H^k(M, M \setminus X) \otimes H^l(M, M \setminus Y) \rightarrow H^{k+l}(M, M \setminus (X \cap Y)).$$

Note that this depends on the ambient space M .

Exercise 2.9. Suppose that X and Y are oriented submanifolds of M . Assume that they intersect transversally. Namely, $T_x X + T_x Y = T_x M$ for all $x \in X \cap Y$. Then $X \cap Y$ is an oriented manifold with dimension $\dim X + \dim Y - \dim M$, where the orientation is induced from that of X and Y . We have the following formula:

$$[X] \cap [Y] = [X \cap Y]$$

in $H_{\dim X + \dim Y - \dim M}(X \cap Y)$.

(Self-intersection and Euler class) We suppose X, Y are oriented submanifolds of M . We want to compute the intersection product $[X] \cap [Y]$ without assuming the intersection is transverse. The most extreme case is when $X = Y$. In this case $[X] \cap [X]$ is called *self-intersection*. Let $\Phi \in H^{\text{codim } X}(M, M \setminus X)$ be the Thom class of the normal bundle. Let $\vartheta: H^*(M, M \setminus X) \rightarrow H^*(M)$ be the natural homomorphism, and let $i: X \rightarrow M$ be the inclusion. Then it is easy to check that $[X] \cap [X]$ is identified with $i^* \vartheta \Phi$ under the isomorphism $H^{\text{codim } X}(X) \cong H_{\dim X - \text{codim } X}(X)$. In general, the pullback of the Thom class of an oriented vector bundle E is called the *Euler class* of E . Thus $i^* \vartheta \Phi$ is the Euler class of the normal bundle.

If i' is a small perturbation of $i: X \rightarrow M$, then i and i' is homotopic, so the class $i^* \vartheta \Phi$ is equal to $i'^* \vartheta \Phi$. Using the above argument backwards, we find

$$i'^* \vartheta \Phi = j_*([i'X] \cap [X]),$$

where $j: i'X \cap X \rightarrow X$ is the inclusion. We can choose i' so that $i'X$ and X is transversal. Then the right hand side is $j_*([i'X \cap X])$. Combining all these discussions, we get

$$[X] \cap [X] = [i'X \cap X].$$

(Fundamental class of subvarieties) Let M be a complex manifold, and $X \subset M$ be a closed subvariety (not necessarily irreducible) with $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

Proposition 2.10. *We have $H_k(X) = 0$ for $k > 2n$ and $H_{2n}(X)$ has a base corresponding to irreducible components of X of dimension n .*

Proof. If X is nonsingular, this is obvious from $H_k(X) = H^{2n-k}(X)$. We prove the assertion for general case by induction on $\dim_{\mathbb{C}} X$. The case $\dim_{\mathbb{C}} X = 0$ is obvious. We have a closed subvariety $Z \subset X$ with $\dim Z < n$ such that $X \setminus Z$ is nonsingular, of pure dimension n . We consider the long exact sequence

$$\cdots \rightarrow H_k(Z) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j^*} H_k(X \setminus Z) \xrightarrow{\delta^*} H_{k-1}(Z) \rightarrow \cdots$$

By the induction hypothesis, $H_k(Z) = 0$ if $k > 2(n-1)$. And we have $H_k(X \setminus Z) = 0$ if $k > 2n$, and $H_{2n}(X \setminus Z)$ has a base given by fundamental classes of its connected components. Since the connected components of $X \setminus Z$ are the irreducible components of X with dimension n , we get the assertion. \square

If X is irreducible, we denote by $[X]$ the class in $H_{2n}(X)$ given by the above lemma, and call it the *fundamental class*. If X is not irreducible, its fundamental class is the sum of fundamental classes of irreducible components of dimension n .

Remark 2.11. It is known that our Borel-Moore homology group $H_k(X)$ is isomorphic to homology group of infinite singular chains with locally finite support. More precisely, a formal *infinite* singular chains $\sum_i a_i \sigma_i$, where σ_i is a simplex, $a_i \in \mathbb{C}$, is called *locally finite*, if for any compact subset $D \subset X$ there are only finitely many nonzero a_i such that $D \cap \text{Supp } \sigma_i \neq \emptyset$. One can define the boundary operator exactly as in the usual *finite* singular chains. It preserves the locally finiteness condition, so one can define the associated homology group. It is canonically isomorphic to our $H_k(X)$.

Moreover, it is clear that a *proper* continuous map $f: X \rightarrow Y$ induces a homomorphism $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ exactly as in the case of usual homology groups, since the locally finiteness condition is preserved under the proper map f .

2.3. Lagrangian construction of the Weyl group (due to Ginzburg). Let M_1, M_2, M_3 be oriented C^∞ manifolds with $\dim M_i = m_i$. Let $Z_{12} \subset M_1 \times M_2, Z_{23} \subset M_2 \times M_3$ be closed subsets satisfying

the restrictions of the projections $M_1 \times M_2 \rightarrow M_1, M_2 \times M_3 \rightarrow M_2$ to Z_{12}, Z_{23} are proper.

Let $p_{12}: M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow M_1 \times M_2$, etc, be the projection. Then we can define the convolution product by

$$\begin{aligned} H_k(Z_{12}) \otimes H_l(Z_{23}) \ni K \otimes K' \\ \longmapsto p_{13*}(p_{12}^*K \cap p_{23}^*K') \in H_{k+l-m_2}(p_{13}(Z_{12} \times M_3 \cap M_1 \times Z_{23})). \end{aligned}$$

More precisely, we take the cup product of $p_{12}^*K \in H_{k+m_3}(Z_{12} \times M_3)$ and $p_{23}^*K' \in H_{l+m_1}(M_1 \times Z_{23})$ in $M_1 \times M_2 \times M_3$. Then the restriction of p_{13} to $Z_{12} \times M_3 \cap M_1 \times Z_{23}$ is proper by the above condition. Thus the pushforward is well-defined. Note that $p_{13}(Z_{12} \times M_3 \cap M_1 \times Z_{23})$ is a closed subset of $M_1 \times M_3$.

Let $M = T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, the cotangent bundle of the complex projective line. It is the set of pairs

$$T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(V, \xi) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \text{End}(\mathbb{C}^2) \mid \xi(V) = 0, \xi(\mathbb{C}^2) \subset V\}.$$

Note that ξ is nilpotent by the condition. We define the Steinberg variety

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{(V_1, V_2, \xi) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \text{End}(\mathbb{C}^2) \mid (V_1, \xi), (V_2, \xi) \in T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}.$$

It is a closed subvariety in $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. If $\xi \neq 0$, then $V_1 = V_2 = \text{Ker } \xi$. Thus it is contained in the diagonal of $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Thus Z is a union of two 2-dimensional complex submanifolds

$$\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \cup (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})),$$

where $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ is contained in $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ as $\xi = 0$ (0-section). Thus

$$H_4(Z) = \mathbb{C}[\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] \oplus \mathbb{C}[\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})].$$

By the definition, the map $Z \rightarrow T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ is proper. Hence we have the convolution product on $H_4(Z)$:

$$H_4(Z) \times H_4(Z) \ni (K, K') \longmapsto p_{13*}(p_{12}^*K \cap p_{23}^*K') \in H_4(Z),$$

where we should notice $p_{13}(Z \times M \cap M \times Z) = Z$.

Theorem 2.12. $H_4(Z)$ is isomorphic to the group ring $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ of the Weyl group $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ of \mathfrak{sl}_2 .

Proof. Let us compute the convolution product

$$\begin{aligned} [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] * [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}], \quad [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] * [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})], \\ [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] * [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}], \quad [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] * [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})]. \end{aligned}$$

The first three are easy. The intersections are transversal, and we easily get

$$\begin{aligned} [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] * [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] &= [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}], \\ [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] * [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] &= [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] * [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}] = [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})]. \end{aligned}$$

Namely $[\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}]$ is the unit. This holds in general.

Let us consider the last one. We have

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] * [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] &= p_{13*}([\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \times ([\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \cap [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]) \times [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]) \\ &= P_*([\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \cap [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]) [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})], \end{aligned}$$

where $[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \cap [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]$ is the intersection product in $M_2 = T^*(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, and $P: \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{point}$ is the projection to the single point. So $P_*([\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \cap [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})])$ is an element in $H_0(\text{point})$. But it is considered as a real number by the isomorphism $H_0(\text{point}) \cong \mathbb{C}$.

Exercise 2.13. Compute the self-intersection $[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]$ in $T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \cap [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] = -2[\text{point}],$$

where point is the fundamental class of a point in $[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]$. (It is independent of the choice of points.)

By this exercise, $T \stackrel{\text{def.}}{=} [\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})] + [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}]$ satisfies $T^2 = [\Delta_{T^*\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}]$. Thus we get the assertion. \square

Remark 2.14. The result of this section and that in §1.2 is deeply connected. The result of §1.2 can be reformulated by using SL_2 -invariant mixed perverse sheaves on \mathbb{P}^1 . Functions appeared in §1.2 are traces of the Frobenius homomorphism on stalks of perverse sheaves on rational points. Forgetting the mixed structure, one can formulate the result on equivariant D -modules on the complex manifold $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (the Riemann-Hilbert correspondence). It gives the group ring $\mathbb{Z}[W]$, the specialization of the Hecke algebra \mathcal{H}_q at $q = 1$. There is a natural passage from D -modules to cycles in cotangent bundles, i.e., characteristic cycles.

Exercise 2.15 (See [16]). By considering the cotangent bundle of the Grassmann variety, construct $\mathbf{U}(\mathfrak{sl}_2)$.

3. HILBERT SCHEMES OF POINTS

3.1. Definition. In this subsection, we define the Hilbert scheme of points on the complex plane, and study its geometric properties. We do not use a general construction due to Grothendieck, and give an elementary treatment which works only our special case.

First we do not restrict ourselves to the case when dimension is 2. Let X be the N -dimensional complex affine space \mathbb{C}^N . We define the Hilbert scheme of points by

$$X^{[n]} \stackrel{\text{def.}}{=} \{I \mid I \text{ is an ideal of } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \text{ with } \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]/I = n\}.$$

So far, we consider $X^{[n]}$ just a set. It can be considered also as

$$X^{[n]} = \{A_Z \mid A_Z \text{ is a quotient ring of } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \text{ with } \dim_{\mathbb{C}} A_Z = n\}.$$

The correspondence is given by

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \rightarrow A_Z \rightarrow 0.$$

(The notation A_Z is borrowed from algebraic geometry. Z is a 0-dimensional subscheme of \mathbb{C}^N , and A_Z is the coordinate ring of Z .)

The Hilbert scheme $X^{[n]}$ is related to the symmetric product $S^n X$ in the following way. If we have distinct n points p_1, \dots, p_n in X , then it defines both a point in $S^n X$ and a point in $X^{[n]}$. In fact, if we set

$$I \stackrel{\text{def.}}{=} \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \mid f \text{ vanishes at } p_1, \dots, p_n\},$$

it is an ideal with $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]/I = n$. (The correspondence subscheme is of course, $Z = \{p_1, \dots, p_n\}$.)

However, the difference occurs if some points collide. Consider the case $n = 2$. In this case, there are two types of ideals in $X^{[2]}$. The first type is an ideal given by two distinct points p, q . The other type is an ideal given by

$$(3.1) \quad I = \{f \mid f(p) = 0, df_p(v) = 0\}$$

for some point $p \in X$ and nonzero tangent vector $v \in T_p X$. This ideal is a limit of ideals of the first type when q approaches to p . And the information of the direction in which q approaches to p is remembered in I . In the symmetric product, the limit is simply $2p$, and this information is lost. When the number of points is greater than 2, much more complicated ideals will occur.

Exercise 3.2. Show that the Hilbert scheme $X^{[n]}$ coincides with the symmetric product $S^n X$ when the dimension of the base space is 1.

We give a *matrix description* of $X^{[n]}$. Let $V \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]/I$, considered as a vector space. We define linear operators B_i on V by

$$B_i(f \bmod I) \stackrel{\text{def.}}{=} x_i f \bmod I.$$

We define a vector $v \in V$ as $v \stackrel{\text{def.}}{=} 1 \bmod I$. Then it is clear that they satisfy the following properties

$$(3.3.1) \quad [B_i, B_j] = 0,$$

(3.3.2) v is a cyclic vector, i.e., if a subspace $S \subset V$ contains v and is invariant under B_i 's, then it must be the whole space V .

Conversely, if a vector space V and such (B_1, \dots, B_N, v) is given, we can define an ideal I as a kernel of a surjective homomorphism

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \ni f(x_1, \dots, x_N) \longmapsto f(B_1, \dots, B_N)v \in V.$$

Here $f(B_1, \dots, B_N)$ makes sense since $[B_i, B_j] = 0$. Moreover, the surjectivity follows from the cyclicity of v . Thus I is a point in $X^{[n]}$. This I is not changed under the action of $\mathrm{GL}(V)$ given by

$$(B_1, \dots, B_N, v) \longmapsto (gB_1g^{-1}, \dots, gB_Ng^{-1}, gv).$$

Moreover, it is easy to check that these maps are mutually inverse. We have a set-theoretical bijection

$$X^{[n]} \longleftrightarrow \{(B_1, \dots, B_N, v) \mid (3.3.1), (3.3.2)\} / \mathrm{GL}(V).$$

When a $\mathrm{GL}(V)$ -orbit through (B_1, \dots, B_N, v) is considered as a point in $X^{[n]}$, we denote it by $[(B_1, \dots, B_N, v)]$.

For example, consider the case $n = 2$. Since $[B_i, B_j] = 0$, we can make B_i 's simultaneously into upper triangular matrices as

$$B_1 = \begin{bmatrix} x_1 & a_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} x_2 & a_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

If $(x_1, x_2, \dots, x_N) \neq (y_1, y_2, \dots, y_N)$, then we can simultaneously diagonalize all B_i 's. This case corresponds to the ideal given by distinct two points. Suppose $(x_1, x_2, \dots, x_N) = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Then the cyclicity implies that $(a_1, a_2, \dots, a_N) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Now it is not difficult to see that this case corresponds to an ideal of type (3.1) with $v = (a_1, a_2, \dots, a_N)$.

From now on we assume $N = 2$.

Theorem 3.4. $X^{[n]}$ is a nonsingular complex manifold of dimension $2n$.

The following proof will be not used later. So an uninterested reader can safely skip it.

Proof. Let $\tilde{X}^{[n]} \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \{(B_1, B_2, v) \mid (3.3.1), (3.3.2)\}$, i.e., $X^{[n]} = \tilde{X}^{[n]} / \mathrm{GL}(V)$.

Step 1. We first show that $\tilde{X}^{[n]}$ is a nonsingular complex manifold of dimension $2n + n^2$. Let

$$\mu: \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \times V \rightarrow \mathrm{End}(V)$$

be a map defined by

$$\mu(B_1, B_2, v) = [B_1, B_2].$$

Then $\tilde{X}^{[n]}$ is an open subset of $\mu^{-1}(0)$. The differential of μ at (B_1, B_2, v) is given by

$$d\mu(\delta B_1, \delta B_2, \delta v) = [B_1, \delta B_2] + [\delta B_1, B_2].$$

It is enough to show that the cokernel of $d\mu$ is dimension n for any $(B_1, B_2, v) \in \tilde{X}^{[n]}$. We identify the dual space of $\mathrm{End}(V)$ with itself by the inner product given by trace. Then the cokernel of $d\mu$ is

$$\begin{aligned} & \{C \in \mathrm{End}(V) \mid \mathrm{tr}(Cd\mu(\delta B_1, \delta B_2, \delta v)) = 0 \text{ for all } (\delta B_1, \delta B_2, \delta v)\} \\ & = \{C \in \mathrm{End}(V) \mid [B_1, C] = [B_2, C] = 0\}. \end{aligned}$$

This space is isomorphic to V under the map $C \mapsto Cv$ thanks to the conditions (3.3.1), (3.3.2). This completes the step 1.

Step 2. Next we show that the action of $\mathrm{GL}(V)$ on $\tilde{X}^{[n]}$ is free. Suppose that $g \in \mathrm{GL}(V)$ stabilizes (B_1, B_2, v) , i.e.,

$$gB_1g^{-1} = B_1, \quad gB_2g^{-1} = B_2, \quad gv = v.$$

Then $S \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \mathrm{Ker}(g - 1)$ is a subspace of V which is invariant under B_1, B_2 and contains v . Hence $S = V$ by the condition (3.3.2). Thus we have $g = 1$.

Step 3. We show that every $\mathrm{GL}(V)$ -orbit in $\tilde{X}^{[n]}$ is closed. In fact, the closure of an orbit is a union of orbits, but any orbit cannot be contained in the closure of another orbit since

both have the dimension $\dim \mathrm{GL}(V)$ by Step 2. In particular, the quotient space $\tilde{X}^{[n]}/\mathrm{GL}(V)$ is Hausdorff.

Step 4. We show that a bijection

$$\mathrm{GL}(V) \times \tilde{X}^{[n]} \rightarrow \Gamma \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \{(x, gx) \in \tilde{X}^{[n]} \times \tilde{X}^{[n]} \mid g \in \mathrm{GL}(V)\}$$

is a homeomorphism. Thus we want to show that the inverse of the map is continuous. Suppose

$$\lim_{i \rightarrow \infty} ((B_{1,i}, B_{2,i}, v_i), (g_i B_{1,i} g_i^{-1}, g_i B_{2,i} g_i^{-1}, g_i v_i)) = ((B_1, B_2, v), (g B_1 g^{-1}, g B_2 g^{-1}, gv)).$$

We need to show that g_i converges to g . Set

$$B'_{1,i} = g_i B_{1,i} g_i^{-1}, \quad B'_{2,i} = g_i B_{2,i} g_i^{-1}, \quad v'_i = g_i v_i.$$

We have

$$g_i B_{1,i} = B'_{1,i} g_i, \quad g_i B_{2,i} = B'_{2,i} g_i.$$

We consider $h_i = g_i / \|g_i\|$. Then $\|h_i\| = 1$, so we may assume that h_i converges to an endomorphism $h \in \mathrm{End}(V)$ with $\|h\| = 1$ if we replace h_i by a subsequence. Therefore, we have

$$h B_1 = g B_1 g^{-1} h, \quad h B_2 = g B_2 g^{-1} h.$$

Suppose $\|g_i\| \rightarrow \infty$. Then

$$h v = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i v_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\|g_i\|} v'_i = 0.$$

This means the kernel of h contains v and invariant under B_1, B_2 . Thus $h = 0$ by (3.3.2). This contradicts with $\|h\| = 1$. Therefore $\|g_i\|$ is bounded, and may assume g_i converges to $g' \in \mathrm{End}(V)$. As above, we have

$$g' B_1 = g B_1 g^{-1} g', \quad g' B_2 = g B_2 g^{-1} g', \quad g' v = g v.$$

By Step 2 (we do not need the invertibility of g'), we have $g = g'$. This completes the proof of Step 4.

Step 5. The rest of the proof is a standard argument (see e.g., [40, Theorem 2.9.10]). So we explain it only briefly.

Take $(B_1, B_2, v) \in \tilde{X}^{[n]}$. Consider the deformation complex at (B_1, B_2, v) :

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{\iota} \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \times V \xrightarrow{d\mu} \mathrm{End}(V),$$

where ι is the differential of the $\mathrm{GL}(V)$ -action, i.e.,

$$\iota(\xi) = ([\xi, B_1], [\xi, B_2], \xi v).$$

By the argument in Step 1, we know that ι is injective. We can take a submanifold S of $\tilde{X}^{[n]}$ passing through x such that

- (1) its tangent space $T_x S$ is complementary to $\mathrm{Im} \iota$,
- (2) $\mathrm{GL}(V) \cdot S$ is an open subset of $\tilde{X}^{[n]}$ and the map $\mathrm{GL}(V) \times S \rightarrow \mathrm{GL}(V) \cdot S$ is an isomorphism of complex manifolds.

We can give a structure of a complex manifold to the quotient space $\tilde{X}^{[n]}/\mathrm{GL}(V) = X^{[n]}$ so that the natural map $\{1\} \times S \rightarrow \mathrm{GL}(V) \cdot S \rightarrow X^{[n]}$ is an isomorphism onto an open set of $X^{[n]}$. \square

Remark 3.5. (1) Theorem 3.4 is originally due to Fogarty [13]. Our proof here is completely different, and somehow similar to the construction of a moduli space in the gauge theory.

(2) It is known that $X^{[n]}$ is a hyperKähler manifold [Lecture, §3]. This result is based on the matrix description of $X^{[n]}$, a well-known correspondence between the GIT quotient and the symplectic quotient, plus a *mysterious* lemma in linear algebra. An existence of

a holomorphic symplectic form (weaker than the existence of a hyperKähler structure) was proved by Beauville [2] earlier.

3.2. The Hilbert-Chow morphism and the punctual Hilbert scheme. Let $S^n X$ be the n th symmetric product of $X = \mathbb{C}^2$. It is an orbifold, locally isomorphic to an open set of the Euclidean space divided by an action of a finite group. In particular, it has a natural topology and complex structure. It is an affine algebraic variety, whose coordinate ring is $\mathbb{C}[\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n]^{\mathfrak{S}_n}$. It is known that the ring is generated by $\sum_i \lambda_i^p \mu_i^q$ for various p, q .

The symmetric product has a natural stratification indexed by partitions of n :

$$S^n X = \bigsqcup_{\lambda} S_{\lambda}^n X, \quad \text{where } S_{\lambda}^n X = \left\{ \sum_i \lambda_i x_i \in S^n X \mid x_i \neq x_j (i \neq j) \right\}.$$

For example, if $\lambda = (1^n) = (1, \dots, 1)$, then $S_{(1^n)}^n X$ is the open set consisting of distinct n points. It is a nonsingular locus of $S^n X$, i.e., $S^n X$ has singularities along the complement $S^n X \setminus S_{(1^n)}^n X$. The other extreme is $\lambda = (n)$. Then $S_{(n)}^n X$ is the set of points with multiplicity n . Hence $S_{(n)}^n X$ is isomorphic to X .

Let $[(B_1, B_2, v)] \in X^{[n]}$. Since $[B_1, B_2] = 0$, we can make B_1 and B_2 simultaneously into upper triangular matrices as

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}.$$

We define a map $\pi: X^{[n]} \rightarrow S^n X$ by

$$\pi([(B_1, B_2, v)]) = (\lambda_1, \mu_1) + \dots + (\lambda_n, \mu_n).$$

From the above remark on the coordinate ring of $S^n X$, it is clear that this is a morphism between complex analytic varieties. It is called the *Hilbert-Chow morphism*. If $[(B_1, B_2, v)]$ corresponds to an ideal given by distinct n points, then it is easy to see that the corresponding matrices B_1, B_2 are simultaneously diagonalizable, and the eigenvalues are the given points. This shows that π is an isomorphism on an open set consisting of ideals given by distinct points, i.e., $\pi^{-1}(S_{(1^n)}^n X)$.

The other extreme is the inverse image of a point in $S_{(n)}^n X$. We define

$$X_0^{[n]} \stackrel{\text{def.}}{=} \pi^{-1}(n0), \quad X_*^{[n]} \stackrel{\text{def.}}{=} \pi^{-1}(S_{(n)}^n X)$$

where 0 is the origin of $X = \mathbb{C}^2$. The former $X_0^{[n]}$ is called the *punctual Hilbert scheme*. These are closed subvarieties of $X^{[n]}$ and we have $X_*^{[n]} = X_0^{[n]} \times X$. If $n = 1$, $X_0^{[1]} = \{0\}$. If $n = 2$, $X_0^{[2]} \cong \mathbb{P}^1$ by the description explained in §3.1. The inverse image of the other points can be easily described. If $C \in S_{\lambda}^n X$, then

$$(3.6) \quad \pi^{-1}(C) \cong X_0^{[\lambda_1]} \times X_0^{[\lambda_2]} \times \dots,$$

where $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ is a partition of n .

It is known that

Theorem 3.7. *If $n \neq 0$, $X_0^{[n]}$ is an $(n-1)$ -dimensional irreducible subvariety. (If $n = 0$, we understand $X_0^{[n]} = \{\text{point}\}$.)*

This result is due to Briançon [4] (see also Iarrobino [19]).

Theorem 3.8. *$\pi: X^{[n]} \rightarrow S^n X$ is a resolution of singularities. Namely, π is a proper surjective morphism such that*

- (1) $X^{[n]}$ is nonsingular,
- (2) π is an isomorphism on $\pi^{-1}(S_{(1^n)}^n X)$.

(3) $\pi^{-1}(S_{(1^n)}^n X)$ is a dense subset in $X^{[n]}$.

Moreover, $X^{[n]}$ is irreducible.

Proof. We do not prove that π is proper yet. For example, it becomes obvious if we consider the Hilbert scheme $(\mathbb{P}^2)^{[n]}$ of points on projective plane. Then $(\mathbb{P}^2)^{[n]}$ is a projective variety since it is a subvariety of the Grassmann manifold. In particular, it is compact. We can define the Hilbert-Chow morphism $\pi: (\mathbb{P}^2)^{[n]} \rightarrow S^n(\mathbb{P}^2)$. It is clearly proper. Then $X^{[n]} = \pi^{-1}(S^n X)$, where $S^n X$ is an open subset of $S^n \mathbb{P}^2$. Thus the properness is clear.

Another way to show the properness is to identify $S^n X$ with the quotient in the geometric invariant theory:

$$S^n X = \mu^{-1}(0) // \mathrm{GL}(V).$$

Then the properness follows from a general theory in the geometric invariant theory. This argument is necessary for *quiver varieties*.

Now we check other conditions. The surjectivity of π is clear. The remaining one is the condition (3). We have proved that $X^{[n]}$ has dimension $2n$. Thus the condition (3) follows if we show that $\dim \pi^{-1}(S^n X \setminus S_{(1^n)}^n X) < 2n$. And this follows easily from the previous theorem and (3.6). Since it is clear that $S_{(1^n)}^n X$ is connected, it also implies that $X^{[n]}$ is connected. \square

Remark 3.9. For the proof of this theorem, the full strength of Theorem 3.7 is not necessary. It is enough to prove the weaker statement ‘there is only one $(n-1)$ -dimensional irreducible component in $X_0^{[n]}$ ’. In fact, even weaker statement $\dim X_0^{[n]} \leq n-1$ is enough. There is a very simple proof of this statement based on the symplectic geometry on $X^{[n]}$ ([Lecture, 1.13]).

Remark 3.10. Using Theorem 3.7, one can show that

$$\dim \pi^{-1}(C) = n - \# \text{ of nonzero entries in } \lambda = \frac{1}{2} \mathrm{codim} S_\lambda^n X^n, \quad C \in S_\lambda^n X^n.$$

Thus the map π is *semi-small*. This immediately gives us a formula of Betti numbers of $X^{[n]}$. (See [Lecture, Chapter 5].)

4. QUIVER VARIETIES (OR Γ -HILBERT SCHEMES)

Quiver varieties were introduced in [N1]. They arised a natural generalization of moduli spaces of anti-self-dual connections of the so-called ALE spaces, studied in [29]. However, we give a different geometric description in these lectures.

4.1. Γ -fixed point set. Let Γ be a finite subgroup of $SL_2(\mathbb{C})$. The classification of such subgroups has been well-known to us, since they are symmtry groups of regular polytopes via the double covering $SU(2) \rightarrow SO(3)$. The classification table is the following:

type	affine Dynkin graph	group
A_n ($n \geq 0$)		$\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mid \varepsilon^{n+1} = 1 \right\}$, the cyclic group $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
D_n ($n \geq 4$)		the binary dihedral group of order $4(n-1)$
E_6		the binary tetrahedral group
E_7		the binary octahedral group
E_8		the binary icosahedral group

TABLE 1. finite subgroups of $SL_2(\mathbb{C})$ and affine Dynkin diagrams

The link between this classification and that of simple simply-laced complex Lie algebra of type ADE will be explained soon.

The group Γ acts on the complex plane $X = \mathbb{C}^2$, and also on the Hilbert scheme $X^{[n]}$. We want to consider the fixed point variety

$$(X^{[n]})^\Gamma = \{I \in X^{[n]} \mid \gamma \cdot I = I \text{ for any } \gamma \in \Gamma\}.$$

If $I \in (X^{[n]})^\Gamma$, then $\mathbb{C}[x, y]/I$ is a Γ -module.

Since $X^{[n]}$ is smooth and Γ is finite, the fixed point set $(X^{[n]})^\Gamma$ is a union of nonsingular submanifolds (of various dimensions). The Γ -module structure of $\mathbb{C}[x, y]/I$ is constant along each connected component of $(X^{[n]})^\Gamma$. For a given isomorphism class \mathbf{v} we set

$$X(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ I \in (X^{[n]})^\Gamma \mid \mathbb{C}[x, y]/I \cong V \right\}, \quad \text{where } n = \dim V,$$

where V is a Γ -module in the isomorphism class \mathbf{v} . A priori, this is a union of connected components of $(X^{[n]})^\Gamma$. However, a stronger result is known: $X(\mathbf{v})$ is connected. This follows from a general result for quiver varieties by Crawley-Boevey [9].

Example 4.1. This example was first given by Kronheimer [28] (in a slightly different language), and was a starting point of later works on quiver varieties [29, N1, N3]. It was rediscovered later by Ginzburg-Kapranov (unpublished), and then Ito-Nakamura [IN] independently.

Consider the ideal I of functions vanishing at points in a free Γ -orbit. The action of Γ on X is free outside the origin 0 , therefore the orbit consists of $\#\Gamma$ -elements. The Γ -module $\mathbb{C}[x, y]/I$ is the regular representation of Γ . Let R be the regular representation of Γ , and \mathbf{r} its the isomorphism class. Then $X(\mathbf{r})$ of the fixed point set in the Hilbert scheme $X^{[n]}$ ($n = \#\Gamma$), which contains ideals consisting of functions vanishing on a Γ -orbit. The corresponding fixed point set $(S^n X)^\Gamma$ in the symmetric product is isomorphic to X/Γ in this case. Thus we have a proper morphism $\pi: X(\mathbf{r}) \rightarrow X/\Gamma$, which is a resolution of singularities. This is easy to check. In fact, it is an isomorphism on $\pi^{-1}((S^n_{(1^n)} X)^\Gamma) = \pi^{-1}((X \setminus \{0\})/\Gamma)$. And $X(\mathbf{r})$ is connected, so the complement is lower dimensional. (There is a very simple proof of the connectedness for this $X(\mathbf{r})$. See [Lecture, Chatper 4].)

Since $X(\mathbf{r})$ is a symplectic manifold, its canonical bundle is trivial. So $X(\mathbf{r})$ is the so-called *minimal resolution* of X/Γ . Such a resolution is unique, and has been studied from various points of view (much before the theory of quiver varieties is developed). In particular, it is known that the inverse image $\pi^{-1}(0)$ of the origin 0 under π is a union $\bigcup C_i$ of projective lines, whose intersection graph is a Dynkin graph of type *ADE*. (Delete the black vertex from the affine Dynkin graph in the table.) In other words, the intersection matrix $C_i \cdot C_j$ is (-1) times the Cartan matrix of type *ADE*. This is a reason why the classification of finite subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ is related to the classification of simple Lie algebras.

In fact, it is possible to study the exceptional fiber $\pi^{-1}(0)$ in the language of Hilbert schemes, or quiver varieties. See Example 6.3.

4.2. simple Lie algebras and root systems. We briefly recall the theory of simple Lie algebras and their root systems.

Let \mathfrak{g} be a Lie algebra defined over \mathbb{C} . It is said *simple* if $\dim \mathfrak{g} > 1$ and it contains no nontrivial ideals. Such a Lie algebra is known to be classified by its *root system*.

A simple Lie algebra contains a maximal abelian subalgebra, unique up to an inner automorphism. Such a maximal abelian subalgebra is called a *Cartan subalgebra*, and denoted by \mathfrak{h} . It is known that the adjoint action of an element $h \in \mathfrak{h}$ is semisimple. Therefore we have a direct sum decomposition

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \text{where } \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \alpha, h \rangle x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}.$$

When $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ and $\alpha \neq 0$, α is called a *root*. The set of roots is denoted by Δ . It is known that $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1$ for $\alpha \in \Delta$. It is known that if α is a root, then $-\alpha$ is also a root. Since $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$ are 1-dimensional, the commutator $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ is at most 1-dimensional. It is known that $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ is, in fact, 1-dimensional. It is also known that the subalgebra $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ is isomorphic to \mathfrak{sl}_2 . We can choose $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ so that the standard relation for \mathfrak{sl}_2 holds: $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. We normalize h_α by $\langle \alpha, h_\alpha \rangle = 2$.

For a root $\alpha \in \Delta$, we define a linear automorphism s_α of \mathfrak{h}^* by $s_\alpha(\xi) = \xi - \langle \xi, h_\alpha \rangle \alpha$. The *Weyl group* $W \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ of \mathfrak{g} is the group generated by s_α 's ($\alpha \in \Delta$). It is known that W permutes roots.

The lattice $Q \subset \mathfrak{h}^*$ generated by roots is called the *root lattice*. Let $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def.}}{=} \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) \in \mathbb{R} \text{ for all } \alpha \in \Delta\}$. We have $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{h}$. Connected components of $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \{h \mid \alpha(h) = 0\}$ are called (open) *Weyl chambers*. It is known that the Weyl group W acts simply transitively on the set of Weyl chambers. Once a Weyl chamber \mathcal{W} is chosen, we define the set Δ_+ of *positive roots* by $\Delta_+ \stackrel{\text{def.}}{=} \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \geq 0 \text{ on } \mathcal{W}\}$. We say a positive root α is *indecomposable* if it is not written as $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ with $\beta_1, \beta_2 \in \Delta_+$. The indecomposable positive roots are called *simple*. Let $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ be the set of simple roots. It is known that Π gives a base of \mathfrak{h}^* , and any root β is written as $\beta = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ with integral coefficients $m_i \in \mathbb{Z}$ all nonnegative or all nonpositive. Therefore, $\Delta = \Delta_+ \sqcup -\Delta_+$. We define the *Cartan matrix* of \mathfrak{g} by $(c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ with $c_{ij} = \langle \alpha_j, h_{\alpha_i} \rangle$. We define a partial ordering \leq on \mathfrak{h}^* by setting $\lambda \leq \mu$ if $\mu - \lambda$ is a sum of positive roots or $\mu = \lambda$. There exists a unique $\theta \in \Delta_+$ which is maximal with respect to \leq . It is called the *highest root*.

It is known that $c_{ij} c_{ji} = 0, 1, 2,$ or 3 for $i \neq j$. Define the Dynkin diagram of \mathfrak{g} as follows. The vertices correspond to simple roots $\alpha_i \in \Pi$. If $|c_{ij}| \geq |c_{ji}|$, two vertices α_i and α_j are connected by $|c_{ij}|$ lines, and these lines are equipped with an arrow pointing toward α_i if $|c_{ij}| > 1$. The Lie algebra \mathfrak{g} is said *simply-laced* if $c_{ij} = 0$ or 1 .

The reconstruction of \mathfrak{g} from the Cartan matrix will be explained in §5 in the context of Kac-Moody Lie algebras.

Example 4.2. Consider $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$. We choose a standard basis of \mathbb{C}^{n+1} so that \mathfrak{g} is the Lie algebra of tracefree matrices. Let $e_{i,j}$ be the $(n+1) \times (n+1)$ whose (i, j) th entry is

1 and all other entries are 0. Then $\{e_{i,j}(i \neq j), e_{i,i} - e_{i+1,i+1}(i = 1, \dots, n)\}$ is a base of \mathfrak{g} . The subalgebra of all tracefree diagonal matrices is a Cartan subalgebra. Let us denote it by \mathfrak{h} . We define $v_i \in \mathfrak{h}^*$ ($i = 1, \dots, n+1$) by $\langle v_i, e_{j,j} - e_{j+1,j+1} \rangle = \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}$. We have $\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}v_i / (v_1 + \dots + v_{n+1} = 0)$. The root spaces are

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} & \text{if } \alpha = 0, \\ \mathbb{C}e_{i,j} & \text{if } \alpha = v_i - v_j \text{ with } i \neq j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

So $\Delta = \{v_i - v_j \mid i \neq j\}$. Let $x_{v_i-v_j} = e_{i,j} \in \mathfrak{g}_{v_i-v_j}$, $y_{v_i-v_j} = e_{j,i} \in \mathfrak{g}_{v_j-v_i}$, $h_{v_i-v_j} = e_{i,i} - e_{j,j} \in [\mathfrak{g}_{v_i-v_j}, \mathfrak{g}_{v_j-v_i}]$. Then $x_{v_i-v_j}, y_{v_i-v_j}, h_{v_i-v_j}$ satisfy the standard relation for \mathfrak{sl}_2 . The normalization condition $\langle v_i - v_j, h_{v_i-v_j} \rangle = 2$ is satisfied. The reflection $s_{v_i-v_j}$ corresponding to a root $v_i - v_j$ exchanges v_i and $v_j \in \mathfrak{h}^*$ and fixes the other v_k . Therefore the Weyl group W is the symmetric group S_{n+1} on v_i 's. The subspace $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ consists of all *real* tracefree $(n+1) \times (n+1)$ diagonal matrices. We take a Weyl chamber \mathcal{W} given by

$$\mathcal{W} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \lambda_i > \lambda_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n)\}.$$

Then we have $\Delta_+ = \{v_i - v_j \mid i < j\}$ and $\Pi = \{\alpha_i \mid i = 1, \dots, n\}$ with $\alpha_i \stackrel{\text{def.}}{=} v_i - v_{i+1}$. We have $\Delta_+ = \{\alpha_i + \dots + \alpha_j \mid i \leq j\}$. The Cartan matrix is

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

The highest root is $v_1 - v_{n+1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. The Dynkin diagram is the graph in Table 1.

4.3. Affine Cartan matrix. The Cartan matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})$ of a simple complex Lie algebra appeared in the previous section has the following properties:

- (1) it is indecomposable (i.e., the corresponding Dynkin diagram is connected),
- (2) $c_{ii} = 2$ for all i ,
- (3) $c_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ for $i \neq j$,
- (4) $c_{ij} = 0 \iff c_{ji} = 0$,
- (5) all principal minors of \mathbf{C} are positive.

Here principal minors are determinants of the matrices $(c_{ij})_{i,j \in S}$ for subsets $S \subset \{1, \dots, n\}$. When (c_{ij}) is symmetric, i.e., of type *ADE*, we have

(5s) \mathbf{C} is positive definite.

In fact, it is known that the properties (1) ~ (5) ((1) ~ (4) and (5s) for symmetric matrices) characterizes Cartan matrices of simple Lie algebras.

Affine Cartan matrices are defined as matrices satisfying (1) ~ (4) and

(5)' all *proper* principal minors of \mathbf{C} are positive and $\det \mathbf{C} = 0$,

or for symmetric matrices

(5s)' \mathbf{C} is positive semidefinite and $\det \mathbf{C} = 0$.

The classification of affine Cartan matrices is known (see [22, §4]). Symmetric affine Cartan matrices (more precisely, corresponding Dynkin diagrams) are ones given in Table 1.

Suppose that $\mathbf{C} = (c_{ij})$ is an $(n+1) \times (n+1)$ -matrix. We let indices i, j run from 0 to n and 0 corresponds to the black vertex. There is a vector $\delta \in \mathbb{Z}^{n+1}$ such that $\mathbf{C}\delta = 0$ and entries of δ are relatively prime, since \mathbf{C} is rank n . Such a vector is unique up to \pm . In fact,

type	entries of δ
A_n ($n \geq 0$)	
D_n ($n \geq 4$)	
E_6	
E_7	
E_8	

it is known that all entries are positive or negative. So we take δ for the positive one. For symmetric case, the entries are given by the following table.

From the table, one can see that the entry of δ corresponding to the vertex 0 (the black vertex) is always 1. Moreover, it is known that the other entries of δ are the coefficients of the highest root of the corresponding simple Lie algebra \mathfrak{g} :

$$\delta = {}^t(1, a_1, \dots, a_n), \quad \theta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i.$$

4.4. McKay correspondence. McKay obtained more direct connection between finite subgroups Γ of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ and the Dynkin diagrams [33].

Let ρ_0, \dots, ρ_n be (the isomorphism classes of) irreducible representations of Γ , where ρ_0 is the trivial representation. Let Q be the 2-dimensional representation defined by the inclusion $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ as above. Then we define nonnegative integers a_{ij} by

$$Q \otimes \rho_i = \bigoplus_j \rho_j^{\oplus a_{ij}},$$

i.e., $a_{ij} = \dim \mathrm{Hom}(\rho_j, Q \otimes \rho_i)^\Gamma$. Since Q is isomorphic to its dual Q^* , we see that $a_{ij} = a_{ji}$. Then we define a graph as follows. The vertices are irreducible representations ρ_i . We draw $a_{ij} = a_{ji}$ edges between the vertices ρ_i and ρ_j . A remarkable observation due to McKay is that this graph is of type affine ADE . The black vertex corresponds to the trivial representation ρ_0 . Moreover, the graph obtained by removing the black vertex is same as one given by the intersection of irreducible components of the exceptional set. The original McKay's argument was based on the explicit calculation of characters of irreducible representations of Γ . Although it is completely rigorous, it remains mysterious why such a result holds. There was a geometric approach to prove this assertion, due to Gonzalez-Sprinberg and Verdier [17], and also its generalization to the case $\Gamma \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ [20, 5]. We will come back to two dimensional case later.

The McKay observation gives us another description of $X(\mathbf{v})$. Let

$$V = \bigoplus V_i \otimes \rho_i$$

be decomposition of the Γ -module V , i.e., $V_i = \mathrm{Hom}(\rho_i, V)^\Gamma$. This notation will be used for any Γ -module V hereafter. We consider the matrix description (B_1, B_2, v) for a point in $X(\mathbf{v})$. Since $v \in V$ is given by 1 mod I , it is fixed by the Γ -action, i.e., $v \in V_0 \otimes \rho_0$. We take a base for ρ_0 , and identify ρ_0 with \mathbb{C} . So v is an element in V_0 .

We consider the pair (B_1, B_2) as an element of $\mathrm{Hom}(V, Q \otimes V)$, and denote it by B . It is clear that B is contained in $(Q \otimes \mathrm{Hom}(V, V))^\Gamma$. We have

$$(Q \otimes \mathrm{Hom}(V, V))^\Gamma = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}(V_j, V_i) \otimes \mathrm{Hom}(\rho_j, Q \otimes \rho_i)^\Gamma.$$

Choose and fix a base for $\text{Hom}(\rho_j, Q \otimes \rho_i)^\Gamma$ for each pair (i, j) . (In fact, if the graph is not \tilde{A}_1 , then the space is at most one dimensional.) Collecting the bases for all i, j , we denote the union by H . To each $h \in H$, we associate an *oriented* edge in the affine Dynkin diagram from the vertex l to k , if h is an element of the base of $\text{Hom}(\rho_j, Q \otimes \rho_i)^\Gamma$. In this case, we denote i by $\text{in}(h)$, j by $\text{out}(h)$. For every edge in the affine Dynkin diagram, we can attach *two* orientations. In particular, the number of oriented edges is twice the number of unoriented edges. We decompose B as

$$B = \bigoplus B_h \otimes h, \quad \text{where } B_h \in \text{Hom}(V_{\text{out}(h)}, V_{\text{in}(h)}).$$

The figure 1 represents the data, when Γ is of type A_n , where an oriented edge h is denoted by $\text{in}(h), \text{out}(h)$.

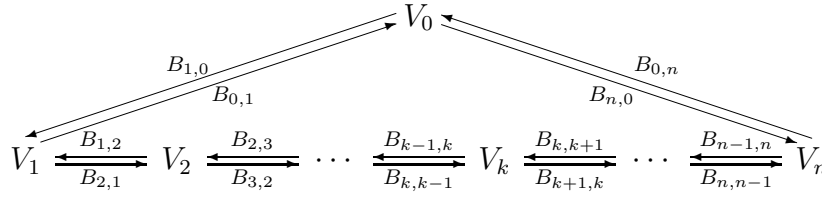


FIGURE 1

An oriented graph is called a *quiver*. This description for Example 4.1, i.e., V is the regular representation, is Kronheimer’s construction [28]. The description for a general V is a special case of the quiver variety in [N1].

From now on, we identify the isomorphism class \mathbf{v} of a Γ -module with a vector in $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ as

$$\mathbf{v} = {}^t(\dim V_0, \dots, \dim V_n), \quad \text{where } V = \bigoplus V_i \otimes \rho_i.$$

We also denote components of \mathbf{v} as $\mathbf{v} = {}^t(v_0, \dots, v_n)$.

***** We assume Γ is *not* trivial subgroup $\{1\}$ hereafter. *****

4.5. Lagrangian subvarieties. Let $\pi: X(\mathbf{v}) \rightarrow (S^{\dim V} X)^\Gamma$ be the restriction of the Hilbert-Chow morphism. Since π is proper, the inverse image $\pi^{-1}(0)$ is a compact subvariety. (Here 0 means $\dim V \cdot [0]$, the 0-dimensional cycle at the origin with multiplicity $\dim V$.) It can be shown that it is homotopic to $X(\mathbf{v})$, so $H_*(X(\mathbf{v}), \mathbb{C})$ is isomorphic to $H_*(\pi^{-1}(0), \mathbb{C})$. We introduce the notation:

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} \pi^{-1}(0) \subset X(\mathbf{v}).$$

We have $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = X(\mathbf{v}) \cap X_0^{[\dim V]}$, where $X_0^{[\dim V]}$ is the punctual Hilbert scheme.

We have

Theorem 4.3. $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ is a lagrangian subvariety in $X(\mathbf{v})$. In particular, it is middle dimensional.

We will give a proof, due to Lusztig, which is different from the original one [N3], during our study of the crystal structure on the set of irreducible components of $\bigsqcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{L}(\mathbf{v})$.

When $X(\mathbf{r})$ is the minimal resolution of X/Γ as in an example above, $\mathfrak{L}(\mathbf{r})$ is the union of projective lines. So the result can be checked directly.

4.6. Roots in terms of quiver varieties. A correspondence between roots of a Lie algebra and indecomposable representations of a quiver was first observed by Gabriel [14] and further studied by Kac [23]. We study a correspondence from the view point of quiver varieties in this subsection.

Proposition 4.4. *Let $\mathbf{C} = (2\delta_{ij} - a_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ be the Cartan matrix of type affine ADE. Let v_0 be the 0th component of \mathbf{v} , and (\cdot, \cdot) be the standard inner product on \mathbb{Z}^{n+1} . Then*

$$\dim_{\mathbb{C}} X(\mathbf{v}) = 2v_0 - (\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}).$$

Proof. Considering the Γ -invariance in the proof of Theorem 3.4, we have

$$T_{[(B,v)]} X(\mathbf{v}) = \text{Ker } d\mu / \text{Im } \iota,$$

where

$$\text{End}(V)^\Gamma \xrightarrow{\iota} (Q \otimes \text{End}(V) \oplus V)^\Gamma \xrightarrow{d\mu} \text{End}(V)^\Gamma,$$

where $(\cdot)^\Gamma$ means the Γ -invariant part. Also ι is injective and the cokernel of $d\mu$ is isomorphic to V^Γ . Therefore

$$\dim X(\mathbf{v}) = \dim (Q \otimes \text{End}(V))^\Gamma + 2 \dim V^\Gamma - 2 \dim \text{End}(V)^\Gamma.$$

Using the decomposition $V = \bigoplus_{i=0}^n V_i \otimes \rho_i$, we find

$$\text{End}(V)^\Gamma = \bigoplus_{i=0}^n \text{End}(V_i), \quad (Q \otimes \text{End}(V))^\Gamma = \bigoplus_{i,j=0}^n a_{ij} \text{Hom}(V_i, V_j), \quad V^\Gamma = V_0.$$

Now the assertion follows. \square

Exercise 4.5. It should be possible to prove this dimension formula using the equivariant version of Hirzebruch-Riemann-Roch formula (i.e., Lefschetz formula), without using quiver variety description. A similar calculation can be found in [29, Appendix]. But the details are not worked out yet.

From this dimension formula, an importance of the bilinear form $(\cdot, \mathbf{C}\cdot)$ on \mathbb{Z}^{n+1} is clear. The following is well-known (see [22, §4, §5])

- (1) $(\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$,
- (2) $(\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}) = 0$ if and only if $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}\delta$, (this property characterize δ up to \pm),
- (3) the \mathbb{Z}^n -part of δ is the highest root θ of \mathfrak{g} .
- (4) if $v_0 = 1$, then $(\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}) = 2$ if and only if $\delta - \mathbf{v}$, considered as a vector in \mathbb{Z}^n , is a root of \mathfrak{g} ,

(4) is a consequence of the property of the bilinear form associated with the Cartan matrix of finite type.

Consider Example 4.1. We have $\dim V_i = \dim \rho_i$, when V is the regular representation. Therefore the dimension vector \mathbf{r} of V is equal to ${}^t(\dim \rho_0, \dots, \dim \rho_n)$. We have $2 = \dim X(\mathbf{r}) = 2 - (\mathbf{r}, \mathbf{C}\mathbf{r})$, and therefore $(\mathbf{r}, \mathbf{C}\mathbf{r}) = 0$. By the property (2) above, we have $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}\delta$. Since $\dim \rho_0 = 1$, we have $\mathbf{r} = \delta$.

Theorem 4.6. *Consider the case $v_0 = \dim V^\Gamma = 1$. Let $\mathbf{v}' = {}^t(\dim V_1, \dots, \dim V_n) \in \mathbb{Z}^n$. Let $\theta \in \mathbb{Z}^n$ be the highest root. Then $X(\mathbf{v})$ is nonempty if and only if $\theta - \mathbf{v}'$ is a positive root or 0. Moreover, in the first case $X(\mathbf{v})$ is a single point, while the second case is the minimal resolution of \mathbb{C}^2/Γ .*

Proof. If $X(\mathbf{v})$ is nonempty, then

$$0 \leq \dim X(\mathbf{v}) = 2 - (\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}).$$

Therefore the necessity assertion follows from the above mentioned property of the bilinear form.

For the converse, we must show that $X(\mathbf{v})$ is a single point if $\theta - \mathbf{v}'$ is a root. This can be proved by using the theory of the ‘reflection functors’ for quiver varieties, which says

- $X(\mathbf{v}_1)$ and $X(\mathbf{v}_2)$ are diffeomorphic if $\theta - \mathbf{v}'_1$ and $\theta - \mathbf{v}'_2$ are in the same Weyl group orbit.

Then it is enough to show the assertion for the special case $\mathbf{v}' = 0$, i.e., V is the trivial representation. Then $X(\mathbf{v})$ is a single point corresponding to the maximal ideal at the origin.

There is also a proof which reduce the assertion to Gabriel’s theorem (see e.g., [8].)

Here we give another argument which shows that $X(\mathbf{v})$ is a single point, provided $X(\mathbf{v})$ is nonempty, due to Mukai [34]. Let I, I' be points in $X(\mathbf{v})$, and let Z, Z' be the corresponding 0-dimensional subschemes. Then we have

$$\dim \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)^\Gamma = \dim \operatorname{Ext}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)^\Gamma = 1, \quad \dim \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)^\Gamma = \dim X(\mathbf{v}) = 0.$$

By the equivariant version of the Riemann-Roch theorem (Lefschetz theorem), the Euler characteristic $\sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{Z'})^\Gamma$ is independent of Z, Z' , so is equal to 2. Therefore, either $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{Z'})$ or $\operatorname{Ext}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{Z'}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{Z'}, \mathcal{O}_Z)^*$ is nonzero. In either case, a nonzero homomorphism $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{Z'}$ or $\mathcal{O}_{Z'} \rightarrow \mathcal{O}_Z$ is easily seen to be an isomorphism.

Probably it should be possible to write down the ideal in $X(\mathbf{v})$ *explicitly* as in [IN], and prove the assertion in a different way. But so far, I do not know..... \square

Theorem 4.6 implies an existence of an isomorphism of vector spaces:

$$\bigoplus_{\mathbf{v}:v_0=1} H_{\text{mid}}(X(\mathbf{v}), \mathbb{C}) \cong \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \text{ is a root}} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g},$$

where mid means the middle degree, i.e., $\text{mid} = \dim_{\mathbb{C}} X(\mathbf{v}) = 0$ or 2.

We will give a Lie algebra structure on the left hand side in §6. In fact, we drop unnatural condition $v_0 = 1$ and embed it to the basic representation of the corresponding untwisted affine Lie algebra.

4.7. Some cohomology groups. Let $I \in X(\mathbf{v})$. We will study several cohomology groups later. In this subsection, we describe them in terms of the matrix data (B, v) .

Let us introduce the following notation.

$$\begin{aligned} A_X &= \mathbb{C}[x, y] \quad (\text{the coordinate ring of } X = \mathbb{C}^2), \\ A_0 &= \mathbb{C} \quad (\text{the coordinate ring of the origin}), \\ A_X &\rightarrow A_0; \quad f(x, y) \rightarrow f(0, 0), \\ \mathfrak{m} &= \operatorname{Ker}(A_X \rightarrow A_0) \quad (\text{the maximal ideal corresponding to } 0). \end{aligned}$$

For $(B, v) \in X(\mathbf{v})$, we introduce two complexes:

$$(4.7) \quad V \xrightarrow{\sigma} Q \otimes V \oplus \rho_0 \xrightarrow{\tau} \wedge^2 Q \otimes V \cong V,$$

$$(4.8) \quad V \xrightarrow{\sigma'} Q \otimes V \xrightarrow{\tau'} \wedge^2 Q \otimes V \cong V,$$

where

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \begin{bmatrix} Bv \\ 0 \end{bmatrix}, & \tau \left(\begin{bmatrix} C \\ a \end{bmatrix} \right) &= B \wedge C + av, \\ \sigma'(v) &= Bv, & \tau'(C) &= B \wedge C. \end{aligned}$$

Let us rewrite the first complex in terms of the ideal I :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[x, y]/I & \xrightarrow{\sigma} & Q \otimes \mathbb{C}[x, y]/I \oplus \rho_0 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C}[x, y]/I \\ f & \mapsto & \begin{bmatrix} xf \bmod I \\ yf \bmod I \\ 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} f_1 \bmod I \\ f_2 \bmod I \\ a \end{bmatrix} & \mapsto & (xf_2 - yf_1 + a) \bmod I, \end{array}$$

where $a \in \rho_0$ is considered as a scalar. The second complex also has a similar description.

Lemma 4.9. *Let $I \in X^{[n]}$ and let A_Z be the corresponding quotient. We have*

$$\text{Ker } \sigma \cong \text{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z), \quad \text{Ker } \tau / \text{Im } \sigma \cong I/\mathfrak{m}I,$$

$$\text{Ker } \sigma' \cong \text{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z), \quad \text{Ker } \tau' / \text{Im } \sigma' = \text{Ext}_{A_X}^1(A_0, A_Z), \quad \text{Coker } \tau' = \text{Ext}_{A_X}^2(A_0, A_Z).$$

Proof. Since $\text{Ker } \sigma = \text{Ker } \sigma'$, the first equation follows from the third equation.

Let us prove the second equation. We define a map $\text{Ker } \tau \rightarrow I/\mathfrak{m}I$ by

$$\begin{bmatrix} f_1 \bmod I \\ f_2 \bmod I \\ a \end{bmatrix} \longmapsto (xf_2 - yf_1 + a) \bmod \mathfrak{m}I.$$

Since $xf_2 - yf_1 + a$ is contained in I if $\begin{bmatrix} f_1 \bmod I \\ f_2 \bmod I \\ a \end{bmatrix}$ is in $\text{Ker } \tau$, the right hand side makes a sense. Moreover, if we take another representative, i.e., if we replace f_1, f_2 by $f_1 + g_1, f_2 + g_2$ with $g_1, g_2 \in I$, the right hand side is unchanged since

$$xg_2 - yg_1 \in \mathfrak{m}I.$$

It is also clear that $\text{Im } \sigma$ is mapped to 0. Therefore we have an induced map $\text{Ker } \tau / \text{Im } \sigma \rightarrow I/\mathfrak{m}I$.

Suppose that $\begin{bmatrix} f_1 \bmod I \\ f_2 \bmod I \\ a \end{bmatrix} \in \text{Ker } \tau$ is mapped to 0 in $I/\mathfrak{m}I$, i.e., $xf_2 - yf_1 + a \in \mathfrak{m}I$. We have $xf_2 - yf_1 + a = xg_1 + yg_2$ for some $g_1, g_2 \in I$. Therefore, a must be 0. Let us write $x(f_2 - g_1) = y(g_2 + f_1) = xyf$. Then we have

$$f_1 = xf - g_2, \quad f_2 = yf + g_1.$$

Therefore $\begin{bmatrix} f_1 \bmod I \\ f_2 \bmod I \\ a \end{bmatrix} \in \text{Ker } \tau$ is contained in $\text{Im } \sigma$. Therefore the map $\text{Ker } \tau / \text{Im } \sigma \rightarrow I/\mathfrak{m}I$ is injective.

Let us show the map is surjective. Suppose $g \in I$ is given. We can write it

$$g = xf_2 - yf_1 + a$$

for some $a \in \mathbb{C}, f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x, y]$. Then $\begin{bmatrix} f_1 \bmod I \\ f_2 \bmod I \\ a \end{bmatrix}$ is mapped to $g \bmod I = 0$ by τ , i.e., it is contained in $\text{Ker } \tau$.

Next we turn to equation in the second row. We have the Koszul resolution

$$0 \rightarrow A_X \rightarrow Q \otimes_{\mathbb{C}} A_X \rightarrow A_X \rightarrow A_0 \rightarrow 0.$$

Therefore $\text{Ext}_{A_X}^i(A_0, A_Z)$ is the i th cohomology group of

$$\text{Hom}_{A_X}(A_X, A_Z) \rightarrow \text{Hom}_{A_X}(Q \otimes_{\mathbb{C}} A_X, A_Z) \rightarrow \text{Hom}_{A_X}(A_X, A_Z).$$

This is nothing but the complex (4.8). □

Corollary 4.10. *We have the following equality in the representation ring of Γ :*

$$(4.11) \quad I/\mathfrak{m}I - \mathrm{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z) = Q \otimes V - V^{\oplus 2} + \rho_0.$$

Proof. By the above lemma, the left hand side is equal to

$$\mathrm{Ker} \tau / \mathrm{Im} \sigma - \mathrm{Ker} \sigma.$$

The cyclic vector condition (3.3.2) implies τ is surjective. Now the result follows. \square

Remark 4.12. Let us rewrite the left hand side of (4.11). From the exact sequence $0 \rightarrow I \rightarrow A_X \rightarrow A_Z \rightarrow 0$, we have

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_X}(A_0, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_X}(A_0, A_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_X}^1(A_0, I) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_X}^1(A_0, A_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_X}^1(A_0, A_Z) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, I) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, A_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, A_Z) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

It is easy to show $\mathrm{Ext}_{A_X}^i(A_0, A_X) = 0$ for $i = 0, 1$ and $\mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, A_X) = \rho_0$ by using the argument in the proof of Lemma 4.9. Therefore

$$\mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, I) = \mathrm{Ext}_{A_X}^1(A_0, A_Z) - \mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, A_Z) + \rho_0$$

in the representation ring of Γ . Again by the argument in the proof of Lemma 4.9, we have

$$\mathrm{Ext}_{A_X}^2(A_0, I) \cong I/\mathfrak{m}I.$$

Therefore we have

$$I/\mathfrak{m}I - \mathrm{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z) = - \sum_{i=0}^2 (-1)^i \mathrm{Ext}_{A_X}^i(A_0, A_Z) + \rho_0.$$

Exercise 4.13. Probably it is possible to give a direct proof of this corollary by using Lefschetz fixed point theorem.

4.8. Tautological bundles. Each point I in $X(\mathbf{v})$ defines a Γ -module $\mathbb{C}[x, y]/I$. When I is moved, we get a vector bundle with a fiberwise Γ -module structure. By abuse of notation, we denote this vector bundle by V and decompose it as $V = \bigoplus_i V_i \otimes \rho_i$. The homomorphisms B and v on $\mathbb{C}[x, y]/I$ can be considered as vector bundle homomorphisms:

$$B: V \rightarrow Q \otimes V, \quad v: \mathcal{O}_{X(\mathbf{v})} \rightarrow V.$$

We call them *tautological sections*.

The complexes (4.7, 4.8) above can be considered as complexes of vector bundles, when we move point $[(B, v)] \in X(\mathbf{v})$.

4.9. Bases in K -theory and correspondences in derived categories. The rest of this section will be needed only for the explanation of McKay correspondence. So readers who only have interest in representations of affine Lie algebras can safely skip them. Moreover, we use K -groups and derived categories of coherent sheaves, which we will not review.

We decompose the complex (4.8) according to the Γ -module decomposition:

$$V_i \rightarrow \bigoplus_j a_{ij} V_j \rightarrow V_i.$$

We denote this complex by S_i .

We consider the special case $\mathbf{v} = \mathbf{r} = \delta$. Let $K(X(\mathbf{r}))$ (resp. $K_c(X(\mathbf{r}))$) is the Grothendieck group of the abelian category of coherent sheaves (resp. coherent sheaves with supports contained in the exceptional set) on $X(\mathbf{r})$. Since $X(\mathbf{r})$ is nonsingular, $K(X(\mathbf{r}))$ (resp. $K_c(X(\mathbf{r}))$) is isomorphic to the Grothendieck group of the abelian category of algebraic vector bundles (resp. the derived category of bounded complexes of vector bundles whose cohomology groups have supports in the exceptional set) on $X(\mathbf{r})$. It is easy to see the complex S_i has support in the exceptional set, and defines an element in $K_c(X(\mathbf{r}))$.

Theorem 4.14 ([17, 20]). $\{V_i\}_{i=0,\dots,n}$ and $\{S_i\}_{i=0,\dots,n}$ form bases of $K(X(\mathbf{r}))$ and $K_c(X(\mathbf{r}))$ respectively. Moreover, they are dual to each other with respect to the natural pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : K_c(X(\mathbf{r})) \otimes K(X(\mathbf{r})) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$[S] \otimes [E] \mapsto \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim H^i(S \otimes E^*) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X(\mathbf{r})}}^i(E, S),$$

where E^* is the dual vector bundle of E .

(In [20] the pairing was defined without taking dual, and S_i was replaced by its transpose.)

Corollary 4.15. Let $\theta: K_c(X(\mathbf{r})) \rightarrow K(X(\mathbf{r}))$ be the natural homomorphism, forgetting the support condition. Then we have

$$\langle \theta S_i, S_j \rangle = 2\delta_{ij} - a_{ij}.$$

This is a consequence of $\theta S_i = \sum_j (2\delta_{ij} - a_{ij}) V_j$. This corollary gives a geometric explanation of McKay correspondence. The identification of the intersection product with the tensor product multiplicities is manifest! Moreover, we will identify S_i with a sheaf on the exceptional divisor, and recover the original form of McKay correspondence. (See Example 6.3.)

In stead of reproducing the original proof of Theorem 4.14, let us reformulate the result in terms of derived categories following [24, 5].

Let $\mathcal{Z} \subset X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2$ be the *universal subscheme* for $X(\mathbf{r})$. We have two projections

$$X(\mathbf{r}) \xleftarrow{p_1} X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2 \xrightarrow{p_2} \mathbb{C}^2.$$

Then the bundle R is nothing but the direct image sheaf $p_{1*} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$. Since the restriction of p_1 to \mathcal{Z} is flat and finite, it follows that $p_{1*} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ is locally free, i.e., gives a vector bundle. The tautological section B comes from the multiplication $x, y: \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$, and v comes from the natural homomorphism $\mathcal{O}_{X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$.

These define a convolution operator between derived categories. Let $D(X(\mathbf{r}))$ be the derived category of coherent sheaves on $X(\mathbf{r})$ and $D^\Gamma(\mathbb{C}^2)$ be the derived category of Γ -equivariant coherent sheaves on \mathbb{C}^2 . We define a convolution operator $\Psi: D^\Gamma(\mathbb{C}^2) \rightarrow D(X(\mathbf{r}))$ by

$$\Psi(\bullet) = \left[\mathbf{R}p_{1*} \left(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2}}^{\mathbf{L}} p_2^*(\bullet) \right) \right]^\Gamma.$$

(In [5], $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}^\vee$ (see below) was used in stead of $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$.) We have $V_i = \Psi(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \otimes \rho_i)$. The same formula also defines an operator between derived categories with compact supports $\Psi: D_c^\Gamma(\mathbb{C}^2) \rightarrow D_c(X(\mathbf{r}))$. We have $S_i = \Psi(\mathcal{O}_0 \otimes \rho_i)$. This follows from the Koszul resolution of \mathcal{O}_0 :

$$0 \rightarrow \bigwedge^2 Q^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow Q^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathcal{O}_0 \rightarrow 0,$$

giving by the interior product by (x, y) . Note that $Q^* = Q$ and $\bigwedge^2 Q = \rho_0$.

Theorem 4.16 ([24, 5]). Ψ is an equivalence of categories (for both arbitrary support and compact support).

Since an equivalence of derived categories induces an isomorphism of the Grothendieck groups, this theorem implies the previous theorem together with the following statements:

- $K^G(\mathbb{C}^2)$ has a base $\{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \otimes \rho_i\}_{i=0,\dots,n}$.
- $K_c^G(\mathbb{C}^2)$ has a base $\{\mathcal{O}_0 \otimes \rho_i\}_{i=0,\dots,n}$.

Note also that a similar map gives a description of a framed moduli space of vector bundles over $X(\mathbf{r})$ in terms of representations of the corresponding affine quiver [29]. This result was obtained much earlier.

We consider the right adjoint $\Phi: D_c(X(\mathbf{r})) \rightarrow D_c^\Gamma(\mathbb{C}^2)$ of Ψ . A standard calculation shows

$$\Phi(\bullet) = \mathbf{R}p_{2*} \left(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2}}^{\mathbf{L}} p_1^*(\bullet \otimes \rho_0) \right) [2],$$

where $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\vee} = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2})$. Since Ψ is an equivalence, we should have $\Psi \circ \Phi$ is identity. By a standard calculation for convolution, we have

$$\Psi \circ \Phi(\bullet) = \mathbf{R}P_{1*}(\mathcal{K} \otimes^{\mathbf{L}} P_2^*(\bullet)),$$

where

$$\begin{array}{ccccc} X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2 & \xleftarrow{p_{12}} & X(\mathbf{r}) \times \mathbb{C}^2 \times X(\mathbf{r}) & \xrightarrow{p_{23}} & \mathbb{C}^2 \times X(\mathbf{r}) \\ & & \downarrow p_{13} & & \\ X(\mathbf{r}) & \xleftarrow{P_1} & X(\mathbf{r}) \times X(\mathbf{r}) & \xrightarrow{P_2} & X(\mathbf{r}), \end{array}$$

and

$$\mathcal{K} = \mathbf{R}p_{13*}(p_{12}^* \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\vee} \otimes^{\mathbf{L}} p_{23}^* \mathcal{O}_{\mathbb{Z}})^{\Gamma}.$$

In fact, we can give an explicit description of \mathcal{K} . We denote the tautological bundle of the first (resp. second) factor by V^1 (resp. V^2). Tautological sections are denoted by B^1, v^1, B^2, v^2 . Then \mathcal{K} is equal to the following complex of vector bundles over $X(\mathbf{r}) \times X(\mathbf{r})$:

$$(4.17) \quad \mathrm{Hom}(V^1, \wedge^2 Q^* \otimes V^2)^{\Gamma} \rightarrow \mathrm{Hom}(V^1, Q^* \otimes V^2)^{\Gamma} \rightarrow \mathrm{Hom}(V^1, V^2)^{\Gamma},$$

where differentials are given by $\eta \mapsto B^2 \wedge \eta - \eta \wedge B^1$. (Note that $Q^* = Q$ and $\wedge^2 Q = \rho_0$.) Now, it is not difficult to show that this gives a locally free resolution of the diagonal \mathcal{O}_{Δ} [29, §3] or [20, §4]. Here the map

$$\mathrm{Hom}(V^1, V^2)^{\Gamma} \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta}$$

is given by $\eta \mapsto \mathrm{tr}(\eta|_{\Delta})$.

In [20], we only use the complex (4.17) to deduce the isomorphism of K -groups. In [N2], we prove a further weaker statement. Using (4.17), we calculate the intersection product in the cohomology group.

Note that we do *not* have similar description of derived categories or K -groups for general quiver varieties $X(\mathbf{v})$. When $\mathbf{v} = n\mathbf{r}$ for some $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, the derived category $D(X(n\mathbf{r}))$ should be equivalent to isomorphic to $D^{\Gamma_n}(X^n)$, where Γ_n is the n th wreath product of Γ by the result of Haiman [18].

At the end of this section, let us remark a similarity between above isomorphism of $D(X(\mathbf{r}))$ and the description of framed anti-self-dual connections on $X(\mathbf{r})$ in [29]. A description of holomorphic vector bundles on \mathbb{P}^2 in terms of ‘monads’ was given by Barth. This description can be also applied to framed vector bundles, where the framing means an isomorphism between $E|_{\ell_{\infty}}$ to a trivial vector bundle on ℓ_{∞} , where ℓ_{∞} is a line in \mathbb{P}^2 . (See [Lecture, Chapter 2].) The description turns out to be the same as the ADHM description of framed anti-self-dual connections on S^4 as noticed by Donaldson [10], where the framing means a trivialization of E_{∞} , where ∞ is a point in S^4 . The identification of two descriptions can be naturally explained if one works over noncompact space $\mathbb{P}^2 \setminus \ell_{\infty} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 = S^4 \setminus \{\infty\}$, as noticed by Donaldson [11]. (See also Nahm [35] and Corrigan-Goddard [7] for the earlier approach for the ADHM description over \mathbb{R}^4 .)

The ADHM description of framed anti-self-dual connections or monad description of framed holomorphic vector bundles can be easily adapted to Γ -equivariant connections/vector bundles. Then the descriptions [29] of framed anti-self-dual connections and framed holomorphic vector bundles on $X(\mathbf{r})$ is obtained as ‘deformations’ of descriptions of Γ -equivariant ones. Here the ‘deformation’ means the stability condition imposed there is changed. (Or the value of the moment map is changed under the correspondence of symplectic quotients and geometric invariant theory quotients.) Therefore, two framed moduli spaces, one for holomorphic vector bundles over $X(\mathbf{r})$ and one for Γ -equivariant holomorphic vector bundles over X are very similar. (In fact, they are birational under a mild condition.) This is, of course, similar to the

statement $D^{\Gamma}(\mathbb{C}^2) \cong D(X(\mathbf{r}))$. However, logically, the equivalence of derived category does not imply the result of [29] and [29] does not imply the equivalence.

5. AFFINE LIE ALGEBRA

We briefly recall the theory of untwisted affine Lie algebras in this section. See [22] for more detail.

5.1. Definition. The untwisted *affine Lie algebra* $\widehat{\mathfrak{g}}$ associated with a complex simple Lie algebra \mathfrak{g} is

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

with the Lie algebra structure given by

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathfrak{g}}, K] &= 0, \\ [X \otimes z^m, Y \otimes z^n] &= [X, Y] \otimes z^{m+n} + m\delta_{m+n,0}(X, Y)K, \\ [d, X \otimes z^m] &= mX \otimes z^m, \end{aligned}$$

where (X, Y) is the Killing form of \mathfrak{g} . Note that $\widehat{\mathfrak{g}}$ contains \mathfrak{g} as a Lie subalgebra by $\mathfrak{g} \ni X \mapsto X \otimes 1 \in \widehat{\mathfrak{g}}$.

We use an alternative description of $\widehat{\mathfrak{g}}$, as an example of a Kac-Moody Lie algebra. $\widehat{\mathfrak{g}}$ has generators e_i, f_i, h_i ($i = 0, 1, \dots, \text{rank } \mathfrak{g}$), d and defining relations

$$(5.1) \quad [h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, d] = 0$$

$$(5.2) \quad [h_i, e_j] = c_{ji}e_j, \quad [h_i, f_j] = -c_{ji}f_j,$$

$$(5.3) \quad [d, e_i] = \delta_{0i}e_i, \quad [d, f_i] = -\delta_{0i}f_i$$

$$(5.4) \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i,$$

$$(5.5) \quad (\text{ad } e_i)^{1-c_{ij}} e_j = 0, \quad (\text{ad } f_i)^{1-c_{ij}} f_j = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$

Here c_{ij} is the affine Cartan matrix. A subalgebra generated by e_i, f_i, h_i ($i \neq 0$) is isomorphic to \mathfrak{g} . The isomorphism between this description and the above description is given by

$$\begin{aligned} e_i &\longleftrightarrow E_i \otimes 1, & f_i &\longleftrightarrow F_i \otimes 1, & h_i &\longleftrightarrow H_i \otimes 1, & \text{for } i \neq 0, \\ e_0 &\longleftrightarrow E_\theta \otimes z, & f_0 &\longleftrightarrow F_\theta \otimes z^{-1}, & h_0 &\longleftrightarrow [E_\theta, F_\theta] \otimes 1 + (E_\theta, F_\theta)K, \end{aligned}$$

where θ is the highest root of \mathfrak{g} , and E_θ, F_θ are suitably normalized elements in the root spaces $\mathfrak{g}_{-\theta}, \mathfrak{g}_\theta$ respectively. Moreover, we denote the elements e_i, f_i, h_i ($i \neq 0$) by E_i, F_i, H_i respectively when they are considered as elements of \mathfrak{g} .

Remark 5.6. The element d is called *the degree operator*. The subalgebra generated by e_i, f_i, h_i is also called an *affine Lie algebra* in some literature. It is denoted by $\mathfrak{g}'(A)$ in [22, §1.5].

Let $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}d \subset \widehat{\mathfrak{g}}$. It is an abelian subalgebra, called the *Cartan subalgebra* of $\widehat{\mathfrak{g}}$.

We define $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ by

$$\langle \alpha_i, h_j \rangle = c_{ji}, \quad \langle \alpha_i, d \rangle = \delta_{0i}.$$

The α_i are called *simple roots*.

5.2. Integrable representations. A \mathfrak{g} -module V is called a *weight module* if it admits a *weight space decomposition*: $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$, where

$$V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \langle \lambda, h \rangle v \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}.$$

A weight module V is called a *highest weight module* of highest weight $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ if there exists a nonzero vector $v_\Lambda \in V$, called a *highest weight vector* such that

$$\begin{aligned} e_i v_\Lambda &= 0 \quad \text{for all } i, \\ h v_\Lambda &= \langle \Lambda, h \rangle v_\Lambda \quad \text{for all } h \in \mathfrak{h}, \\ V &= \mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}})v_\Lambda. \end{aligned}$$

For each $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, there exists a unique (up to isomorphism) irreducible highest weight module, denoted by $L(\Lambda)$.

A weight module V is called *integrable* if all e_i and f_i are locally nilpotent on V . Integrable modules are counterparts of finite dimensional modules of \mathfrak{g} . We have the following result.

Theorem 5.7. (1) *The irreducible highest weight module $L(\Lambda)$ is integrable if and only if Λ satisfies $\langle \Lambda, h_i \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. (A weight Λ satisfying this condition is called dominant.)*

(2) *An integrable highest weight module V is automatically irreducible.*

For the proof, see [22, §10].

Remark 5.8. A integrable highest weight module $L(\Lambda)$ is not *finite dimensional* unless $\Lambda = 0$.

In the next section, we give a construction of an integrable highest weight module using quiver varieties.

6. QUIVER VARIETIES AND AFFINE LIE ALGEBRAS

6.1. **Hecke correspondences and Nested Hilbert schemes.** A subvariety

$$X^{[n,n+1]} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(I_1, I_2) \in X^{[n]} \times X^{[n+1]} \mid I_1 \supset I_2\}$$

of $X^{[n]} \times X^{[n+1]}$ is called a *nested Hilbert scheme*. A remarkable feature of the nested Hilbert scheme is that it is *nonsingular* of dimension $2n + 2$. If we define a similar subvariety in $X^{[n]} \times X^{[n+k]}$ is *singular* for $k > 1$ [6, 39].

We want to consider similar subvarieties for fixed point sets with respect to the action of a finite subgroup $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ as in the previous section. For nested Hilbert schemes, I_1, I_2 are Γ -invariant. For Hecke correspondences, V and S are Γ -modules. The condition $\dim I_1/I_2 = 1$ is *not* natural in this setting, we suppose I_1/I_2 is *irreducible* Γ -modules. Therefore we can define subvarieties for each ρ_i :

$$\mathfrak{P}_i(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{(I_1, I_2) \in X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v}) \mid I_1 \supset I_2\},$$

where \mathbf{e}_i is the i th coordinate vector of \mathbb{Z}^{n+1} . Note that I_1/I_2 is trivial as a module of $\mathbb{C}[x, y]$, i.e., x, y act by 0. For x, y act by $\pi(I_1) - \pi(I_2)$, but this must be 0 since it is fixed by Γ . We call this variety a *Hecke correspondence*. Let us denote two projections by p_1, p_2 :

$$X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \xleftarrow{p_1} \mathfrak{P}_i(\mathbf{v}) \xrightarrow{p_2} X(\mathbf{v}).$$

The following result was proved in [N3, §5].

Theorem 6.1. $\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$ is a nonsingular complex manifold. Moreover, it is lagrangian in $X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v})$ if $\Gamma \neq \{1\}$.

Sketch of Proof. Let us consider $\mathbb{C}[x, y]/I_1$ and $\mathbb{C}[x, y]/I_2$ as vector bundles over $X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i)$ and $X(\mathbf{v})$ respectively. We denote them by V^1, V^2 . We define a complex of vector bundles over $X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v})$ by

$$\text{Hom}(V^2, V^1)^\Gamma \xrightarrow{\alpha} \begin{array}{c} \text{Hom}(V^2, Q \otimes V^1)^\Gamma \\ \oplus \\ V_0^1 \\ \oplus \\ (V_0^2)^* \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \text{Hom}(V^2, V^1)^\Gamma \\ \oplus \\ \mathcal{O}_{X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v})} \end{array},$$

where

$$\alpha(\xi) = \begin{bmatrix} B^1 \xi - \xi B^2 \\ -\xi(v^2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta \left(\begin{bmatrix} C \\ a \\ b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} B^2 \wedge C + C \wedge B^1 + v^1 \otimes b \\ \langle b, v^2 \rangle \end{bmatrix}$$

Here B^1, B^2, v^1, v^2 are tautological homomorphisms

$$V^1 \xrightarrow{B^1} Q \otimes V^1, \quad V^2 \xrightarrow{B^2} Q \otimes V^2, \quad \mathcal{O} \xrightarrow{v^1} V_0^1, \quad \mathcal{O} \xrightarrow{v^2} V_0^2.$$

Then one can show that α is injective and β is surjective on each fiber (as linear maps between vector spaces). Therefore $\text{Ker } \beta / \text{Im } \alpha$ is a vector bundle over $X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v})$. Let us define a section s by

$$s = \begin{bmatrix} 0 \\ -v^1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Then s vanishes exactly on $\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$. In fact, if s vanishes, there exists ξ, λ such that

$$B^1\xi - \xi B^2 = 0, \quad \xi(v^2) = v^1.$$

From these equations, ξ is surjective. Returning back to the definition $V^1 = \mathbb{C}[x, y]/I_1$, $V^2 = \mathbb{C}[x, y]/I_2$, we find that $I_1 \supset I_2$, i.e., $(I_1, I_2) \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$. So it is enough to show that the derivative of s is surjective on $\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$. \square

Proposition 6.2. (1) *Let $I_2 \in X(\mathbf{v})$ and let A_{Z_2} be the corresponding quotient. Then we have*

$$p_2^{-1}(I_2) \cong \mathbb{P}(\mathrm{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2})^\Gamma),$$

where the right hand side is the projective space of one-dimensional subspaces of $\mathrm{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2})^\Gamma$.

(2) *Let $I_1 \in X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i)$ and let A_{Z_1} be the corresponding quotient. Then we have*

$$p_1^{-1}(I_1) \cong \mathbb{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)^\Gamma),$$

where the right hand side is the projective space of one-dimensional subspace of $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)^\Gamma$.

Proof. We first give a proof using algebraic geometry, and then give a proof which uses only linear algebra.

(1) If $(I_1, I_2) \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$, we have an exact sequence

$$0 \rightarrow A_0 \otimes \rho_i \rightarrow A_{Z_2} \rightarrow A_{Z_1} \rightarrow 0.$$

The first homomorphism gives an element of $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2})^\Gamma)$. Conversely suppose that a nonzero homomorphism $A_0 \otimes \rho_i \rightarrow A_{Z_2}$ is given. Then it must be injective, since A_0 is generated by 1. Therefore we can define I_1 so that we get the above exact sequence, i.e., $A_{Z_1} = A_{Z_2}/A_0 \otimes \rho_i$. Therefore we get a point $(I_1, I_2) \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$.

(2) First note that there exists a natural isomorphism $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{A_X}(I_1, A_0)$. If $(I_1, I_2) \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$, then we have an exact sequence

$$0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow A_0 \otimes \rho_i \rightarrow 0.$$

Therefore the last homomorphism gives an element of $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)^\Gamma)$. Conversely suppose that a nonzero Γ -equivariant homomorphism $I_1 \rightarrow A_0 \otimes \rho_i$ is given. It must be surjective since there is no nontrivial submodule in ρ_i . Therefore we can define I_2 so that we have the above exact sequence, i.e., $I_2 = \mathrm{Ker}(I_1 \rightarrow A_0 \otimes \rho_i)$.

Now we give a down-to-earth proof. (For general quiver varieties, we do not have the first proof.)

Let

$$\mathrm{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2}) = \mathrm{Ker} \sigma = \bigoplus_i (\mathrm{Ker} \sigma)_i \otimes \rho_i,$$

$$I_1/\mathfrak{m}I_1 = \mathrm{Ker} \tau / \mathrm{Im} \sigma = \bigoplus_i (\mathrm{Ker} \tau / \mathrm{Im} \sigma)_i \otimes \rho_i$$

be the decomposition of $\mathrm{Ker} \sigma$ and $\mathrm{Ker} \tau / \mathrm{Im} \sigma$ into irreducible Γ -modules.

Let $(I_1, I_2) \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$ and let $V^1 = \mathbb{C}[x, y]/I_1$, $V^2 = \mathbb{C}[x, y]/I_2$. From the definition, we have a commutative diagram of Γ -modules

$$\begin{array}{ccccc} \rho_i & \longrightarrow & Q \otimes \rho_i & \longrightarrow & \rho_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V^2 & \xrightarrow{\sigma_2} & Q \otimes V^2 \oplus \rho_0 & \xrightarrow{\tau_2} & V^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V^1 & \xrightarrow{\sigma_1} & Q \otimes V^1 \oplus \rho_0 & \xrightarrow{\tau_1} & V^1, \end{array}$$

where the vertical arrows are natural projections.

(1) Let us apply $\text{Hom}(\rho_i, \cdot)^\Gamma$ to each term. Since $\text{Hom}(\rho_i, Q \otimes \rho_i)^\Gamma = 0$, we have $\text{Hom}(\rho_i, \text{Ker}(V^2 \rightarrow V^1)) \subset K_i$ from the left end row of the diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & & 0 & & \mathbb{C} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ V_i^2 & \xrightarrow{\sigma_2} & (Q \otimes V^2 \oplus \rho_0)_i & \xrightarrow{\tau_2} & V_i^2 \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ V_i^1 & \xrightarrow{\sigma_1} & (Q \otimes V^1 \oplus \rho_0)_i & \xrightarrow{\tau_1} & V_i^1 \end{array}$$

Therefore, we have a one-dimensional subspace in K_i , corresponding to (I_1, I_2) .

Conversely if a one-dimensional subspace L in K_i is given, then we define I_1 so that

$$V_j^1 = \begin{cases} V_j^2 & \text{if } j \neq i, \\ V_i^2/L & \text{if } j = i. \end{cases}$$

(2) We study the right end column of the commutative diagram. Then we have

$$\text{Ker}(V^2 \rightarrow V^1)_i \cong (\text{Ker } \tau_1)_i / (\text{Ker } \tau_2)_i.$$

Therefore we have a surjection $(\text{Ker } \tau_1)_i \rightarrow \text{Ker}(V^2 \rightarrow V^1)_i$ which factors through as

$$(\text{Ker } \tau_1 / \text{Im } \sigma_1)_i \twoheadrightarrow \text{Ker}(V^2 \rightarrow V^1)_i.$$

Conversely if a codimension one subspace S of $(\text{Ker } \tau_1 / \text{Im } \sigma_1)_i$ is given, we define I_2 so that

$$V_j^2 = \begin{cases} V_j^1 & \text{if } j \neq i, \\ (Q \otimes V^1 \oplus \rho_0)_i / S & \text{if } j = i. \end{cases}$$

□

The above proposition implies

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_i(\mathbf{v}) &= \{(I_2, S) \mid I_2 \in X(\mathbf{v}), S \in \mathbb{P}(\text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2})^\Gamma)\} \\ &= \{(I_1, S') \mid I_1 \in X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i), S' \in \mathbb{P}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)^\Gamma)\}. \end{aligned}$$

This shows that $\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})$ is an analogue of a moduli space of *coherent system* [30].

Example 6.3. This example was first appeared in [N2, Theorem 5.10] (in a slightly different terminology) and was *rediscovered* independently in [IN].

Consider $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ when \mathbf{r} is (the isomorphism class of) the regular representation as in Example 4.1. By Theorem 4.6, $X(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i)$ is a single point if $i \neq 0$. It is obvious that $X(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i)$ is empty if $i = 0$. So we assume $i \neq 0$ from now. We consider $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ as a subvariety in $X(\mathbf{r})$. By Proposition 6.2, $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ is isomorphic to a projective space. Moreover, it is a projective line, since $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ is an lagrangian subvariety in $X(\mathbf{r})$. Since it is compact, it must be contained in $\mathfrak{L}(\mathbf{r})$. By Proposition 6.2, we have

$$I \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{r}) \iff \dim \text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_Z)^\Gamma \neq 0,$$

where $A_Z = \mathbb{C}[x, y]/I$. Furthermore, from (4.11), we have

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_Z)^\Gamma \neq 0 &\iff \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\rho_i, I/\mathfrak{m}I)^\Gamma \neq 0 \\ &\iff I/\mathfrak{m}I \text{ contains a direct summand } \rho_i. \end{aligned}$$

If I is contained in $\pi^{-1}(0) \subset X(\mathbf{r})$, then multiplication by x, y on $\mathbb{C}[x, y]/I$ are nilpotent, so $\text{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z) \neq 0$. Therefore $\dim \text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_Z)^\Gamma \neq 0$ for some i . It means that $\pi^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$. By [N3, Lemma 9.8], $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ and $\mathfrak{P}_j(\mathbf{r})$ intersect transversely if $i \neq j$ and $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r}) \cap \mathfrak{P}_j(\mathbf{r}) \neq \emptyset$. In particular, $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r}) \neq \mathfrak{P}_j(\mathbf{r})$ for $i \neq j$. Therefore $\{\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})\}_{i=1, \dots, n}$ are irreducible components of $\pi^{-1}(0)$.

Let us show that the following formula of the intersection matrix

$$(6.4) \quad ([\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})], [\mathfrak{P}_j(\mathbf{r})]) = -c_{ij},$$

which gives a geometric proof of the McKay correspondence, i.e., the identification of the intersection matrix and the tensor product multiplicities. Let $I \in X(\mathbf{r})$ and $V = \mathbb{C}[x, y]/I$. Recall that we have defined a complex S_i , the ρ_i -component of (4.7):

$$V_i \xrightarrow{\sigma_i} \bigoplus_j V_j^{\oplus a_{ij}} \xrightarrow{\tau_i} V_i,$$

where σ_i, τ_i is the ρ_i -component of σ, τ . Since τ is surjective, we have a homomorphism between vector bundles:

$$V_i \xrightarrow{\sigma_i} \text{Ker } \tau_i.$$

The above discussion shows that

$$\begin{aligned} I \in \mathfrak{P}_i(\mathbf{r}) &\iff \sigma_i \text{ is not an isomorphism} \\ &\iff \det \sigma_i = 0. \end{aligned}$$

Therefore we have

$$c_1(S_i) = c_1(\text{Ker } \tau_i) - c_1(V_i) = - \sum_j c_{ij} c_1(V_j) = m_i (\text{the Poincaré dual of } [\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})])$$

for some $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. By Theorem 4.14 (more precisely, we apply the Chern character homomorphism $\text{ch}: K(X(\mathbf{r})) \rightarrow H^*(X(\mathbf{r}), \mathbb{Q})$ and the local Chern character homomorphism $\text{ch}: K_c(X(\mathbf{r})) \rightarrow H_c^*(X(\mathbf{r}), \mathbb{Q})$ to deduce the corresponding result for cohomology groups), we have

$$\langle c_1(V_j), c_1(S_i) \rangle = \delta_{ij}.$$

In particular, we have

$$\langle c_1(V_i), [\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})] \rangle = \frac{1}{m_i}.$$

Since the left hand side is an integer, we have $m_i = 1$. Using the above formula again, we get (6.4) as

$$([\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})], [\mathfrak{P}_j(\mathbf{r})]) = - \sum_k c_{ik} \langle c_1(V_k), [\mathfrak{P}_k(\mathbf{r})] \rangle = -c_{ij}.$$

Since $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ and $\mathfrak{P}_j(\mathbf{r})$ intersect transversely if they intersect, we have

$$\begin{aligned} ([\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})], [\mathfrak{P}_j(\mathbf{r})]) \neq 0 &\iff \mathfrak{P}_i(\mathbf{r}) \cap \mathfrak{P}_j(\mathbf{r}) \neq \emptyset \\ &\iff \exists I \in X(\mathbf{r}) \text{ such that } I/\mathfrak{m}I \supset \rho_i \oplus \rho_j \end{aligned}$$

for $i \neq j$. (An explicit form of such an I was given in [IN].)

NB. The original argument in [N2] was slightly different. We use the fact that the vector bundle V_i extends to the 1-point compactification $\overline{X(\mathbf{r})}$ of $X(\mathbf{r})$, which is a differentiable orbifold (see [29]). Therefore the Chern classes of V_i makes a sense as a class in $H^*(\overline{X(\mathbf{r})}, \mathbb{R})$. Then the locally free resolution of \mathcal{O}_Δ , mentioned in §4.9, implies

$$\sum_j c_{ij} \int_{\overline{X(\mathbf{r})}} c_1(V_j) \wedge c_1(V_k) = \delta_{ik}.$$

Then we can define $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ as a zero locus of $\det \sigma_i$. From the above formula, we have $([\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})], [\mathfrak{P}_j(\mathbf{r})]) = -c_{ij}$. (There is a small gap in [N2]. We defined $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$ by the zero locus of $\det \sigma_i$ and claimed that it is isomorphic to \mathbb{P}^1 by the adjunction formula and $[\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})] \cdot [\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})] = -2$. But we need to show the irreducibility and the smoothness of $\mathfrak{P}_i(\mathbf{r})$. These statements followed from [N3] as above.)

6.2. **Convolution.** Let

$$Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \stackrel{\text{def.}}{=} \{(I^1, I^2) \in X(\mathbf{v}^1) \times X(\mathbf{v}^2) \mid \pi(I^1) = \pi(I^2)\}.$$

We need an explanation for the equality $\pi(I^1) = \pi(I^2)$. The left hand side is an element of $(S^{\dim V^1} X)^\Gamma$, while the right hand side is of $(S^{\dim V^2} X)^\Gamma$. For $m \leq n$, we have an inclusion $(S^m X)^\Gamma \rightarrow (S^n X)^\Gamma$ defined by $C \mapsto C + (n - m)0$. We denote by $(S^\infty X)^\Gamma$ the direct limit $\lim_{n \rightarrow \infty} (S^n X)^\Gamma$. The notation π in the above equality is the composition of the previous π and the inclusion $(S^{\dim V^1} X)^\Gamma \rightarrow (S^\infty X)^\Gamma$, $(S^{\dim V^2} X)^\Gamma \rightarrow (S^\infty X)^\Gamma$. So both hand sides are elements of $(S^\infty X)^\Gamma$, and the equality makes sense.

Let $p_{ij}: X(\mathbf{v}^1) \times X(\mathbf{v}^2) \times X(\mathbf{v}^3) \rightarrow X(\mathbf{v}^i) \times X(\mathbf{v}^j)$ be the projection. We define the convolution

$$*: H_*(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \otimes H_*(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)) \rightarrow H_*(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^3))$$

by

$$c * c' \stackrel{\text{def.}}{=} p_{13*} (p_{12}^* c \cap p_{23}^* c') \quad c \in H_*(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)), \quad c' \in H_*(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)).$$

Let us check that this is well-defined. We have

$$\begin{aligned} p_{12}^* c &\in H_*(p_{12}^{-1}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2))), & p_{12}^{-1}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) &= \{(I_1, I_2, I_3) \mid \pi(I_1) = \pi(I_2)\}, \\ p_{23}^* c' &\in H_*(p_{23}^{-1}(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3))), & p_{23}^{-1}(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)) &= \{(I_1, I_2, I_3) \mid \pi(I_2) = \pi(I_3)\}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} p_{12}^* c \cap p_{23}^* c' &\in H_*(p_{12}^{-1}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \cap p_{23}^{-1}(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3))), \\ p_{12}^{-1}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \cap p_{23}^{-1}(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)) &= \{(I_1, I_2, I_3) \mid \pi(I_1) = \pi(I_2) = \pi(I_3)\}. \end{aligned}$$

Finally the restriction of p_{13} to $p_{12}^{-1}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \cap p_{23}^{-1}(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3))$ is proper, and the image is contained in $Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^3)$. Thus the convolution is well-defined.

We will be interested in the case when degree is middle:

$$H_{d^1+d^2}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \otimes H_{d^2+d^3}(Z(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)) \rightarrow H_{d^1+d^3}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^3)),$$

where $d^i = \dim X(\mathbf{v}^i)$. For abuse of notation, we denote these degrees by ‘top’, although they are different for different components.

Let

$$H_{\text{top}}(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \prod_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} H_{\text{top}}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)),$$

($\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ run all pairs of isomorphism classes of Γ -modules) be the subspace of the direct product $\prod_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} H_{d^1+d^2}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2))$ consisting elements $(c_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2})$ such that

- for fixed \mathbf{v}^1 , $c_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} = 0$ for all but finitely many choices of \mathbf{v}^2 ,
- for fixed \mathbf{v}^2 , $c_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} = 0$ for all but finitely many choices of \mathbf{v}^1 .

Then the convolution is well-defined on $H_{\text{top}}(Z)$, which becomes an associative algebra. The unit is the product of diagonals.

Note also that the convolution defines

$$H_{d^1+d^2}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \otimes H_{d^2}(\mathcal{L}(\mathbf{v}^2)) \rightarrow H_{d^1}(\mathcal{L}(\mathbf{v}^1)).$$

We also denote these degrees by ‘top’. The direct sum

$$H_{\text{top}}(\mathcal{L}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigoplus_{\mathbf{v}^1} H_{\text{top}}(\mathcal{L}(\mathbf{v}^1))$$

is a representation of $H_{\text{top}}(Z)$.

In this subsection, we define an algebra homomorphism $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow H_{\text{top}}(Z)$. We define the image of generators and check the defining relations. We set

$$\begin{aligned} d &\mapsto \prod_{\mathbf{v}} (-v_0) [\Delta_{X(\mathbf{v})}], \\ h_i &\mapsto \prod_{\mathbf{v}} (\delta_{0i} - \sum_j c_{ij} v_j) [\Delta_{X(\mathbf{v})}], \\ e_i &\mapsto \prod_{\mathbf{v}} [\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})], \quad f_i \mapsto (-1)^{r(\mathbf{v})} \prod_{\mathbf{v}} [\omega \mathfrak{P}_i(\mathbf{v})] \end{aligned}$$

where $\Delta_{X(\mathbf{v})}$ is the diagonal in $X(\mathbf{v}) \times X(\mathbf{v})$, $\omega: X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v}) \rightarrow X(\mathbf{v}) \times X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i)$ is the interchange of the factors, and $r(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\dim X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i) - \dim X(\mathbf{v}))$.

Theorem 6.5. *The above assignment extends (uniquely) to an algebra homomorphism $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow H_{\text{top}}(Z)$.*

It is clear that d and h_i 's make a commuting family. Thus we have the relation (5.1).

Since

$$[\Delta_{X(\mathbf{v} - \mathbf{e}_i)}] * [\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})] = [\mathfrak{P}_i(\mathbf{v})] * [\Delta_{X(\mathbf{v})}],$$

the relations (5.2, 5.3) follow.

Thus the relations (5.4, 5.5) are remained to be checked.

Lemma 6.6. *For a fixed V , $e_i^N [\Delta_{X(\mathbf{v})}]$ and $f_i^N [\Delta_{X(\mathbf{v})}]$ are 0 for sufficiently large N . In particular, the operators e_i, f_i are locally nilpotent on $H_{\text{top}}(\mathfrak{L})$.*

Proof. The first case is obvious since

$$e_i^N [\Delta_{X(\mathbf{v})}] \in H_{\text{top}}(Z(\mathbf{v} - N\mathbf{e}_i, \mathbf{v}))$$

and $X(\mathbf{v} - N\mathbf{e}_i) = \emptyset$ if N is greater than v_i .

The second case follows from the assertion that if

$$\delta_{i0} - \sum_j c_{ij} v_j + v_i = \delta_{i0} - \sum_{j:j \neq i} c_{ij} v_j - v_i < 0$$

then $X(\mathbf{v}) = \emptyset$. This assertion follows from the surjectivity of τ , as its ρ_i -component

$$(\delta_{i0}\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{j:j \neq i} V_j^{\oplus(-c_{ij})} \rightarrow V_i$$

must be surjective. □

It is known that the relation (5.5) follows the rest of relations and the property in Lemma 6.6 (see e.g., §3.3 of [22]). Thus the only remaining relation is (5.4). We explain only the key point in the proof. See the original paper [N3] for the complete proof. We consider $[\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}] e_i f_j$ and $[\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}] f_j e_i$. Let us consider two triple products

$$X(\mathbf{v}^1) \times X(\mathbf{v}^2) \times X(\mathbf{v}^3), \quad X(\mathbf{v}^1) \times X(\mathbf{v}'^2) \times X(\mathbf{v}^3),$$

where

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \mathbf{e}_i = \mathbf{v}^3 + \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{v}'^2 = \mathbf{v}^1 - \mathbf{e}_j = \mathbf{v}^3 - \mathbf{e}_i.$$

Note that these equations are compatible since

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}'^2 + \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j.$$

Let p_{ij} be the projection as usual. Then we have

$$\begin{aligned} [\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}] e_i f_j &= \pm p_{13*} (p_{12}^* [\mathfrak{P}_i(\mathbf{v}^2)] \cap p_{23}^* [\omega \mathfrak{P}_j(\mathbf{v}^2)]), \\ [\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}] f_j e_i &= \pm p_{13*} (p_{12'}^* [\omega \mathfrak{P}_j(\mathbf{v}^1)] \cap p_{2'3}^* [\mathfrak{P}_i(\mathbf{v}^3)]). \end{aligned}$$

Let us consider the set theoretical intersections:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} p_{12}^{-1}(\mathfrak{P}_i(\mathbf{v}^2)) \cap p_{23}^{-1}(\omega\mathfrak{P}_j(\mathbf{v}^2)) &= \{(I_1, I_2, I_3) \mid I_1 \supset I_2 \subset I_3\}, \\ p_{12'}^{-1}(\omega\mathfrak{P}_j(\mathbf{v}^1)) \cap p_{2'3}^{-1}(\mathfrak{P}_i(\mathbf{v}^3)) &= \{(I_1, I_2', I_3) \mid I_1 \subset I_2' \supset I_3\}. \end{aligned}$$

The crucial observation is the following: if $I_1 \neq I_3$, I_2 and I_2' are determined by I_1, I_3 as

$$I_2 = I_1 \cap I_3, \quad I_2' = I_1 + I_3.$$

Moreover, $I_1 \cap I_3 \in X(\mathbf{v}^2)$ if and only if $I_1 + I_3 \in X(\mathbf{v}^2)$. Let U be the open subset given by $X(\mathbf{v}^1) \times X(\mathbf{v}^3)$ given by $I_1 \neq I_3$. If $i \neq j$, then $U = \emptyset$. The above means that on the open set $p_{13}^{-1}(U)$, the intersections (6.7) and their images under the projection p_{13} are all isomorphic. Let us draw a picture when $\Gamma = \{1\}$ and all I_i are ideals of functions vanishing at distinct points, although the case $\Gamma = \{1\}$ is excluded from our discussion:

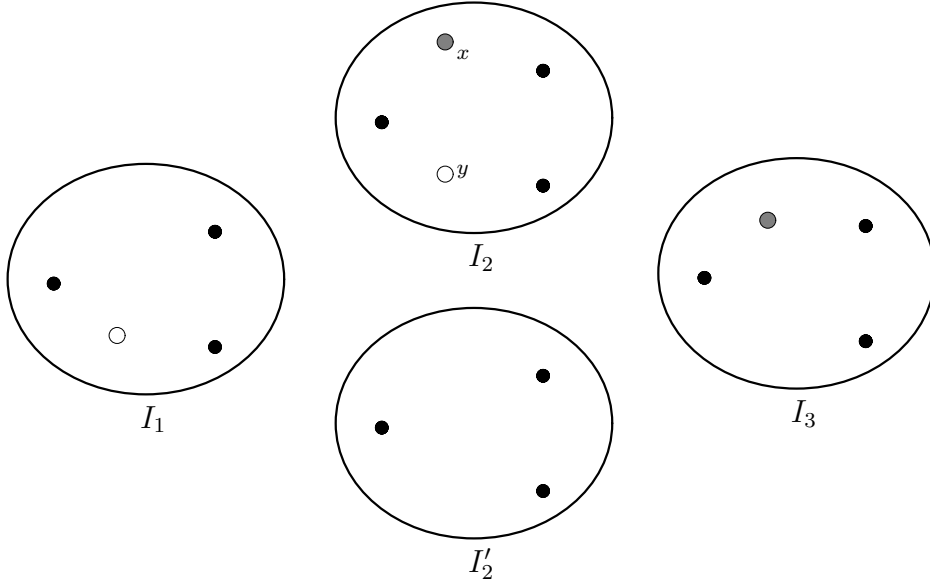


FIGURE 2. Correspondence between $I_1 \supset I_2 \subset I_3$ and $I_1 \subset I_2' \supset I_3$

One can check the transversality of the intersections on $p_{13}^{-1}(U)$ (see [N3, Appendix]). This result was mentioned in Example 6.3. If $j: U \rightarrow X(\mathbf{v}^1) \times X(\mathbf{v}^3)$ denotes the inclusion, we get

$$j^* [\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}] e_i f_j = j^* [\Delta_{X(\mathbf{v}^3)}] f_j e_i.$$

Thus we have checked the relation (5.4) for $i \neq j$.

Consider the case $i = j$. By the above and the long exact sequence in the homology groups, we know that $[\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}] e_i f_j - [\Delta_{X(\mathbf{v}^3)}] f_j e_i$ is contained in the image of

$$H_{\text{top}}(\Delta_{X(\mathbf{v}^1)}) \rightarrow H_{\text{top}}(Z).$$

Since $X(\mathbf{v}^1)$ is connected and has dimension equal to ‘top’, we have

$$e_i f_j - f_j e_i = c_{\mathbf{v}} [\Delta_{X(\mathbf{v})}]$$

for some constant $c_{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}$. The last step in the proof is the calculation of a self-intersection product to compute the constant $c_{\mathbf{v}}$. For this, see [N3, §9].

7. LAGRANGIAN SUBVARIETIES AND A CRYSTAL STRUCTURE

7.1. Crystal. Let us review the notion of Kashiwara's crystals briefly. See [25, KS] for detail. Let

$$I \stackrel{\text{def.}}{=} \{0, 1, \dots, n\} \quad (\text{the index set of simple roots}),$$

$$P^\vee \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{Z}h_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}h_n \oplus \mathbb{Z}d, \quad P \stackrel{\text{def.}}{=} \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, P^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Definition 7.1. A *crystal* \mathcal{B} associated with the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ is a set together with maps $\text{wt}: \mathcal{B} \rightarrow P$, $\varepsilon_i, \varphi_i: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ ($i \in I$) satisfying the following properties

$$(7.2a) \quad \varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle,$$

$$(7.2b) \quad \text{wt}(\tilde{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i, \quad \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \quad \varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1, \quad \text{if } \tilde{e}_i b \in \mathcal{B},$$

$$(7.2c) \quad \text{wt}(\tilde{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i, \quad \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \quad \varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1, \quad \text{if } \tilde{f}_i b \in \mathcal{B},$$

$$(7.2d) \quad b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b' \quad \text{for } b, b' \in \mathcal{B},$$

$$(7.2e) \quad \text{if } \varphi_i(b) = -\infty \text{ for } b \in \mathcal{B}, \text{ then } \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$$

We set $\text{wt}_i(b) = \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle$.

The crystal can be defined for finite dimensional Lie algebras \mathfrak{g} (in fact, for any Kac-Moody Lie algebra). We give an example corresponding to the irreducible $(n+1)$ -dimensional representation of \mathfrak{sl}_2 (see §1.3).

Example 7.3. Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $I = \{1\}$, $P^\vee = \mathbb{Z}h$, $P = \mathbb{Z}\Lambda$, where $\langle h, \Lambda \rangle = 1$. Let $\mathcal{B} \stackrel{\text{def.}}{=} \{b(0), b(1), \dots, b(n)\}$. We define

$$\begin{aligned} \text{wt}(b(k)) &= (n - 2k)\Lambda, \\ \varepsilon(b(k)) &= k, \quad \varphi(b(k)) = n - k, \\ \tilde{f}(b(k)) &= \begin{cases} b(k+1) & \text{if } k \neq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \tilde{e}(b(k)) &= \begin{cases} b(k-1) & \text{if } k \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

where we omit the suffix i .

We give simple examples, which does not come from representations.

Example 7.4. (1) For all $i \in I$, we define the crystal \mathcal{B}_i as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \{b_i(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ \text{wt}(b_i(n)) &= n\alpha_i, \quad \varphi_i(b_i(n)) = n, \quad \varepsilon_i(b_i(n)) = -n, \\ \varphi_j(b_i(n)) &= \varepsilon_j(b_i(n)) = -\infty \quad (i \neq j), \\ \tilde{e}_i(b_i(n)) &= b_i(n+1), \quad \tilde{f}_i(b_i(n)) = b_i(n-1), \\ \tilde{e}_j(b_i(n)) &= \tilde{f}_j(b_i(n)) = 0 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

(2) For $\lambda \in P^+$, we define the crystal T_λ by

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \{t_\lambda\}, \\ \text{wt}(t_\lambda) &= \lambda, \quad \varphi_i(t_\lambda) = \varepsilon_i(t_\lambda) = -\infty, \\ \tilde{e}_i(t_\lambda) &= \tilde{f}_i(t_\lambda) = 0. \end{aligned}$$

A crystal \mathcal{B} is called *normal* if

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) = \max\{n \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\}.$$

For given two crystals $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, a *morphism* ψ of crystal from \mathcal{B}_1 to \mathcal{B}_2 is a map $\mathcal{B}_1 \sqcup \{0\} \rightarrow \mathcal{B}_2 \sqcup \{0\}$ satisfying $\psi(0) = 0$ and the following conditions for all $b \in \mathcal{B}_1, i \in I$:

$$(7.5a) \quad \text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b), \quad \varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b), \quad \varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b) \quad \text{if } \psi(b) \in \mathcal{B}_2,$$

$$(7.5b) \quad \tilde{e}_i \psi(b) = \psi(\tilde{e}_i b) \quad \text{if } \psi(b) \in \mathcal{B}_2, \tilde{e}_i b \in \mathcal{B}_1,$$

$$(7.5c) \quad \tilde{f}_i \psi(b) = \psi(\tilde{f}_i b) \quad \text{if } \psi(b) \in \mathcal{B}_2, \tilde{f}_i b \in \mathcal{B}_1.$$

A morphism ψ is called *strict* if ψ commutes with \tilde{e}_i, \tilde{f}_i for all $i \in I$ without any restriction. A morphism ψ is called an *embedding* if ψ is an injective map from $\mathcal{B}_1 \sqcup \{0\}$ to $\mathcal{B}_2 \sqcup \{0\}$.

Definition 7.6. The *tensor product* $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ of crystals \mathcal{B}_1 and \mathcal{B}_2 is defined to be the set $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ with maps defined by

$$(7.7a) \quad \text{wt}(b_1 \otimes b_2) = \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2),$$

$$(7.7b) \quad \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \text{wt}_i(b_1)),$$

$$(7.7c) \quad \varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_i(b_2), \varphi_i(b_1) + \text{wt}_i(b_2)),$$

$$(7.7d) \quad \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(7.7e) \quad \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here (b_1, b_2) is denoted by $b_1 \otimes b_2$ and $0 \otimes b_2, b_1 \otimes 0$ are identified with 0.

It is easy to check that these satisfy the axioms in Definition 7.1. It is also easy to check that the tensor product of two normal crystals is again normal.

It is easy to check $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) \otimes \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \otimes (\mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3)$. We denote it by $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3$. Similarly we can define $\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n$.

The crystal was introduced by abstracting the notion of crystal bases constructed by Kashiwara [25]. Thus we have the following examples of crystals.

Example 7.8. (1) The lower half $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^-$ of the quantized universal enveloping algebra has a base which has a structure of the crystal. Let $\mathcal{B}(\infty)$ denote this crystal. Let b_0 be the vector corresponding to $1 \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^-$.

(2) Similarly the simple $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -module $L(\Lambda)$ with highest weight λ has a base which has a structure of the crystal. Let $\mathcal{B}(\Lambda)$ denote this crystal. Let b_λ denote the highest weight vector considered as an element of $B(\Lambda)$. It is known that $\mathcal{B}(\Lambda)$ is normal. It is also known that the map

$$\pi: \mathcal{B}(\infty) \otimes T_\Lambda \ni \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_n} b_0 \otimes t_\Lambda \longmapsto \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_n} b_\lambda \in \mathcal{B}(\Lambda) \sqcup \{0\}$$

is well-defined and is a strict morphism. Furthermore, $L(\Lambda_1) \otimes L(\Lambda_2)$ has a base which has a structure of crystal isomorphic to $\mathcal{B}(\Lambda_1) \otimes \mathcal{B}(\Lambda_2)$.

Remark that the character of $L(\Lambda)$ is given by

$$\text{ch } L(\Lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\lambda} \dim L(\Lambda)_\lambda e^\lambda = \sum_{b \in \mathcal{B}(\Lambda)} e^{\text{wt}(b)}.$$

We also have the tensor product decomposition (generalized Littlewood-Reichardson rule):

$$L(\Lambda_1) \otimes L(\Lambda_2) = \bigoplus L(\text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2)),$$

where the summation runs over all $b_1 \otimes b_2 \in \mathcal{B}(\Lambda_1) \otimes \mathcal{B}(\Lambda_2)$ such that $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = 0$ for all $i \in I$.

7.2. A crystal structure on the set of irreducible components of the Lagrangian subvarieties. In §6.1 we have studied the Hecke correspondences, pairs $I_1 \supset I_2$ of ideals such that $I_1/I_2 \cong \rho_i$. In this subsection we study the following generalization of the Hecke correspondence:

$$\mathfrak{P}_i^{(r)}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{(I_1, I_2) \in X(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i) \times X(\mathbf{v}) \mid I_1 \supset I_2\}.$$

The quotient I_1/I_2 is isomorphic to $\rho_i^{\oplus r}$. Let us denote two projections by p_1, p_2 :

$$X(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i) \xleftarrow{p_1} \mathfrak{P}_i^{(r)}(\mathbf{v}) \xrightarrow{p_2} X(\mathbf{v}).$$

We have the following as in Proposition 6.2:

Proposition 7.9. (1) *Let $I_2 \in X(\mathbf{v})$ and let A_{Z_2} be the corresponding quotient. Then we have*

$$p_2^{-1}(I_2) \cong \text{Gr}_r(\text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2})^\Gamma),$$

where the right hand side is the Grassmann manifold of r -dimensional subspaces of $\text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_{Z_2})^\Gamma$.

(2) *Let $I_1 \in X(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)$ and let A_{Z_1} be the corresponding quotient. Then we have*

$$p_1^{-1}(I_1) \cong \text{Gr}_r(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)^\Gamma),$$

where the right hand side is the Grassmann manifold of r -dimensional subspace of $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)^\Gamma$.

Let

$$X_{i;r}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{I \in X(\mathbf{v}) \mid \dim \text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_Z)^\Gamma = r\}.$$

It is a locally closed subvariety since $\bigcup_{s,s \leq r} X_{i;s}(\mathbf{v})$ is an open subset of $X(\mathbf{v})$. Let us define a map

$$p: X_{i;r}(\mathbf{v}) \rightarrow X_{i;0}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)$$

as follows. We consider the natural homomorphism

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_Z)^\Gamma \otimes (A_0 \otimes \rho_i) & \longrightarrow & A_Z \\ \xi \otimes g & \mapsto & \xi(g) \end{array}$$

This is obviously injective. Then $I' = p(I)$ is given by so that the corresponding quotient A_X/I' is the cokernel of this homomorphism. By the construction, we have $(p(I), I) \in \mathfrak{P}_i^{(r)}(\mathbf{v})$.

Lemma 7.10. *When we move $I_1 \in X_{i;0}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)$, $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(I_1/\mathfrak{m}I_1, \rho_i)$ forms a vector bundle of rank*

$$\delta_{0i} - \sum_j c_{ij}(\dim V_j - r\delta_{ij}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_0 - \mathbf{C}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)).$$

The first statement follows from (4.11).

It is clear that $\pi(p(I)) = \pi(I) - r[0]$, where $[0]$ is the 0-dimensional cycle given by the origin. Therefore, the restriction of the Grassmann bundle to $\mathfrak{L}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)$ gives us

$$p: X_{i;r}(\mathbf{v}) \cap \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \rightarrow X_{i;0}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i) \cap \mathfrak{L}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i),$$

which is still isomorphic to a Grassmann bundle. Let $\mathfrak{L}_{i;r}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} X_{i;r}(\mathbf{v}) \cap \mathfrak{L}(\mathbf{v})$.

Lemma 7.11. (1) *We have $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \bigcup_{i,r>0} \mathfrak{L}_{i;r}(\mathbf{v})$.*

(2) *We have $\frac{1}{2} \dim X(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i) + \dim(\text{fiber of } p) = \frac{1}{2} \dim X(\mathbf{v})$.*

Proof. (1) The assertion means $\dim \operatorname{Hom}_{A_X}(A_0 \otimes \rho_i, A_Z)^\Gamma > 0$ for $I \in \mathfrak{L}(\mathbf{v})$. This is equivalent to $\dim \operatorname{Hom}_{A_X}(A_0, A_Z) \neq 0$. Multiplications by x, y on A_Z (operators B_1, B_2) are nilpotent since $I \in \mathfrak{L}(\mathbf{v})$. Therefore the statement is clear.

(2) The left hand side is

$$\begin{aligned} & (v_0 - r\delta_{i0}) - \frac{1}{2}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i, \mathbf{C}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)) + r\{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_0 - \mathbf{C}(\mathbf{v} - r\mathbf{e}_i)) - r\} \\ &= v_0 - r\delta_{i0} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}) + r(\mathbf{e}_i, \mathbf{C}\mathbf{v}) - \frac{1}{2}r^2(\mathbf{e}_i, \mathbf{C}\mathbf{e}_i) + r\delta_{i0} - r(\mathbf{e}_i, \mathbf{C}\mathbf{v}) + r^2(\mathbf{e}_i, \mathbf{C}\mathbf{e}_i) - r^2 \\ &= v_0 - \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}), \end{aligned}$$

which is equal to the right hand side. \square

The second statement means that the dimension of the fiber is just half of the difference of dimensions of total space. This remarkable observation is due to Lusztig.

Let us show that $\dim \mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v})$ is equal to the half of $\dim X(\mathbf{v})$ by induction, by using this observation. A little bit more effort shows that $\mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v})$ is a lagrangian subvariety. We omit the proof of this part.

When $V = 0$, then $\mathfrak{L}(0) = X(0)$ is a point. So the assertion is obvious. Assume that we have $\dim \mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v}') = \frac{1}{2} \dim X(\mathbf{v}')$ if $\dim V' < \dim V$. If $V \neq 0$, then $(\operatorname{Ker} \sigma)_i \neq 0$ for some i for any point in $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$. That is

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \bigcup_{i \in I, r \neq 0} \mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v})$$

By the induction hypothesis and the above observation, $\mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v})$ is a half-dimensional subvariety. Since the above is a finite union, the total set $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ is also half-dimensional. Since $\mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v})$ is an open subset of $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$, it is also half-dimensional. This completes the induction.

By Lemma 7.10 we have the following sequence of Grassmann bundles over $\mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v})$:

$$(7.12) \quad \begin{array}{cccccc} \mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v}) & \mathfrak{L}_{i,1}(\mathbf{v} + \mathbf{e}_i) & \cdots & \mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v} + r\mathbf{e}_i) & \cdots & \mathfrak{L}_{i,r_{\max}}(\mathbf{v} + r_{\max}\mathbf{e}_i) \\ & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ & \mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v}) & \cdots & \mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v}) & \cdots & \mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v}), \end{array}$$

where $r_{\max} = \operatorname{rank}(\operatorname{Ker} \tau / \operatorname{Im} \sigma)_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_0 - \mathbf{C}\mathbf{v})$.

We consider this as the $(r_{\max} + 1)$ -dimensional irreducible representations of \mathfrak{sl}_2 and defines a crystal structure on the set $\bigsqcup_{\mathbf{v}} \operatorname{Irr} \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ of irreducible components of $\bigsqcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{L}(\mathbf{v})$. (Compare §1.3 and Example 7.3.)

Let Y be an irreducible component of $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$. We define $\operatorname{wt}(Y)$ by

$$\sum_i \left(\delta_{i0} - \sum_j c_{ij} \dim V_j \right) \Lambda_i.$$

We define $\varepsilon_i(Y)$ so that

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(Y) &= \dim(\operatorname{Ker} \sigma)_i \quad \text{for a generic point } I \text{ in } Y, \\ &= \min_{I \in Y} \dim(\operatorname{Ker} \sigma)_i. \end{aligned}$$

As we remarked above, $\varepsilon_i(Y) > 0$ for some i if $V \neq 0$. We set $\varphi_i(Y) = \varepsilon_i(Y) + \langle \operatorname{wt}(Y), h_i \rangle$.

Let $r \stackrel{\text{def.}}{=} \varepsilon_i(Y)$. A nonempty open subset of Y is contained in $\mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v} + r\mathbf{e}_i)$ in (7.12) for some i, r, \mathbf{v} . We define an irreducible component Y' of $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ by

$$Y' \stackrel{\text{def.}}{=} \overline{p(Y \cap \mathfrak{L}_{i,r}(\mathbf{v} + r\mathbf{e}_i))},$$

where p is the projection of the Grassmann bundle above. We have

$$\varepsilon_i(Y') = 0$$

Conversely, we can recover Y from Y' as

$$Y = \overline{p^{-1}(Y' \cap \mathfrak{L}_{i,0}(\mathbf{v}))}.$$

Therefore we have a bijection

$$\{Y \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v} + r\mathbf{e}_i) \mid \varepsilon_i(Y) = r\} \longleftrightarrow \{Y' \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \mid \varepsilon_i(Y') = 0\}.$$

Using above observation, we want to define maps

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i: \bigsqcup \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \rightarrow \bigsqcup \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \sqcup \{0\}.$$

If $\varepsilon_i(Y) = 0$, then we define $\tilde{e}_i Y = 0$. Otherwise, we define $\tilde{e}_i Y$ as the image of Y under the composition of bijections

$$\begin{aligned} \{Y \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v} + r\mathbf{e}_i) \mid \varepsilon_i(Y) = r\} &\longleftrightarrow \{Y' \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \mid \varepsilon_i(Y') = 0\} \\ &\longleftrightarrow \{Y'' \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v} + (r-1)\mathbf{e}_i) \mid \varepsilon_i(Y'') = r-1\}, \end{aligned}$$

where the latter bijection is again given by the Grassmann bundle.

Similarly we define $\tilde{f}_i Y$ as the image of Y under the composition of bijections

$$\begin{aligned} \{Y \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v} + r\mathbf{e}_i) \mid \varepsilon_i(Y) = r\} &\longleftrightarrow \{Y' \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \mid \varepsilon_i(Y') = 0\} \\ &\longleftrightarrow \{Y''' \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v} + (r+1)\mathbf{e}_i) \mid \varepsilon_i(Y''') = r+1\}. \end{aligned}$$

If $r = r_{\max}$, then the latter bijection does not exist. So we set $\tilde{f}_i Y = 0$ in this case.

Theorem 7.13. *The above $\varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ on $\bigsqcup_{\mathbf{v}} \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ is a crystal.*

Using the exact sequence in homology groups, it is not difficult to show that

$$f_i [Y] = c \left[\tilde{f}_i Y \right] + \sum_{Y': \varepsilon_i(Y') > \varepsilon_i(Y) + 1} c_{Y'} [Y']$$

for some constants $c, c_{Y'}$. (Use the open set $\bigcup_{s:s \leq \varepsilon(Y)} X_{i,s}(\mathbf{v})$.) In order to determine the constant c , we pullback both hand sides to $\bigcup_{s:s \leq \varepsilon(Y)+1} X_{i,s}(V, W)$. In the right hand side, only $c \left[\tilde{f}_i Y \right]$ survives. Then it is not difficult to determine c by using the self-intersection formula. It is given by $\pm(\varepsilon(Y) + 1)$.

Using the above formula, we prove that $H_{\text{top}}(\mathfrak{L})$ is a highest weight module by induction on $\dim V$ and ε_i . If $\mathbf{v} = 0$, $\mathfrak{L}(0) = X(0)$ is a point. We have nothing to prove. Let Y be an irreducible component of $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$. There exists i such that $\varepsilon_i(Y) > 0$. Suppose that we already know that

- (1) if $\dim V' < \dim V$, then $H_{\text{top}}(\mathfrak{L}(\mathbf{v}'))$ is contained in $\mathbf{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \cdot [X(0)]$.
- (2) if $Y' \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ satisfies $\varepsilon_i(Y') > \varepsilon_i(Y)$, then $[Y']$ is contained in $\mathbf{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \cdot [X(0)]$.

Since the value of ε_i on $\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ is bounded from above, we may assume the second condition by the descending induction. By the above formula, we have

$$f_i [\tilde{e}_i Y] = \pm \varepsilon_i(Y) [Y] + \sum_{Y': \varepsilon_i(Y') > \varepsilon_i(Y)} c_{Y'} [Y'].$$

By (1), the left hand side is contained in $\mathbf{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \cdot [X(0)]$. By (2), terms in the right hand side, except $\pm \varepsilon_i(Y) [Y]$ are contained in $\mathbf{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \cdot [X(0)]$. Therefore $[Y]$ is also contained in $\mathbf{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \cdot [X(0)]$. This completes the proof.

Remark 7.14. It is known that the crystal defined above (the definition is due to Lusztig) is isomorphic to the crystal of the highest weight module of the quantum affine algebra. See [KS, 31, 38] for the proof.

7.3. Sheaves on K3 surfaces. The Grassmann bundle structures between stratifications of moduli spaces of sheaves on K3 surfaces have been studied by Yoshioka [42], Markman [32] and Kawai-Yoshioka [27]. Let us briefly review their results.

Let X be a K3 surface. Let $(H^*(X, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be the Mukai lattice. Namely, it is the integral cohomology group with the pairing

$$\langle x, y \rangle = - \int_X x_0 \cup y_2 - x_1 \cup y_1 + x_2 \cup y_0,$$

where $x = x_0 + x_1 + x_2$, $y = y_0 + y_1 + y_2$ with $x_i, y_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$. We also set $x^\vee = x_0 - x_1 + x_2$. If E is a coherent sheaf on X (more generally, an object of the derived category of coherent sheaves on X), we define its *Mukai vector* $\mathbf{v}(E)$ by

$$\mathbf{v}(E) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{ch}(E) \sqrt{\text{td}_X} = \text{ch}(E)(1 + \omega),$$

where $\omega \in H^4(X, \mathbb{Z})$ is the fundamental class. Since $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is even, $\mathbf{v}(E)$ has a value in $H^*(X, \mathbb{Z})$. The Riemann-Roch formula says

$$\sum_{i=0}^2 \dim \text{Ext}^i(E, F) = -\langle \mathbf{v}(E), \mathbf{v}(F) \rangle$$

for coherent sheaves E, F on X . Moreover, the Serre duality says the natural pairing (Yoneda product)

$$\text{Ext}^i(E, F) \otimes \text{Ext}^{2-i}(F, E) \rightarrow \mathbb{C}; \alpha \otimes \beta \mapsto \text{tr}(\alpha \wedge \beta) \in H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$$

is *non-degenerate*, where we have used $K_X = \mathcal{O}_X$.

Let us take and fix an ample line bundle H over X . Let $\mathfrak{M}(\mathbf{v})$ be the moduli space of H -stable sheaves E with $\mathbf{v}(E) = \mathbf{v}$. (We omit the notation H .) By the fundamental result of Mukai, $\mathfrak{M}(\mathbf{v})$ is a nonsingular symplectic manifold of dimension $2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. This is an analog of our $X(\mathbf{v})$. The analog of the sheaf $\mathcal{O}_0 \otimes \rho_i$ is a *rigid vector bundle* E_0 on K3, i.e., a stable vector bundle E_0 with $\text{Ext}^1(E_0, E_0) = 0$. This has $\dim \mathfrak{M}(\mathbf{v}(E_0)) = 0$. In fact, Mukai shows a stronger result: $\mathfrak{M}(\mathbf{v}(E_0)) = \{E_0\}$. Yoshioka defined a stratification on moduli of sheaves by

$$\mathfrak{M}_{E_0; r}(\mathbf{v}) = \{E \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}) \mid \dim \text{Hom}(E_0, E) = r\}.$$

(This is an analog of the Brill-Noether locus.) In [loc. cit.] it was shown that under certain conditions on \mathbf{v} and the polarization H , there exists a natural homomorphism

$$p: \mathfrak{M}_{E_0; r}(\mathbf{v}) \rightarrow \mathfrak{M}_{E_0; 0}(\mathbf{v}'),$$

which is a Grassmann bundle. Here $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - r\mathbf{v}(E_0)$ and $\mathbf{v}(E_0)$ is the Mukai vector of E_0 . When the rank of \mathbf{v}' is negative, the right hand side must be understood properly. This will be explained later. So first consider the case the rank of \mathbf{v}' is nonnegative. The map is defined by assigning E' to E with

$$0 \rightarrow \text{Hom}(E_0, E) \otimes E_0 \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow 0.$$

Taking the long exact sequence for $\text{Hom}(E_0, \bullet)$, we get $\text{Hom}(E_0, E') = 0$. Therefore $E' \in \mathfrak{M}_{E_0; 0}(\mathbf{v}')$. (For the study of the stability condition, see the original papers.) The corresponding extension class is an element e of

$$\text{Ext}^1(E', \text{Hom}(E_0, E) \otimes E_0) \cong \text{Hom}(\text{Hom}(E_0, E)^*, \text{Ext}^1(E', E_0)).$$

The corresponding homomorphism $\text{Hom}(E_0, E)^* \rightarrow \text{Ext}^1(E', E_0)$ is injective and defines a r -dimensional subspace in $\text{Ext}^1(E', E_0)$. This gives us a Grassmann bundle structure on $p: \mathfrak{M}_{E_0; r}(\mathbf{v}) \rightarrow \mathfrak{M}_{E_0; 0}(\mathbf{v}')$.

Next consider the case \mathbf{v}' is negative. Since the ranks of coherent sheaves are always non-negative, we must interpret $\mathfrak{M}(\mathbf{v}')$ suitably. It turns out that the reasonable choice is

$$\mathfrak{M}(\mathbf{v}') \stackrel{\text{def.}}{=} \mathfrak{M}(-\mathbf{v}'^\vee),$$

$$\mathfrak{M}_{E_0;r}(\mathbf{v}') \stackrel{\text{def.}}{=} \mathfrak{M}_{E_0^\vee;r+(\mathbf{v}(E_0),\mathbf{v}')}(-\mathbf{v}'^\vee)$$

where \vee is the involution on $H^*(X, \mathbb{Z})$ given above and E_0^\vee is the dual vector bundle of E_0 . Under the assumption (which is not mentioned here), we have $\text{Ext}^2(E_0^\vee, E') = 0$, therefore Riemann-Roch says

$$\dim \text{Hom}(E_0^\vee, E') - \dim \text{Ext}^1(E_0^\vee, E') = -\langle \mathbf{v}(E_0)^\vee, -\mathbf{v}'^\vee \rangle = \langle \mathbf{v}(E_0), \mathbf{v}' \rangle$$

for $E' \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}')$. Hence

$$\mathfrak{M}_{E_0;r}(\mathbf{v}') = \{E' \in \mathfrak{M}(-\mathbf{v}'^\vee) \mid \dim \text{Ext}^1(E_0^\vee, E') = r\}.$$

Now the map is defined by assigning E' to E with

$$0 \rightarrow E^\vee \rightarrow \text{Hom}(E_0, E)^* \otimes E_0^\vee \rightarrow E' \rightarrow 0.$$

Here E^\vee is the dual vector bundle of E . (If E is not locally free, we need a slight modification.) Taking the long exact sequence for $\text{Hom}(E_0^\vee, \bullet)$, we get $\text{Ext}^1(E_0^\vee, E') = 0$. The above short exact sequence defines a homomorphism

$$\text{Hom}(E_0, E)^* \cong \text{Hom}(E_0, E)^* \otimes \text{Hom}(E_0^\vee, E_0^\vee) \rightarrow \text{Hom}(E_0^\vee, E').$$

This is injective and defines an r -dimensional subspace in $\text{Hom}(E_0^\vee, E')$. This gives us the Grassmann bundle on p .

As an application of the Grassmann bundle, we can construct \mathfrak{sl}_2 -actions on the cohomology group of moduli spaces corresponding to rigid sheaves on $K3$ (paper in preparation).

REFERENCES

- [1] A. Beilinson, G. Lusztig and R. MacPherson, *A geometric setting for quantum groups*, Duke Math. J. **61** (1990), 655–675.
- [2] A. Beauville, *Variété kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. of Differential Geom. **18** (1983), 755–782.
- [3] R. Bott and L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, GTM **82**, Springer-Verlag, 1982.
- [4] J. Briançon, *Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$* , Invent. Math. **41** (1977), 45–89.
- [5] T. Bridgeland, A. King and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535–554.
- [6] J. Cheah, *Cellular decompositions for nested Hilbert schemes of points*, Pacific J. Math. **183** (1998), 39–90.
- [7] E. Corrigan and P. Goddard, *Construction of instanton and monopole solutions and reciprocity*, Jour. of Phys. **154** (1984), 253–279.
- [8] W. Crawley-Boevey, *On the exceptional fibres of Kleinian singularities*, Amer. J. Math., **122** (2000), 1027–1037.
- [9] ———, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Composito Math., **126** (2001), 257–293.
- [10] S.K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Comm. in Math. Phys. **93** (1984), 453–460.
- [11] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, New York, 1990.
- [12] G. Ellingsrud and S.A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **87** (1987), 343–352.
- [13] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math. **90** (1968), 511–521.
- [14] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen. I.*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103; correction, *ibid.* **6** (1972), 309.
- [15] V. Ginzburg, *\mathfrak{G} -modules*, Springer’s representations and bivariant Chern classes, Adv. in Math. **61** (1986), 1–48.
- [16] ———, *Lagrangian construction of the enveloping algebra $U(\mathfrak{sl}_n)$* , C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **312** (1991), 907–912.
- [17] G. Gonzalez-Sprinberg and J.L. Verdier, *Construction géométrique de la correspondance de McKay*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), 409–449.

- [18] M. Haiman, *Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 941–1006.
- [19] A. Iarrobino, *Punctual Hilbert schemes*, Mem. Amer. Math. Soc. **188**, 1977.
- [20] Y. Ito and H. Nakajima, *McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three*, Topology **39** (2000), 1155–1191.
- [21] N. Iwahori, *On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec 1A, **10** (1964), 215–236.
- [22] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras* (3rd Ed.), Cambridge Univ. Press 1990.
- [23] ———, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56** (1980), 57–92.
- [24] M. Kapranov and E. Vasserot, *Kleinian singulatives, derived categories and Hall algebras*, Math. Ann. **316** (2000), 565–576.
- [25] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. **63** (1991), 465–516.
- [26] ———, *The crystal base and Littelmann’s refine Demazure character formula*, Duke Math. **71** (1993), 839–858.
- [27] T. Kawai and K. Yoshioka, *String partition functions and infinite products*, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000), 397–485.
- [28] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as a hyper-Kähler quotients*, J. Differential Geom. **29** (1989) 665–683.
- [29] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.
- [30] J. Le Potier, *Systèmes cohérents et structures de niveau*, Astérisque, **214** (1993)
- [31] A. Malkin, *Tensor product varieties and crystals. ADE case*, preprint, math.AG/0103025.
- [32] E. Markman, *Brill-Noether duality for moduli spaces of sheaves on K3 surfaces*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), 623–694.
- [33] J. McKay, *Graphs, singularities and finite groups*, in Proc. Sympos. Pure Math. **37**, Amer. Math. Soc., 1980, 183–186.
- [34] S. Mukai, *On the moduli space of bundles on K3 surfaces. I.*, in “Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984)”, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., **11**, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1987, 341–413.
- [35] W. Nahm, *Self-dual monopoles and calorons*, in “Group theoretical methods in physics (Trieste, 1983)”, Lecture Notes in Phys., **201**, Springer, Berlin, 1984. 189–200.
- [36] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145–238.
- [37] ———, *t -analogue of the q -characters of finite dimensional representations of quantum affine algebras*, in “Physics and Combinatorics”, Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop, World Scientific, 2001, 195–218.
- [38] ———, *Quiver varieties and tensor products*, Invent. Math. **146** (2001), 399–449.
- [39] A. Tikhomirov, ???
- [40] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, GTM **102**, Springer-Verlag, 1984.
- [41] W. Wang, *Equivariant K -theory, wreath products, and Heisenberg algebra*, Duke Math., **103** (2000), 1–23.
- [42] K. Yoshioka, *Some examples of Mukai’s reflections on K3 surfaces*, J. Reine Angew. Math. **515** (1999), 97–123.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502, JAPAN

E-mail address: nakajima@kusm.kyoto-u.ac.jp

URL: <http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima>

Stringy Hodge numbers and p -adic Hodge theory

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程 1 年

伊藤 哲史 (Tetsushi Ito) ¹

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

Abstract. 弦理論的 Hodge 数 (stringy Hodge numbers) とは、数理論理学におけるミラー対称性の数学的定式化のために、Batyrev によって導入された、滑らかな射影代数多様体の Hodge 数の特異点を持つ多様体への一般化である ([Ba2])。しかし、弦理論的 Hodge 数は代数多様体の特異点解消を用いて定義されるので、それが特異点解消の取り方によらないことは、定義からは全く明らかではない。これは、既に、Batyrev によるモチーフ積分を用いた証明が知られていたが、最近、筆者により p 進積分や p 進 Hodge 理論といった数論幾何の道具を用いた別証明が得られた ([It3])。本稿では、弦理論的 Hodge 数と、筆者による Batyrev の定理の数論的な別証明について解説する。

1. INTRODUCTION

X を既約で正規な \mathbb{C} 上の射影代数多様体とし、高々ログ端末的特異点を持つものとする。 $\rho: Y \rightarrow X$ を特異点解消とし、その例外因子 $\text{Exc}(\rho)$ は単純正規交叉因子であるとす。 $\text{Exc}(\rho)$ の既約成分を D_1, \dots, D_r とおく。 K_X, K_Y を X, Y の標準因子とし (これらは \mathbb{Q} -Cartier 因子である)、有理数 $a_i > -1$ を関係式「 $K_Y = \rho^* K_X + \sum_{i=1}^r a_i D_i$ 」で定める。 $I := \{1, \dots, r\}$ とおく。 $J \subset I, J \neq \emptyset$ に対し、 $D_J^\circ := (\bigcap_{j \in J} D_j) \setminus (\bigcup_{j \in I \setminus J} D_j)$ とおき、 $D_\emptyset^\circ := Y \setminus \text{Exc}(\rho)$ とおく。 D_J° のコンパクトな台を持つ特異コホモロジー $H_c^k(D_J^\circ, \mathbb{Q})$ には混合 Hodge 構造が入り ([De4])、その (i, j) 成分の次元を $h^{i,j}(\text{Gr}_{i+j}^W H_c^k(D_J^\circ, \mathbb{Q}))$ で表す。 u, v に関する多項式

$$E(D_J^\circ; u, v) := \sum_k (-1)^k \sum_{i,j} h^{i,j}(\text{Gr}_{i+j}^W H_c^k(D_J^\circ, \mathbb{Q})) u^i v^j$$

¹Supported by the Japan Society for the Promotion of Science Research Fellowships for Young Scientists.

開 Calabi-Yau 多様体への代数幾何と弦理論からのアプローチ、北海道大学大学院理学部数学教室
講演：2001 年 12 月 12 日 (水)

Date: January 31, 2002

を D_J° の E 多項式 (E -polynomial) とする。ここで、 X の弦理論的 E 関数 (stringy E -function) $E_{st}(X; u, v)$ を次の式で定義する：

$$E_{st}(X; u, v) := \sum_{J \subset I} E(D_J^\circ; u, v) \prod_{j \in J} \frac{uv - 1}{(uv)^{a_j+1} - 1}$$

以下が本稿の主定理である。

定理 1.1 ([Ba2], [It3]). 弦理論的 E 関数 $E_{st}(X; u, v)$ は特異点解消 $\rho: Y \rightarrow X$ の取り方によらず、 X のみによって定まる不変量である。

これは、既に、Batyrev によるモチーフ積分を用いた証明が知られていたが ([Ba2], Theorem 3.4)、最近、筆者により p 進積分や p 進 Hodge 理論といった数論幾何の道具を用いた別証明が得られた ([It3])。本稿では、弦理論的 Hodge 数と、筆者による Batyrev の定理の数論的な別証明について解説する。

表題にある弦理論的 Hodge 数は、弦理論的 E 関数を用いて定義される。弦理論的 E 関数 $E_{st}(X; u, v)$ は u, v に関する多項式であると仮定する。このとき、 X の弦理論的 Hodge 数 (stringy Hodge numbers) $h_{st}^{i,j}(X)$ が、次の式で定義される：

$$E_{st}(X; u, v) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} h_{st}^{i,j}(X) u^i v^j$$

定理 1.1 により、これは特異点解消の取り方によらず、 X のみによって定まる不変量である。

注意 1.2. 数論幾何の道具を用いて代数幾何の不変量を調べるというアイデアは、数論幾何では昔から伝統的に考えられてきたことである。例えば、有限体上の代数多様体の \mathbb{F}_p -有理点の個数と Betti 数の関係は、Weil の論文 [We1] で既に発見されている。また、Batyrev, Wang は p 進積分と Weil 予想を用いて、双有理同値な滑らかな極小モデルの Betti 数が等しいという結果を得ている (注意 3.5, 注意 5.1 を参照)。これに対して、筆者の仕事 ([It1],[It2],[It3]) の新しい点は、Betti 数より詳しく Hodge 数を扱うために、 p 進 Hodge 理論を用いたことにある。しかし、そのためには、代数体上に帰着し Chebotarev の密度定理を用いるという Galois 表現のテクニックを用いなければならない (詳しくは §5, §6 を参照)。

注意 1.3. モチーフ積分は、 p 進積分の \mathbb{C} 上の類似として Kontsevich によって創始され、Denef-Loeser によって発展された理論である ([Kon],[DL])。定理 1.1 が p 進積分でもモチーフ積分でも同様に証明できるということは、非常に興味深い。なお、最近の安田健彦氏の仕事により、モチーフ積分の理論は Deligne-Mumford スタック上に一般化されている ([Ya])。

注意 1.4. 一般に代数多様体の特異点解消には様々なものがあり、特に高次元では、それらの相互関係は明らかではない。これが、通常の代数幾何の枠組みで定理 1.1 を示すのが難しい理由である。最近 Abramovich-Karu-松木-Wlodarczyk によって示された双

有理写像に関する弱分解定理 (weak factorization theorem) によれば, 滑らかな代数多様体間の任意の双有理写像は, 滑らかな中心によるブローアップとブローダウンのいくつかの合成で書ける. 筆者は未確認だが, Borisov-Mavlyutov ([BM]) によれば, これを用いて定理 1.1 の別証を与えることもできるようである.

注意 1.5. 上に述べた弦理論的 Hodge 数の定義からは, それが 0 以上の整数であることは自明ではない. Batyrev は, X が \mathbb{C} 上の射影代数多様体で, 高々 Gorenstein 標準特異点を持ち, さらに弦理論的 E 関数 $E_{st}(X; u, v)$ が u, v の多項式であれば, X の弦理論的 Hodge 数 $h_{st}^{i,j}(X)$ は 0 以上の整数であろうと予想している. ([Ba2], Conjecture 3.10)

2. ミラー対称性からの動機・例

Batyrev は, ミラー対称性の数学的定式化のために弦理論的 Hodge 数を定義した ([Ba2]). ここでは, 典型的な例を挙げることで, ミラー対称性の数学的定式化には通常の Hodge 数では不十分であることを説明する. なお, 本節の例はすべて [Ba2] による.

X を n 次元代数多様体とし, そのミラー多様体 (mirror variety) を Y とする (ここではミラー多様体が何かについては説明しない). このとき, X, Y の Hodge 数の間には位相的ミラー対称性テスト (topological mirror symmetry test) と呼ばれる関係式

$$h^{i,j}(X) = h^{n-i,j}(Y) \quad \text{for all } i, j$$

が成り立つと期待されている ([M]). しかし, 具体的なミラー多様体に対して素朴に Hodge 数を計算すると, 位相的ミラー対称性テストを満たしていない場合があることが知られている.

例えば, X を Fermat 超曲面

$$X : f(z) = z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 = 0 \subset \mathbb{P}^4$$

とすると, 物理学者によれば, X のミラー多様体は商多様体 X/G に等しい. ここで $G \subset PSL(5, \mathbb{C})$ は多項式 $f(z)$ に自明に作用する $PSL(5, \mathbb{C})$ の最大の対角部分群である (群としては $G \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ である). X/G は商特異点しか持たないから, その混合 Hodge 構造は純 (pure) である ([De4],[De5]). しかし, 具体的に Hodge 数を計算すると,

$$h^{2,1}(X) = 101 \neq 1 = h^{3-2,1}(X/G)$$

となって, $X, X/G$ は位相的ミラー対称性テストを満たしていない.

そこで, X/G のブローアップ $\rho : Y \rightarrow X/G$ で, クレパント (crepant) な特異点解消を与えるものをとる ($\rho : Y \rightarrow X/G$ がクレパントとは, $\rho^*K_{X/G} = K_Y$ を満たすことを言う). すると, 具体的な計算により, X, Y が位相的ミラー対称性テストを満たすことが確かめられる. これから, 一般に位相的ミラー対称性テストを考える際には, 代数多様体が特異点を持つ場合は, 必要に応じてクレパントな特異点解消を取って Hodge 数を計算する必要があると考えられる.

一方, クレパントな特異点解消を取らなくても, $h^{i,j}(Y) = h_{st}^{i,j}(X/G)$ なので (系 3.2 を参照), 弦理論的 Hodge 数に関する位相的ミラー対称性テスト

$$h^{2,1}(X) = 101 = h_{st}^{3-2,1}(X/G)$$

が成り立つとも言える.

注意 2.1. 物理学者が「 X/G 」と言った際には, 自動的に X/G のクレパントな特異点解消を考えていることもあるようである. しかし, 一般にはクレパントな特異点解消は存在せず, また存在したとしても一意的ではないので, このような扱いは数学的には不十分であると言える. (次の例を参照)

次の例が示すように, 一般に, 滑らかな代数多様体のミラー多様体には, クレパントな特異点解消は存在しない.

X を重み付き射影空間の中で方程式

$$X : g(z) = z_0^4 + z_1^4 + z_2^8 + z_3^8 + z_4^8 + z_5^8 = 0$$

で定義された 4 次元の超曲面とする. ここで $G \subset PSL(6, \mathbb{C})$ を多項式 $g(z)$ に自明に作用する $PSL(6, \mathbb{C})$ の最大の対角部分群とすると, 物理学者によれば, X のミラー多様体は X/G である. X/G のクレパントな特異点解消 $Y \rightarrow X/G$ をとると, X, Y の Hodge 数は

$$h^{3,1}(X) = 433 = h^{4-3,1}(Y), \quad h^{1,3}(X) = 433 = h^{4-1,3}(Y)$$

を満たすが, $h^{2,2}$ については

$$h^{2,2}(X) = 1816 \neq 1820 = h^{4-2,4-2}(Y)$$

となって位相的ミラー対称性テストを満たさない.

これは, X が $z_0^4 + z_1^4 = 0, z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0$ を満たす 4 点で解析的に $\mathbb{C}^4/\{\pm \text{id}\}$ と同形な孤立特異点を持つことによると考えられる. このとき, 残念なことに, X のクレパントな特異点解消は存在しない (これは商特異点 $\mathbb{C}^4/\{\pm \text{id}\}$ の性質による). 従って, この場合は, クレパントな特異点解消を用いて位相的ミラー対称性テストを論じることができない. 一方, 弦理論的 Hodge 数を用いれば,

$$h_{st}^{2,2}(X) = 1816 + 4 = 1820$$

となって, 確かに位相的ミラー対称性テストを満たしている.

これらの例から, ミラー対称性, 特に位相的ミラー対称性テストを論じる際には, 本稿の表題にもある弦理論的 Hodge 数が自然な対象であると考えられる. なお, 具体的なミラー多様体の構成やその弦理論的 Hodge 数については, Batyrev-Borisov [BB], Batyrev-Dais [BD], Borisov-Mavlyutov [BM] などを参照していただきたい.

3. 代数幾何への応用

定理 1.1 は、代数幾何の観点からも自明ではない。ここでは定理 1.1 の代数幾何への応用例を挙げる。

系 3.1 ([Ba2], Corollary 3.6). X を \mathbb{C} 上の滑らかな射影代数多様体とすると、

$$E_{st}(X; u, v) = E(X; u, v) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \dim H^j(X, \Omega_X^i) u^i v^j$$

である。

証明. 恒等写像 $\text{id} : X \rightarrow X$ は X の特異点解消を与えるので、これを用いて $E_{st}(X; u, v)$ を計算すればよい。□

系 3.2 ([Ba2], Theorem 3.12). X を \mathbb{C} 上の射影代数多様体で、高々 \mathbb{Q} -Gorenstein 特異点を持つとする。このとき、もしクレパントな特異点解消 $\rho : Y \rightarrow X$ が存在すれば (すなわち $\rho^* K_X = K_Y$ を満たせば)、 X の弦理論的 Hodge 数は Y の Hodge 数に等しい：

$$h_{st}^{i,j}(X) = h^{i,j}(Y) \quad \text{for all } i, j$$

特に、 X にクレパントな特異点解消が存在すれば、その Hodge 数は一意的である。

証明. 弦理論的 E 関数 E_{st} の定義より明らかである。□

注意 3.3. 系 3.2 は高次元の McKay 対応 (McKay correspondence) などへの応用上も重要である。また、具体例を計算する際に重要なこととして、 Y の Hodge 数を、任意の (クレパントとは限らない) 特異点解消 $\rho' : Y' \rightarrow X$ から E_{st} を経由して計算できることも分かる。

系 3.4 ([Ba1],[Ba2],[Wa], [It1],[It2]). X, Y を \mathbb{C} 上の滑らかな射影代数多様体とし、 K_X, K_Y はネフ (nef) であるとする (このような X, Y を極小モデル (minimal model) とする)。このとき、もし X, Y が双有理同値であれば、 X, Y の Hodge 数は等しい：

$$h^{i,j}(X) = h^{i,j}(Y) \quad \text{for all } i, j$$

証明. $f : X \dashrightarrow Y$ を双有理写像とする。このとき、 \mathbb{C} 上の滑らかな射影代数多様体 Z と双有理射 $g : Z \rightarrow X, h : Z \rightarrow Y$ であって、 $f \circ g = h, g^* K_X = h^* K_Y$ を満たすものが存在する (これは双有理幾何ではよく知られた事実であるが、例えば [It2], [Wa] を参照)。ここで、 $g : Z \rightarrow X, h : Z \rightarrow Y$ を用いて X, Y の弦理論的 Hodge 数を計算すると、 $g^* K_X = h^* K_Y$ なので、

$$E(X; u, v) = E_{st}(X; u, v) = E_{st}(Y; u, v) = E(Y; u, v)$$

となつて、 X, Y の Hodge 数は等しいことが分かる。□

注意 3.5. X, Y の Betti 数が一致することは, Batyrev, Wang により p 進積分と Weil 予想を用いて示されている ([Ba1],[Wa]). 筆者は, [It1], [It2] において, Batyrev, Wang の手法に p 進 Hodge 理論を組み合わせて Hodge 数の一致を示した. この結果が [It3] における定理 1.1 の証明の原形になっている. 一方, Kontsevich, Batyrev は系 3.4 をモチーフ積分を用いて示している ([Ba2],[Kon], モチーフ積分については [DL], [Ya] も参照).

4. p 進積分

本節では簡単のため, p を素数とし, p 進整数環 \mathbb{Z}_p 上の滑らかなスキーム \mathfrak{X} 上での p 進積分を考える (一般の p 進体の整数環上でも全く同様である). $v: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ を正規化された離散付値とし, $x \in \mathbb{Q}_p$ に対し

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-v(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

で p 進絶対値 (p -adic absolute value) を定める. $\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p$ の相対次元を n とし, $\omega \in \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p}^n)$ を n 次微分形式とする.

このとき, \mathfrak{X} の \mathbb{Z}_p -有理点全体の集合 $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)$ はコンパクトな p 進多様体になる. $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)$ の p 進局所座標系 $\{x_1, \dots, x_n\}$ は, $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)$ の開集合 U と, $(\mathbb{Z}_p)^n$ の開集合 V との p 進解析的同相写像を与える. この局所座標系で $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ と書き ($f(x)$ は V 上の p 進解析関数である), ω の U 上の p 進積分を

$$\int_U |\omega|_p := \int_V |f(x)|_p dx_1 \cdots dx_n$$

で定義する. なお, $|f(x)|_p$ は f の値の p 進絶対値であり, $dx_1 \cdots dx_n$ は $(\mathbb{Z}_p)^n$ の Haar 測度で, $(\mathbb{Z}_p)^n$ 全体での積分が 1 となるように正規化されているものとする. これを張り合わせて, ω の $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)$ 上の p 進積分 (p -adic integration)

$$\int_{\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)} |\omega|_p$$

が定義される.

さて, ω が \mathfrak{X} 上至る所で消えないと仮定する (この条件には, \mathfrak{X} の標数 p の点でも消えないこと, すなわち「 ω の係数が p で割れない」ことも含まれていることに注意). $x \in \mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)$ を固定する. $\text{mod } p$ 還元写像 $\varphi: \mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)$ による x の逆像を $U = \varphi^{-1}(x)$ とおく. x を中心とする p 進局所座標系 $\{x_1, \dots, x_n\}$ をとると, U 上で

$$x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow (p\mathbb{Z}_p)^n \subset (\mathbb{Z}_p)^n$$

は p 進解析的同相写像である. この局所座標系で, ω を $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ と書くと, ω は至る所で消えないので, f の値は p 進単数である. よって U 上で $|f(x)|_p = 1$ である. $(p\mathbb{Z}_p)^n$ は $(\mathbb{Z}_p)^n$ の指数 p^n の開部分群だから,

$$\int_U |\omega|_p = \int_{(p\mathbb{Z}_p)^n} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{p^n}$$

を得る．これを各 $x \in \mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)$ について足し合わせて，次の命題を得る．

命題 4.1 ([We2], 2.2.5).

$$\int_{\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)} |\omega|_p = \frac{|\mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)|}{p^n}$$

注意 4.2. これで，大雑把に言って，

$$(\text{代数多様体の } p \text{ 進的体積}) = (\mathbb{F}_p\text{-有理点の個数}) \times \frac{1}{p^n}$$

という等式が得られた．このように代数多様体の \mathbb{F}_p -有理点の個数を積分を使って計算するという手法は，整数論では伝統的に行われてきたものである．(例えば，玉河数との関係については [We2] を参照)

さて，この計算を零点を持つ微分形式に一般化しよう． $\omega \in \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p}^n)$ を \mathfrak{X} 上の n 次微分形式とし，その因子 $\text{div}(\omega) = \sum_{i=1}^r a_i \mathfrak{D}_i$ が $\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p$ の相対的単純正規交差因子であるとする． $I := \{1, \dots, r\}$ とおく． $J \subset I$, $J \neq \emptyset$ に対して $\mathfrak{D}_J := \bigcap_{j \in J} \mathfrak{D}_j$ とおき， $\mathfrak{D}_\emptyset := \mathfrak{X}$ とおく．また， $\mathfrak{D}_J^\circ := \mathfrak{D}_J \setminus \left(\bigcup_{j \in I \setminus J} \mathfrak{D}_j \right)$ とおく．このとき， ω の p 進積分に関して，次が成り立つ．

命題 4.3.

$$\int_{\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p)} |\omega|_p = \frac{1}{p^n} \sum_{J \subset I} |\mathfrak{D}_J^\circ(\mathbb{F}_p)| \prod_{j \in J} \frac{p-1}{p^{a_j+1} - 1}$$

$\text{div}(\omega) = 0$ のときは命題 4.3 は命題 4.1 に他ならない．命題 4.3 の証明は，命題 4.1 とほぼ同じであるが，零点を持つ微分形式の p 進積分の計算に，次の補題を用いる．

補題 4.4. 実数 $k_1, \dots, k_n > -1$ に対し，

$$\int_{(p\mathbb{Z}_p)^n} |x_1|_p^{k_1} \cdots |x_n|_p^{k_n} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{p^n} \prod_{i=1}^n \frac{p-1}{p^{k_i+1} - 1}$$

が成り立つ．

証明. 累次積分によって，

$$\int_{(p\mathbb{Z}_p)^n} |x_1|_p^{k_1} \cdots |x_n|_p^{k_n} dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{p\mathbb{Z}_p} |x_1|_p^{k_1} dx_1 \right) \cdots \left(\int_{p\mathbb{Z}_p} |x_n|_p^{k_n} dx_n \right)$$

であるから，

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} |x|_p^k dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{p^{k+1} - 1}$$

を $k > -1$ に対して示せばよい．

$p\mathbb{Z}_p$ を $p\mathbb{Z}_p = \coprod_{i=1}^{\infty} (p^i\mathbb{Z}_p) \setminus (p^{i+1}\mathbb{Z}_p)$ という形に分ける．このとき，各 $x \in (p^i\mathbb{Z}_p) \setminus (p^{i+1}\mathbb{Z}_p)$ に対して $|x|_p^k = p^{-ki}$ であり， $(p\mathbb{Z}_p)^i$ の p 進的体積は p^{-i} だから，

$$\begin{aligned} \int_{p\mathbb{Z}_p} |x|_p^k dx &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{-ik} \text{vol}((p^i\mathbb{Z}_p) \setminus (p^{i+1}\mathbb{Z}_p)) = \sum_{i=1}^{\infty} p^{-ik} (p^{-i} - p^{-(i+1)}) \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{i=1}^{\infty} (p^{-(k+1)})^i \end{aligned}$$

となる． $k > -1$ なので，この無限和は収束し，

$$(1 - p^{-1}) \cdot \frac{p^{-(k+1)}}{1 - p^{-(k+1)}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{p - 1}{p^{k+1} - 1}$$

に等しい． □

注意 4.5. 命題 4.3 と，弦理論的 E 関数の定義の右辺の形がよく似ていることに注目してもらいたい．この類似こそが [It3] における定理 1.1 の証明の出発点であった．しかし，命題 4.3 から弦理論的 E 関数の一致を示すためには，次節で説明する p 進 Hodge 理論などの数論幾何の高度な道具が必要となる．

注意 4.6. 補題 4.4 の証明から分かるように， p 進積分が収束するためには， $k_i > -1$ という条件が必要である．これは，定理 1.1 において特異点が高々ログ端末的であるという条件に対応している．さらに興味深いことに，特異点が高々ログ端末的であるという条件は，モチーフ積分の収束条件にも対応している ([Ba2])．このように， p 進積分・モチーフ積分のいずれを用いる場合でも，定理 1.1 の証明には「積分の収束条件」が必要であることは，興味深いことに思われる．

5. GALOIS 表現

本節では簡単のため， X を \mathbb{Q} 上定義された射影代数多様体とする（一般の代数体上でも全く同様である）． l を素数とする．このとき， $X_{\overline{\mathbb{Q}}} = X \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ の l 進エタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)$ には自然に $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が作用する． p を素数とする． \mathbb{Q}_p を p 進体とし，体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する．これにより， $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \subset \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ とみなせる．ここで，次の短完全系列がある．

$$0 \longrightarrow I_p \longrightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \longrightarrow 0$$

I_p を p における惰性群 (inertia group) と言う．また， $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ は幾何学的 Frobenius 元 (geometric Frobenius element) と呼ばれる $\overline{\mathbb{F}}_p$ の自己同形 $\text{Frob}_p : x \mapsto x^{1/p}$ によって位相的に生成されている．

$H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)$ への $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の作用は，次の 2 つの場合で全く様子が異なる．

- $p \neq l$ で， X の \mathbb{Z}_p 上の固有かつ滑らかなモデル \mathfrak{X} が存在する場合．（このとき X は p で良い還元 (good reduction) を持つと言う）
- $p = l$ の場合．

前者は有限体上の Weil 予想と関係し，後者は p 進 Hodge 理論と関係する ($p \neq l$ で X が p で悪い還元 (bad reduction) を持つ場合には，Galois 表現の分岐に関する興味深い現象が現れるが，本稿では省略する)．そして，前者と後者を結びつけるのが，Chebotarev の密度定理と呼ばれる代数的整数論の古典的な定理である．本節ではこれらについてどのような結果が知られているのかを簡単に説明する．

5.1. Weil 予想. $p \neq l$ で X が p で良い還元を持つ場合は，惰性群 I_p の $H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用は自明となり，幾何学的 Frobenius 元 Frob_p の作用のみが問題となる．これは Hasse-Weil ゼータ関数に関する Weil 予想 (Weil conjecture) として定式化されている ([De2], [De3])．ここでは，ゼータ関数を持ち出さずに，以下の 2 つの結果を述べる．

- (Lefschetz 固定点定理の類似) $|\mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)| = \sum_k (-1)^k \text{Tr}(\text{Frob}_p; H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l))$
- (Riemann 予想の類似) $P_k(t) = \det(1 - t \cdot \text{Frob}_p; H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l))$ とおくと， $P_k(t)$ は整数係数の多項式で，その全ての根の複素絶対値は $q^{-k/2}$ である．

注意 5.1. これらの結果を \mathbb{F}_p のみならずその全ての有限次拡大 \mathbb{F}_{p^r} で考え，エタールコホモロジーと特異コホモロジーの比較定理を用いることで，次のことが分かる：任意の $r \geq 1$ に対し $|\mathfrak{X}(\mathbb{F}_{p^r})| = |\mathfrak{Y}(\mathbb{F}_{p^r})|$ ならば $X_{\mathbb{C}}$ と $Y_{\mathbb{C}}$ の Betti 数は等しい．実際，Batyrev, Wang はこれを用いて，双有理同値な滑らかな極小モデルの Betti 数が等しいことを示した ([Ba1],[Wa])．しかし，Betti 数より詳しく，Hodge 数の一致を言うためには，次に述べる p 進 Hodge 理論が必要となる．

5.2. p 進 Hodge 理論. $p = l$ のときは，惰性群 I_p の $H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用は極めて複雑になる．このときは， p 進 Hodge 理論 (p -adic Hodge theory) とよばれる代数多様体の Hodge 数と Galois 表現を結びつける理論が存在する． \mathbb{C}_p を $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の p 進完備化とする．このとき，Faltings, 辻による Hodge-Tate 分解 (Hodge-Tate decomposition) と呼ばれる $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の作用を保つ標準的な分解

$$\bigoplus_{i,j \text{ s.t. } i+j=k} H^j(X_{\mathbb{Q}_p}, \Omega_{X_{\mathbb{Q}_p}}^i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(-i) \cong H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$$

が存在する．ここで $(-i)$ は Tate 捻りを表す．また， $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ は左辺の $H^j(X_{\mathbb{Q}_p}, \Omega_{X_{\mathbb{Q}_p}}^i)$ に自明に作用し，右辺には対角的に作用する (詳しくは [Fa], [Ts] を参照)． $(\mathbb{C}_p)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} = \mathbb{Q}_p$ かつ， $i \neq 0$ なら $(\mathbb{C}_p(i))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} = 0$ なので，

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^j(X, \Omega_X^i) = \dim_{\mathbb{Q}_p} (H_{\text{ét}}^{i+j}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(i))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$$

である．これより， $H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$ への $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の作用から Hodge 数が復元できる．

注意 5.2. なお， $H_{\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$ ではなく，その $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ 表現としての半単純化からも同様にして Hodge 数が復元できる．すなわち，Galois 表現の Grothendieck 群のレベルから Hodge 数が復元できる．この事実は難しくないが，定理 1.1 の証明は Galois 表現の Grothendieck 群の中で行われるので，一応念のため注意しておく．

5.3. Chebotarev の密度定理. 大雑把に言って, Chebotarev の密度定理は, 幾何学的 Frobenius 元の集合 $\{\text{Frob}_p\}$ が $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の中で稠密であることを主張する (詳しくは [Se]などを参照). ここでは, 次の形の Chebotarev の密度定理の応用を述べる.

命題 5.3. V, V' を $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続 l 進表現とし, 有限個を除く全ての素数 p に対し, 惰性群 I_p の作用が自明で, $\text{Tr}(\text{Frob}_p; V) = \text{Tr}(\text{Frob}_p; V')$ とする. このとき, V, V' の $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 表現としての半単純化が等しい.

命題 5.3 を Grothendieck 群の言葉で言い変えると次のようになる:

有限個を除く全ての素数 p に対し惰性群 I_p の作用が自明であるような $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続 l 進表現のなす Grothendieck 群を考える. このとき, その中の 2 つの元 $[V], [V']$ が等しいことと, 有限個を除く全ての素数 p に対し $\text{Tr}(\text{Frob}_p; [V]) = \text{Tr}(\text{Frob}_p; [V'])$ を満たすことは同値である.

ここで, トレースは短完全系列に関して加法的だから, Grothendieck 群のレベルで定義されることに注意せよ.

5.4. Hodge 数への応用. ここでは, これらの結果をまとめて Galois 表現の Hodge 数への応用を述べる. この議論が定理 1.1 の証明のプロトタイプになる.

命題 5.4. X, Y を \mathbb{Q} 上の滑らかな代数多様体とする. $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ を X, Y の \mathbb{Z} 上のモデルとする. もし有限個を除く全ての素数 p に対し,

$$|\mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)| = |\mathfrak{Y}(\mathbb{F}_p)|$$

なら, $X_{\mathbb{C}}$ と $Y_{\mathbb{C}}$ の E 多項式は等しい:

$$E(X_{\mathbb{C}}; u, v) = E(Y_{\mathbb{C}}; u, v)$$

証明. まず, コンパクト化と Leray スペクトル系列を用いた議論により ([De4] を参照), X, Y は \mathbb{Q} 上固有であると仮定してよい.

素数 l を固定し, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 表現の Grothendieck 群の中で,

$$[H_{c,\text{ét}}^*(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)] = \sum_k (-1)^k [H_{c,\text{ét}}^k(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)], \quad [H_{c,\text{ét}}^*(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)] = \sum_k (-1)^k [H_{c,\text{ét}}^k(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)]$$

とおく. ここで $H_{c,\text{ét}}^k$ はコンパクトな台を持つ l 進エタールコホモロジーを表す. このとき, 有限個を除く全ての素数 p に対し, Weil 予想 (Lefschetz 固定点定理の類似) により,

$$\text{Tr}(\text{Frob}_p; [H_{c,\text{ét}}^*(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)]) = |\mathfrak{X}(\mathbb{F}_p)| = |\mathfrak{Y}(\mathbb{F}_p)| = \text{Tr}(\text{Frob}_p; [H_{c,\text{ét}}^*(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)])$$

となるから, Chebotarev の密度定理 (命題 5.3) により, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 表現の Grothendieck 群の中で,

$$[H_{c,\text{ét}}^*(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)] = [H_{c,\text{ét}}^*(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)]$$

が分かる．Weil 予想 (Riemann 予想の類似) により，この両辺はウェイト・フィルトレーションを持つ (ウェイトは幾何学的 Frobenius 元的作用の固有値の複素絶対値で定める)．また， p 進 Hodge 理論により，各 i, j に対し $[H_{c,\acute{e}t}^*]$ のウェイト $i + j$ の部分から Hodge 数が復元できる (注意 5.2 を参照)．これより，

$$\sum_k (-1)^k h^{i,j}(\mathrm{Gr}_{i+j}^W H_c^k(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) = \sum_k (-1)^k h^{i,j}(\mathrm{Gr}_{i+j}^W H_c^k(Y_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$$

が分かり，従って $E(X_{\mathbb{C}}; u, v) = E(Y_{\mathbb{C}}; u, v)$ を得る． \square

6. 定理 1.1 の証明の方針

大雑把に言って，定理 1.1 の証明は次のように進む．

- まず，特殊化の議論によって代数体上に帰着する (以下では簡単のため \mathbb{Q} 上とする)．
- 有限個を除く全ての素数 p に対し， p 進積分を使って \mathbb{F}_p -有理点の個数 (の組み合わせ) が等しいことを示す．
- Weil 予想 (Lefschetz 固定点定理の類似) により，これは Galois 表現 (の組み合わせ) への幾何学的 Frobenius 元のトレースが一致することを意味する．
- Chebotarev の密度定理 (命題 5.3) により，Galois 表現 (の組み合わせ) が Grothendieck 群の中で等しいことが分かる．
- Weil 予想 (Riemann 予想の類似) と p 進 Hodge 理論により，Hodge 数 (の組み合わせ) が等しいことが分かる．

注意 6.1. なお，「(の組み合わせ)」を正当化するには，適当な Grothendieck 群の中のエ元を考える必要があるが，ここでは詳細は省略する．

定理 1.1 の証明の方針. $\rho: Y \rightarrow X$, $\sigma: Z \rightarrow X$ を 2 つの特異点解消とする．このとき， ρ から計算された弦理論的 E 関数と， σ から計算された弦理論的 E 関数が等しいことを示したい． Y, Z を支配する特異点解消を Z と置きなおせば，定理 1.1 は，射 $\tau: Z \rightarrow Y$ で， $\rho \circ \tau = \sigma$ を満たすものが存在する場合に示せば十分である．

[De1] により，標数 0 の代数多様体の固有かつ滑らかな族において，ファイバーの Hodge 数は一定なので，特殊化をとることで $X, Y, Z, \rho, \sigma, \tau$ は代数体上定義されていると仮定してよい．ここでは簡単のため，これらが \mathbb{Q} 上定義されているとする．

さて，十分大きな素数 p をとり， X, Y, Z の \mathbb{Z}_p 上の固有かつ滑らかなモデルを $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ とおく． X の次元を n とする．簡単のため， \mathfrak{X} 上に至る所で消えない微分形式 $\omega \in \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p}^n)$ が存在すると仮定する．

このとき， $\rho \circ \tau = \sigma$ より $\tau^*(\rho^*\omega) = \sigma^*\omega$ なので， $\tau: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Y}$ に関する p 進積分の変数変換公式より，

$$\int_{\mathfrak{Y}(\mathbb{Z}_p)} |\rho^*\omega|_p = \int_{\mathfrak{Z}(\mathbb{Z}_p)} |\tau^*(\rho^*\omega)|_p = \int_{\mathfrak{Z}(\mathbb{Z}_p)} |\sigma^*\omega|_p$$

が得られる．命題 4.3 により， \mathbb{F}_p -有理点の個数の重み付き和

$$\frac{1}{p^n} \sum_{J \subset I} |\mathcal{D}_J^\circ(\mathbb{F}_p)| \prod_{j \in J} \frac{p-1}{p^{a_j+1}-1}$$

は Y でも Z でも等しいことが分かる (\mathcal{D}_J° の定義は §4 と同様に行う) ．

この一致は，有限個を除く全ての素数 p で成り立つから，Weil 予想 (Lefschetz 固定点定理の類似) と Chebotarev の密度定理 (命題 5.3) により，

$$\sum_{J \subset I} [H_{c,\text{ét}}^*((D_J^\circ)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)] \prod_{j \in J} \frac{p-1}{[\mathbb{Q}_l(-a_j-1)]-1}$$

が Y でも Z でも等しいことが分かる (正確には，上式は分母を持つので，分母を払った式が $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 表現の Grothendieck 群の中で等しい，と言うべきである) ．

従って，命題 5.4 の証明と同じ議論により，

$$\sum_{J \subset I} E(D_J^\circ; u, v) \prod_{j \in J} \frac{uv-1}{(uv)^{a_j+1}-1}$$

が Y でも Z でも等しいことが分かる ．

これで定理 1.1 が示された ． □

注意 6.2. 参考までに，いくつかの技術的な補足をしておく (詳しくは [It3] を参照) ．

- 一般には K_X は \mathbb{Q} -Cartier 因子だから， $\omega \in \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p}^n)$ ではなく，適当な r に対して $(\Omega_{\mathfrak{X}/\mathbb{Z}_p}^n)^{\otimes r}$ の切断を考える．そのため，§4 の p 進積分もこれに応じて一般化しておく必要がある ．
- また，一般には， \mathfrak{X} 上に至る所で消えない微分形式 $\omega \in \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/R}^n)$ は存在しないが，Zariski 局所的に p 進積分を考え，それを張り合わせれば，残りの議論は全く同様にできる ．
- K_X が Cartier 因子でないときに定理 1.1 を示すためには，「分数 Tate 捻り」 $\mathbb{Q}_l(\frac{1}{d})$ を考える必要がある ．このような Tate 捻りは，代数体を適当に有限次拡大すれば l 進 \log ， l 進 \exp を用いて定義できる ．また，「分数 Tate 捻り」に対して p 進 Hodge 理論の議論が適用できることも確かめておく必要があるが，それは難しくない ．

謝辞．本稿の内容は筆者の修士論文の一部 ([It1]) 及び，その一般化 ([It2]) が元になっている ．この場を借りて，加藤和也先生と指導教官の斎藤毅先生に感謝する ．また，研究集会中に有益な助言をくださった小林正典先生，斎藤政彦先生，高橋篤史氏，上原北斗氏に感謝する ．そして，講演の機会をくださった松下大介先生，秦泉寺雅夫先生に感謝します ．

REFERENCES

- [AKMW] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, *Torification and Factorization of Birational Maps*, math.AG/9904135, preprint, 1999.
- [Ba1] V. V. Batyrev, *Birational Calabi-Yau n -folds have equal Betti numbers*, in *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, 1–11, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [Ba2] V. V. Batyrev, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*, in *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)*, 1–32, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.
- [BB] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers* *Invent. Math.* **126** (1996), no. 1, 183–203.
- [BD] V. V. Batyrev, D. I. Dais, *Strong McKay correspondence, string-theoretic Hodge numbers and mirror symmetry*, *Topology* **35** (1996), no. 4, 901–929.
- [BM] L. A. Borisov, A. R. Mavlyutov, *String cohomology of Calabi-Yau hypersurfaces via mirror symmetry*, Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn, preprint, 2002.
- [De1] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 35*, (1968), 259–278.
- [De2] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43*, (1974), 273–307.
- [De3] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52*, (1980), 137–252.
- [De4] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 40*, (1971), 5–57.
- [De5] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 44*, (1974), 5–77.
- [DL] J. Denef, F. Loeser, *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, 201–232.
- [Fa] G. Faltings, *p -adic Hodge theory*, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 1, 255–299.
- [It1] T. Ito, *A note on Hodge numbers of Calabi-Yau manifolds*, Master’s thesis, University of Tokyo, March 2001.
- [It2] T. Ito, *Birational smooth minimal models have equal Hodge numbers in all dimensions*, preprint, 2001
- [It3] T. Ito, *Stringy Hodge numbers and p -adic Hodge theory*, preprint, 2002
- [Kon] M. Kontsevich, *Lecture at Orsay (December 7, 1995)*.
- [M] D. R. Morrison, *The geometry underlying mirror symmetry*, in *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, 283–310, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [Se] J.-P. Serre, *Abelian l -adic representations and elliptic curves*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1968.
- [Ts] T. Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, *Invent. Math.* **137** (1999), no. 2, 233–411.
- [Wa] C.-L. Wang, *On the topology of birational minimal models*, *J. Differential Geom.* **50** (1998), no. 1, 129–146
- [We1] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.
- [We2] A. Weil, *Adeles and algebraic groups*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.
- [Ya] T. Yasuda, *Twisted jet, motivic measure and orbifold cohomology*, Master’s thesis, University of Tokyo, math.AG/0110228, 2002.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO

E-mail address: itote2@ms.u-tokyo.ac.jp

局所 GROMOV-WITTEN 不変量と相対 GROMOV-WITTEN 不変量

高橋 宣能

0. INTRODUCTION

単に「開代数多様体」と言えばコンパクトでない代数多様体を意味するものと思われるが、ここでは開代数多様体の二つの典型例においてそれぞれの文脈で Gromov-Witten 不変量を考え、それらが符号を除いて一致する(らしい)ことを見る。

一つは、ある多様体におけるコンパクト部分多様体の近傍である。たとえば、 X をコンパクト多様体、 $V \rightarrow X$ をベクトル束とすると、 X を 0-切断として埋め込むと $X \subset V$ はそのような例になる。このとき X に入っている曲線が V の Gromov-Witten 不変量にどれだけ寄与しているかを考えることができる。これが局所 Gromov-Witten 不変量である (§1)。

もう一つの例として、 X の中に閉部分多様体 B を取るとき $X \setminus B$ を考えることができる。より正確には (X, B) を考える、と言ったほうがよい。このとき $X \setminus B$ の中の(コンパクトとは限らない)曲線の数え上げ、より正確には X の中の(コンパクトな)曲線について B との交わり方・接し方に条件を付けたものの数え上げ、が考えられる。このようにして相対 Gromov-Witten 不変量が定義される (§2)。

ここでは特に $X = \mathbb{P}^2$, B を 3 次以下の非特異曲線として、第一の場合として V を $\mathcal{O}_X(-B)$ に対応する直線束としたもの、第二の場合として (X, B) を考える。このとき

定理 0.1.

$X \subset V$ の、種数 0, 次数 d における局所 GW 不変量

と

(X, B) の、種数 0, B 上の素点の数 1, 次数 d における相対 GW 不変量

は、符号 $(-1)^{(\deg B) \cdot d - 1}$ を除いて等しい。

さらに、現在詳細をチェック中だが次のことが成り立つようである。 B を(安全のため)直線とする。まず V にはスカラー倍によって S^1 が作用し、ここから同変局所 Gromov-Witten 不変量、さらにその母函数である同変局所 Gromov-Witten potential というものを定義することができる。同変コホモロジー環 $H_{S^1}^*(pt., \mathbb{C})$ の標準的な生成元を λ, t を $H^*(X, \mathbb{C})$ の座標とすると同変局所 Gromov-Witten potential は $F(\lambda, t)$ のかたちを書くことができ、その λ に関する定数項が(「同変」の付かない)局所 Gromov-Witten potential になっている。このとき

定理(予定) 0.2.

F の λ^i における係数

と

(X, B) の、種数 0, B 上の素点の数 i における相対 GW 不変量の母函数

は、符号を除いて等しい。

証明は、双方が符号を除いて同じかたちの WDVV 方程式を満たすことを示すことにより行われる (§3)。

1. 局所 GROMOV-WITTEN 不変量

前節と同じく $X = \mathbb{P}^2$, B を 3 次以下の非特異曲線、 V を $\mathcal{O}_X(-B)$ に対応する直線束としておく。以下、記号は [Gi1], [Gi2] にならう。

このとき

- $X_{g,n,d}$ X への種数 g , 次数 d , n 点付きの安定写像のモデュライ空間
- $e_1, \dots, e_n : X_{g,n,d} \rightarrow X$ を評価写像
- $V'_{g,n,d}$ を $X_{g,n,d}$ 上のベクトル束で、 $f : \Sigma \rightarrow X$ に対応する点でのファイバーが $H^1(\Sigma, f^*V)$ であるようなもの

とする (といってもここでは $g = 0$ の場合しか使わないが)。 V には S^1 がスカラー倍で作用している。 S^1 -同変オイラー類を $Euler_{S^1}$ で表す。

定義 1.1. $d > 0$ のとき

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle_{n,d} := \int_{[X_{0,n,d}]} e_1^* t_1 \cdots e_n^* t_n \cdot Euler_{S^1}(V'_{0,n,d}),$$

また

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle_{n,0} := \int_{[X_{0,n,0}]} e_1^* t_1 \cdots e_n^* t_n \cdot Euler_{S^1}(V'_{0,n,0}) Euler_{S^1}(V)^{-1}$$

として

$$F(\lambda, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{d=0}^{\infty} q^d \langle t, \dots, t \rangle_{n,d}$$

とおく。さらに $H^*(X, \mathbb{C}(\lambda))$ 上の pairing

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_X \phi \cdot \psi \cdot Euler_{S^1}^{-1}(V)$$

を定め、 \langle, \rangle に関する gradient を ∇ とする。

定理 1.2 ([Gi1], WDVV 方程式). $H^*(X, \mathbb{C})$ の線形な座標 (t_α) をとるとき、

$$\langle \nabla F_{\alpha,\beta}, \nabla F_{\gamma,\delta} \rangle = \langle \nabla F_{\alpha,\delta}, \nabla F_{\gamma,\beta} \rangle.$$

ただし、 f_α は $\partial f / \partial t_\alpha$ を意味する。

この定理は実際にはもっと一般の X, V について証明されている。

L を直線の類、 P を点の類として $t = t_0 \cdot 1 + t_1 \cdot L + t_2 \cdot P$ と書き、 $b := \deg B \leq 2$ とすると

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{6} (b^2 \lambda^{-3} t_0^3 + 3b \lambda^{-2} t_0^2 t_1 + 3 \lambda^{-1} t_0^2 t_2 + 3 \lambda^{-1} t_0 t_1^2) \\ &\quad + \sum_{d>0} q^d e^{dt_1} \sum_n \langle P^n \rangle_{n,d} \frac{t_2^n}{n!}, \end{aligned}$$

また $n_d^i \in \mathbb{Q}$ を使って

$$\sum_n \langle P^n \rangle_{n,d} \frac{t_2^n}{n!} = \sum_i n_d^i \frac{\lambda^i}{i!} \frac{t_2^{(3-b)d+i}}{((3-b)d+i)!}$$

と書ける。 n_d^0 が通常の局所 Gromov-Witten 不変量である。

ここで $\alpha = \beta = 2, \gamma = \delta = 1$ として WDVV 方程式を書き下すと

$$F_{222} = \lambda(F_{112}^2 - F_{122}F_{111}) + b(F_{222}F_{111} - F_{122}F_{112})$$

となる。煩わしいので $b = 1$ の場合に限ると、展開して

$$\begin{aligned} n_d^i &= i \sum_{j+k=i-1, e+f=d} \binom{i-1}{j} \left\{ \binom{2d+i-3}{2e+j-1} e^2 f^2 - \binom{2d+i-3}{2e+j-2} e f^3 \right\} n_e^j n_f^k \\ &+ \sum_{j+k=i, e+f=d} \binom{i}{j} \left\{ \binom{2d+i-3}{2e+j-3} f^3 - \binom{2d+i-3}{2e+j-2} e f^2 \right\} n_e^j n_f^k. \end{aligned}$$

$n_1^0 = 1, n_d^i = 0 (i \geq d)$ よりすべての n_d^i が定まることになる。

2. 相対 GROMOV-WITTEN 不変量

一般論としては Ionel-Parker([IP]), Li-Ruan([LR]) による symplectic 幾何からのものや Gathmann([Gal]) による代数的なものがあるが、ここではごく限られた場合のみを扱う。すなわち $X = \mathbb{P}^2, B$ を直線または非特異な二次曲線とする。ここでも $b = \deg B$ と書く。

$i \geq 0$ を整数、 d_0, \dots, d_i を正整数、また $(3-b)d = \sum d_a$ とする。一般の位置にある X の点 $P_1, \dots, P_{(3-b)d+i}$ および一般の位置にある B の点 P_0 を取って、次の不変量を定義する。

$$\begin{aligned} M_{d_0, \dots, d_i} &:= \#\{C \subset X \mid C: \text{rational}, \\ &\text{正規化を } \nu: \mathbb{P}^1 \rightarrow C \text{ として} \\ &\nu^* B \text{ は } \sum_{a=0}^i d_a Q_a \text{ のかたち,} \\ &P_1, \dots, P_{(3-b)d+i} \in C\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{d_0; d_1, \dots, d_i} &:= \#\{C \subset X \mid C: \text{rational}, \\ &\text{正規化を } \nu: \mathbb{P}^1 \rightarrow C \text{ として} \\ &\nu^* B \text{ は } \sum_{a=0}^i d_a Q_a \text{ のかたち,} \\ &P_1, \dots, P_{(3-b)d+i-1} \in C, \\ &P_0 = \nu(Q_0)\}. \end{aligned}$$

ここで “#” は、対応するパラメータ空間の length に d_a たちを保つ置換の数をかけたものである。特に、 $i = 0$ ならば単にそのような曲線の数を数えればよいことが示される。

注 2.1. Caporaso-Harris([CH]), Vakil([V]) は上の不変量についての漸化式を得ているが、ここでの議論と異なり WDVV 方程式とは結び付かないように思われる。

定理 2.2.

$$\begin{aligned} M_d &= (\deg B) \cdot d m_d, \\ n_d^0 &= (-1)^{(\deg B)d-1} m_d. \end{aligned}$$

すなわち、局所 Gromov-Witten 不変量と相対 Gromov-Witten 不変量はある意味双対的である(らしい)。

注 2.3. B が非特異三次曲線の場合には (X, B) は対数的 Calabi-Yau となり、“対数的ミラー対称性”の対象となる([Ta2], 対数的ミラー対称性については[Ta1] も見よ)。この場合も上の定理と同様のことが成り立つ。

この場合条件を満たす曲線と B との交わりは B の $3d$ -torsion となるので、位数 $3d$ の点を決め、この点で交わるもののみを数えて m'_d とする ([Ta2] の m_d)。このとき M_d はおよそ $(3d)^2 m'_d$ と考えることができる (ただし多重被覆の寄与が入る)。

n_d^0 ([Ta2] では K_d) の方は [CKYZ] で局所ミラー対称性に関連して計算されている。多重被覆の寄与を取り去ったものを n_d とすると、 $n_d = (-1)^{d-1} 3d m'_d$ となるらしい ([Ta2] で予想、 m'_d をいくらか仮想的な不変量で置き換えた場合について [Ga2] で証明されている)。

以下、詳細は現在チェック中である。 B は直線としておく。
このとき [CH] より

$$M_{d_0, \dots, d_i} = \sum d_a m_{d_a; d_0, \dots, \hat{d}_a, \dots, d_i}$$

が成り立つ。 m_d^i を

$$\begin{aligned} m_d^i &:= \frac{1}{i+1} \sum_{\sum d_a = d} \left(\prod_{a=0}^i d_a \right)^{-1} M_{d_0, \dots, d_i} \\ &= \sum_{\sum d_a = d} \left(\prod_{a=1}^i d_a \right)^{-1} m_{d_0; d_1, \dots, d_i} \end{aligned}$$

により定義しておく。

定理 (予定) 2.4.

$$n_d^i = (-1)^{d+i-1} m_d^i.$$

3. 証明の概要

上の定理 (予定) を証明するには、 $m_1^0 = 1$, $m_d^i = 0 (i \geq d)$ なので、次の漸化式を示せばよい。

$$\begin{aligned} m_d^i &= i \sum_{j+k=i-1, e+f=d} \binom{i-1}{j} \left\{ \binom{2d+i-3}{2e+j-1} e^2 f^2 - \binom{2d+i-3}{2e+j-2} e f^3 \right\} m_e^j m_f^k \\ &\quad + \sum_{j+k=i, e+f=d} \binom{i}{j} \left\{ \binom{2d+i-3}{2e+j-2} e f^2 - \binom{2d+i-3}{2e+j-3} f^3 \right\} m_e^j m_f^k. \end{aligned}$$

この証明には [KM] における \mathbb{P}^2 上の有理曲線の数え上げの場合と同様の曲線の退化を用いる。ただしここでは通常安定写像のモデュライとはすこし異なるパラメータ空間 $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(d_0, \dots, d_i)}$ を使う。いくつかその特徴を挙げると、

- \mathcal{M} は \mathbb{P}^1 上の異なる $(i+5)$ 点のモデュライの部分コンパクト化である
- 曲線族 $\pi: \mathcal{U}^{(d_0, \dots, d_i)} \rightarrow \mathcal{M}$ および $(i+5)$ 個の切断 $\sigma_1, \dots, \sigma_4, \tau_0, \dots, \tau_i$ が与えられている
- τ_a の像は nonsmooth locus と交わるが、 $D_a := d_a \cdot \tau_a(\mathcal{M})$ は Cartier

など。

\mathcal{M} から 種数 0, 4 点付安定曲線のモデュライ $\mathcal{M}_{0,4}$ への射影が σ_i によって定められる。そこで $\sigma_1 = \sigma_2$ および $\sigma_1 = \sigma_3$ に対応する $\mathcal{M}_{0,4}$ の点の引き戻しを考えると、 \mathcal{M} の境界因子たちの間の線形な関係が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \text{ 上に一般の点 } P_1, \dots, P_{2d+i-1}, \text{ 直線 } l_1, l_2 \text{ を取って、} \\ \mathcal{N} := \{f : C \rightarrow \mathbb{P}^2 \mid C = \pi^{-1}(x), x \in \mathcal{M} \\ f^*B = \sum \mathcal{D}_a|_C \\ f(\sigma_1(x)) = P_1, f(\sigma_2(x)) = P_2, f(\sigma_3(x)) \in l_1, f(\sigma_4(x)) \in l_2 \\ P_3, \dots, P_{2d+i-1} \in f(C)\} \end{aligned}$$

とおく。 \mathcal{N} における \mathcal{M} の境界因子の逆像は

1. $f(\sigma_3(x)), f(\sigma_4(x)) \in l_1 \cap l_2$ となるもの
2. C が二つの成分からなり、かつその交点が B 上に写されないもの
3. C が二つの成分からなり、かつその交点が $\mathcal{D}_a|_C$ の台、したがって B 上に写されるもの

に分けられる。

(1) のようなものの数は $\mathcal{M}_{d_0, \dots, d_i}$ で、漸化式の左辺を与える。(2) および (3) のようなものの数は重複度も考えると $M_{\dots}M_{\dots}$ および $d_a M_{\dots}m_{\dots}$ の形となり、漸化式右辺の一つ目および二つ目の項を与える。

REFERENCES

- [CH] Caporaso, L., and Harris, J.: Counting plane curves of any genus. *Invent. Math.* **131** no. 2, 345–392 (1998)
- [CKYZ] Chiang, T.-M., Klemm, A., Yau, S.-T., and Zaslow, E.: Local mirror symmetry: calculations and interpretations. *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** no. 3, 495–565 (1999)
- [Ga1] Gathmann, A.: Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces. Preprint, math.AG/9908054
- [Ga2] Gathmann, A.: Relative Gromov-Witten invariants and the mirror formula. Preprint, math.AG/0009190
- [Gi1] Givental, A.: Equivariant Gromov-Witten invariants. *Int. Math. Res. Not.* no. 13, 613–663 (1996)
- [Gi2] Givental, A.: Elliptic Gromov-Witten invariants and the generalized mirror conjecture. In *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 107–155 (1998)
- [IP] Ionel, E., and Parker, T.: Relative Gromov-Witten Invariants. Preprint, math.SG/9907155
- [KM] Kontsevich, M., and Manin, Y.: Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry. *Commun. Math. Phys.*, **164** no. 3, 525–562 (1994)
- [LR] Li, A., and Ruan, Y.: Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds I. Preprint, math.AG/9803036
- [Ta1] Takahashi, N.: Mirror symmetry and \mathbb{C}^\times . *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** no. 1, 29–36 (2001)
- [Ta2] Takahashi, N.: Log Mirror Symmetry and Local Mirror Symmetry. *Commun. Math. Phys.* **220** no. 2, 293–299 (2001)
- [V] Vakil, R.: Counting curves on rational surfaces. *Manuscr. Math.* **102** no. 1, 53–84 (2000)

739-8526 東広島市鏡山 1-3-1 広島大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail address: takahasi@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

CFT Description of String Theory on G_2 Manifolds

Yuji Sugawara (collaborated with T. Eguchi)

Department of Physics, University of Tokyo

Tokyo, Japan 113-0033

Talk given at Workshop at Hokkaido University, December 2001

Abstract

In this talk I discuss some aspects of string theory on manifolds with G_2 holonomy from the viewpoints of exact conformal field theory. We first present an infinite series of consistent superstring vacua corresponding to non-compact G_2 manifolds based on [1]. Secondly, we construct the exact partition functions for the superstrings on compact G_2 manifolds of the type $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$, where the Calabi-Yau 3 sectors are given by arbitrary Gepner models. The latter part is based on our second paper [2].

1 Introduction

Recently 7-dimensional manifolds with G_2 holonomy are receiving a lot of attentions [3]-[22]. These manifolds provide $\mathcal{N} = 1$ 4-dimensional compactifications of M-theory which are of fundamental physical interest. They also play an interesting role in a novel duality involving gauge and gravitational fields. In the duality conjectured by Vafa [4] Type IIA theory compactified on deformed conifold with D6-branes and Type IIA theory on resolved conifold with RR flux are related. This duality has been explained by lifting the Type IIA configurations to the M-theory backgrounds on three different manifolds of G_2 holonomy which are smoothly connected to each other due to quantum effects [5, 7, 18].

In the non-compact cases explicit Ricci flat metrics on manifolds of exceptional holonomy (G_2 and $\text{Spin}(7)$) have been known for some time [23, 24]. Recently new metrics have been discussed by various authors [25, 26, 27] while the existence theorems of metrics in the compact cases are given in [28].

On the other hand, perturbative string theory compactified on G_2 manifold is also an important subject, since it is a tractable problem exactly analyzed at quantum level. Quite interestingly, such world-sheet description is known to possess some exotic features, i.e. existence of tricritical Ising model and extended conformal symmetry [29, 30, 31].

In this talk I review the recent our two papers [1, 2] studying the world-sheet description of string theory on G_2 manifolds. In the first paper [1] we presented an infinite series of consistent superstring vacua corresponding to non-compact G_2 manifolds. In the second paper we constructed the exact partition functions for the superstrings on compact G_2 manifolds of the type $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$, where the Calabi-Yau 3 sectors are given by arbitrary Gepner models [32].

The recent related references are [33, 34, 35, 36, 37].

2 SCFT on Non-compact G_2 Manifolds

We first try to construct CFT models corresponding to non-compact G_2 manifolds. We start with the ‘‘Gepner model like’’ ansatz: $\mathcal{N} = 1$ Liouville + $\sum (\mathcal{N} = 1 \text{ minimal})$. The sector of $\mathcal{N} = 1$ Liouville system describes a non-compact space-time and consists of a scalar field ϕ coupled to the background charge and a free Majorana fermion field ψ . Thus the total system consists of a CFT describing the geometry of the G_2 manifold, the $\mathcal{N} = 1$ Liouville theory and an additional free boson and fermion associated with the transverse direction of the Minkowski space \mathbf{R}^3 .

Now, the problem is to construct a CFT model possessing the following properties:

- $c = 7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ (critical dim.)
- world-sheet $\mathcal{N} = 1$ (with suitable GSO projection)

- realize 3-dim. space-time $\mathcal{N} = 2$ SUSY (4 SUSY charges)
- modular invariance
- stable (no tachyon in normalizable physical spectrum)

We have found the next infinite series of solutions;

$$\frac{\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1} \times \mathcal{M}_{m+2}^{\mathcal{N}=1}}{\text{"}\mathbf{Z}_{m+1}\text{"}} \times \mathbf{R}_\phi, \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \quad (2.1)$$

Here $\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}$ denotes the m -th $\mathcal{N} = 1$ unitary minimal model (with central charge $c(m) = 3/2(1 - 8/m(m+2))$) and the symbol “ \mathbf{Z}_{m+1} ” stands for some orbifoldization. \mathbf{R}_ϕ denotes the $\mathcal{N} = 1$ Liouville sector. Because of the criticality condition the Liouville background charge should be equal to

$$Q = 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{m(m+4)}}. \quad (2.2)$$

More precisely, we define $\mathcal{N} = 1$ superconformal field theories with a parameter $m = 2, 3, 4, \dots$ as the models with the following conformal blocks of toroidal partition functions (we only denote the part depending on GSO projection) ;

$$F_{rs}^{(m)}(\tau) \equiv \sum_{p=1}^{m+1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\theta_3}{\eta} \chi_{r,p}^{(m)\text{NS}} \chi_{p,s}^{(m+2)\text{NS}} - \frac{1}{2} \frac{\theta_4}{\eta} \chi_{r,p}^{(m)\widetilde{\text{NS}}} \chi_{p,s}^{(m+2)\widetilde{\text{NS}}} \right\} \quad (2.3)$$

$$- \sum_{p=1}^{m+1} \frac{\theta_2}{\eta} \chi_{r,p}^{(m)\text{R}} \chi_{p,s}^{(m+2)\text{R}} \quad (2.4)$$

where $\chi_{r,s}^{(m)I}$ ($I = \text{NS}, \widetilde{\text{NS}}, \text{R}$) denotes the character of $\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}$. The sum of p runs over

$$\begin{cases} r - p \equiv s - p \equiv 0 \pmod{2} & \text{for NS} \\ r - p \equiv s - p \equiv 1 \pmod{2} & \text{for R} \end{cases}$$

A single power of θ_i is interpreted as the contribution of a transverse fermion in Minkowski 3-space and the fermion of the $\mathcal{N} = 1$ Liouville sector.

$F_{rs}^{(m)}(\tau)$ are also characterized by the following identity;

$$0 \equiv \chi_{r-1}^{(m-2)}(\tau) \cdot \frac{1}{\eta^4} (\theta_3^4 - \theta_4^4 - \theta_2^4) = 2 \sum_{s=1}^{m+3} F_{rs}^{(m)}(\tau) \chi_{s-1}^{(m+2)}(\tau). \quad (2.5)$$

Because of this identity (2.5) $F_{r,s}^{(m)}$ are expected to vanish for all values of m, r, s ,

$$F_{r,s}^{(m)}(\tau) \equiv 0, \quad \text{all } m, r, s. \quad (2.6)$$

as is expected from the existence of space-time SUSY. In fact, one can verify that $F_{rs}^{(m)}(\tau)$ has the following structure for arbitrary m ;

$$F_{rs}^{(m)}(\tau) = F_1(\tau)A_{rs}(\tau) + F_2(\tau)B_{rs}(\tau), \quad (2.7)$$

where

$$F_1(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta_3}{\eta}}\chi_0^{\text{tri}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta_4}{\eta}}\tilde{\chi}_0^{\text{tri}} - \sqrt{\frac{\theta_2}{2\eta}}\chi_{7/16}^{\text{tri}} \quad (2.8)$$

$$F_2(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta_3}{\eta}}\chi_{1/10}^{\text{tri}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta_4}{\eta}}\tilde{\chi}_{1/10}^{\text{tri}} - \sqrt{\frac{\theta_2}{2\eta}}\chi_{3/80}^{\text{tri}}, \quad (2.9)$$

($\chi_h^{\text{tri}}, \tilde{\chi}_h^{\text{tri}} : \mathcal{N} = 1$ character of tricritical Ising model $\cong \mathcal{M}_3^{\mathcal{N}=1}$, $c = 7/10$) $A_{rs}(\tau)$, $B_{rs}(\tau)$ are characters of some ($\mathcal{N} = 0$) unitary RCFTs. We can prove that the functions F_1, F_2 identically vanish. This fact leads us to (2.6), and is consistent to the claim by Shatashvili-Vafa [29].

As is obvious from the construction, blocks $F_{r,s}^{(m)}$ have a good modular properties

$$F_{rs}^{(m)}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{r'=1}^{m-1} \sum_{\substack{s'=1 \\ |s'+r'|\equiv 0 \pmod{2}}}^{m+3} S_{rr'}^{(m-2)} S_{ss'}^{(m+2)} F_{r's'}^{(m)}(\tau), \quad (2.10)$$

$$F_{rs}^{(m)}(\tau+1) = \exp\left\{2\pi i \left(\frac{1}{3} + \frac{r^2}{4m} - \frac{s^2}{4(m+4)}\right)\right\} F_{rs}^{(m)}(\tau). \quad (2.11)$$

Here $S_{rr'}^{(k)} \equiv \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{\pi r r'}{k+2}\right)$ denotes the modular matrix of $SU(2)_k$. The following combination of conformal blocks gives a modular invariant partition function:

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{r, \bar{r}=1}^{m-1} \sum_{s, \bar{s}=1}^{m+3} Z_0(\tau, \bar{\tau}) (N_{r, \bar{r}}^{(m-2)} N_{s, \bar{s}}^{(m+2)} + N_{r, m-\bar{r}}^{(m-2)} N_{s, m+4-\bar{s}}^{(m+2)}) F_{rs}^{(m)}(\tau) \overline{F_{\bar{r}\bar{s}}^{(m)}(\bar{\tau})}, \quad (2.12)$$

$$s + r \equiv \bar{s} + \bar{r} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Here we may use any coefficient set of modular invariants $N_{r, \bar{r}}^{(m-2)}, N_{s, \bar{s}}^{(m+2)}$ of $SU(2)_{m-2}, SU(2)_{m+2}$ theories. Z_0 denotes the trivial part of the partition function which does not enter into the GSO projection

$$Z_0 = \frac{1}{|\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)|^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dp dp_L \exp\left(-4\pi\tau_2 \left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p_L^2 + \frac{1}{8}Q^2 - \frac{(c_L + 1)}{24}\right)\right) \\ = \frac{1}{\tau_2 |\eta(\tau)|^4}, \quad (2.13)$$

where c_L denotes the Liouville central charge $c_L = 1 + 3Q^2$ and $\tau_2 = \text{Im } \tau$. $p_L(p)$ is the Liouville (Minkowski) momentum. As is well-known, Liouville spectrum has a gap $h(L) \geq Q^2/8$.

We note that there exists a unique operator (in each chiral sector) which generates the analogue of the spectral flow in $\mathcal{N} = 2$ theories between NS and Ramond sectors and is identified as the space-time SUSY operator in the above partition function. In fact the operator $\Psi = \phi_{1,2}^{(m)} \phi_{2,1}^{(m+2)}$ contained in R sector has a dimension $h_{1,2}^{(m)} + h_{2,1}^{(m+2)} = 3/8$ for any values of m . When it is properly dressed by the superconformal ghost and spin fields, it gives a current of conformal dimension 1

$$J_{L,R} = e^{-\phi_{gh}/2} S_\alpha \Psi_{L,R}, \quad (2.14)$$

(spin field S_α contains the contribution from the fermion of $\mathcal{N} = 1$ Liouville theory and has dimension $2/8$). In this way we have confirmed that our models possess the correct number of space-time SUSY (3-dim. $\mathcal{N} = 2$).

Dimension of the fields $\phi_{r,p}^{(m)} \phi_{p,s}^{(m+2)}$ which appear in the block $F_{r,s}^{(m)}$ is in general given by

$$h_p^{r,s} = \frac{1}{4} \left(p - \frac{r+s}{2} \right)^2 + \frac{((m+4)r - ms)^2 - 16}{16m(m+4)} + \frac{\epsilon}{8}, \quad (2.15)$$

where $\epsilon = 0$ for $p+r, p+s \equiv 0 \pmod{2}$ in NS sector and $\epsilon = 1$ for $p+r, p+s \equiv 1 \pmod{2}$ in R sector. Thus in the ‘‘graviton orbit’’ $r = s = 1$,

$$h_p^{1,1} = \frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{\epsilon}{8}, \quad p \leq m+1. \quad (2.16)$$

Hence fields in the NS sector of graviton orbit all possess integer conformal dimensions. This suggests the existence of an extension of the chiral algebra to some algebra involving higher spin fields in our construction. In fact $h_p^{r,s}$ and $h_{p\pm 2}^{r,s}$ differ by integers for any p, r, s and it seems quite likely that the sum over the product of minimal characters $\sum_p \chi_{r,p}^{(m)*} \chi_{p,s}^{(m+2)*}$ provides a character of an irreducible representation (r, s) of the extended algebra. Such an extended algebra for manifolds with exceptional holonomy was first introduced by Shatashvili and Vafa [29] and further studied in refs.[30, 31]. We also note the pairing of NS and Ramond states

$$h_{p+1}^{r,s} - h_p^{r,s} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \text{integer}, \quad p = \text{odd}. \quad (2.17)$$

The dimension $3/8$ is compensated by the spectral flow operator Ψ and $1/2$ is consistent with the GSO condition for NS sector incorporated in the conformal blocks (2.4). If we recall the OPE of the minimal model

$$\phi_{r,p} \phi_{1,2} \approx \phi_{r,p\pm 1}, \quad (2.18)$$

we note that the operator Ψ in fact generates a spectral flow. We identify the state $r = s = 1, p = 3$ in the graviton orbit as the associative 3-form Φ of the G_2 holonomy manifold since it has dimension $3/2$ (contribution from the fermions is added) and acts like the square of the spectral flow operator.

We also note that due to the presence of the gap in Liouville spectrum, the dimension of the Ramond ground state satisfies an inequality $h(m) + h(m+2) + h(L) \geq 1/24(c(m) + c(m+2) + c(L)) = 3/8$. Together with the contribution from θ_2 it adds up to $1/2$ which is the value dictated by space-time SUSY. Thus we believe that the partition function (refpartG2) satisfies all the necessary conditions for the string theory compactified on non-compact G_2 holonomy manifolds.

3 SCFT for Compact G_2 Manifold $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$

Next let us study the string theory on compact G_2 manifolds. We shall take the example first presented in [28], namely an orbifold $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$, where CY_3 denotes an arbitrary (compact)

Calabi-Yau 3-fold. Since we would like to work with the exact CFT approach, we shall focus only on the Gepner point in the moduli space of the CY_3 sector. As is well-known, Gepner model is given by a tensor product of $\mathcal{N} = 2$ minimal models

$$\left[\mathcal{M}_{k_1}^{\mathcal{N}=2} \times \cdots \times \mathcal{M}_{k_r}^{\mathcal{N}=2} \right]_{U(1)\text{-projected}} \equiv (k_1, \cdots, k_r), \quad (3.1)$$

where $\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ denotes the level k $\mathcal{N} = 2$ minimal model with central charge $c = \frac{3k}{k+2}$. The criticality condition is given by

$$\sum_{i=1}^r \frac{3k_i}{k_i + 2} = 9. \quad (3.2)$$

When $r = 5$, the condition (3.2) becomes equivalent to the Calabi-Yau condition for the hypersurface

$$Z_1^{k_1+2} + \cdots + Z_5^{k_5+2} = 0 \quad (3.3)$$

in the weighted projective space $W\mathbf{CP}^4(\frac{1}{k_1+2}, \cdots, \frac{1}{k_5+2})$.

The sector of the circle S^1 is described by a free boson and fermion X, ψ . Orbifoldization along this direction is simply given by

$$X \rightarrow -X, \quad \psi \rightarrow -\psi. \quad (3.4)$$

It is somewhat non-trivial to perform the orbifoldization on the sector of the Gepner model. Geometrically the \mathbf{Z}_2 -action (we shall denote it as σ) is an anti-holomorphic involution on CY_3 and have the properties $\sigma^*(K) = -K$, $\sigma^*(\Omega) = e^{i\theta}\bar{\Omega}$, where K denotes the Kähler form and Ω is the holomorphic 3-form. Therefore, it is natural to assume that σ acts on each sub-theory $\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ as an automorphism of $\mathcal{N} = 2$ superconformal algebra $\{T, J, G^+, G^-\}$;

$$\sigma : T \longrightarrow T, \quad J \longrightarrow -J, \quad G^\pm \longrightarrow G^\mp. \quad (3.5)$$

In the computation of toroidal partition functions \mathbf{Z}_2 -orbifoldization is enforced by σ -twisting along the ‘‘space’’ and ‘‘time’’ directions. (3.5) implies, in the NS sector for instance, when the σ -twisting is applied in the spatial direction the moding of the G_1 remains half-integral while that of G_2 is switched to integral values ($G^\pm = G_1 \pm iG_2$). We next introduce characters of the $\mathcal{N} = 2$ minimal model in various σ -twisted sectors.

3.1 Twisted Characters in $\mathcal{N} = 2$ Minimal Model

Characters of the untwisted sector of $\mathcal{N} = 2$ theories are well-known. For various spin structures they are given by

$$\begin{aligned} \text{ch}_{l,m}^{k,(\text{NS})}(\tau, z) &\equiv \text{Tr}_{\mathcal{H}_{l,m}^{\text{NS}}} q^{L_0 - \hat{c}/8} y^{J_0} &= \chi_m^{l,0}(\tau, z) + \chi_m^{l,2}(\tau, z), \\ \text{ch}_{l,m}^{k,(\widetilde{\text{NS}})}(\tau, z) &\equiv \text{Tr}_{\mathcal{H}_{l,m}^{\text{NS}}} (-1)^F q^{L_0 - \hat{c}/8} y^{J_0} &= \chi_m^{l,0}(\tau, z) - \chi_m^{l,2}(\tau, z), \\ \text{ch}_{l,m}^{k,(\text{R})}(\tau, z) &\equiv \text{Tr}_{\mathcal{H}_{l,m}^{\text{R}}} q^{L_0 - \hat{c}/8} y^{J_0} &= \chi_m^{l,1}(\tau, z) + \chi_m^{l,3}(\tau, z), \\ \text{ch}_{l,m}^{k,(\widetilde{\text{R}})}(\tau, z) &\equiv \text{Tr}_{\mathcal{H}_{l,m}^{\text{R}}} (-1)^F q^{L_0 - \hat{c}/8} y^{J_0} &= \chi_m^{l,1}(\tau, z) - \chi_m^{l,3}(\tau, z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Here we set

$$\chi_m^{l,s}(\tau, z) = \sum_{r \in \mathbf{Z}_k} c_{l,m-s+4r}^{(k)}(\tau) \Theta_{2m+(k+2)(-s+4r), 2k(k+2)}(\tau, z/(k+2)), \quad (3.7)$$

and $c_{l,m}^{(k)}$ denotes the string function associated to the affine $SU(2)$ algebra at level k .

Let us now consider sectors with σ -twisting. We denote the twisted characters as $\text{ch}_l^{k(I)}(\tau)$ where I runs over the spin structures NS, $\widetilde{\text{NS}}$, R, $\widetilde{\text{R}}$, and $S, T = \pm$ describes the spatial and temporal boundary conditions of the σ -twist. Since the twisting $\sigma : J \rightarrow -J$ leaves only the states with vanishing $U(1)$ -charge, it is obvious that the twisted characters are labeled only by the “ l -index”. Recall that the usual twisting by $(-1)^F$ insertion acts as

$$(-1)^F : T \longrightarrow T, \quad J \longrightarrow J, \quad G^\pm \longrightarrow -G^\pm. \quad (3.8)$$

Thus under the combined twist $\sigma \cdot (-1)^F (\equiv (-1)^F \cdot \sigma)$ we have

$$\sigma \cdot (-1)^F : T \longrightarrow T, \quad J \longrightarrow -J, \quad G^\pm \longrightarrow -G^\mp. \quad (3.9)$$

(3.9) differs from (3.5) only in the exchange of G_1 and G_2 and thus leads to the same character formulas. These facts imply the following relations among the twisted characters;

$$\text{ch}_{l(+,-)}^{k(\text{NS})}(\tau) = \text{ch}_{l(+,-)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau), \quad \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\text{NS})}(\tau) = \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\text{R})}(\tau), \quad \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau) = \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\text{R})}(\tau), \quad (3.10)$$

$$\text{ch}_{l(+,-)}^{k(\text{R})}(\tau) = \text{ch}_{l(+,-)}^{k(\widetilde{\text{R}})}(\tau), \quad \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau) = \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\widetilde{\text{R}})}(\tau), \quad \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\text{NS})}(\tau) = \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\widetilde{\text{R}})}(\tau). \quad (3.11)$$

Characters in the 2nd line above actually all vanish due to a fermion zero mode and we are left with 3 independent characters which are related to each other by the modular transformations;

$$\text{ch}_{l(+,-)}^{k(\text{NS})}(\tau) \xleftrightarrow{S} \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\text{NS})}(\tau) \xleftrightarrow{T} \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau), \quad (3.12)$$

$$\text{ch}_{l(+,-)}^{k(\text{R})}(\tau) \xleftrightarrow{S} \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau) \xleftrightarrow{T} \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\text{NS})}(\tau). \quad (3.13)$$

Fortunately we can make use of the results given in [38, 39, 40] to calculate these character functions. As in [39], we first consider the sector $I = \text{NS}$, $(S, T) = (-, +)$, which is known as the “twisted $\mathcal{N} = 2$ minimal model”. In this sector J and G_1 have half-integer modes and G_2 has integer modes. Making use of the well-known decomposition [38, 41]

$$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2} \cong \frac{[\mathbf{Z}_k\text{-parafermion theory}] \times U(1)}{\mathbf{Z}_k}, \quad (3.14)$$

the primary fields (in NS sector) in the twisted minimal model are constructed as

$$\Phi_l(z) = \varphi_l(z) \sigma(z), \quad (l = 0, 1, \dots, k), \quad (3.15)$$

where $\varphi_l(z)$ are “ C -disorder fields” [38] in the \mathbf{Z}_k -parafermion theory [42] and $\sigma(z)$ is the twist field of the $U(1)$ sector. $\Phi_l(z)$ has the conformal weight

$$h_l^t (\equiv h(\Phi_l)) = h(\varphi_l) + h(\sigma) = \frac{k-2+(k-2l)^2}{16(k+2)} + \frac{1}{16}. \quad (3.16)$$

Since we have the field identification $\Phi_l = \Phi_{k-l}$, we can assume the range $l = 0, 1, \dots, [\frac{k}{2}]$. The character of the representation associated to the field Φ_l has been calculated in [43] (See also [39, 40]);

$$\begin{aligned}\chi_{l(-,+)}^k(\tau) (\equiv \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\text{NS})}(\tau)) &= \frac{1}{\theta_4(\tau)} \left(\Theta_{l+1-\frac{k+2}{2}, k+2}(\tau) - \Theta_{-(l+1)-\frac{k+2}{2}, k+2}(\tau) \right) \\ &= \frac{1}{\theta_4(\tau)} \left(\Theta_{2(l+1)-(k+2), 4(k+2)}(\tau) + \Theta_{2(l+1)+3(k+2), 4(k+2)}(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \Theta_{-2(l+1)-(k+2), 4(k+2)}(\tau) - \Theta_{-2(l+1)+3(k+2), 4(k+2)}(\tau) \right).\end{aligned}\quad (3.17)$$

Characters in other sectors are found from the modular transformation

$$\chi_{l(-,+)}^k(\tau + 1) = e^{2\pi i \left(h_l^t - \frac{k}{8(k+2)} \right)} \chi_{l(-,-)}^k(\tau), \quad (3.18)$$

$$\chi_{l(-,+)}^k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{l'=0}^k S_{l,l'}^{(k)} (-1)^{l'/2} \chi_{l'(+,-)}^k(\tau), \quad (3.19)$$

where we have

$$\begin{aligned}\chi_{l(-,-)}^k(\tau) &= \frac{1}{\theta_3(\tau)} \left(\Theta_{2(l+1)-(k+2), 4(k+2)}(\tau) + (-1)^k \Theta_{2(l+1)+3(k+2), 4(k+2)}(\tau) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^l \Theta_{-2(l+1)-(k+2), 4(k+2)}(\tau) + (-1)^{k+l} \Theta_{-2(l+1)+3(k+2), 4(k+2)}(\tau) \right),\end{aligned}\quad (3.20)$$

$$\chi_{l(+,-)}^k(\tau) = \begin{cases} \frac{2}{\theta_2(\tau)} \left(\Theta_{2(l+1), 4(k+2)}(\tau) + (-1)^k \Theta_{2(l+1)+4(k+2), 4(k+2)}(\tau) \right) & (l : \text{even}), \\ 0 & (l : \text{odd}). \end{cases}\quad (3.21)$$

In (3.19) $S_{l,l'}^{(k)} \equiv \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}\right)$ is the coefficient of the S-matrix of the $SU(2)$ WZW model at level k .

Modular properties of $\chi_{l(+,-)}^k(\tau)$, $\chi_{l(-,-)}^k(\tau)$ are similarly obtained as

$$\chi_{l(+,-)}^k(\tau + 1) = e^{2\pi i \left(h_l^t - \frac{k}{8(k+2)} \right)} \chi_{l(+,-)}^k(\tau), \quad \chi_{l(+,-)}^k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{l'=0}^k (-1)^{l'/2} S_{l,l'}^{(k)} \chi_{l'(-,+)}^k(\tau), \quad (3.22)$$

$$\chi_{l(-,-)}^k(\tau + 1) = e^{2\pi i \left(h_l^t - \frac{k}{8(k+2)} \right)} \chi_{l(-,-)}^k(\tau), \quad \chi_{l(-,-)}^k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i) \sum_{l'=0}^k \widehat{S}_{l,l'}^{(k)} \chi_{l'(-,-)}^k(\tau). \quad (3.23)$$

Here $h_l \equiv \frac{l(l+2)}{4(k+2)}$ and we set $\widehat{S}_{l,l'}^{(k)} = e^{\frac{\pi i}{2} \left(l+l'+2 - \frac{k+2}{2} \right)} S_{l,l'}^{(k)}$ in the last line. In summary

$$\chi_{l(-,+)}^k(\tau) = \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\text{NS})}(\tau) = \text{ch}_{l(-,+)}^{k(\text{R})}(\tau), \quad \textit{nonumber} \quad (3.24)$$

$$\chi_{l(-,-)}^k(\tau) = \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau) = \text{ch}_{l(-,-)}^{k(\text{R})}(\tau), \quad \textit{nonumber} \quad (3.25)$$

$$\chi_{l(+,-)}^k(\tau) = \text{ch}_{l(+,-)}^{k(\text{NS})}(\tau) = \text{ch}_{l(+,-)}^{k(\widetilde{\text{NS}})}(\tau). \quad (3.26)$$

Remaining characters all vanish since they contain a free Majorana fermion with the (P,P) boundary condition.

3.2 Partition Function of SCFT for G_2 Orbifold $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$

Now we are ready to discuss the construction of toroidal partition functions of string theory on the orbifold $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$ where the CY_3 sector is described by an arbitrary Gepner model (k_1, k_2, \dots, k_r) . We first consider the partition function of the $\mathcal{N} = 1$ non-linear σ -model on this orbifold (using the standard diagonal modular invariant), and then go on to the construction of the partition function of type II string theory on $\mathbf{R}^{2,1} \times (CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$.

According to the standard argument of \mathbf{Z}_2 -orbifold, partition function of σ -model has the following form

$$Z_\sigma = \frac{1}{4} \sum_I \sum_{S,T} Z_{S,T}^{(I)}, \quad (3.27)$$

where I runs over spin structures NS, $\widetilde{\text{NS}}$, R, $\widetilde{\text{R}}$ and $S, T = \pm$ characterize the boundary conditions for the σ -twist. The overall factor $1/4$ comes from the \mathbf{Z}_2 -orbifolding and the GSO projection.

The partition function in the untwisted sector is quite simple. If the partition function of the Gepner model (k_1, \dots, k_r) is given by

$$Z_{CY_3} = \frac{1}{2} \sum_I Z_{CY_3}^{(I)}, \quad (3.28)$$

then the partition function for the orbifold is given by

$$Z_{+,+}^{(I)} = Z_{CY_3}^{(I)} \cdot Z_{S^1}^{(I)}. \quad (3.29)$$

Amplitudes of the S^1 sector $Z_{S^1}^{(I)}$ are given by the standard expressions

$$Z_{S^1}^{(\text{NS})} = \left| \frac{\theta_3}{\eta} \right| Z_{S^1}(R), \quad Z_{S^1}^{(\widetilde{\text{NS}})} = \left| \frac{\theta_4}{\eta} \right| Z_{S^1}(R), \quad \text{nonumber} \quad (3.30)$$

$$Z_{S^1}^{(\text{R})} = \left| \frac{\theta_2}{\eta} \right| Z_{S^1}(R), \quad Z_{S^1}^{(\widetilde{\text{R}})} = \left| \frac{\theta_1}{\eta} \right| Z_{S^1}(R) \quad (\text{equiv}0), \quad (3.31)$$

where $Z_{S^1}(R)$ denotes the partition function of a compact free boson X (R is the radius of S^1). We later discuss the general structure of the partition function Z_{CY_3} in the Gepner model.

Now let us turn to the twisted sectors. Since twisted characters include only states with vanishing $U(1)$ -charge, the orbifoldization enforcing the integrality of total $U(1)$ -charge acts trivially in these sectors. We combine the conformal blocks in, say, the NS $(+, -)$ sector as;

$$Z_{+,-}^{(\text{NS})} = \sum_{l_i, \bar{l}_i=0}^{k_i} \prod_{i=1}^r \mathcal{N}_{l_i, \bar{l}_i}^{k_i} \text{ch}_{l_i(+,-)}^{k_i(\text{NS})} \text{ch}_{\bar{l}_i(+,-)}^{k_i(\text{NS})*} \left| \frac{2\eta}{\theta_2} \right| \left| \frac{\theta_4}{\eta} \right| = \sum_{l_i, \bar{l}_i=0}^{k_i} \prod_{i=1}^r \mathcal{N}_{l_i, \bar{l}_i}^{k_i} \chi_{l_i(+,-)}^{k_i} \chi_{\bar{l}_i(+,-)}^{k_i*} \left| \frac{\theta_3 \theta_4^2}{\eta^3} \right|. \quad (3.32)$$

Here $\mathcal{N}_{l_i, \bar{l}_i}^{k_i}$ denotes the coefficient matrix for the modular invariants of the sub-theory of level k_i . Summing over spin structures we obtain

$$\sum_I Z_{+,-}^{(I)} = \sum_{l_i, \bar{l}_i=0}^{k_i} \prod_{i=1}^r \mathcal{N}_{l_i, \bar{l}_i}^{k_i} \chi_{l_i(+,-)}^{k_i} \chi_{\bar{l}_i(+,-)}^{k_i*} \left(\left| \frac{\theta_3 \theta_4^2}{\eta^3} \right| + \left| \frac{\theta_3^2 \theta_4}{\eta^3} \right| \right) \quad (3.33)$$

As it turns out, in the case of general Gepner model describing CY 3-fold we have to be careful in choosing the coefficient matrices $\mathcal{N}_{\{l_i\},\{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}}$ in order to ensure a suitable projection onto \mathbf{Z}_2 invariant states. When not all levels $k_i (i = 1, \dots, r)$ are even, we can use the diagonal invariant for all sub-theories. On the other hand, in the special case with all k_i even, a particular mixture of A-type and D-type invariants has to be used as we discuss below.

Other twisted sectors are obtained from the $(+, -)$ sector by modular transformations. Partition functions are given by

$$\begin{aligned} \sum_I Z_{-,+}^{(I)} &= \sum_{l_i, \bar{l}_i=0}^{k_i} \mathcal{M}_{\{l_i\},\{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}} \prod_{i=1}^r |\chi_{l_i}^{k_i}(-,+)|^2 \left(\left| \frac{\theta_2 \theta_3^2}{\eta^3} \right| + \left| \frac{\theta_3^2 \theta_2}{\eta^3} \right| \right), \\ \sum_I Z_{-,-}^{(I)} &= \sum_{l_i, \bar{l}_i=0}^{k_i} \mathcal{M}_{\{l_i\},\{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}} \prod_{i=1}^r |\chi_{l_i}^{k_i}(-,-)|^2 \left(\left| \frac{\theta_2 \theta_4^2}{\eta^3} \right| + \left| \frac{\theta_4^2 \theta_2}{\eta^3} \right| \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

The matrix $\mathcal{M}_{\{l_i\},\{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}}$ is obtained from the matrix $\prod_i \mathcal{N}_{l_i, \bar{l}_i}^{k_i}$ by modular transformations.

Let us now consider the partition function of type II string theory on $\mathbf{R}^{2,1} \times (CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$. Our remaining task is to;

1. Fix the coefficient matrix of modular invariant.
2. Incorporate the contribution from the space-time $\mathbf{R}^{2,1}$ (we only consider the transversal degrees of freedom).
3. Take account of the GSO projection as the type II theory. Namely, we sum over the spin structures of left and right movers independently, while the σ -twist acts in a diagonal manner. Due to 2 and 3, the partition function should have the following form;

$$Z_{\text{string}} = \frac{1}{4 \cdot 2} \frac{1}{\sqrt{\tau_2} |\eta|^2} \sum_{I_L, I_R} \sum_{S, T} Z_{S, T}^{(I_L, I_R)}, \quad \tau_2 = \text{Im} \tau. \quad (3.35)$$

where we factored out the contribution from the transverse boson of $\mathbf{R}^{2,1}$ while that of the fermion is incorporated in $Z_{S, T}^{(I_L, I_R)}$ to take account of the GSO projection. The overall factor $1/4$ is due to GSO projection while an additional $1/2$ is due to \mathbf{Z}_2 -orbifolding.

Let us now introduce some formulas obtained in [44] which are convenient for the discussion of the general structure of Gepner models (see Appendix B). Contributions of the tensor product of minimal models are organized into orbits \mathcal{F}_i generated by the spectral flow

$$\mathcal{F}_i(\tau) \equiv \frac{\theta_3}{\eta} \text{NS}_i(\tau) - \frac{\theta_4}{\eta} \widetilde{\text{NS}}_i(\tau) - \frac{\theta_2}{\eta} \text{R}_i(\tau) - \frac{\theta_1}{\eta} \widetilde{\text{R}}_i(\tau) \quad (3.36)$$

where $\text{NS}_i(\tau)$, $\widetilde{\text{NS}}_i(\tau)$, $\text{R}_i(\tau)$, $\widetilde{\text{R}}_i(\tau)$ are the conformal blocks of the CY_3 sector defined by

$$Z_{CY_3} = \frac{1}{2} \sum_i D_i \left(|\text{NS}_i(\tau)|^2 + |\widetilde{\text{NS}}_i(\tau)|^2 + |\text{R}_i(\tau)|^2 + |\widetilde{\text{R}}_i(\tau)|^2 \right), \quad (3.37)$$

D_i are non-negative integers with the properties

$$D_i \mathcal{S}_{ij} = D_j \mathcal{S}_{ij} \quad (\text{no sum on } i, j) \quad (3.38)$$

where \mathcal{S}_{ij} is the S -transformation matrix of the conformal blocks \mathcal{F}_i . Blocks \mathcal{F}_i actually all vanish identically $\mathcal{F}_i \equiv 0$ due to some theta-function identity reflecting the space-time SUSY in Calabi-Yau compactification. After a little algebra, we obtain string theory amplitude in the untwisted sector

$$\sum_{I_L, I_R} Z_{+,+}^{(I_L, I_R)} = Z_{S^1}(R) \sum_i D_i |\mathcal{F}_i(\tau)|^2. \quad (3.39)$$

Now we consider the twisted sector $(+, -)$ and discuss a suitable projection onto \mathbf{Z}_2 invariant states when combined with the untwisted sector. Under the action of \mathbf{Z}_2 symmetry $U(1)$ charge flips sign and thus in the twisted sector we should consider only neutral states. Let us consider a state, for instance, $\text{ch}_{l, m=0}^{k, (\text{NS})}$ in the NS sector of a sub-theory. In the orbit of this state generated by the spectral flow, there appears another neutral state $\text{ch}_{k-l, m=0}^{k, (\text{NS})}$ if k is even. These two representations of spin $l/2$ and $(k-l)/2$ are paired and they contribute an off-diagonal term to the partition function. Therefore when the level k is even, we have to adopt an analogue of D-type modular invariant. On the other hand when k is odd, we use the standard A-type modular invariant.

In the case of a general tensor product of minimal models additional neutral states appear when all the levels k_i of sub-theories are even. In this case an additional neutral state in the orbit of $\prod_i \text{ch}_{l_i, m=0}^{k_i, (\text{NS})}$ has a form $\prod_{i \in S_1} \text{ch}_{k_i - l_i, m=0}^{k_i, (\text{NS})} \prod_{j \in S_2} \text{ch}_{l_j, m=0}^{k_j, (\text{NS})}$. Here the two sets S_1, S_2 are defined as

$$i \in S_1 \quad \text{if} \quad \frac{D}{k_i + 2} = \text{odd}, \quad (3.40)$$

$$j \in S_2 \quad \text{if} \quad \frac{D}{k_j + 2} = \text{even}. \quad (3.41)$$

and

$$D = \text{Least Common Multiple of } \{k_i + 2 (i = 1, \dots, r)\}. \quad (3.42)$$

We then see that the D-type pairing has to be used for the sub-theories in the set S_1 while A-type invariant is used for sub-theories in S_2 . Thus we introduce

$$\mathcal{N}_{\{l_i\}, \{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}} = \prod_{i \in S_2} \delta_{l_i, \bar{l}_i} \prod_{j \in S_1} (\delta_{l_j, \text{bar}l_j} + \delta_{l_j, k_j - \bar{l}_j}) \quad (3.43)$$

Then the amplitude in the twisted sector $(+, -)$ is given by

$$\sum_{I_L, I_R} Z_{+,-}^{(I_L, I_R)} = \sum_{\bar{l}_i, l_i} \left(\mathcal{N}_{\{l_i\}, \{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}} \prod_i \chi_{l_i(+,-)}^{k_i} \chi_{\bar{l}_i(+,-)}^{k_i *} \right) \left| \sqrt{\frac{\theta_3}{\eta}} \sqrt{\frac{\theta_3 \theta_4^2}{\eta^3}} - \sqrt{\frac{\theta_4}{\eta}} \sqrt{\frac{\theta_4 \theta_3^2}{\eta^3}} \right|^2 \quad (3.44)$$

when all level are even. When an odd level is contained in the tensor product, coefficient $\mathcal{N}_{\{l_i\}, \{\bar{l}_i\}}^{\{k_i\}}$ is replaced by the product of Kronecker delta's.

Amplitudes in other twisted sectors are now obtained by modular transformations. When all levels are even, we obtain

$$\sum_{I_L, I_R} Z_{-,+}^{(I_L, I_R)} = \sum_{l_i} \left(1 + (-1)^{\sum_{i \in S_1} l_i} \right) \prod_i |\chi_{l_i(-,+)}^{k_i}|^2 \left| \sqrt{\frac{\theta_3}{\eta}} \sqrt{\frac{\theta_3 \theta_2^2}{\eta^3}} - \sqrt{\frac{\theta_2}{\eta}} \sqrt{\frac{\theta_2 \theta_3^2}{\eta^3}} \right|^2, \quad (3.45)$$

$$\sum_{I_L, I_R} Z_{-, -}^{(I_L, I_R)} = \sum_{l_i} \left(1 + (-1)^{\sum_{i \in S_1} l_i} \right) \prod_i |\chi_{l_i(-, -)}^{k_i}|^2 \left| \sqrt{\frac{\theta_4}{\eta}} \sqrt{\frac{\theta_4 \theta_2^2}{\eta^3}} - \sqrt{\frac{\theta_2}{\eta}} \sqrt{\frac{\theta_2 \theta_4^2}{\eta^3}} \right|^2. \quad (3.46)$$

In checking modular invariance of these formulas we have to cancel some unwanted sign factors by using

- (1) D is an integer divisible by a factor 4.
- (2) The set S_1 is not empty and its number of elements is even.
- (3) When a sub-theory of level k_i belongs to S_1 , $k_i \in 4\mathbf{Z} + 2$.

These facts are easily derived by using the criticality condition (3.2).

When an odd level is contained in the tensor product, a factor $(-1)^{\sum_{i \in S_1} l_i}$ is absent in the above formulas (3.45), (3.46). Note that all the twisted amplitudes vanish identically, which is consistent with the existence of SUSY in our orbifold construction.

Space-time SUSY charges are constructed as vertex operators in the untwisted sector and hence are the \mathbf{Z}_2 -invariant combinations of SUSY charges of the CY_3 compactification. Since the σ -twisting commutes with $(-1)^{F_L}$, $(-1)^{F_R}$, such SUSY charges consistently act on the Hilbert space of twisted sectors also, and give rise to the manifest cancelation of amplitudes in twisted sectors. Thus our string vacuum possesses the space-time SUSY charges which are half as many as those of Calabi-Yau compactification $\frac{1}{2} \times 8 = 4$. This is of course the expected number of SUSY charges in the compactification on a G_2 manifold.

Let us next check the consistency of our results with the general argument by Shatashvili and Vafa [29] of string compactification on G_2 manifold and in particular the existence of tricritical Ising model. As is shown in Appendix B, conformal blocks \mathcal{F}_i of CY_3 compactification are expanded in terms of functions g_1, g_2 defined by

$$g_1(\tau) \equiv \frac{\theta_3}{\eta} \frac{\Theta_{0,3/2}}{\eta} - \frac{\theta_4}{\eta} \frac{\tilde{\Theta}_{0,3/2}}{\eta} - \frac{\theta_2}{\eta} \frac{\Theta_{3/2,3/2}}{\eta}, \quad (3.47)$$

$$g_2(\tau) \equiv \frac{\theta_3}{\eta} \frac{\Theta_{1,3/2}}{\eta} + \frac{\theta_4}{\eta} \frac{\tilde{\Theta}_{1,3/2}}{\eta} - \frac{\theta_2}{\eta} \frac{\Theta_{1/2,3/2}}{\eta}. \quad (3.48)$$

We then use the following identities and reexpress g_1, g_2 in terms of functions F_1, F_2 which are defined in (2.8), (2.9) involving tricritical Ising models.

$$g_1(\tau) = \eta c_{0,0}^{(3)}(\tau) F_1(\tau) + \eta c_{2,0}^{(3)}(\tau) F_2(\tau), \quad (3.49)$$

$$g_2(\tau) = \eta c_{0,2}^{(3)}(\tau) F_1(\tau) + \eta c_{2,2}^{(3)}(\tau) F_2(\tau), \quad (3.50)$$

Here χ_h^{tri} , $\tilde{\chi}_h^{\text{tri}}$ denote the ($\mathcal{N} = 1$) characters of tricritical Ising model of conformal dimension h and $c_{l,m}^{(3)}$ is the level 3 string function of affine $SU(2)$ algebra. The above relations (3.49) (3.50) can be derived by comparing two ways of rewriting Jacobi's identity [1, 33]

$$0 = \frac{1}{\eta^4} \left(\theta_3^4 - \theta_4^4 - \theta_2^4 \right) = g_1(\tau) \chi_b^{SU(3)}(\tau) + g_2(\tau) \left(\chi_f^{SU(3)}(\tau) + \chi_{\bar{f}}^{SU(3)}(\tau) \right) \quad (3.51)$$

$$= F_1(\tau) \chi_b^{G_2}(\tau) + F_2(\tau) \chi_f^{G_2}(\tau). \quad (3.52)$$

Here $\chi_i^{SU(3)}$ $i = b, f, \bar{f}$ denote the level 1 $\widehat{SU}(3)$ characters of the basic, fundamental and anti-fundamental representations, and $\chi_i^{G_2}$ $i = b, f$ denotes the level 1 \widehat{G}_2 character of the basic and fundamental representations. We also remark that

$$(G_2)_1/SU(3)_1 \cong SU(2)_3/U(1)_3 \cong \mathbf{Z}_3\text{-Parafermion}, \quad (3.53)$$

as pointed out in [33].

Above formulas (3.51), (3.52) show that in CY compactification of $SU(3)$ holonomy branching functions g_1, g_2 should necessarily appear in the CFT description while functions F_1, F_2 should appear in compactification on G_2 manifold. In fact F_1, F_2 contain tricritical Ising model as claimed by Shatashvili and Vafa. All these functions g_i, F_i vanish due to the Jacobi identity.

Let us next look at the massless spectrum contained in our amplitudes. It is easy to identify the massless states in the untwisted sector; they are nothing but the \mathbf{Z}_2 -invariant combinations of the massless states in the string theory on $\mathbf{R}^{2,1} \times S^1 \times CY_3$. It is straightforward to count these states and it is known that in addition to the gravity multiplet there exist $b_2 + b_3 = h^{1,1} + h^{2,1} + 1$ massless chiral fields where $h^{1,1}, h^{2,1}$ are the Hodge numbers of Calabi-Yau 3-fold [29, 3, 6].

The extra massless states originating from the twisted sectors are somewhat non-trivial. We first recall the formula for conformal weights of primary fields in the twisted $\mathcal{N} = 2$ minimal model

$$h_l^t (\equiv h(\Phi_l)) = \frac{k-2 + (k-2l)^2}{16(k+2)} + \frac{1}{16}. \quad (3.54)$$

Thus we find

$$h_l^t - \frac{k}{8(k+2)} = \frac{1}{4(k+2)} \left(l + 1 - \frac{k+2}{2} \right)^2 \geq 0. \quad (3.55)$$

Therefore, when k is even, the inequality (3.55) is saturated at $l = k/2$, while when k is odd, there is no saturation. This leads to the following rules on the existence of extra massless states;

1. In the case when at least one of k_i is odd in the tensor product of minimal models (k_1, \dots, k_r) , there are no massless states in the twisted sector.
2. In the case when all the levels k_i are even, we have $2 \times 2 = 4$ massless bosonic states in the twisted sector as is read off from the above partition function (a factor 2 corresponds to the choice of NS-NS, R-R sectors). These form 2 massless chiral multiplets.

4 Discussions and Conclusions

In this talk I discussed several aspects of CFT description of string theory on G_2 manifolds. In the former part I presented an infinite series of superstring vacua corresponding to non-compact G_2 manifolds based on [1]. In the latter part we construct the exact partition functions for the

superstrings on compact G_2 manifolds of the type $(CY_3 \times S^1)/\mathbf{Z}_2$, where the Calabi-Yau 3 sectors are given by arbitrary Gepner models [2].

In the latter part we observed that there appear extra massless states in the twisted sector if and only if all the levels k_i of the minimal sub-theories are even. This seems somewhat problematic since in these cases the corresponding hypersurface

$$\sum_i z_i^{k_i+2} = 0 \tag{4.1}$$

do not have fixed points under anti-holomorphic involution and we do not expect new massless states to emerge. In [34] a possible resolution of this problem is suggested based on the behavior of the NS B field taking discrete values in G_2 manifolds. Related problem exists in the G_2 manifolds with $A - D - E$ singularities fibered over S^3 which feature in gauge/gravity duality [5, 7]. Since the moduli of the metric preserving G_2 structure is given by b_3 there exists no smooth resolution of $A - D - E$ singularities. These are interesting issues which require further study.

Many open problems exist for the study of world-sheet description of G_2 manifold. For example, classification theory based on the extended superconformal algebra introduced in [29] is a challenging problem. Also the boundary CFT approach to D-branes in G_2 manifolds will be interesting.

Acknowledgement

I would like to express my gratitude to the organizers of the workshop on “Approaches to Open Calabi-Yau Manifolds from Algebraic Geometry and String Theory”, held at Hokkaido University in December 2001.

This work is supported in part by Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists (#13740144) and also by Grant-in-Aid for Scientific Research on Priority Area (#707) “Supersymmetry and Unified Theory of Elementary Particles” , both from Japan Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology.

References

- [1] T. Eguchi and Y. Sugawara “CFT Description of String Theory Compactified on Non-compact Manifolds with G_2 Holonomy,” hep-th/0108091, Phys. Lett. B519 (2001) 149-158.
- [2] T. Eguchi and Y. Sugawara “String Theory on G_2 Manifolds Based on Gepner Construction,” UT-974, hep-th/0111012.
- [3] J. A. Harvey and G. Moore, “Superpotentials and Membrane Instantons,” hep-th/9907026
- [4] C. Vafa, “Superstrings and Topological Strings at Large N ,” hep-th/0008142.
- [5] B. Acharya, “On Realising $\mathcal{N} = 1$ Super Yang-Mills in M Theory,” hep-th/0011089.
- [6] H. Partouche and B. Pioline, “Rolling among $G(2)$ vacua,” JHEP **0103**, 005 (2001), hep-th/0011130.
- [7] M. F. Atiyah, J. Maldacena and C. Vafa, “An M -Theory Flop as a Large N Duality,” hep-th/0011256.
- [8] S. Sinha and C. Vafa, “ SO and Sp Chern-Simons at Large N ,” hep-th/0012136.
- [9] B. Acharya and C. Vafa, “On Domain Walls of $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetric Yang-Mills in Four Dimensions,” hep-th/0103011.
- [10] F. Cachazo, K. Intriligator and C. Vafa, “A Large N Duality via a Geometric Transition,” hep-th/0103067.
- [11] J. Gomis, “ D -Branes, Holonomy and M -Theory,” hep-th/0103115.
- [12] J. Edelstein and C. Nunez, “ $D6$ Branes and M Theory Geometrical Transitions from Gauged Supergravity,” hep-th/0103167.
- [13] S. Kachru and J. McGreevy, “ M -Theory on Manifolds of G_2 Holonomy and Type IIA Orientifolds,” hep-th/0103223.
- [14] J. D. Edelstein, K. Oh and R. Tatar, ”Orientifold, Geometric Transition and Large N Duality for SO/Sp Gauge Theories”, JHEP 0105 (2001) 009, hep-th/0104037.
- [15] P. Kaste, A. Kehagias and H. Partouche, “Phases of Supersymmetric Gauge Theories from M -Theory on G_2 Manifolds,” hep-th/0104124.
- [16] K. Dasgupta, K. Oh and R. Tatar, “Geometrical Transition, Large N Dualities and MQCD Dynamics,” hep-th/0105066.
- [17] M. Aganagic and C. Vafa, “Mirror symmetry and a $G(2)$ flop,” hep-th/0105225.
- [18] M. F. Atiyah and E. Witten, “ M -Theory Dynamics on a Manifold of G_2 Holonomy”, hep-th/0107177.
- [19] E. Witten, “Anomaly cancellation on $G(2)$ manifolds,” hep-th/0108165.
- [20] B. Acharya and E. Witten, “Chiral fermions from manifolds of $G(2)$ holonomy,” hep-th/0109152.
- [21] A. Giveon, A. Kehagias and H. Partouche, “Geometric transitions, brane dynamics and gauge theories,” hep-th/0110115.

- [22] M. Aganagic and C. Vafa, “G(2) manifolds, mirror symmetry and geometric engineering,” hep-th/0110171.
- [23] R. Bryant and S. Salamon, “On The Construction of Some Complete Metrics With Exceptional Holonomy,” Duke Math. J. **58** (1989) 829.
- [24] G. W. Gibbons, D. N. Page and C. N. Pope, “Einstein Metrics on S^3 , R^3 , and R^4 Bundles,” Commun. Math. Phys. **127** (1990) 529.
- [25] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lu and C. N. Pope, “New Complete Non-Compact Spin(7) Manifolds,” hep-th/0103155.
- [26] A. Brandhuber, J. Gomis, S. S. Gubser and S. Gukov, “Gauge Theory at Large N and New G_2 Holonomy Metrics,” hep-th/ 0106034.
- [27] M. Cvetič, G. W. Gibbons, J. Liu, H. Lu and C. N. Pope, “A New Fractional D2-brane, G_2 Holonomy and T-duality,” hep-th/0106162; Y. Konishi and M. Naka, ”Coset Construction of Spin(7) and G_2 Gravitational Instantons,” hep-th/0104028.
- [28] D. Joyce, “Compact Manifolds With Special Holonomy,” (Oxford University Press, 2000).
- [29] S. Shatashvili and C. Vafa, “Superstrings and Manifolds of Exceptional Holonomy,” hep-th/9407025.
- [30] J. M. Figueroa-O’Farill, “A Note on the Extended Superconformal Algebra associated with Manifolds of Exceptional Holonomy,” hep-th/9609113.
- [31] D. Gepner and B. Noyvert, “Unitary Representations of $SU(3/2, 2)$ Superconformal Algebra,” hep-th/0101116.
- [32] D. Gepner, ”Exactly Solvable String Compactifications on Manifolds of $SU(N)$ Holonomy,” Phys. Lett. **B199** (1987) 380; ”Space-time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models”, Nucl. Phys. **B296** (1988) 757.
- [33] K. Sugiyama and S. Yamaguchi, “Cascade of special holonomy manifolds and heterotic string theory,” hep-th/0108219.
- [34] R. Blumenhagen and V. Braun, “Superconformal Field Theories for Compact G_2 Manifolds,” hep-th/0110232.
- [35] R. Roiban and J. Walcher, “Rational Conformal Field Theories With G_2 Holonomy”, hep-th/0110302,
- [36] R. Blumenhagen and V. Braun, “Superconformal field theories for compact manifolds with Spin(7) holonomy,” JHEP **0112**, 013 (2001) [arXiv:hep-th/0111048].
- [37] B. Noyvert, “Unitary minimal models of SW(3/2,3/2,2) superconformal algebra and manifolds of G(2) holonomy,” arXiv:hep-th/0201198.
- [38] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, “Disorder Fields In Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory And N=2 Extended Supersymmetry,” Sov. Phys. JETP **63**, 913 (1986) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **90**, 1553 (1986)].

- [39] Z. A. Qiu, “Conformal Field Theories And Modular Invariant Partition Functions For Parafermion Field Theories,” Nucl. Phys. B **295**, 171 (1988).
- [40] F. Ravanini and S. K. Yang, “C Disorder Fields And Twist Partition Functions In Parafermionic Conformal Field Theories,” Nucl. Phys. B **295**, 262 (1988).
- [41] Z. A. Qiu, “Nonlocal Current Algebra And N=2 Superconformal Field Theory In Two-Dimensions,” Phys. Lett. B **188**, 207 (1987).
- [42] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, “Parafermionic Currents In The Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory And Selfdual Critical Points In Z(N) Invariant Statistical Systems,” Sov. Phys. JETP **62**, 215 (1985) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **89**, 380 (1985)]; D. Gepner and Z. A. Qiu, “Modular Invariant Partition Functions For Parafermionic Field Theories,” Nucl. Phys. B **285**, 423 (1987).
- [43] V. K. Dobrev, “Characters Of The Unitarizable Highest Weight Modules Over The N=2 Superconformal Algebras,” Phys. Lett. B **186**, 43 (1987); Y. Matsuo, “Character Formula Of $C < 1$ Unitary Representation Of N=2 Superconformal Algebra,” Prog. Theor. Phys. **77**, 793 (1987).
- [44] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina and S.-K. Yang, “Superconformal Algebras and String Compactification on Manifolds with $SU(N)$ Holonomy”, Nucl. Phys. **B315** (1989) 193.

Seiberg-Witten 可積分系と有理楕円曲面の周期

清水勇二

February 13, 2002

1 Introduction

$4DN = 2SU(2)$ 超対称 Yang-Mills (SYM) 理論の厳密解を求めた Seiberg と Witten の仕事 [SW] において次の楕円曲線が導入された。

$$y^2 = (x^2 - 1)(x - u) \quad (u \neq \pm 1, \infty)$$

物理的には $N = 2$ の多重項のスカラー場の (2 乗の) 真空期待値として導入されたパラメータ u は、この楕円曲線のモジュライを記述する。厳密解の記述では、彼等によって導入された次の有理型微分が主要な役割を担う。

$$\lambda = \frac{y dx}{1 - x^2} = u \frac{dx}{y} - \frac{x dx}{y}$$

この Seiberg-Witten 微分 $\lambda = \lambda_{SW}$ をもとにした

$$a = \int_{\alpha} \lambda, \quad a_D = \int_{\beta} \lambda$$

なる量が、代数的可積分系 (cf. [Do]) を形成する。 (α, β) は上の楕円曲線の (1 次) ホモロジーの symplectic な基底) SYM 理論の厳密解は、 a, a_D に対して

$$\frac{\partial F}{\partial a} = a_D$$

と定まる prepotential $F = F(u)$ によりすべて記述される。例えば、この楕円曲線のモジュライは

$$\tau = \frac{da_D}{du} \Big/ \frac{da}{du} = \frac{da_D}{da}$$

と与えられる。

以上は物質場のない SYM 理論の話だが、物質場のある場合も同様に扱われる。その場合、Seiberg-Witten 微分は第 3 種微分の成分を含み、(1 位の) 極での留数が質量 (mass) に対応する。

Seiberg と Witten の仕事は、 $SU(2)$ 以外の A, D 型のゲージ群にもすぐに拡張された。その場合、楕円曲線の役割はスペクトル曲線が担う。E 型の場合は、拡張は一筋縄では行かなかった。Lerche-Warner [LW] は、 E_6 の場合に type IIB の弦理論の 3 次元 Calabi-Yau 多様体によるコンパクト化と E_6 の場合のスペクトル曲線に相当する曲線を関係づけた。野口-寺島-梁 [NTY] は E_8 の場合も扱うべく、有理楕円曲面 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ とその断面によ

り物質場を含む E 系列の SYM 理論を構成した。そこで Seiberg-Witten 微分とは、 (π) のファイバー方向の相対 1 次微分形式として現れる。また、彼等の使った有理楕円曲面は、(底空間の) 無限遠のファイバーが小平による特異ファイバーの分類の記号で II 型である条件がついていた。

この講演では、野口-寺島-梁の仕事を拡張して物質場を含む E 系列の SYM 理論を構成するための有理楕円曲面のモジュライと周期の理論を記述する。また、Seiberg-Witten 微分の概念を定式化して E 系列の場合の可積分系を構成する。

モジュライの構成に必要な標 (marking) の概念を 2.1 で導入し、複素構造の変形理論を用いたモジュライの構成を 2.2 で説明する。

2.3 では、有理楕円曲面とその非特異ファイバーの対の場合の混合 Hodge 構造の周期領域を記述する。2 節の主要結果は、周期写像の無限小 Torelli 定理 (2.4.1) と局所同型性 (2.4.2), (2.4.3) である。

3 節では、まず 3.1 で楕円ファイバー構造 (π) に対する Gauss-Manin 接続を導入する。3.2 では、Seiberg-Witten 微分の概念を定式化し、その (底空間 P^1 の) 無限遠での展開を考察する。3.3 で 2 節のモジュライ空間を利用して可積分系を構成する。

この講演の内容は、土屋昭博氏 (名大多元)、加藤晃史氏 (東大数理)、栗田英資氏 (名大多元)、斉藤義久氏 (東大数理) との共同研究の一部である。これら諸氏に感謝する。

また、研究会の世話人の松下大介氏、秦泉寺雅夫氏、そして、サポートしてくださった中村郁氏に感謝する。

2 有理楕円曲面のモジュライと周期

有理楕円曲面 (rational elliptic surface, RES と略記する) とは楕円曲面 X であって双有理的 (birational) である曲面のことである。 X は楕円ファイバーの構造 $\pi : X \rightarrow B$ をもつが、底空間について $B \simeq \mathbb{P}^1$ となる。楕円ファイバーの構造は反標準写像 (anti-canonical map) として与えられることに注意しておく。ここで断っておくが、この論説を通じて複素数体上の代数多様体または複素多様体のみを考察する。

以下では断面 (section) を許す有理楕円曲面のみを考察する。断面 $\sigma : B \rightarrow X, \pi \circ \sigma = id_B$ を一つ固定して $S := \sigma(B)$ とおく。断面付きの有理楕円曲面 $(X, S), (X', S')$ が同型であるとは、同型 $f : X \rightarrow X'$ で $f(S) = S'$ を満たすものが存在することを言う。

楕円ファイバー (elliptic fibration) π の臨界値の集合を $\Sigma (\subset B)$ とする。以下では、 π の非特異ファイバー $Y = \pi^{-1}(b)$ ($b \in B \setminus \Sigma$) を一つ固定して、三つ組 (X, S, Y) を考察する。

Remark 2.0.1 E_8 単純楕円型特異点の *Milnor* ファイバー X° に対して、三つ組 (X, S, Y) が存在して $X^\circ = X \setminus (Y \cup S)$ となる。

2.1 標付き (marked) 有理楕円曲面

断面付きの有理楕円曲面と非特異ファイバーからなる三つ組 (X, S, Y) のモジュライを考えるために、その非自明な自己同型を消す標 (marking) を導入する。そのためにコホモロジーを調べよう。

Proposition 2.1.1 有理楕円曲面 X の *Betti* 数、*Hodge* 数はつぎで与えられる。

$$b = 0 = b_4 = 1, b_1 = b_3 = 0, b_2 = h^{1,1} = 10, h^{2,0} = h^{0,2} = 0$$

対 (X, Y) の局所コホモロジーの完全列は

$$0 \rightarrow H^0(Y, \mathbb{Z})(-1) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X - Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z})(-1) \rightarrow 0$$

となり ((-1) は *Tate twist*)、 $X - Y$ のコホモロジーは $H^1(Y, \mathbb{Z})(-1)$ の $H^2(X, \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \cdot [Y]$ による拡大となる。 ($[Y]$ は Y のコホモロジー類を表す。)

$H^1(Y, \mathbb{Z})$ および $H^2(X, \mathbb{Z})$ はそれぞれ (カップ積による) 交代形式、対称形式をもつことに注意する。

Remark 2.1.2 上の完全列は、混合 *Hodge* 構造としての完全列でもある。 $H^2(X - Y, \mathbb{Z})$ の重み (*weight*) 2 の部分 W_2 が $H^2(X, \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \cdot [Y]$ であり、重み 3 の部分 $Gr_3^W = W_3/W_2$ が $H^1(Y, \mathbb{Z})(-1)$ である。

同様に、 $H^2(X - (Y \cup S), \mathbb{Z})$ の混合 *Hodge* 構造については、重み (*weight*) 2 の部分 W_2 が $H^2(X, \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \cdot [Y] \oplus \mathbb{Z} \cdot [S])$ であり、重み 3 の部分 $Gr_3^W = W_3/W_2$ が $H^1(Y, \mathbb{Z})(-1)$ である。

標 (marking) の定義のために、参照するための固定した object を用意する必要があるが、ここではその定義をするのを節約して参照のための三つ組 (X_0, S_0, Y_0) を一つ (以後ずっと) 固定する。

Definition 2.1.3 (標 (marking)) 1) 三つ組 (X, S, Y) のホモロジー標 (homological marking) とは、次の図式を可換にする \mathbb{Z} 加群の同型 $\varphi_2, \varphi, \varphi_3$ であって、

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(Y, \mathbb{Z})(-1) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(X - Y, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(Y, \mathbb{Z})(-1) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \varphi_2 \downarrow \simeq & & \varphi \downarrow \simeq & & \varphi_3 \downarrow \simeq & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(Y, \mathbb{Z})(-1) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(X - Y, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(Y, \mathbb{Z})(-1) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

さらに φ_2, φ_3 はそれぞれ対称形式、交代形式を保存し、 $\varphi_2([Y]) = [Y_0]$ であることを満たしているものことである。

2) 三つ組 (X, S, Y) の解析的標 (analytic marking) とは、 $(0 \neq) \omega \in H^0(Y, \Omega_Y^1)$ のことである。

3) $(X, S, Y, \varphi, \omega)$ を標つき有理楕円曲面という。

Remark 2.1.4 Poincaré 留数による同型 $(\mathbb{C} \simeq) H^0(Y, \Omega_Y^1) \simeq H^0(X, \Omega_X^2(\log Y))$ が存在する。この同型の下 ω に対応する X 上の有理型 2 形式を Ω と記す。

2.2 標付き (marked) 有理楕円曲面のモジュライ

標付き有理楕円曲面 $(X, S, Y, \varphi, \omega)$ の解析的なモジュライを構成する。代数的には、Miranda [Mi] により半安定な特異ファイバーをもつ \mathbb{P}^1 上の楕円曲面のモジュライ空間が幾何学的不変式論によって構成されている。しかし我々は全ての特異ファイバーを許したモジュライ空間がほしいので、複素構造の変形理論が教える倉西空間をもとにモジュライ空間を構成する。

そこで、対 (X, Y) および対 $(X, Y + S)$ を考える。 Y は X の滑らかな因子であり、 $Y + S$ は X の正規交叉因子であるので、[Kw] によりこれらの倉西空間 $Def_{(X, Y)}, Def_{(X, Y + S)}$ を考えることができる。

Proposition 2.2.1 $(X, S, Y, \varphi, \omega)$ を標付き有理楕円曲面とすると、次が成り立つ。

$$h^i(X, T_X(-\log Y)) = \begin{cases} 0 & i = 0, 2 \\ 10 & i = 1 \end{cases} \quad h^i(X, T_X(-\log Y + S)) = \begin{cases} 0 & i = 0, 2 \\ 10 & i = 1 \end{cases}$$

ここで、 $T_X(-\log Y), T_X(-\log Y + S)$ は正規交叉因子に沿って零となる正則ベクトル場の層を表す。

この命題により倉西空間 $Def_{(X, Y)}, Def_{(X, Y + S)}$ は滑らか (smooth) であり、その自己同型群は離散的にしか存在しないことが分かる。対 (X, Y) (resp. $(X, Y + S)$) にホモロジー標 (homological marking) φ を合わせて考えると、自己同型は恒等写像のみになり、三つ組 (X, Y, φ) (resp. $(X, Y + S, \varphi)$) の (局所) 変形空間は (その上の族を込めて) 張り合わせることができる。

Definition 2.2.2 そうして得られる (普遍) 族を

$$f_0 : (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{N}_0 \quad (\text{resp. } f : (\mathcal{X}, \mathcal{Y} + S) \rightarrow \mathcal{N})$$

とする。このやり方は標付き $K3$ 曲面の (解析的) モジュライ空間の構成法と同じである。cf. [BPV].

層 $f_{0*}(\Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{N}_0}^1)$ (resp. $f_*(\Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{N}}^1)$) に対応する \mathcal{N}_0 (resp. \mathcal{N}) 上の直線束から零切断を除いた空間を $\tilde{\mathcal{N}}_0$ (resp. $\tilde{\mathcal{N}}$) と記す。

Remark 2.2.3 1) 対 (X, Y) は斎藤等 [ST] により楕円型の *Okamoto-Painlevé* 対と呼ばれている。

2) 一般の $(X, Y, \varphi) \in \mathcal{N}_0$ に対して、 X は \mathbb{P}^2 の 9 点ブローアップとして得られ、 $h^0(-K_X) = 1$ が成り立つ。

3) $(X, Y + S, \varphi)$ から S を忘れることにより得られる写像 $u : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_0$ は局所同型である。

Definition 2.2.4 $\mathcal{M}_0 := \{(X, Y, \varphi) \in \mathcal{N}_0 \mid h^0(-K_X) = 2\}$ (resp. $\mathcal{M} := \{(X, Y + S, \varphi) \in \mathcal{N} \mid h^0(-K_X) = 2\}$) なる集合を考える。接続層のコホモロジー (の次元) の上半連続性により、これは \mathcal{N}_0 (resp. \mathcal{N}) の解析的閉集合である。また、

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 := \widetilde{\mathcal{N}}_0 \times_{\mathcal{N}_0} \mathcal{M}_0 \quad (\text{resp. } \widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M})$$

とおく。

Remark 2.2.5 正則射の変形理論 [Ho] を楕円ファイバー構造 π に適用して \mathcal{M} を調べることもできる。このアプローチは 3.2 で役立つ。

2.3 標付き (marked) 有理楕円曲面の周期

有理楕円曲面とその断面および非特異ファイバーからなる三つ組 (X_0, S_0, Y_0) を (以後) 固定する。混合 Hodge 構造の周期領域 (period domain) をコホモロジー $H^2(X_0 - Y_0, \mathbf{Z})$ (resp. $H^2(X_0 - (Y_0 \cup S_0), \mathbf{Z})$) に対して考える。その混合 Hodge 構造については 2.1.2 で見た通りである。重みによるフィルターを W として、 $Gr_2^W = W_2$ (resp. Gr_3^W) 上には、カップ積による対称形式 ψ_2 (resp. 交代形式 ψ_3) が存在する。これらが混合 Hodge 構造の偏極構造 (graded polarization) $\psi = (\psi_2, \psi_3)$ を与えている。

周期領域については [SSU] およびその中の文献を参照されたい。

Definition 2.3.1 Hodge 数 $(h^{1,1}, h^{2,1}, h^{1,2}) = (9, 1, 1)$ (resp. $(h^{1,1}, h^{2,1}, h^{1,2}) = (8, 1, 1)$) をもつ $(H^2(X_0 - Y_0, \mathbf{Z}), W, \psi)$ (resp. $(H^2(X_0 - (Y_0 \cup S_0), \mathbf{Z}), W, \psi)$) 上の混合 Hodge 構造全体のなす周期領域を $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{(X_0, Y_0)}$ (resp. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{(X_0, Y_0 + S_0)}$) と記す。

定義により、 \mathcal{P}_0 (resp. \mathcal{P}) は $H^2(X_0 - Y_0, \mathbf{C})$ (resp. $H^2(X_0 - (Y_0 \cup S_0), \mathbf{C})$) 上の 2 ステップのフィルター $F = \{F^p\}$

$$F^0 = F^1 \supset F^2 \supset F^3 = 0 \quad \dim_{\mathbf{C}} F^1/F^2 = h^{1,1}$$

のなす空間である。

実は、これらの混合 Hodge 構造の重み 2 の部分 Gr_2^W の偏極 Hodge 構造は Tate の Hodge 構造 $\mathbf{Z}(-1)$ の直和に同型なので一意的である。一方、重み 3 の部分 Gr_3^W の偏極 Hodge 構造は、重み 1 の $Gr_3^W(1)$ を対応させることにより楕円曲線のモジュライに対応する。

対応 $F \mapsto F$ on $Gr_3^W(1)$ は、全射 $\varpi_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbf{H}$ (resp. $\varpi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{H}$) を定める。このファイバーは、 Gr_3^W の W_2 による混合 Hodge 構造としての拡大の同値類の空間 $\text{Ext}_{MHS}^1(Gr_3^W, W_2)$ に他ならない。Carlson の定理 [Ca] により次を得る。

Proposition 2.3.2

$$\text{Ext}_{MHS}^1(Gr_3^W, W_2) \simeq (W_2)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} J(Gr_3^W(1), F)$$

ここで $J(Gr_3^W(1), F)$ は重み 1 の偏極 Hodge 構造 $(Gr_3^W(1), F, \psi_3(1))$ に対応する Jacobi 多様体 $Gr_3^W(1)_{\mathbf{C}} / (F(1)^1 + Gr_3^W(1)_{\mathbf{Z}})$ を表す。

勝手な標付き有理楕円曲面 $(X, S, Y, \varphi, \omega)$ に対する混合 Hodge 構造 $H^2(X - Y, \mathbf{Z})$ および $H^2(X - (Y \cup S), \mathbf{Z})$ の場合には、 $J(\text{Gr}_3^W(1), F) \simeq Y$ となる。

Lemma 2.3.3

Definition 2.3.4 ホモロジー標付き有理楕円曲面 (X, Y, φ) (resp. (X, S, Y, φ)) に混合 Hodge 構造 $H^2(X - Y, \mathbf{Z})$ (resp. $H^2(X - (Y \cup S), \mathbf{Z})$) を対応させる周期写像を

$$p_0 : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{P}_0 \quad (\text{resp. } p : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P})$$

と記す。

2.4 標付き (marked) 有理楕円曲面に対する Torelli 型定理

Theorem 2.4.1 (無限小 Torelli 定理) ホモロジー標付き有理楕円曲面 (X, Y, φ) に対して

$$(dp_0)_{(X, Y, \varphi)} : T_{(X, Y, \varphi)} \mathcal{N}_0 \rightarrow T_{p_0(X, Y, \varphi)} \mathcal{P}_0$$

は同型である。

Corollary 2.4.2 p_0 は局所同型である。

参照 (reference) のための空間において、自然な準同型 $H^2(X, \mathbf{Z})/\mathbf{Z} \cdot [Y] \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})/(\mathbf{Z} \cdot [Y] \oplus \mathbf{Z} \cdot [S])$ の分裂 (splitting) を (ずっと) 固定する。すると、 $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P}_0$ なる自然な写像が誘導される。そして、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{P}_0 \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{p} & \mathcal{P} \end{array}$$

が Cartesian であることが示せる。すると、次の定理が証明できる。

Theorem 2.4.3 周期写像 $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ は局所同型である。従って、 \mathcal{M} は滑らかである。

周期領域の普遍被覆を導入し、また \mathbf{P}^2 の 9 点ブローアップとしての有理楕円曲面の表示を経由することで大域的 Torelli 定理が証明される。これについては準備中の論文 [AKSST] を参照されたい。

3 E 型の Seiberg-Witten 可積分系

4D $N = 2$ SYM 理論では、楕円曲線 (あるいはスペクトル曲線) 上に Seiberg-Witten 微分と呼ばれる有理 1 次微分形式 $\lambda = \lambda_{SW}$ を考えることができた。しかもそれは楕円曲線 (あるいはスペクトル曲線) の族におけるパラメータ u に (有理型に) 依存している。その特徴の一つは、(少なくとも楕円曲線の場合) 正則 1 次微分形式を ω として

$$\frac{d}{du}\lambda = \omega$$

という関係である。cf. Introduction. これを 3.1 で楕円ファイバー構造の Gauss-Manin 接続を用いて定式化する。

$$\frac{d}{du}\lambda = 0$$

が Gauss-Manin 接続の平坦な断面の方程式であるから、Seiberg-Witten 微分は非斉次線型常微分方程式の解である。その無限遠での様子を 3.2 で調べる。

Seiberg-Witten 可積分系は、代数的 (に完全積分可能) な Hamilton 系である。cf. [Do]. 特に、Hamilton 構造を定める Liouville 形式は、Seiberg-Witten 微分をそれが含んでいるパラメータもこめた空間上の 1 形式として得られる、という普遍的な性質を備えている。3.3 で E 型の場合に、3.2 の考察を用いてそのような Hamilton 系を構成する。

3.1 楕円ファイバー構造の Gauss-Manin 接続

有理楕円曲面 $\pi : X \rightarrow B$ を一つ固定する。 π の臨界値の集合を $\Sigma (\subset B)$ と記す。 π の非特異ファイバー $X_b := \pi^{-1}(b)$ ($b \in B \setminus \Sigma$) のコホモロジー $H^1(X_b, \mathbb{C})$ の全体は de Rham コホモロジー

$$\mathcal{H}_{DR}^1(X/B) = R^1\pi_*(\Omega_{X/B})$$

をなす。

SYM 理論の質量 (mass) も扱うために、ファイバー上に Seiberg-Witten 微分の極に当たる点を導入しなければならない。[NTY] では有理楕円曲面の断面とファイバーとの交わりの位置に極があると議論している。

3.2 Seiberg-Witten の微分方程式の解の展開

3.3 Seiberg-Witten 可積分系

References

- [AKSST] H. Awata, K. Kato, Y. Saito, Y. Shimizu and A. Tsuchiya, Rational elliptic surfaces and the period domain, in preparation.
- [BPV] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag (1980).
- [Ca] James A. Carlson, Extensions of mixed Hodge structures, in *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers*, Sitjhoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn—Germantown, Md. (1980) 107–127.

- [Do] R. Donagi, Seiberg-Witten integrable systems, *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997) 3–43.
- [Ho] E. Horikawa, On deformations of holomorphic maps I, II, III, I. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 372–396; II. J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 647–667; III. Math. Ann. 222 (1976), no. 3., 275–282.
- [Ks] A. Kas, Weierstrass normal form and invariants of elliptic surfaces, Trans. Amer. math. Soc. **225** (1977) 259–266.
- [Kw] A. Kawamata, On deformations of compactifiable complex manifolds, Math. Ann. **235** (1978) 247–265.
- [LW] W. Lerche, N. P. Warner, Exceptional SW geometry from ALE fibrations, Phys. Lett. B 423 (1998), no. 1-2, 79–86.
- [Lo] E. Looijenga, On the semi-universal deformation of a simple-elliptic hypersurface singularity. II. The discriminant. Topology 17 (1978), no. 1, 23–40.
- [Mi] R. Miranda, The moduli of Weierstrass fibrations over \mathbf{P}^1 , Math. Ann. 255 (1981), no. 3, 379–394.
- [NTY] Masayuki Noguchi, Seiji Terashima and Sung-Kil Yang, $N = 2$ superconformal field theory with ADE global symmetry on a D3-brane probe, Nuclear Phys. B 556 (1999), no. 1-2, 115–151.
- [Pv] V.P. Palamodov, Deformations of complex spaces, Russian Math. Surveys **31** (1976) 129–197.
- [Sa] Hidetaka Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Dept. of Math. Kyoto Univ. Preprint series, 1999, No. 10.
- [SSU] M-H. Saito, Y. Shimizu and S. Usui, Variation of mixed Hodge structure and the Torelli problem, Adv. Stud. in Pure Math. **10** (1987) 649–693 .
- [ST] Masa-Hiko Saito and Taro Takebe, Classification of Okamoto–Painlevé pairs, preprint, 2000, Feb., math/AG 0006028.
- [S] T. Shioda, *The theory of Mordell-Weil lattices and their applications*, Graduate School of Mathematical Science, Tokyo Univ. Lecture Note No.1 (1993).
- [SW] N. Seiberg, E. Witten, Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory, Nuclear Phys. B 426 (1994), no. 1, 19–52; Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD, Nuclear Phys. B 431 (1994), no. 3, 484–550.

CALABI-YAU 3-FOLD 上の GROMOV-WITTEN 不変量 - 弦双対性の観点からの数学的アプローチ -

高橋 篤史
京都大学数理解析研究所

はじめに

ミラー対称性によって 3 次元 Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 不変量を求めるといふ問題に関しては、これまで非常に多くの数学的・物理的研究が行われてきた。しかしながら高い種数の Gromov-Witten 不変量の構造の決定は非常に困難であった。

ところが Gopakumar-Vafa の論文 [GV] により状況は大きく変わった。彼らは弦双対性の理論を用いることにより、3 次元 Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 不変量の構造を非常に明快に表現することに成功したのである。それは 4 次元のゲージ理論における Donaldson 不変量の構造定理、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量の等価性、といったものの 3 次元 Calabi-Yau 多様体における Gromov-Witten 不変量版とでもいうべきものである。

まず彼らの主張を数学的に定式化し、十分な証拠を与え、また主張が成立すべき背景を探るのが重要であると考え。ここではこのことに対するある試みを紹介することにする。詳細は論文 [HST2] および現在準備中の [T] を参照していただきたい。

1. GROMOV-WITTEN 不変量

滑らかで射影的な 3 次元複素多様体で標準束が自明なものを 3 次元 Calabi-Yau 多様体と呼ぶことにする。まず Gromov-Witten 不変量について簡単に説明する。

安定写像とは、特異点として高々通常 2 重点のみを持つ代数曲線 Σ から X への正則写像 $f: \Sigma \rightarrow X$ であって、 f の自己同型群が有限群となるものである。とくに X が 1 点のときには、安定写像は Deligne-Mumford による安定曲線になる。とくに $g \geq 0$, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ を固定したとき、安定写像 $f: C \rightarrow X$ で、算術種数が $g_a(\Sigma) = g$, $f_*([\Sigma]) = \beta$ となるものの moduli 空間を安定写像の moduli 空間と呼び、 $\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)$ で表す。このとき $\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)$ は固有な Deligne-Mumford stack となることが知られていて、 \mathbb{Q} 上のコホモロジー理論を考えることができる。 $\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)$ の次元は一般的に求めることはできないが、障害 (obstruction) がな

い場合には moduli 空間の次元となる, 仮想次元と呼ばれる数 $\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)$ が Riemann–Roch の定理により

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta) := \int_{\beta} c_1(X) + (\dim_{\mathbb{C}} X - 3)(g - 1)$$

で与えられる. X が 3 次元 Calabi–Yau 多様体ならば, 仮想次元は g や β によらず常に 0 である.

Kontsevich–Manin の公理を満たす (代数的な) Gromov–Witten 理論が, 仮想基本類 (virtual fundamental class) と呼ばれる代数的サイクル

$$[\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)]^{\text{virt}} \in A_{\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)}(\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta), \mathbb{Q})$$

を構成することで得られる (Behrend). X が 3 次元 Calabi–Yau 多様体の場合, 仮想次元が 0 なので $\text{deg} : A_0(\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta), \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ によって仮想基本類を有理数とすることができる. そこで

定義 1.1. 3 次元 Calabi–Yau 多様体 X の種数 g ・ 次数 β の Gromov–Witten 不変量を,

$$N_g^X(\beta) := \text{deg}[\overline{\mathcal{M}}_g(X, \beta)]^{\text{virt}} \in \mathbb{Q}$$

で定義する.

直感的には, $N_g^X(\beta)$ は安定写像 f を自己同型群付きで足し上げたもの

$$N_g^X(\beta) \text{ “} = \text{” } \sum_{f: \Sigma \rightarrow X} \frac{1}{\# \text{Aut}(f)}$$

で, そのため「正則写像の数」は有理数となる.

注. この式は安定写像が孤立しているならば成り立つが, 一般にそのようなことはあまり期待できない. このため, および Gromov–Witten 不変量の変形不変性の証明のために仮想基本類を考える必要がある.

規則的な数は, 単独で考えるよりその母関数を考えたほうがよいことはよく知られている. 例えば保型形式が代表例である. この場合も同様で, 変数 $q^\beta, \beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ および λ を導入して

$$F_g^X := \sum_{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} N_g^X(\beta) q^\beta$$

$$F^X(\lambda) := \sum_{g \geq 0} F_g^X \lambda^{2g-2}$$

を考える.

注. q^β は複素化された Kähler 形式 ω を用いて $q^\beta = e^{\int_\beta \omega}$ と書きたいところだが, F_g^X の収束性の問題があるため, ここでは q^β, λ は単に形式的な変数と考える.

2. GOPAKUMAR–VAFA 予想

物理学者 Gopakumar–Vafa は, $F^X(\lambda)$ を Type IIA 弦理論と M-理論の双対性を用いて計算することで, 数学的に非常に自明でない予想を与えた.

予想 2.1 ([GV]). X の部分多様体 $C([C] = \beta \in H_2(X, \mathbb{Z}))$ に巻きついた $M2$ -brane を考える. この $M2$ -brane の BPS 状態から整数 $n_h^X(\beta)$ が定まって,

$$(1) \quad F^X(\lambda) = \sum_{k \geq 1, h \geq 0, \beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} n_h^X(\beta) \frac{1}{k} \left(2 \sin \frac{k\lambda}{2}\right)^{2h-2} q^{k\beta}$$

となる.

整数値不変量 $n_h^X(\beta)$ は BPS 不変量と呼ばれている.

この予想を数学的に証明する手段として,

- (i) 式 (1) を仮定することによって BPS 不変量を定義し (以下ではこのようにして得られた有理数を $n_h^{conj}(\beta)$ で表すことにする), $n_h^{conj}(\beta)$ が整数であることを証明する. さらに $n_h^{conj}(\beta)$ の幾何学的意味付けを行う.
- (ii) BPS 不変量 $n_h(\beta)$ を brane の moduli 空間を用いて独立に定義する. その後式 (1) を証明する.

という, 2 通りの方法が考えられる.

(i) の観点は, ミラー対称性の研究で盛んに行われてきた. 具体的には, (1) の λ^{-2} の項を計算すると

$$N_0(\beta) = \sum_{k|\beta} \frac{1}{k^3} n_0^{conj}(\beta/k)$$

が得られるが, これはよく知られた Aspinwall–Morisson 公式である. $n_0^{conj}(\beta)$ が整数でない例は知られておらず, とくにその整数性の証明が, Symplectic 幾何学の立場から深谷-小野 [FO] による研究が進んでいる. 一方, $n_0^{conj}(\beta)$ の幾何学的意味に関していうと, X のホモロジー類が β となる「有理曲線の数」で, $1/k^3$ は次数 k の multiple covering の寄与であると考えられてきたが, これに関しては否定的な結果があるので (Cox–Katz 参照) 新たな議論が必要である.

(ii) の観点は, 元々の Gopakumar–Vafa の主張に沿ったものである. つまり, 「 X の cycle に巻きついた $M2$ -brane」の moduli 空間から新しい不変量 (BPS 不変量) が定義できるこ

と、それと Gromov–Witten 不変量が等価であること (式(1)) を示す必要がある。残念なことに、今のところ物理的背景なしで BPS 不変量と Gromov–Witten 不変量が等価であるべき数学的理由は全くわかっていない。しかしながら、間接的な状況証拠はある。

今の設定においては、M-理論の brane の集合というのは X の接続層の導来圏と捉えてよい。そして、例えば射影空間 \mathbb{P}^n の場合には、Dubrovin[D] および Givental[G] の結果によれば、接続層の導来圏から Gromov–Witten 不変量を構成することができるということがわかっている。これは Gromov–Witten 不変量から定まる Frobenius 構造が半単純 (semi-simple) であるためだが、3次元 Calabi–Yau 多様体の場合にも同様の現象を期待してもよいのではないかと思われる。

3. BPS 不変量の数学的定式化

BPS 不変量のある数学定式化を与えるが、詳細は細野忍氏・齋藤政彦氏との共著 [HST2] を見ていただくことにして、ここではそこで触れきれなかった物理的背景とともに概略を説明する。

Gopakumar–Vafa 予想 2.1 では、両辺ともに q^β に関するべき級数展開を比較している。これは X の複素化された Kähler 構造の moduli 空間における巨大体積極限 (large radius limit) と呼ばれる点の近傍で、物理量を解析していることを意味している。M-理論の基本的登場人物は、M2-brane とその電磁双対である M5-brane だが、巨大体積極限では、M2-brane の質量は M5-brane の質量より先に 0 に近づく。そのため、M-理論は巨大体積極限において M2-brane により記述される。このことから、 X に含まれる代数曲線達に台を持つ $D^b(\text{Coh}(X))$ の達によって、 $F^X(\lambda)$ が表現されるべきことがわかる。

具体的に Gromov–Witten 不変量と比較を行うためには、BPS brane から定量的な情報を引き出す必要がある。つまり、brane の集まり $D^b(\text{Coh}(X))$ から BPS 条件を満たすものを取り、その moduli 空間を考察する必要がある。数学的に言い換えると、導来圏の対象に安定性を定め、安定な対象から定まる moduli 空間の適当なコホモロジー群を考える必要がある。導来圏の対象に対する安定性の議論は一般には未完成であるが、巨大体積極限の近傍では、アーベル圏 $\text{Coh}(X)$ および X 上の豊富な直線束により定まる (通常の) 安定性で、BPS brane が与えられるとされている。

注. オービフォールド極限 (orbifold point) では quiver の表現に対する θ -安定性になるような、複素化された Kähler 構造に依存する安定性が $D^b(\text{Coh}(X))$ に定義できると予想されている (Aspinwall–Douglas による II-安定性 [AD]).

これまでのことで、次のような不安定層の moduli 空間を考えることになる。具体的な構成法については [HL] を参照されたい。

定義 3.1. X 上の豊富な直線束 L を固定する。接続層 \mathcal{E} の Hilbert 多項式を $P(\mathcal{E}, m)$ で表すとき、

$$M_{d,\chi} := \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} : X \text{ 上の不安定層}, P(\mathcal{E}, m) = d \cdot m + \chi\} / \text{iso.}$$

と定義する。

このとき、 $M_{d,\chi}$ は射影的スキームになる。求めたい BPS 不変量は χ によらないことが物理的に信じられているので、今後 $M_{d,1}$ のみを用い、また簡単のために正規化を考え M_d で表す。

ここで考えられている物理は、Type IIA 理論を X で、もしくは M-理論を $X \times S^1$ でコンパクト化した 4 次元の理論である。そのため BPS 状態は $SO(4)$ の表現になるが、 $SO(4)$ は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ に局所同型なので、BPS 状態は Lie 環 $(\mathfrak{su}_2)_L \times (\mathfrak{su}_2)_R$ の表現となる。

予想 3.1. $H^*(M_d)$ は $(\mathfrak{sl}_2)_L \times (\mathfrak{sl}_2)_R$ の表現である。

このことを認めると、 \mathfrak{sl}_2 の $2j+1$ -次元既約表現 (j) , (j は半整数) を使って

$$H^*(M_d) = \bigoplus_{j_1, j_2} N'_{j_1, j_2} (j_1)_L \otimes (j_2)_R$$

と、 $(\mathfrak{sl}_2)_L \times (\mathfrak{sl}_2)_R$ の既約表現で分解し、ベクトル空間として基底を取り替えて、

$$\bigoplus_{j_1, j_2} N'_{j_1, j_2} (j_1)_L \otimes (j_2)_R = \bigoplus_{h \geq 0} \left[\left(\frac{1}{2} \right)_L \oplus 2(0)_L \right]^{\otimes h} \otimes \sum_j N_j(j)_R$$

と書き直すことで、BPS 不変量 $n_h^X(d)$ が

$$n_h^X(d) := \sum_j (-1)^{2j} N_j(2j+1)$$

と定義される。

注. M_d をホモロジー類 β ごとに分解することで、 $n_h^X(\beta)$ が定義できるが省略する。

$(\mathfrak{sl}_2)_L \times (\mathfrak{sl}_2)_R$ の幾何学的起源を説明する。brane の moduli 空間 M_d は、大体 X の代数曲線 C と C 上の平坦直線束 \mathcal{L} の組の moduli 空間であり、平坦直線束を忘れることで、代数曲線 C の X の中での変形の moduli 空間 S_d に写像

$$\pi_d : M_d \rightarrow S_d, (C, \mathcal{L}) \mapsto C$$

ができる. 滑らかな Kähler 多様体 V に対して, V のコホモロジー群の元に Kähler 形式を外積することの作用が sl_2 -作用を定めることが知られている (強 Lefschetz 定理). そこで, π_d のファイバーおよび S_d に関して強 Lefschetz 定理を使うと, $(sl_2)_L \times (sl_2)_R$ 作用ができ, Leray のスペクトル系列の退化から $H^*(M_d)$ が $(sl_2)_L \times (sl_2)_R$ の表現となる, というのが Gopakumar–Vafa による提案であった.

注. ここで与えた解釈により, 前に与えた BPS 不変量を与える操作は, node の数による stratification を行うことにほぼ対応することがわかる. $[(\frac{1}{2})_L \oplus 2(0)_L]^{\otimes h}$ は滑らかな種数 h の曲線の Jacobian のコホモロジー群と同型であることに注意する.

一般には M_d, S_d および π_d のファイバーは特異であるために, 彼らの議論そのままでは成立しない. また, 代数曲線 C の X 中での変形の moduli 空間 S_d の意味も正確に定義する必要がある. これは [HST2] の中で, Chow 多様体および交叉コホモロジーを考えることにより解決されることがわかった.

まず $\mathcal{E} \in M_d$ の台 $\text{Supp}(\mathcal{E})$ をとり, その既約成分を Y_1, \dots, Y_l とする. このとき

$$s(\mathcal{E}) := \sum_{i=1}^l \text{length}_{Y_i}(\mathcal{E}) \cdot Y_i.$$

として, \mathcal{E} のスキーム論的台 $s(\mathcal{E})$ を定める.

定理 3.1 ([HST2]).

$$\begin{aligned} M_d(X) &\rightarrow \text{Chow}(X) \\ \mathcal{E} &\mapsto s(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

で, スキームの射ができる. とくにこの射は射影的である.

M_d の像の (正規化) を S_d , そこに導かれる射を $\pi_d : M_d \rightarrow S_d$ と表すことにする. このとき次のことも示される.

定理 3.2 ([HST2]). M_d の交叉コホモロジー群 $IH^*(M_d)$ は $(sl_2)_L \times (sl_2)_R$ の表現である.

とくに $(sl_2)_L$ は M_d 上の π_d に関する相対豊富直線束, $(sl_2)_R$ は S_d 上の豊富直線束によって与えられる Lefschetz sl_2 作用である. 偏屈層の順像に関する Leray のスペクトル系列によって初めて, これらの sl_2 -作用をみることができる. 具体的には, Beilinson–Bernstein–Deligne による偏屈層に関する理論, とくに分解定理と相対強 Lefschetz 定理を用いて示される. 上の二つの定理によって BPS 不変量が数学的にも定義でき, 式(1)を用いて数学的にも予想 2.1 が定式化できる.

注. ただしこのままでは, $d = 0$ の係数に 2 倍のずれが生じる. これは次の節で説明する.

式(1)の物理的背景を述べる. 左向きスピン $[(1/2)_L \oplus 2(0)_L]^{\otimes h}$ を持った BPS 粒子が与えられたとき, $F^X(\lambda)$ を与える物理量に対する寄与が, 一定電磁場の中を運動する電荷をもった粒子の 1 ループ振幅を計算することにより与えられる. そしてこれは Scwinger の公式

$$(2) \quad \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} (2i \sinh \frac{s}{2})^{2h-2} q^{\frac{s}{\lambda} \cdot \beta} \exp(-2\pi i m \frac{s}{\lambda})$$

で与えられる. 式(2)に $n_h^X(\beta)$ を掛けて足し合わせることで右辺が得られ, 予想 2.1 の「物理的証明」が終わる.

4. GOPAKUMAR–VAFA 予想の検証

残念ながら, 今のところ式(1)が成り立つべき数学的背景は知られていない. しかしこの予想が数学的にも正しいと信じられる証拠がいくつもある. ここでは簡単ではあるが, 重要な例をいくつか挙げる.

4.1. 定値写像. まず, 前の節で曖昧にしていた点を補う. 式(1)の導出で, 「式(2)に $n_h^X(\beta)$ を掛けて足し合わせる」としたが, どのような範囲で和をとるのかを説明しなかった. 正確には正の BPS 状態に関してのみ和をとらなければならない. ここは元の Gopakumar–Vafa の論文で省略されている議論であって, うまく処理しないと正しい答えが出ない. 実際前に触れた通り, 定値写像の寄与に関して 2 倍のずれが生じる.

定義 4.1. $(\beta, m) \in H_2(X, \mathbb{Z}) \oplus H_0(X, \mathbb{Z})$ が正である $((\beta, 0) > 0)$ ということを

$$\begin{aligned} (\beta, m) > 0 &\stackrel{\text{def}}{\iff} \beta > 0, m \in \mathbb{Z} \\ &\text{or } \beta = 0, m > 0, \\ \beta > 0 &\stackrel{\text{def}}{\iff} \beta \in \overline{NE(X)} \cap H_2(X, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

によって定める. ここで $\overline{NE(X)}$ は曲線の錐を表す.

注. これは, Lie 環論における正のルートと同様の考え方である. 今の場合, 対象を反正則と正則に分離し, 正則な対象だけを扱うということの意味する. これはアーベル圏 $Coh(X)$ を固定して考えていることの現れである.

上の positivity に関する注意, および BPS 不変量が (β, m) に対して m によらずに決まるという主張をもとに式(2) を掛け合わせることで, Gopakumar–Vafa 予想 2.1 が次のように修正される.

予想 4.1.

$$(3) \quad F^X(\lambda) = \sum_{(\beta, m) > 0, h \geq 0} n_h^X(\beta) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} (2\sqrt{-1} \sinh \frac{s}{2})^{2h-2} q^{\frac{s}{\lambda} \cdot \beta} \exp(-2\pi i m \frac{s}{\lambda})$$

$\beta \neq 0$ の場合は恒等式

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\pi i m \frac{s}{\lambda}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\frac{s}{\lambda} - k),$$

を用いて式(1) の $\beta \neq 0$ の部分が再現される.

$\beta = 0$ のときを考える. 一般の brane の moduli 空間 M_d を求めるのは難しいが, M_0 は定義からすぐに X そのものであることがわかる. とくに

$$n_h^X(0) = \begin{cases} -\chi(X) & \text{for } h = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を示すのも容易である. この場合式(3) の右辺は

$$n_0^X(0) \sum_{m > 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} (2\sqrt{-1} \sinh \frac{s}{2})^{-2} q^{\frac{s}{\lambda} \cdot \beta} \exp(-2\pi i m \frac{s}{\lambda}),$$

具体的に計算を実行すると

$$\frac{1}{2} n_0^X(0) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(2 \sin \frac{k\lambda}{2} \right)^{-2}$$

となる (式の美しさのため, $\zeta(1)$ の発散項も含めている).

注. $\chi(X) = 2(h^{1,1}(X) - h^{2,1}(X))$ であるから $n_0^X(0)/2 = -\chi(X)/2$ は整数である.

一方の Gromov–Witten 不変量側では, Faber–Pandharipande[FP] によって $n_0^{conj}(0) = -\chi(X)/2$, $n_h^{conj}(0) = 0, h \neq 0$ が証明されている. よってこの場合には Gopakumar–Vafa の予想が確かめられた.

4.2. 収縮写像と BPS 不変量. 次に M_d が取り扱いやすく, また重要であると考えられるのは, ある収縮写像 (contraction) $f : X \rightarrow Y$ でつづれるサイクルに台を持つ半安定層の moduli である. Wilson によって原始的収縮写像 (primitive contraction) は次のように分類されて取り扱われる (正確な定義は [W1] を参照されたい):

- (i) Type I: 有限個の有理曲線が 1 点につづれる.
- (ii) Type II: 曲面が 1 点につづれる.
- (iii) Type III: 曲面が曲線につづれる.

まず Type I 収縮写像でつづれる有理曲線に台を持つ半安定層から定まる BPS 不変量についての結果を述べる.

定理 4.1 ([T]). $C \subset X$ は滑らかな有理曲線で, 収縮写像 $f : X \rightarrow Y$ であって $f(C) = p$ は Y の点, $f : X \setminus C \simeq Y \setminus p$ となるものが存在するとする. このとき,

$$M_{n,C} := \{\mathcal{E} \in M_{n[C]}(X) \mid s(\mathcal{E}) = n \cdot C\} \subset M_{n[C]}.$$

から定まる局所 BPS 不変量は

$$(4) \quad n_h^X(n \cdot C) = \begin{cases} k_i & \text{for } h = 0, n = 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で与えられる. ここで l は Kollár の length, k_i は $M_{n,C}$ の多重度である.

もう少し詳しく述べる. $M_{n,C}$ の元はあるスキーム C_n , ($(C_n)_{red} = C, [C_n] = n[C]$) によって \mathcal{O}_{C_n} , $n \leq l$ と書けることが示される. このときスキームとして $M_{n,C}$ は C_n を含む $Hilb(X)$ の成分になることがわかる. このことから上の定理が従う.

Gromov–Witten 不変量側でも [BKL] によって $n_h^{conj}(n \cdot C)$ が求められ, 同じ結果を与えている. つまりこの場合にも Gopakumar–Vafa の予想が裏付けられている. 論文 [BKL] では, C_n , $n \leq l$ を k_n -本の $(-1, -1)$ -曲線の場合に変形し, Gromov–Witten 不変量の変形不変性を用いて [FP] の結果を適用するという手法がとられている.

4.3. Type III. Type III 収縮写像の場合は Type I の場合と非常に似ている. 実際, 変形によって Type I にできる場合もあり, [W2] ではそのような手法で Gromov–Witten 不変量が計算されている.

一方の BPS 不変量は非常に簡単に計算することができる. $E \subset X$ を滑らかな種数 g の曲線 C 上の conic bundle とする. とくに $E \rightarrow C$ のファイバーのホモロジー類を $2f$, ファイバーに台をもちホモロジー類が nf となるような半安定層のモジュライ空間を $M_{n,f}(\subset M_{nf})$ で表す.

定理 4.2 ([T]). E は *double fiber* を持たないとする. このとき $M_{n,f}$ から定まる局所 BPS 不変量は

$$(5) \quad n_h^X(n \cdot f) = \begin{cases} 2 \sum_{r \geq 0} a_r(r+1) & \text{for } h=0, n=1 \\ 2g-2 & \text{for } h=0, n=2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で与えられる. ここで a_r は A_r -型特異点を持つ特異ファイバーの本数とする.

これも $M_{n,f}$ の元と有理曲線の構造層の対応を見ることで示される. A_r -型特異点を通る有理曲線の多重度がわかるところが, Type I のときと異なる. とくに [W2] で得られた Gromov–Witten 不変量から定まる n_h^{conj} と一致し, この場合も予想 2.1 が確かめられた.

4.4. Type II. $\mathbb{P}^2 \subset X$ を考える. H で \mathbb{P}^2 の超平面のホモロジー類を表す. このとき

$$M_{d,H} := \{\mathcal{E} \in M_{[dH]} \mid s(\mathcal{E}) \in |dH|\} \subset M_{[dH]}.$$

という moduli 空間を考える. とくに半安定層の台をとる自然な写像は

$$\begin{aligned} \pi_{d,H} : M_{d,H} &\rightarrow |dH| \quad (\simeq \mathbb{P}^{d(d+3)/2}) \\ \mathcal{E} &\mapsto s(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

で与えられることがわかる.

定理 4.3 ([T]). (i) $d=1, 2$ のとき, $\pi_{d,H} : M_{d,H} \simeq |dH|$ であって,

$$n_h(d) = \begin{cases} 3 & \text{for } d=1, h=0 \\ -6 & \text{for } d=2, h=0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(ii) $d=3$ のとき, $\pi_{3,H} : M_{3,H} \rightarrow |3H|$ は *complete linear system* $|3H|$ の *universal family* であって,

$$n_h(3) = \begin{cases} -10 & \text{for } h=1 \\ 27 & \text{for } h=0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(iii) $d=4$ のとき

$$n_h(4) = \begin{cases} 15 & \text{for } h=3 \\ -192 & \text{for } h=0 \\ 0 & h \geq 4 \end{cases}$$

とくにこの場合にも, [KZ] で localization method を用いて計算された Gromov–Witten 不変量から決まる n_h^{conj} 達と一致する.

注. $d = 4$ の場合, $H^*(M_4)$ の $sl_2 \times sl_2$ 表現がわからないために, $h = 1, 2$ が計算できない. $h = 0, 3$ の BPS 不変量は $M_{4,H}$ および $|4H|$ が滑らかであるから, これらのオイラー数から計算される.

注. 他の del Pezzo 曲面に対しても, 次数が低い曲線に台を持つ半安定層の moduli から定まる BPS 不変量を計算することができるが, 比較すべき Gromov–Witten 不変量が求まっていない. しかし局所ミラー対称性を用いて B-モデルから計算されるものとは一致している. 局所ミラー対称性と BPS 不変量については [HST1][KKV]などを参照していただきたい.

$d = 3$ の例は, $H^*(M_3)$ の Lefschetz $sl_2 \times sl_2$ 表現を書き下せる (自明でないものを除いてもっとも簡単なものである. 具体的には,

$$\begin{aligned} H^*(M_{3,H}) &= \left(\frac{1}{2}\right)_L \otimes \left(\frac{9}{2}\right)_R \oplus (0)_L \otimes (3)_R \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)_L \oplus 2(0)_L\right] \otimes \left(\frac{9}{2}\right)_R \oplus (0)_L \otimes \left[(3)_R - 2\left(\frac{9}{2}\right)_R\right], \end{aligned}$$

となる. これは通常の Lefschetz sl_2 表現としてみたとき, M_3 は \mathbb{P}^2 上の \mathbb{P}^8 -束であるから $H^*(M_{3,H}) = (5) \oplus (4) \oplus (3)$ となることからわかる. よって

$$\begin{aligned} n_1(3) &= (-1)^{2 \cdot \frac{9}{2}} \left(2 \cdot \frac{9}{2} + 1\right) = -10 \\ n_0(3) &= (-1)^{2 \cdot 3} (2 \cdot 3 + 1) - 2 \cdot (-1)^{2 \cdot \frac{9}{2}} \left(2 \cdot \frac{9}{2} + 1\right) = 27 \end{aligned}$$

が得られる.

このように, 3節で行った BPS 不変量の数学的定式化は今のところ非常にうまくいっている. しかしながら, 現在の BPS 不変量の定義は変形不変性や自然性の問題がある. 今後の課題として, 例えば Gromov–Witten 理論のときのように, BPS 不変量を仮想基本類を経由する形で構成することを考えている.

REFERENCES

- [AD] P. Aspinwall, M. Douglas, *D-brane Stability and Monodromy*, hep-th/0110071.
- [BKL] J. Bryan, S. Katz, N. Leung *Multiple covers and the integrality conjecture for rational curves in Calabi–Yau threefolds*, J. Algebraic Geom. 10 (2001), no. 3, 549–568. math.AG/9911056
- [D] B. Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, math.AG/9807034.
- [FP] C. Faber, R. Pandharipande, *Hodge integrals and Gromov–Witten theory*. Invent. Math. 139 (2000), no. 1, 173–199. math.AG/9810173.
- [FO] K. Fukaya, K. Ono, *Gromov–Witten invariants over \mathbb{Z} of general symplectic manifolds, (a summary)*, in Proceedings of Taniguchi Symposium, 1999, Nara.
- [G] A. Givental, *Gromov–Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians*, math.AG/0108100.
- [GV] R. Gopakumar, C. Vafa, *M-Theory and Topological Strings-I,II*, hep-th/9809187, hep-th/9812127.
- [HL] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Aspects of Mathematics, Vol E31, Vieweg.
- [HST1] S. Hosono, M.-H. Saito, A. Takahashi, *Holomorphic Anomaly Equation and BPS State Counting of Rational Elliptic Surface*, Adv. Theoret. Math. Phys. 3 (1999) 177–208.
- [HST2] S. Hosono, M.-H. Saito, A. Takahashi, *Relative Lefschetz action and BPS State Counting*, Internat. Math. Res. Notices, no. 15 (2001) 783–816. math.AG/0105148
- [KKV] S. Katz, A. Klemm, C. Vafa, *M-theory, Topological String and Spinning Black Holes*, hep-th/9910181.
- [KZ] A. Klemm and E. Zaslow, *Local Mirror Symmetry at Higher Genus*, hep-th/9906046.
- [P] R. Pandharipande, *Hodge integrals and degenerate contributions*, Comm. Math. Phys. 208 (1999), no. 2, 489–506. math.AG/9811140.
- [T] A. Takahashi, in preparation.
- [W1] P. M. H. Wilson, *The Kähler cone on Calabi–Yau threefolds*, Invent. Math. 107 (1992) 561–583.
- [W2] P. M. H. Wilson, *Flops, Type III contractions and Gromov–Witten invariants of Calabi–Yau 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

京都大学数理解析研究所

E-mail address: atsushi@kurims.kyoto-u.ac.jp

対数的シンプレクテック多様体の変型とパンルベ型方程式

齋藤 政彦 (神戸大学理学部)

1. 序

複素係数の代数的常微分方程式であってその解およびその解析接続の初期値に依存する特異点(動く特異点)が高々極のみであるとき、(すなわち分岐点でも真性特異点でもないとき)その微分方程式はパンルベ性をもつといわれている([IKSY], [SD] 等参照). コンパクト複素多様体 X とその反標準因子 $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i \in |-K_S|$ の組 (X, Y) で、 X 上の有理 2 形式 ω_X で、その極が Y 上にあり、また $X - Y$ 上で ω_X が非退化な正則シンプレクテック構造を定めているものを対数的シンプレクテック多様体と呼ぶ事にする. 岡本和夫氏 [O1] によって研究されたパンルベ方程式の初期値空間のコンパクト化はその例である.

岡本氏の研究とは逆に適当な「良い条件」をもつ対数的シンプレクテック多様体 (X, Y) を与えて、その変型理論からパンルベ性をもつハミルトン系を構成する事は筆者と梅村 浩氏との共著論文 [SU]、および竹部太郎氏と寺島ひとみ氏と共同研究 [STa], [STT], [STe1], [STe2] によって与えられている. 良い条件をもつ対数的シンプレクテック多様体 (X, Y) に対して、複素多様体 X とその正規交差因子 Y_{red} の対の変型理論は、川又氏 ([Kaw]) により与えられておりその理論と局所コホモロジー理論から、パンルベ方程式の「時間」の内在的意味が与えられる. 良い対数的シンプレクテック多様体の条件とは、初期値空間が 2 次元の場合 (2 階の常微分方程式の場合) は岡本・パンルベ対の条件である (cf. (12)). この条件は、本質的に坂井秀隆氏の理論 [Sakai] における条件と同じである.

この岡本・パンルベ対の条件は、非常の簡単な条件であり、代数幾何学の研究者には、覚えやすいものである. しかしその、条件から、変型理論を経ると、2 階のパンルベ性をもつ方程式系で (古典的に求積できないもの) の分類を可能にしてしまう.

我々は、この理論が高階の方程式の場合にも、十分に有効である事を確かめたいのであるが、そのためにはいくつかの困難を克服する必要がある. そのいくつかを列挙しよう.

1. 高次元の場合のパンルベ型常方程式を導く、対数的シンプレクテック多様体の「良い条件」とは何か? 特に、「岡本・パンルベ対の条件」の内在的意味とその高次元への拡張は何か?
2. 野海・山田の導入した \tilde{A}_l のワイル群を Bäcklund 変換の対称性としてもつ高階の常微分方程式の例 [NY2] 等について、上記の意味の良い対数的シンプレクテック多様体を定める事. また高次元の岡本・パンルベ対について必要なコホモロジー群や幾何学的情報を決定する事.
3. 野海・山田は [NY1], [NY3] 等において、Kac-Moody 型のワイル群を、双有理的な canonical transformations の群として実現している. 幾何学的にはある種の開ポアッ

Partly supported by Grant-in Aid for Scientific Research (B-09440015), (B-12440008) and (C-11874008), the Ministry of Education, Science and Culture, Japan .

2001 年 開カラビヤウ多様体と報告集, 北海道大学理学研究科, 2001 年 12 月 12 日.

ソソ多様体のポアソソ構造を保つ双有理変換を構成している事に対応する. 野海・山田理論の幾何学的解釈と、我々の理論との関係を明らかにする事.

この小論では、上の 1) の問題にある程度満足すべき答えを与える事を目標とする. 2), 3) の問いについては、これからの問題である. これらの問題は、双有理変換群作用付き、または有理ベクトル場付きの対数的シンプレクテック多様体の族の極小モデル問題として、定式されるべきであるというのが現在の筆者の意見ではあるが、明確な定式化を持っているわけではない. 絵に描いたもちなのか、高次元双有理幾何学の困難さがそのまま反映されて手付かずのままに残るのかは、筆者にはにわかには判定できない.

他分野との関係でいえば、線形方程式のモノドロミー保存変型からパンルベ性をもつ常微分方程式や偏微分方程式が得られる事が知られている. これは幾何学的にいうと、 P^1 上のベクトル束の特異点を許す平坦接続のモノドロミーデータを固定するモジュラ空間に対応する. このモジュライ空間は、あるベクトル束と Higgs 場のモジュライ空間の Hitchin 系の「非可換変型」と思える. この方向と、我々の理論の関係を明白にする事も必要である.

内容的には、代数学シンポジウムの報告 [SD] と重複する所が多い事を注意しておく. この研究会で発表の機会を与えていただいた組織委員に感謝する. また筆者の多忙の為、報告集の原稿が遅れ組織委員にご迷惑をおかけした事を深く謝罪する.

2. パンルベ方程式

まず、代数的常微分方程式

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0. \quad (1)$$

を考えよう. ただし、ここで

$$F(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{C}(t)[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

すなわち、 $F(t, \mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ について多項式であり t については有理式とする. 初期値空間の点

$$(t_0, \mathbf{c}_0) = (t_0, c_0, c_1, \dots, c_n) \in \{(t_0, \mathbf{c}_0) \in \mathbf{C}^{n+2} \mid F(t_0, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0\}$$

を固定する時、方程式 (1) に対する初期値問題

$$\frac{d^i \varphi}{dt^i}(t_0) = c_i, \quad (i = 0, \dots, n). \quad (2)$$

を考え、その局所解および解を解析接続したものを $\varphi(t)$ と書く事にする. もし、常微分方程式 (1) が線型であれば、解 $\varphi(t)$ の特異点は、常微分方程式の係数の特異性から完全に決定でき、その初期値 (t_0, \mathbf{c}_0) にはよらない. この種の解の特異点を 動かない特異点 (non-movable singularities) と呼ぶ.

一方、常微分方程式 (1) が非線型ならば、初期値に依存する解の特異点が出てくる可能性がある. この様な解の特異点を 動く特異点 (movable singularities) と呼ぶ. $x' = dx/dt$ と置く時、楕円関数が満たす有名な常微分方程式

$$(x')^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbf{C}, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0. \quad (3)$$

がある. すなわち, 楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ の正規化された周期を $\tau \in \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ とするとき, それに対応する ワイエルストラスの \wp -関数を

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - (0,0)} \left(\frac{1}{(z - m - n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right)$$

で定義する時, これは, 周期 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ を持つ \mathbb{C} 上の有理型関数である. $(t, x, x') = (0, a, b) \in \mathbb{C}^3$ で $b^2 = 4a^3 - g_2a - g_3$ なる初期値を取り, 微分方程式 (3) を考える. その解は

$$x(t) = \wp(t + c)$$

(ただし $c \in \mathbb{C}$ は $a = \wp(c), b = \wp'(c)$ なる条件で定める). 良く知られている様に $\wp(t)$ は $t \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau}$ で 2 位の極を有する. よって, 解 $x(t) = \wp(t + c)$ は $t \equiv -c \pmod{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau}$ で 2 位の極を持つ. この c は初期値に依存して決まり, この意味で動く特異点をもつ. 一般には, 非線型常微分方程式の解の動く特異点として, 分岐点や真性特異点が現れる事もあるが, 上記の様に, 全て有限位数の極である場合を良い非線型方程式のクラスとするのがパルベ性の定義である.

定義 2.1. 代数的常微分方程式 (1) の一般的な解の動く特異点が極しかない時, 方程式 (1) は パルベ性 (Painlevé property) を持つという.

次の定理は, L. Fuchs, H. Poincaré により示された.

定理 2.1. パルベ性を持つ代数的微分方程式 (1) は, $n = 1$, すなわち一階の時, 時間変数 t の正則変換と, x の一次分数変換で, 次のいずれかの方程式に帰着する.

1. Weierstrass \wp 関数の満たす微分方程式.

$$(x')^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{4}$$

2. Riccati 方程式

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \tag{5}$$

$n = 2$ の場合に, 少し弱い仮定をつけてパルベ (Paul Painlevé (1863–1933)) 「パルベ方程式」を次の様に定義し分類問題を考察した.

定義 2.2. パルベ方程式とは 2 階の代数的常微分方程式で有理形のもの, すなわち

$$x'' = R(x, x', t), \quad R(x, y, t) \in \mathbb{C}(x, y, t) \tag{6}$$

の形の方程式でパルベ性を持つもの事である.

パルベは彼の学生 B.O. Gambier の協力を得てパルベ方程式が適当な変換により求積法で解かれるか線型方程式に帰着するか, もしくは Table 1 にある 6 つのタイプの方程式 $P_J, J = I, II, III, IV, V, VI$ に帰着する事を示した. ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 等は複素パラメーターである (現在では, P_{III} 型をさらに, $P_{III}^{\tilde{D}_6}, P_{III}^{\tilde{D}_7}, P_{III}^{\tilde{D}_8}$ に分類し, 全体で 8 種類に分類するのが自然であると思われる. (Cf. [Sakai], [STT].))

$$\begin{aligned}
P_I : \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= 6x^2 + t, \\
P_{II} : \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= 2x^3 + tx + \alpha, \\
P_{III} : \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} (\alpha x^2 + \beta) + \gamma x^3 + \frac{\delta}{x}, \\
P_{IV} : \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2} x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - \alpha)x + \frac{\beta}{x}, \\
P_V : \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{(x-1)^2}{t^2} \left(\alpha x + \frac{\beta}{x} \right) \\
&\quad + \gamma \frac{x}{t} + \delta \frac{x(x+1)}{x-1}, \\
P_{VI} : \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right), \\
&\quad + \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2} \left[\alpha - \beta \frac{t}{x^2} + \gamma \frac{t-1}{(x-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{t(t-1)}{(x-t)^2} \right].
\end{aligned}$$

TABLE 1

3. パンルベ 方程式とその岡本初期値空間

パンルベ方程式の初期値空間を組織的に研究し, その重要性を示したのは岡本和夫の一連の仕事である. ([OkaT], [O1] を参照の事). 初期値空間は, ある代数曲面なのであるが, これを, 代数幾何の立場で見直し, 後で初期値空間の一般化である「岡本・パンルベ対」の概念を導入する.

まず各パンルベ方程式 P_J が次のハミルトン系 H_J と同値である事を思い出す. ([Mal], [O1], [IKSY], [MMT]):

$$(H_J) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_J}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H_J}{\partial x}, \end{cases} \quad (7)$$

ここで各ハミルトニアン $H_J = H_J(x, y, t)$ は次の表 TABLE 2 により与えられる.

さてハミルトン系 H_J を考えよう. $\Sigma_J = \{a_1, \dots, a_l\} \subset \mathbf{C}$ を (H_J) の動かない特異点 (方程式系の特異点) とし,

$$B_J = \mathbf{C} - \Sigma_J = \text{Spec } \mathbf{C}[t, \frac{1}{t-a_1}, \dots, \frac{1}{t-a_l}].$$

と置く.

$$\begin{aligned}
 H_I(x, y, t) &= \frac{1}{2}y^2 - 2x^3 - tx, \\
 H_{II}(x, y, t) &= \frac{1}{2}y^2 - \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)y - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x, \\
 H_{III}(x, y, t) &= \frac{1}{t} \left[2x^2y^2 - \left\{ 2\eta_\infty tx^2 + (2\kappa_0 + 1)x - 2\eta_0 t \right\} y + \eta_\infty (\kappa_0 + \kappa_\infty) tx \right], \\
 H_{IV}(x, y, t) &= 2xy^2 - \left\{ x^2 + 2tx + 2\kappa_0 \right\} y + \kappa_\infty x, \\
 H_V(x, y, t) &= \frac{1}{t} \left[x(x-1)^2y^2 - \left\{ \kappa_0(x-1)^2 + \kappa_t x(x-1) - \eta t x \right\} y + \kappa_\infty (x-1) \right], \\
 &\quad \left(\kappa := \frac{1}{4} \left\{ (\kappa_0 + \kappa_t)^2 - \kappa_\infty^2 \right\} \right), \\
 H_{VI}(x, y, t) &= \frac{1}{t(t-1)} \left[x(x-1)(x-t)y^2 - \left\{ \kappa_0(x-1)(x-t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \kappa_1 x(x-t) + (\kappa_t - 1)x(x-1) \right\} y + \kappa_\infty (x-t) \right] \\
 &\quad \left(\kappa := \frac{1}{4} \left\{ (\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t - 1)^2 - \kappa_\infty^2 \right\} \right).
 \end{aligned}$$

TABLE 2

空間 $\mathbf{C}^2 \times B_J \ni (x, y, t)$ と自然な射影 $\pi : \mathbf{C}^2 \times B_J \longrightarrow B_J$ を考える. 直積空間 $\mathbf{C}^2 \times B_J \ni (x, y, t)$ 上でハミルトン系 (H_J) を考える事ができるが, π の相対コンパクト化を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{C}^2 \times B_J & \hookrightarrow & \mathbf{P}^2 \times B_J \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_J & = & B_J
 \end{array} \tag{8}$$

(H_J) の解曲線とは, $\mathbf{C}^2 \times B_J$ 上の正則ベクトル場

$$\tilde{v} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_J}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H_J}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \tag{9}$$

の解曲線の事である. (H_J) の解曲線 $(x(t), y(t), t)$ である初期値 $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbf{C}^2 \times B_J$ から出発するものは, ある初期値 (x_0, y_0, t_0) に依存する時間 $t_1 \in B_J$ で無限遠に発散するがそれはパルベ性より極である. \mathbf{P}^2 が固有的であるから 解曲線は $\mathbf{P}^2 \times B_J$ の点に極限を定める.

$L = \mathbf{P}^2 - \mathbf{C}^2$ を無限遠直線とするとき, この解曲線は内点 $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbf{C}^2 \times B_J$ から出発し境界 $L \times \{t_1\}$ の点を通る. $t_1 \in B$ の近傍で L とこの解が交わるのは t_1 のみであることが示されるがこのような特異点を accessible 特異点 と呼ぶ. ([Ki]). 古典的なパルベ方程式 P_J もしくはそれと同値なハミルトン系 (H_J) に対しては各固定された $t = t_1$ に対し有限個の accessible 特異点しかない事が分かり, よって無限個の解曲線がそれらの点に集まっている. 岡本は [O1] においてこれらの特異点を解析し, それらが accessible 特異点およびその infintely near points のブローアップによって解消され, 内

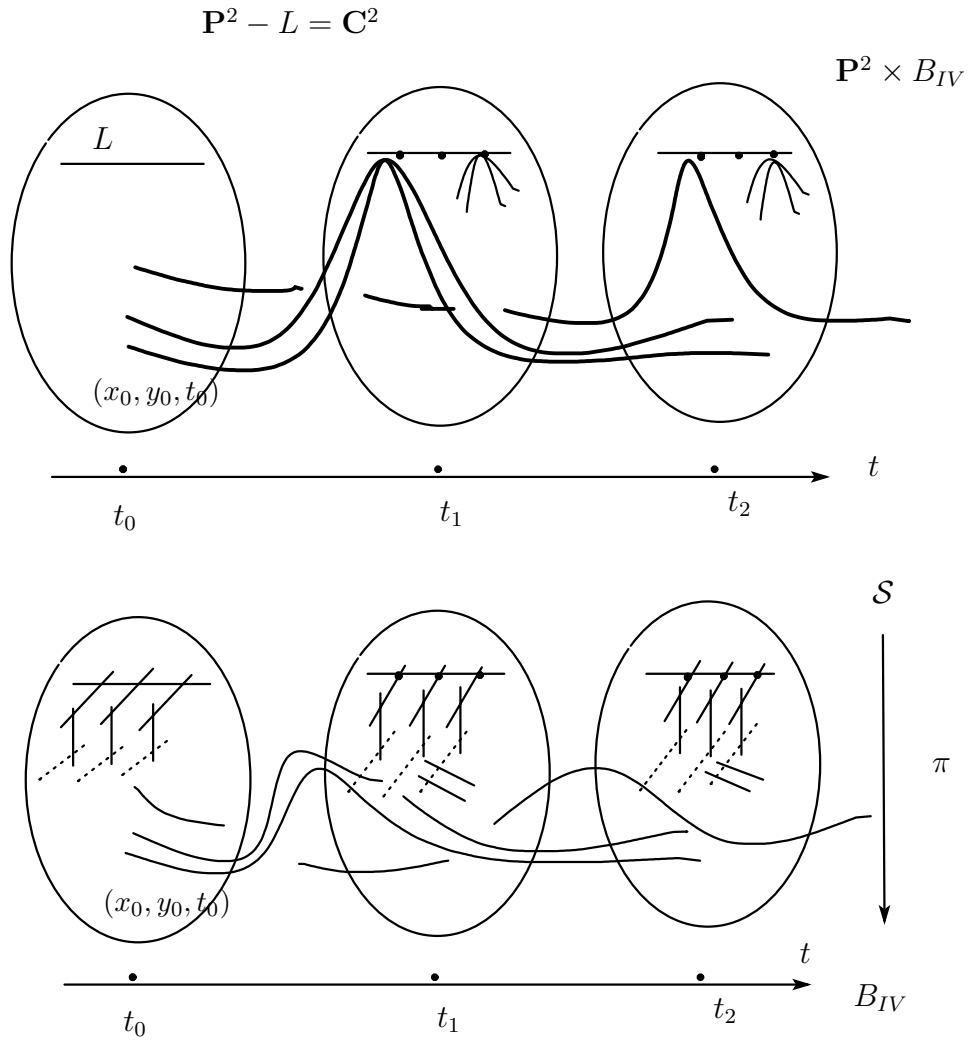


FIGURE 1. Blowing up accessible singularities

点から出発する解曲線がすべて分離された曲線にできる事を示した。(FIGURE 1を参照). より正確には $\mathbf{P}^2 \times B_J$ の何回かのブローアップの連続により, 次のような smooth 射 $\pi : S \rightarrow B_J$ が得られる事を示した.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{P}^2 \times B_J & \xleftarrow{\tau} & S \\
 \downarrow & \swarrow \pi & \\
 B_J & &
 \end{array} \tag{10}$$

このファミリーに関して次の命題が成り立つが容易に分かる. ([O1]), ([Sakai]), [STa], [STT]).

命題 3.1. B_J の一般の点 t において, そのファイバー $S = S_t$ は \mathbf{P}^2 の 9 点 (*Infinitely near point* を含む) のブローアップにより得られる. $S = S_t$ の反標準因子 $-K_S$ は有効因子 $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ で与えられる. また Y のコンフィギュレーションは小平-Néron の加法的な特異楕円曲線の極小モデルの閉ファイバーのコンフィギュレーションと同

型 . (Figure 2 を参照 . コンフィギュレーションの名前はアファインデンキン図形の名前で表した .)

ここで \tilde{D}_7, \tilde{D}_8 形が , 岡本の論文 [O1] に現れない事を注意しておく . これらは , パンルベ III 型 P_{III} のパラメータが特別な場合としてでてくる . また , \tilde{D}_8 の場合は $S - Y$ に C^2 が含まれない事にも注意しておく . ([Sakai], [STa]).

いうまでもないが , Figure 2 に置いて実線は非特異有理曲線 $C \simeq \mathbf{P}^1$ で $C^2 = -2$ なるもの (-2-曲線) を表し , また曲線の横の数字はその曲線 $Y = -K_S$ の中での重複度を表す .

さて

$$-K_S = Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i .$$

と既約分解する時 , S が有理曲面と仮定すると Y のコンフィギュレーションが特異楕円曲線の小平-Néron モデルになるためには次の数値的条件が必要十分である事がわかる . (cf. [Kod], [STa]).

$$\boxed{\deg -(K_S)|_{Y_i} = -K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = 0 \quad \text{for all } i, \quad 1 \leq i \leq m .} \quad (11)$$

ここで , 上に現れる有理曲面 S は楕円曲面ではない事に注意しておく . 実際 , Y_{red} はサイクルを含まず (加法的) , 完備一次系 $|-K_S| = |Y|$ の次元が 0 である事が示される . もし S' が有理楕円曲面であり $-K_{S'} = Y'$ であり , Y' が加法的であれば $|-K_{S'}| = |Y| \simeq \mathbf{P}^1$ となるからである .

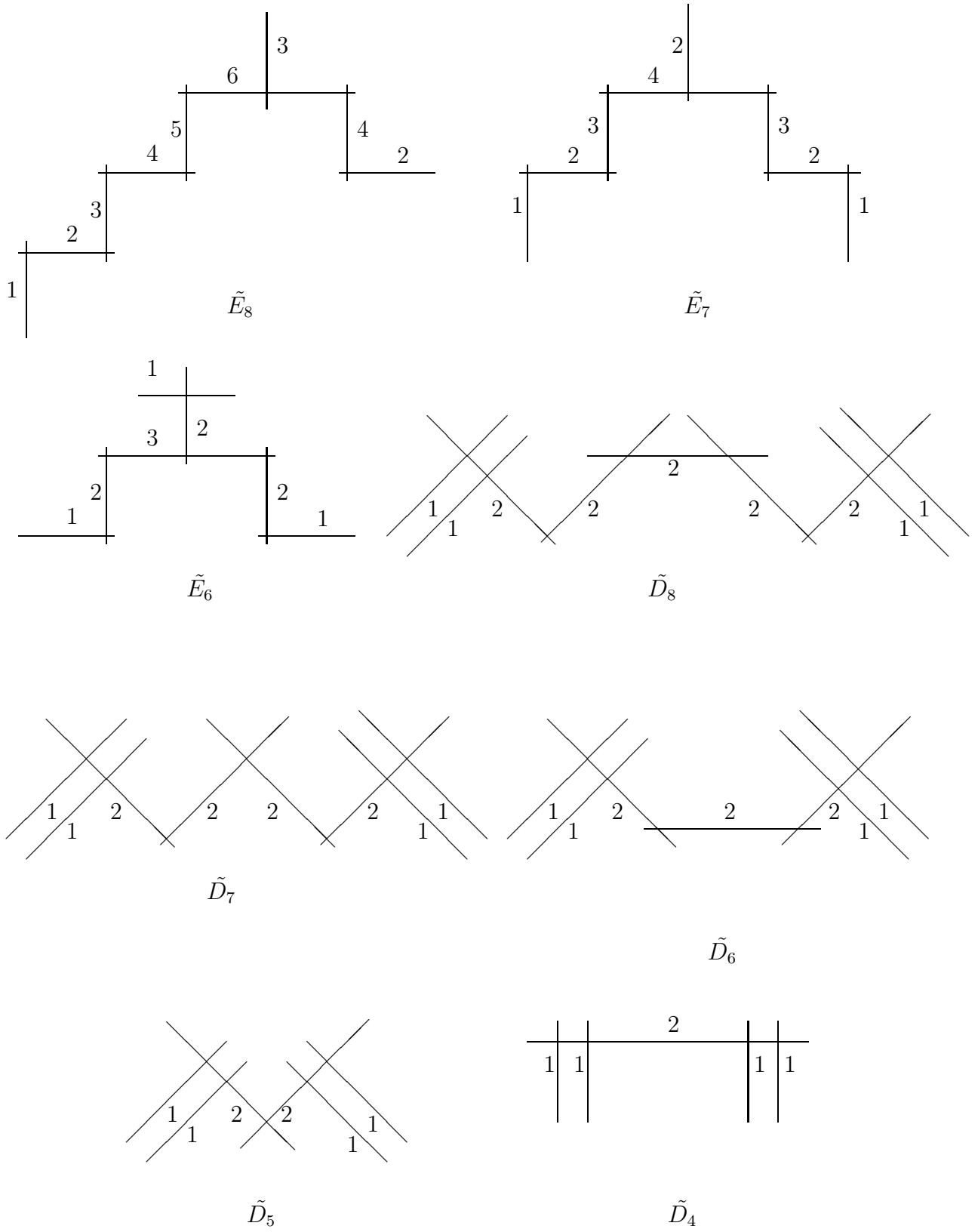


FIGURE 2

4. 岡本・パンルベ対

岡本の構成を少し一般化すると次の様な自然な定義が得られる．この定義が何故妥当かは，第8章で説明する．

定義 4.1. (S, Y) を非特異射影的複素曲面 S とその (正) 反標準因子 $Y \in |-K_S|$ の組とし, $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ をその既約分解とする. (S, Y) が次の条件 (12) をみたすとき, (一般化された) 岡本・パンルベ対 という.

すべての $i, 1 \leq i \leq r$ に対して

$$\boxed{-K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = \deg Y|_{Y_i} = 0.} \tag{12}$$

岡本・パンルベ対 (S, Y) は S が有理曲面の時 有理的 と呼ばれる. 以後有理的岡本・パンルベ対のみを考える.

次の命題は標準的な議論から分かる.

命題 4.1. 1. (S, Y) を有理的な岡本・パンルベ対とすると S は \mathbb{P}^2 の 9 点ブローアップで得られる .

2. 全ての自然数 n について $\dim |-nK_S| = \dim |nY| \leq 1$.

3. もし $\dim |-nK_S| = \dim |nY| = 1$ $n \geq 1$ であれば, $f^*(\infty) = nY$ を満たす有理的楕円曲面の構造 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在する.

定義 4.2. 有理的な岡本・パンルベ対 (S, Y) はある自然数 n について $f^*(\infty) = nY$ を満たす有理的楕円曲面の構造 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を持つ時, *fibered-type* と呼ぶ. *fibered-type* でないとき, “*non-fibered type*” と呼ぶ.

有理的岡本・パンルベ対 (S, Y) に対し Y の既約分解を $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ とし, $M(Y)$ を $\text{Pic}(S) \simeq H^2(S, \mathbb{Z})$ の中で $\{Y_i\}_{i=1}^r$ で生成される部分格子とする. ただし, $\text{Pic}(S)$ の双一次形式は $\text{Pic}(S)$ の交差形式の -1 倍を取る. すると $\{Y_i\}_{i=1}^r$ は $M(Y)$ のルート基底をなし, アファイン型のルート格子になる. $R(Y)$ をルート格子 $M(Y)$ のタイプとする.

Y のタイプは, そのコンフィギュレーションで定まるが, Y は非特異楕円曲線の場合, 楕円タイプ, また有理曲線のサイクルの場合 乗法的, それ以外のとき, 加法的 と呼ばれる (Y の一般ヤコビ多様体の群の性質による.)

技術的仮定ではあるが, Y の被約成分 Y_{red} が正規交差因子とする. この仮定のもとで岡本・パンルベ対の分類については次が成り立つ.

命題 4.2. (S, Y) を有理的岡本・パンルベ対で Y の被約成分 Y_{red} が正規交差因子とすると Y のタイプ $R(Y)$ は Table 3 で与えられる.

次の命題は技術的であるが重要である (cf. [STT]).

命題 4.3. (S, Y) を有理的岡本・パンルベ対とすると次の条件は同値になる .

1. (S, Y) は *non-fibered type*.

2. $H^0(S - Y, \mathcal{O}^{alg}) \simeq \mathbb{C}$, すなわち, $S - Y_{red}$ の正則代数関数は定数しかない¹

5. 岡本・パンルベ対の変型

(S, Y) を有理的岡本・パンルベ対, $-K_S = Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ を反標準因子の既約分解とし, $D = Y_{red} = \sum_{i=1}^r Y_i$ と置く. いわゆる非特異対 $(S, D) = (S, Y_{red})$ の変型理論を思

¹ $S - Y_{red}$ は, スタイン多様体であることが予想されている.

Y or $R(Y)$	\tilde{E}_8	\tilde{D}_8	\tilde{E}_7	\tilde{D}_7	\tilde{D}_6	\tilde{E}_6	\tilde{D}_5	\tilde{D}_4	\tilde{A}_{r-1} $1 \leq r \leq 9$	\tilde{A}_0^* $r = 1$
小平の分類記号	II^*	I_4^*	III^*	I_3^*	I_2^*	IV^*	I_1^*	I_0^*	I_r	I_0
パンルベ方程式	P_I	$P_{III}^{\tilde{D}_8}$	P_{II}	$P_{III}^{\tilde{D}_7}$	P_{III}	P_{IV}	P_V	P_{VI}	<i>none</i>	<i>none</i>
$r=Y$ の既約成分の個数	9	9	8	8	7	7	6	5	r	1

TABLE 3

い出す ([Kaw], [SSU] [STT]). 川又による非特異対の変型論の一般論 [Kaw] より (S, D) の無限小変型の空間は

$$H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \quad (13)$$

と同型であり, 変型を高次に持ち上げる時の障害は

$$H^2(S, \Theta_S(-\log D)). \quad (14)$$

の中に定義される.

この有理的岡本・パンルベ対の変型を調べるための準備として, 次の命題は重要である. 証明は [STT] をみよ. ([AL], [SU]).

命題 5.1. 有理岡本・パンルベ対 (S, Y) について次が示される.

1. $H^1(S - D, \mathbf{C}) = 0$.
2. $H^0(S, \Omega_S^1(\log D)) = 0$.
3. $H^2(S, \Theta_S(-\log D)) = 0$.
4. $H^2(S, \Theta_S) = 0$.
5. S がさらに *non-fibered type* であれば, D にサポートを持つ任意の有効因子 H に対して $H^0(S, \Theta_S(-\log D)(H)) = 0$.

これらの結果から次が分かる [STT].

命題 5.2. (S, Y) を有理的岡本・パンルベ対で $D = Y_{red}$ が正規交差因子で $r (= Y$ の既約因子の個数) が 2 以上とする ($Y \neq \tilde{A}_0$ -type). すると次が成立する.

$$c_2(S) = S \text{ の位相的オイラー数} = 12, \quad (15)$$

$$b_2(S) = \text{rank } H^2(S, \mathbf{Z}) = 10, \quad (16)$$

$$\dim H^1(S, \Theta_S) = 10, \quad (17)$$

$$\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D)) = 10 - r \quad (18)$$

また (S, D) の局所変型の倉西空間は非特異で次元が $10 - r$ である.

6. 局所コホモロジーと時間変数

この章では (S, Y) を有理的岡本・パンルベ対, $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$, $D = Y_{red}$ とおき, 次を仮定する.

1. (S, Y) は non-fibered type,
2. $D = Y_{red}$ は正規交差因子で $r \geq 2$. この時 Y_i は全て非特異有理曲線である事に注意する.

以下特に断らない限り, 位相はザリスキー位相で, 層も代数的接続層で考察する. 次の局所コホモロジー群の完全列を考えよう. ([Corollary 1.9, [Gr]])

$$H^0(S, \Theta_S(-\log D)) \rightarrow H^0(S - D, \Theta_S(-\log D)) \rightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \rightarrow (19)$$

$$H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \xrightarrow{\text{res}} H^1(S - D, \Theta_S(-\log D)) . (20)$$

(S, Y) は of non-fibered type であるから, 命題 5.1 の 5 により

$$H^0(S - D, \Theta_S(-\log D)) = H^0(S - D, \Theta_S) = \{0\}.$$

である. よって

命題 6.1. *non-fibered type* の有理的岡本・パンルベ対 (S, Y) については次の完全列が得られる.

$$0 \rightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \rightarrow H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \xrightarrow{\text{res}} H^1(S - D, \Theta_S(-\log D)) (21)$$

次の定理は寺島が [T] で証明しているが, 我々の理論 [STT] の鍵となる定理である.

定理 6.1. (S, Y) を上の条件を満たす有理的岡本・パンルベ対とし Y を加法的とすると

$$\dim H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) = 1. (22)$$

ここで $N_D = \mathcal{O}_S(D)/\mathcal{O}_S$. 自然な単射

$$H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) \hookrightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)),$$

が存在するので

$$\dim H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \geq 1. (23)$$

定理 6.1 における一般の有理的岡本・パンルベ対 (S, Y) については

$$H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \simeq H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) \simeq \mathbf{C}. (24)$$

が示される. [STe1].

さて完全系列 (21) から, $H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ の部分空間 $H_D^1(S, \Theta_S(-\log D))$ は線型写像 res の核と一致する. これから次が分かる.

$$H_D^1(S, \Theta_S(-\log D)) \simeq \left\{ \begin{array}{l} (S, D) \text{ の無限小変型で} \\ S - D \text{ への制限が自明な変型を導くもの.} \end{array} \right\}.$$

さらに, 岡本・パンルベ対の半普遍ファミリーを具体的に構成する事もできる. ([Sakai], [STT], [?]).

命題 6.2. $R = R(Y)$ を加法的なアファインルート系で命題 4.2 に現れるものとする.
(この時対応する有理的岡本・パウルベ対 (S, Y) については

$$\dim H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) = 1$$

上の定理 6.1 からなり立つ事に注意する.) \mathcal{M}_R を $\mathbf{C}^s = \text{Spec } \mathbf{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ の次元 $s = 9 - r$ のアファイン開集合, \mathcal{B}_R を $\mathbf{C} = \text{Spec } \mathbf{C}[t]$ のアファイン開集合が存在し, また次の可換図式で下記の条件を満たすものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \leftrightarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & \swarrow & \varphi \\ \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R & & . \end{array} \quad (25)$$

1. 上の図式は非特異対 (S, D) の変型である.
2. 相対有理 2 形式

$$\omega_S \in \Gamma(\mathcal{S}, \Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R}^2(\mathcal{Y}))$$

が存在しその極因子は \mathcal{Y} で与えられ $\mathcal{Y}_{red} = \mathcal{D}$.

3. 全ての点 $(\alpha, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ に対し, $(S_{\alpha, t}, \mathcal{Y}_{\alpha, t})$ はタイプ $R = R(Y)$ の有理的岡本・パウルベ対である.
4. 上のファミリーは一般の点 $(\alpha, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ で半普遍的, すなわち小平・スペンサー写像

$$\rho : T_{\alpha, t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) \longrightarrow H^1(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t})) \quad (26)$$

は (α, t) で同型である. さらに t 方向の小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は

$$\delta : \mathbf{C} \simeq H^0(\mathcal{D}_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t}) \otimes N_{\mathcal{D}_{\alpha, t}}) \hookrightarrow H^1(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t})). \quad (27)$$

の像に入っている.

5. M_R と B_R を \mathcal{M}_R と \mathcal{B}_R の座標環とする ($\mathcal{M}_R = \text{Spec } M_R$, $\mathcal{B}_R = \text{Spec } B_R$). \mathcal{S} の有限アファイン被覆 $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{l+k}$ で各 i に対し

$$\tilde{U}_i \simeq \text{Spec}(M_R \otimes B_R)[x_i, y_i, \frac{1}{f_i(x_i, y_i, \alpha, t)}] \subset \text{Spec } \mathbf{C}[\alpha, t, x_i, y_i] \simeq \mathbf{C}^{s+3} \quad (28)$$

となるものが取れる. ここで $f_i(x_i, y_i, \alpha, t) \in (M_R \otimes B_R)[x_i, y_i]$ である. さらに $\mathcal{S} - \mathcal{D}$ は $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^l$ で被覆されると仮定できる. さらに相対有理 2 形式は ω_S 各開被覆上で

$$\omega_{S|\tilde{U}_i} = \frac{dx_i \wedge dy_i}{f_i(x_i, y_i, \alpha, t)^{m_i}} \quad (29)$$

と書ける.

6. 各添え字 i, j で $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ なるものについて座標変換

$$x_i = f_{ij}(x_j, y_j, \alpha, t), \quad y_i = g_{ij}(x_j, y_j, \alpha, t) \quad (30)$$

は x_j, y_j, α, t の有理関数で書かれる.

7. 大域的変型からハミルトン系へ

前章で構成した岡本・パンルベ対の大域的な族から，パンルベ常微分方程式系が得られ，またそれがハミルトニアン系に書ける事の理由を説明する．まず $R(Y)$ が加法的であるから 寺島の定理 6.1 から

$$\delta : \mathbb{C} \simeq H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) \hookrightarrow H^1(S, \Theta_S(-\log D)).$$

なる 1 次元部分空間が存在する．この 1 次元部分空間は前章の族 $S \rightarrow \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ に対しては， \mathcal{B}_R 方向に対応する． \mathcal{B}_R 方向の微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げとして S 上の大域的有理ベクトル場 \tilde{v} でその極が D のみにあるものが構成できる事が示される．この大域的有理ベクトル場 \tilde{v} の $S - D$ への制限が，求める代数的ベクトル場である．さらにこのベクトル場は一意的であることも示される．このベクトル場に対応する一階の微分方程式系が求めるパンルベ方程式のハミルトン系である事が示せる．

その原理は簡単で次の様に説明される．

前章の $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ に対する座標変換 (30) から小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は Čech 1-コサイクル

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left\{ \theta_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_i} \in \Gamma(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j, \Theta_{S/\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R}(-\log D)) \right\} \quad (31)$$

で表現される．

今，族 (25) のファイバー $(\mathcal{S}_{\alpha,t}, \mathcal{Y}_{\alpha,t})$ は *non-fibered type* であると仮定してよい．

命題 6.2 の (27) により $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は δ の像に入っているとして良い．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \simeq H^0(D, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t}) \otimes N_D) & \subset & H^1_{\mathcal{D}_{\alpha,t}}(\mathcal{S}_{\alpha,t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t})). \\ & \delta \searrow & \downarrow \\ & & H^1(\mathcal{S}_{\alpha,t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t})) \end{array} \quad (32)$$

局所コホモロジー群は自然な制限写像

$$\text{res} : H^1(\mathcal{S}_{\alpha,t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t})) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}_{\alpha,t} - \mathcal{D}_{\alpha,t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t})), \quad (33)$$

の核であるから (cf. 命題 6.1) 小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は

$$H^1(\mathcal{S}_{\alpha,t} - \mathcal{D}_{\alpha,t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t}))$$

で 0 である．さらに詳しく 1-コサイクル $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は

$$H^1(\mathcal{S}_{\alpha,t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\alpha,t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha,t}) \otimes \mathcal{O}_S(\mathcal{D}_{\alpha,t})). \quad (34)$$

の中でゼロである事がわかる．

これらのコホモロジーの次元が一定であるから，基底変換定理を用いれば各 $1 \leq i \leq l+k$ について有理的ベクトル場

$$\theta_i(x_i, y_i, \alpha, t) = \eta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \frac{\partial}{\partial y_i} \in \Gamma(\tilde{U}_i, \Theta_{\tilde{U}_i}(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D)) \quad (35)$$

が存在して

$$\theta_{ij}(x_i, y_i, \alpha, t) = \theta_j(x_j, y_j, \alpha, t) - \theta_i(x_i, y_i, \alpha, t). \quad (36)$$

とできることが分かる．($1 \leq i \leq l$ なる i については $\tilde{U}_i \cap D = \emptyset$ であるから $\theta_i(x_i, y_i, \alpha, t)$ は正則代数的なベクトル場である事が分かる.)

さて $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ 上で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i + \theta_{ij}(\boldsymbol{\alpha}, t), \quad (37)$$

であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i + (\theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)), \quad (38)$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j - \theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t). \quad (39)$$

よってベクトル場

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) \right\}_{1 \leq i \leq l+k} \quad (40)$$

は張り合って, S 上定義された \mathcal{D} のみに極を有す大域的な有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Theta_{\mathcal{S}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{D}))$$

を与える. このベクトル場 \tilde{v} は写像 $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ での $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げである. 以上より, 次の定理を得る (cf. [STT]).

定理 7.1. $R = R(Y)$, $\mathcal{S}, \mathcal{D}, \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ を上の通りとする. すると, S 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Theta_{\mathcal{S}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D})) \quad (41)$$

であって $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げ (すなわち, $\pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$) であるものが一意的に存在する.

上のベクトル場の $S - \mathcal{D}$ への $\tilde{v}_{S-\mathcal{D}}$ は正則なベクトル場で $1 \leq i \leq l$ の時, 各開集合 \tilde{U}_i 上で

$$\tilde{v}|_{\tilde{U}_i} = \frac{\partial}{\partial t} - \theta_i = \frac{\partial}{\partial t} - \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \zeta_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (42)$$

の様に表されるが, これは次の微分方程式系と同値である.

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\eta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) \\ \frac{dy_i}{dt} = -\zeta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) \end{cases}. \quad (43)$$

ここで η_i, ζ_i は \tilde{U}_i 上の代数関数である.

さらに, (7) の様にハミルトン系に書ける事に幾何学的に明瞭な証明を与えられる. (ただし, 上記に与えた各アファイン座標ではハミルトン系でかけない場合が起こる. ($\tilde{E}_8, \tilde{D}_7, \tilde{D}_8$ の場合が起こる). これは古典的には知られていなかった事であるが, $S - \mathcal{D}$

が必ずしも C^2 で被覆できない場合があり、その時に相対 2 形式が (29) のように分母に関数がかかる。この関数が t に依存する場合はハミルトン系にかけない。）

我々はベクトル場 \tilde{v} が, (29) で与えられる相対有理 2 形式 ω_S を保つ事を示す事ができる。これは次の様に述べられる ([STT]).

$$\boxed{d_{S/\mathcal{M}}(\tilde{v} \cdot (\omega_S \wedge dt)) = 0,} \tag{44}$$

ここで $d_{S/\mathcal{M}}$ は相対微分, また $\tilde{v} \cdot (\omega_S \wedge dt)$ は相対 3 形式とベクトル場の縮約をあらわす。

アファイン開集合 $U \times \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ で $U \simeq C^2$ で座標 (x, y) が $\omega_S|_{C^2} = dx \wedge dy$ を満たすように取れば上の方程式 (44) は, 微分方程式系がハミルトン系であることを意味する。

上の方針にそって具体的族の構成から, ハミルトン系の具体的に書き下す事もできる。(cf. [STT], [STe2]).

8. 岡本・パウルベ対の条件の意味とその高次元化

岡本・パウルベ対 (S, Y) の条件 (12)

$$\boxed{-K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = \deg[Y]|_{Y_i} = 0.}$$

は簡単ではあるが, パウルベ方程式を特徴づけてしまう強力なものであった。² しかしこの条件が 常微分方程式のパウルベ性や 差分方程式のパウルベ性とどのような関係をもつか, またはどのような幾何学的な意味をもつかは [Sakai], [SU] や [STT] では明確に分かっていなかった。

序文で述べた様に, 条件 (12) は, 位相的な条件であるが, S が有理的な場合, その反標準因子 Y が小平特異ファイバーと同じコンフィギュレーションを持ち S は P^2 の 9 点 blow-up である事が帰結されて完全な分類が可能である。またそのうち (S, Y) が加法的な場合は, その変型を考える事によりパウルベ方程式を復元できるのであった。

この条件の内在的意味を明らかにし, それと同時に高次元を含めた, パウルベ性をもった常微分方程式系 (もしくはさらに難しく偏微分方程式系) の分類問題, そしてパウルベ性と可積分性の関係を深く考察したいというのは自然な問題意識であろう。モノドロミー保存変型のつながりで考察するのが現在まで一番標準的なやり方であるが, 我々は, 初期値空間の幾何学, 特に

初期値空間をコンパクト化するときにつけ加える因子の性質が重要である

と考える。

パウルベ性を持つ高階の常微分方程式系の族として野海・山田が導入した $\tilde{A}_l = A_l^{(1)}$ 型の対称性を持つものが最近発見されている ([NY2]). パウルベ IV 型が $\tilde{A}_2 = A_2^{(1)}$ の対称性を持っているが, その一般化になっておりハミルトン系に書けるものである。(彼らはさらに, 一般のアファインワイル群のクレモナ群としての標準的実現を与え, 対称性を持つ差分方程式系の標準的な構成を与えた。(cf. [NY1], [NY3])).

簡単な為に $\tilde{A}_{2n} = A_{2n}^{(1)}$ に対応する場合に話を限ると初期値空間は C^{2n} を適当に拡張したものであるべきであり P^{2n} の無限遠超平面 $H = P^{2n} - C^{2n}$ の点に適当な双有理変換を施したものである。(9 節を見よ.)

²坂井の研究 [Sakai] により離散パウルベの場合も含めて条件 (12) が重要であることが分かっている。

さて, パンルベ性をもつ常微分方程式系で, ハミルトニアン系に書けるものをまず考えよう. \mathbb{C}^{2n} のあるアフィン開集合 U の座標 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ を用いてシンプレクテック形式が

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

と書ける時, それに対するハミルトニアン系は

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad (45)$$

で与えられる. $H = H(x, y, t)$ が x, y, t の多項式とするとこの微分方程式系は $U \times \mathbb{C} \ni (x, y, t)$ 上の代数的ベクトル場

$$\tilde{v} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (46)$$

と同値である.

さて次の大域的な設定を考えよう. B を \mathbb{C} のアフィン開集合とする. 今, $2n$ 次元の非特異射影多様体 \mathcal{X}_t とその上の単純正規交叉因子 \mathcal{D}_t の非特異対 $(\mathcal{X}_t, \mathcal{D}_t)$ の B 上の変型

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \leftarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & \swarrow & \varphi \\ B & & . \end{array} \quad (47)$$

が与えられていて次の条件を満たすとする.

1. 相対有理 2 形式

$$\omega_{\mathcal{X}} \in \Gamma(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/B}^2(\mathcal{Y}))$$

が存在しその極因子は \mathcal{Y} で与えられ $\mathcal{Y}_{red} = \mathcal{D}$. また $\mathcal{X} - \mathcal{D}$ 上では各ファイバーで $\omega_{\mathcal{X}}$ は非退化 2 形式である. (この意味で, 対数的シンプレクテック多様体の変型であるとみなせる.)

2. \mathcal{X} 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{X}, \Theta_{\mathcal{X}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D})) \quad (48)$$

で, $\frac{\partial}{\partial t}$ の π による持ち上げ ($\Leftrightarrow \pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$) であるものが存在する. (\tilde{v} は $\mathcal{X} - \mathcal{D}$ 上に代数的ベクトル場を定める.)

3. 次が成立する.

$$d(\tilde{v} \cdot (\omega_{\mathcal{X}} \wedge dt)) = 0. \quad (49)$$

(このことから, \tilde{v} は (少なくとも解析的に局所的には) ハミルトニアン系と同値になる.)

π の相対次元が 2 の時に次がいえ.

命題 8.1. 上の変型族 (47) が 2 次元代数曲面の族であるとする, 次の命題は同値になる.

1. (48) の有理ベクトル場 \tilde{v} は *accessible* 特異点を持たない.
2. 各ファイバー \mathcal{X}_t に対し, $(X, Y) = (\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t)$, $\mathcal{Y}_t \in |-K_{\mathcal{X}_t}|$ とすると, 岡本・パンルベ対の条件 (12) を満たす.

この命題から, 岡本・パンルベ対の条件は, 上の様な有理ベクトル場が accessible 特異点を持たない為の条件である事が分かる. 証明は略する.

ファイバーが高次元のときでも, 次がいえる. D を既約分解する.

$$D = \sum_{i=1}^r D_i$$

簡単のために各 t に対して D_t の既約分解も $\sum_{i=1}^r D_{i,t}$ で与えられるとする.

命題 8.2. 上の状況で次の事が成り立つ. $t \in B$ に対して, 集合を

$$Acc(\tilde{v}, D_{i,t}) := \{\tilde{v} \text{ の } D_{i,t} \text{ に置ける accessible 特異点}\} \quad (50)$$

と定める. すると, ある切断 $N_{D_{i,t}/X_t}$ を $D_{i,t}$ の法束とすると

$$s \in H^0(D_{i,t}, \Theta_{D_{i,t}} \otimes N_{D_{i,t}/X_t})$$

が存在して

$$Acc(\tilde{v}, D_{i,t}) \subset \{s \text{ のゼロ点}\}.$$

特に, ベクトル束 $\Theta_{D_{i,t}} \otimes N_{D_{i,t}/X_t}$ のトップチャーン類が消えていれば, すなわち

$$\boxed{c_{2n-1}(\Theta_{D_{i,t}} \otimes N_{D_{i,t}/X_t}) = 0} \quad (51)$$

であれば \tilde{v} は $D_{i,t}$ において accessible 特異点を持たない.

注意 8.1. 上の (51) の条件が, 2次元の場合, 岡本・パンルベ対の条件 (12) と同値である事を見ておこう. 岡本・パンルベ対の族の一つのファイバーを (S, Y) , $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ とおくと (51) の条件は

$$c_1(\Theta_{Y_i}(N_{Y_i/S})) = 0$$

である. 今 Y_i が曲線であるから, $\Theta_{Y_i} = -K_{Y_i}$, また $N_{Y_i/S} = Y_i|_{Y_i}$ であるが, 添加公式から $(K_S + Y_i)|_{Y_i} = K_{Y_i}$ である. よって

$$-K_{Y_i} + N_{Y_i/S} = (-K_S - Y_i + Y_i)|_{Y_i} = (-K_S)|_{Y_i}$$

であるから, $c_1(\Theta_{Y_i}(N_{Y_i/S})) = 0$ は条件

$$\deg(-K_S)|_{Y_i} = -K_S \cdot Y_i = 0$$

と同値になる.

9. 野海・山田の \tilde{A}_l 型 高階方程式

野海・山田のパンルベ IV 型の対称形式を拡張して \tilde{A}_l 型のアファインワイル群の対称性を持つ 高階の常微分方程式を構成した [NY2]. これについて簡単に説明する.

2以上の整数 $l = 2, 3, 4, \dots$ に対して, $l+1$ 個の変数 f_0, f_1, \dots, f_l と \tilde{A}_l 型のアファインルート系の単純ルートに対応する複素定数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ を考える. 以下 $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_l = k$ と置く. 微分方程式系を l の偶奇により次のように定めよう.

$l = 2n$ の時:

$$\tilde{A}_{2n} : f_j' = f_j \left(\sum_{1 \leq r \leq n} f_{j+2r-1} - \sum_{1 \leq r \leq n} f_{j+2r} \right) + \alpha_j \quad (52)$$

$0 \leq j \leq 2n$.

$l = 2n + 1$ の時

$$\tilde{A}_{2n+1} : f_j' = f_j \left(\sum_{1 \leq r \leq s \leq n} f_{j+2r-1} f_{j+2s} - \sum_{1 \leq r \leq s \leq n} f_{j+2r} f_{j+2s+1} \right) \quad (53)$$

$$+ \left(\frac{k}{2} - \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_{j+2r} \right) + \alpha_j \left(\sum_{1 \leq r \leq n} f_{j+2r} \right), \quad (54)$$

$0 \leq j \leq 2n + 1$. ここで, $f_j' = df_j/dt$ と置いた.

さて, $K = \mathbf{C}(\alpha; \mathbf{f})$ を, 変数 $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_l)$ と $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_l)$ の有理関数体とする. 各 $i = 0, 1, \dots, l$ に対して, K の体の同型 s_i を次で定める.

$$\begin{aligned} s_i(\alpha_i) &= -\alpha_i, & a_i(\alpha_j) &= \alpha_j + \alpha_i \quad (j = i \pm 1), & s_i(\alpha_j) &= \alpha_j \quad (j \neq i, i \pm 1), \\ s_i(f_i) &= f_i, & s_i(f_j) &= f_j \pm \frac{\alpha_i}{f_i} \quad (j = i \pm 1), & s_i(f_j) &= f_j \quad (j \neq i, i \pm 1). \end{aligned} \quad (55)$$

ここで添え字 $0, 1, \dots, l$ は, $\mathbf{Z}/(l+1)\mathbf{Z}$ の元と考える. また

$$\pi(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \quad \pi(f_j) = f_{j+1} \quad (56)$$

なる $\pi \in \text{Aut}(K)$ を考える. $\text{Aut}(K)$ の部分群を

$$\tilde{W} := \langle s_0, \dots, s_l, \pi \rangle$$

で定義すると, \tilde{W} は, \tilde{A}_l 型の拡大アフィンワイル群である. 実際

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad (j \neq i, i \pm 1), \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad (j = i \pm 1) \quad (57)$$

for $i, j = 0, 1, \dots, l$ and

$$\pi^{l+1} = 1, \quad \pi s_i = s_{i+1} \pi \quad (i = 0, 1, \dots, l) \quad (58)$$

定理 9.1. 微分方程式 (52), (53) の定める $K = \mathbf{C}(\alpha; \mathbf{f})$ の微分 δ_l は, 上のワイル群の作用と可換である.

この意味で, 野海・山田の微分方程式系 (52), (53) は, \tilde{A}_l 型の対称性を持っているといえる. $l = 2$ の場合は, 方程式系は

$$\begin{cases} f_0' &= f_0(f_1 - f_2) + \alpha_0 \\ f_1' &= f_1(f_2 - f_0) + \alpha_1 \\ f_2' &= f_2(f_0 - f_1) + \alpha_2 \end{cases} \quad (59)$$

となる. $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, さらには $(f_0 + f_1 + f_2)' = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ より, $f_0 + f_1 + f_2 = t$ と正規化し, $f_0 = t - f_1 - f_2$ から f_0 を消去すれば

$$\begin{cases} f_1' &= f_1(f_1 + 2f_2 - t) + \alpha_1 \\ f_2' &= f_2(t - 2f_1 - f_2) + \alpha_2 \end{cases} \quad (60)$$

ここで, $(f_1, f_2) = (p, q)$ とすれば, p, q を \mathbf{C}^2 の正準変数とし

$$H_{IV} := (t - p - q)qp - \alpha_1 q + \alpha_2 p$$

をハミルトニアンとするハミルトニアン系

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_{IV}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_{IV}}{\partial q}$$

が得られる. p を消去して

$$q'' = \frac{(q')^2}{2q} + \frac{3}{2}q^3 - 2tq^2 + \frac{1}{2}(t^2 + 2(1 - 2\alpha_1 - \alpha_2))q - \frac{(\alpha_2)^2}{2q}$$

は適当な変換により, パンルベ方程式 P_{IV} 型となる.

さて, 田原による \tilde{A}_4 型の場合の計算を復習しておく (cf. [Tahara]). (52) で $n = 2$ の場合の方程式系

$$f'_i = f_i(f_{i+1} - f_{i+2} + f_{i+3} - f_{i+4}) + \alpha_i, (i = 0, \dots, 4)$$

を, やはり $\alpha_0 + \dots + \alpha_4 = 1, f_0 + \dots + f_4 = t$ と正規化した変数で扱う. ここで, 新しい座標系 (y_1, y_2, x_1, x_2, t) を

$$x_1 = f_1, y_1 = f_2, x_2 = f_1 + f_3, y_2 = f_4, t = f_0 + \dots + f_4$$

で導入すると, (y_1, y_2, x_1, x_2) を \mathbb{C}^4 の非退化正則 2 形式 $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ をシンプレクテック構造とする正準変数になる. さらにはこの変数に関して上記微分方程式系は

$$H : = (t - y_1 - y_2)(y_1x_1 + y_2x_2) - y_1x_1^2 - y_2x_2^2 - y_1(x_1 - x_2)y_2 - \alpha_1x_1 - (\alpha_1 + \alpha_3)y_2 + \alpha_2x_1 + \alpha_4x_2 + \frac{1}{5}(2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4)t$$

をハミルトニアンとするハミルトン系

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$$

と同値となる. これと同値な, $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}$ の正則ベクトル場

$$\tilde{\delta}_4 := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{61}$$

と同値となる. このベクトル場 $\tilde{\delta}_4$ を $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{C}^1$ に有理的に延長したものを やはり $\tilde{\delta}$ とすると,

$$\tilde{\delta}_4 \in H^0(\mathbb{P}^4 \times \mathbb{C}, \Theta_{\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1}(-\log H) \otimes H)$$

となる事がわかる. ここで $H = (\mathbb{P}^4 - \mathbb{C}^4) \times \mathbb{C}$ である. また

この時, 各 t に対し, $\tilde{\delta}_4$ は H_t 上, 15 点の accessible 特異点を持つ事が計算から分かる. 一方 $H_t \simeq \mathbb{P}^3$ であり,

$$c_3(\Theta_{\mathbb{P}^3}(N_{H_t/\mathbb{P}^4})) = 15 \text{ points}$$

である事が分かり, 我々の前節で得た結果と整合している. 田原伸彦の計算 [Tahara] は, 15 点の内の 5 点は blow-up だけで accessible 特異点の解消はできるが, その他の点ではさらに複雑な変換をして accessible 特異点を解消している. この計算をさらに簡易化して, 良い初期値空間を作る事が今後の課題である.

REFERENCES

- [AL] D. Arinkin and S. Lysenko, *Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$* , Math. Res. Letters **4**, (1997), 181–190.
- [Bo] P. Boalch, *Symplectic Manifolds and isomonodromic deformations*, to appear in Adv. in Math.
- [B-W] D. M. Burns, Jr. & J. M. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces*, Invent. Math. **26** (1974), 67–88.
- [D] P. Deligne, *Théorie de Hodge, II*, Publ. Math. IHES, **40**, (1971), 5–57.

- [Du] B. Dubrovin, *Geometry of 2D Topological Fields Theories*, Lecture Notes in Math., Springer, **1620**, 120–348.
- [Gr] A. Grothendieck, *Local cohomology*, (noted by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. 41, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967), 106 pp.
- [I] K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on Riemann surface*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 38, (1991), 431–531.
- [IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé*, Vieweg, 1991.
- [J] 神保道夫, ホロノミック量子場, 岩波講座 現代数学の展開.
- [JMU] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function*, Phys. D **2**, no. 2, (1981), 306–352.
- [JM1] M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II*, Phys. D **2** (1981), no. 3, 407–448.
- [JM2] M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III*, Phys. D **4** (1981/82), no. 1, 26–46.
- [Kaw] Y. Kawamata, *On deformations of compactifiable manifolds*, Math. Ann., **235**, (1978), 247–265.
- [Ki] H. Kimura, Hironobu, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system H_n* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **20** (1993), no. 1, 1–60.
- [Kod] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces*, II, Annals of Math., **77**, (1963), pp. 563–626.
- [KodT] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformations of complex structures*, Springer-Verlag, 1985.
- [KS] K. Kodaira and D.C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures, I, II*, Ann. of Math., **67**, (1958), pp. 328–466.
- [N] 野海正俊, パンルヴェ方程式-対称性からの入門, 朝倉書店, (2000).
- [NTY] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund Transformations and the Manifolds of Painlevé Systems*. Preprint, Kobe.
- [NY1] M. Noumi and Y. Yamada, *Affine Weyl Groups, Discrete Dynamical Systems and Painlevé Equations*, Comm Math Phys **199**, (1998), 2, pp281-295
- [NY2] M. Noumi and Y. Yamada, *Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$* , Funckial. Ekvac., **41** (1998), 483–503.
- [NY3] M. Noumi and Y. Yamada, *Birational Weyl group action arising from a nilpotent algebra*, Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop, Physics and Combinatorics, 1999, edited by A. Kirillov, A. Tsuchiya and H. Umemura, 287–319.
- [MMT] T. Matano, A. Matsumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II*, J. Math. Soc. Japan, **51**, No.4, 1999, 843–866.
- [Mal] J. Malmquist, *Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Arkiv. Mat. Astr. Fys., **17** (1922-23), 1-89.
- [Ma1] Y. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli spaces*. American Mathematical Society, Colloquium Publication, **Vol. 47**, AMS. 1999.
- [OkaT] 岡本和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録 No.19 (1985)
- [O1] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales*, Japan. J. Math., **5**, 1979, 1–79.
- [O2] K. Okamoto, *Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations*, I, II, Proc. Japan Acad., **56**, (1980), 264–268; *ibid*, 367–371.
- [O3] K. Okamoto, *Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier systems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **33**, (1986), 575–618.
- [O4] K. Okamoto, *Studies on the Painlevé equations I*. Annali di Matematica pura ed applicata **CXLVI** 1987, 337–381; II. Japan. J. Math., **13**, (1987), 47–76; III. Math. Ann. **275** (1986), 221–255; IV. Funkcial. Ekvac. Ser. Int. **30** (1987), 305–332.
- [SD] 齋藤 政彦, 対数的シンプレクテック多様体の変型とパンルベ型方程式, 2001 年度代数学シンポジウム報告集, 大阪大学理学研究科 (2001 年 8 月), 97–115. (<http://www.math.sci.kobe-u.ac.jp/HOME/mhsaito/index.html> から取得可能.)

- [SSU] M.-H. Saito, Y. Shimizu and S. Usui, *Variation of Hodge Structure and the Torelli Problem*, Advanced Studies in Pure Math. **10**, 1987, 649–693.
- [STa] M.-H. Saito and T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé pairs*. preprint, Kobe 2000. math.AG 0006028
- [STT] M.-H. Saito, H. Terajima and T. Takebe, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*. JJ. Algebraic Geom. **11** (2002), 311–362.
- [STe1] M. -H. Saito and H. Terajima, *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations*, Preprint, Kobe, Jan. 2002, math.AG/0201225, 30 pp.
- [STe2] M.-H. Saito and H. Terajima, *Semiuniversal families of generalized Okamoto–Painlevé pairs and explicit descriptions of Painlevé equations*. in preparation.
- [SU] M.-H. Saito and H. Umemura, *Painlevé equations and deformations of rational surfaces with rational double points*. Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop, Physics and Combinatorics, 1999, edited by A. Kirillov, A. Tsuchiya and H. Umemura, 320–365.
- [Sakai] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220**, 165–229 (2001).
- [ShT] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40**, 1997, 271–291.
- [Tahara] 田原伸彦, $A_4^{(1)}$ 型方程式の初期値空間について, パンルベ方程式の眺望, 高野恭一, 野海正俊編, Rokko Lecture in Math., **7**, (2000), 121–130.
- [T] Hitomi Terajima, *Local cohomology of generalized Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*. Preprints, Kobe, May, 2000, math.AG 0006027.
- [U] 梅村浩, *Painlevé 方程式の 100 年*, 数学, **51**, (1999), 395–420.

神戸市灘区六甲台 1-1, 657-8501, 神戸大学理学部数学教室
E-mail address: mhsaito@math.kobe-u.ac.jp

局所ミラー対称性と4次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論

東大理学系研究科¹ 那珂 通博

概要

超対称ゲージ理論を超弦理論から導出する試みを、4次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論 (サイバークウイッテン理論) を例に説明します。この数学的取扱いである局所ミラー対称性の技術を利用することで、サイバークウイッテン理論に現われる周期の満たす微分方程式の取り扱いが系統的になります。応用として、ゲージ理論のインスタントン数の漸近的振舞いを導出します。

1 はじめに

統一理論としての超弦理論は素粒子の相互作用を記述する理論体系であり、重力相互作用以外にも非可換ゲージ理論などもその中に取り込んでいるべきです。実際に、昨今の超弦理論の発展により、重力をゲージ理論から引き離す (decoupling と呼びます) 極限を考えることによって、ゲージ理論について様々なことが分かるようになっていきます。ここで、重力を引き離すということは、ゲージ理論で記述されている粒子との相互作用をなくしてやるという意味です。重力を考えなくてよければ理論が非常に考えやすくなるため、この極限は超弦理論を解析する時に非常に重要です。特にカラビヤウ多様体へのコンパクト化に絡んだ一連の手法は Geometric Engineering と呼ばれます。ここでは、4次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論を例にこれを説明します。

サイバークウイッテン理論 [1] によって、超対称ゲージ理論の非摂動的な振るまいについての理解は格段に深まり、従来の方の理論の取扱いによらない非摂動的アプローチの新天地が開拓されました。4次元 $N = 2$ $SU(2)$ ゲージ理論の低エネルギー有効理論は $N = 2$ $U(1)$ ゲージ理論 (クーロン相) であり、そのラグランジアンは3階以上の高階微分を無視するカレント代数にも見られる近似のもとで、一個の正則関数 (プレポテンシャルと呼ばれます) で書けることが $N = 2$ 理論の特徴です。具体的にはプレポテンシャルは、ベクトル多重項にあるスカラー場の真空期待値 a の関数として次の形を持ちます。

$$F(a) = \frac{ia^2}{2\pi} \left(2 \log \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^2 - 6 + 8 \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^{4n} \right) \quad (1)$$

Λ は次元転移パラメータです。第一項が1ループの寄与で、高次の摂動補正はありません。非摂動的な相互作用で生ずるインスタントンの寄与による補正を与えるインスタントン数 F_n を

¹ 2002年4月より東大総合文化研究科

全て決定すれば理論がまるごと解けたと考えます。これを評価するには、サイバークウイッテン曲線

$$y^2 = 2(x^2 - u)^2 - \Lambda^4 \quad (2)$$

を用意し、曲線の周期行列を利用します。周期の u 微分で得られる (a, a_D) は理論の結合定数に $\tau = \frac{\partial a_D}{\partial a} = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$ と関係します。ここで、双対性の関係 $a_D = \frac{\partial F(a)}{\partial a}$ が成立していることが重要でした。実際の評価にあたっては周期の満たす超幾何微分方程式から得られる (a, a_D) の満たす微分方程式を用います。その演算子は

$$\theta_\alpha \left(\theta_\alpha - \frac{1}{2} \right) - \alpha \left(\theta_\alpha - \frac{1}{4} \right)^2 = 0 \quad (3)$$

$(\alpha = u^2)$ です。 $\theta_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$ で、 $\Lambda = 1$ としました。解はフロベニウス法で得られ、 $u = \frac{1}{w}$ をもとに

$$a(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(w, \lambda) \Big|_{\lambda=-\frac{1}{4}}, \quad a_D(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi i} (\partial_\lambda f(w, \lambda) + (4 - 6 \log 2) f(w, \lambda)) \Big|_{\lambda=-\frac{1}{4}} \quad (4)$$

$$f(w, \lambda) = \sum_m \frac{(\lambda)_m \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)_m w^{2(m+\lambda)}}{\left(\lambda + \frac{5}{4} \right)_m} \quad (5)$$

と評価されます。 u を a の関数として逆に解き、 a_D に代入し、さらに a で積分すればプレポテンシャルの形が得られ、インスタントン数 F_n が逐次で評価されます。

このような場の理論の可解性の背後にはストリング理論の構造が潜っていると期待されます。この意味でストリング理論に場の理論を埋め込んでやることは非常に重要な課題です。これを実際に遂行することは自明ではありませんが、ストリング双対性の考察に基づき実現されました。特に $K3$ 曲面の ADE 型特異点を記述する ALE 空間とサイバークウイッテン幾何学に関係が付けられました。このような考察はゲージ対称性が明白なヘテロ型の超弦理論から出発しましたが、現在ではタイプ II 型の超弦理論のみをもとにした幾何学的手法が提案され、もっとも一般的な手法を与えています。これが Geometric Engineering と呼ばれる手法です。Geometric Engineering はタイプ IIA 超弦理論のカラビヤウコンパクト化の自明でない変数を選んで、そこで局所ミラー対称性 [2] を利用し、B 模型曲線をサイバークウイッテン曲線に見立てることが可能な点にあります。このようにサイバークウイッテン理論の可解性に局所ミラー対称性の技法が適用されることを認識すると、ゲージ理論を系統的に扱う道が開けます。このプログラムでは D ブレーンの力学をもとに如何にしてゲージ対称性と漸近自由なゲージ理論特有の力学をカラビヤウコンパクト化に持ち込むかが最大の問題になります。これは並の物理学者の洞察力で見出せるものではないと思いますが、 a, Λ とカラビヤウ多様体のケーラーモジュライの間の関係をもとに、プレポテンシャル (1) とサイバークウイッテン曲線 (2) が同定されました [3]。このようにサイバークウイッテン理論が弦理論のカラビヤウコンパクト化の技術である局所ミ

ラー対称性につながるのは著しいことです。ここでは、さらに超弦理論からゲージ理論への跳ね返りとしてインスタントン数の漸近的な振るまいを特徴づけることができました。論文 [4] でグロモフウィッテン不変量の漸近的振舞を評価するのに用いられたアイデアを適用します。これを求めるにあたって局所 B 模型の湯川結合が必要なので評価しておきます。

2 カラビヤウコンパクト化と局所ミラー対称性

タイプ IIA 超弦理論の複素 3 次元カラビヤウ多様体へのコンパクト化を考えます。ミラー対称性は A 模型のケーラー構造と B 模型の複素構造の間に等価性を予言しました。正則 3 形式の周期積分で与えられる B 模型の湯川結合がミラー写像により、A 模型のプレポテンシャルの 3 階微分で与えられる湯川結合を導きます。局所ミラー対称性によれば、カラビヤウ多様体の適切な極限をとることで、B 模型曲線が与えられ、様々なノンコンパクトなトーリックカラビヤウ多様体の A 模型の湯川結合 (グロモフウィッテン不変量) が得られます [2]。

カラビヤウ多様体としては、ヒルツェブルフ曲面 F_2 の標準束のコンパクト化を選びます。ヒルツェブルフ曲面 F_2 の底空間 P^1 とファイバー P^1 のケーラーモジュライを t_b, t_f とおきます。ここでケーラーモジュライを

$$t_b \sim \log(\epsilon\Lambda)^4, \quad t_f \sim \epsilon a \quad (6)$$

と選んで $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとる (decoupling limit) ことで前節で述べたサイバークウイッテン理論に還元されることが議論されました [3]。なぜこのような極限を取るのかを一言で言うのは容易ではありません。ここでのカラビヤウ多様体は底空間 P^1 上の K3 曲面のファイブレーションと考えられます。K3 曲面が A_1 型単純特異点をもつ状況を考えると、ファイバーにある正則な P^1 に D2 プレーンが巻き付くことからゲージ対称性が出現していると考えられます。このときファイバー P^1 のサイズに関係させてヒッグズ効果を理解して t_f を決定します。一方、ここで考える漸近自由なゲージ理論には繰り込み群不変な次元転移パラメータ Λ があります。もとの理論は質量スケールが無かったことに注意してください。この特徴を反映させるのに、底空間 P^1 のサイズを利用します。各ループ補正の効果は力学的情報を含んだ底空間 P^1 の巻き付き数に絡めて理解するのが妥当に考えられます。これで上の変数の対応を大雑把に理解できます。

B 模型曲線

$$1 + X_1 + X_2 + \frac{z}{4X_1} + \frac{yz^2}{64X_1^2X_2} = 0 \quad (X_1, X_2) \in (\mathbf{C}^*)^2 \quad (7)$$

は、変数変換 $x = \frac{2}{\epsilon} \left(X_1 + \frac{1}{2} \right)$, $Z = \frac{8X_1X_2}{\epsilon^2}$ をして $\epsilon \rightarrow 0$ 極限をとり、 $y = Z - (x^2 - u)$ とおくことで、サイバークウイッテン曲線 (2) に還元することがわかります。 $\Lambda = 1$ としました。

また、Picard-Fuchs 演算子

$$\mathcal{L}_1 = \theta_y^2 - y \left(\theta_y - \frac{1}{2} \theta_z \right) \left(\theta_y - \frac{1}{2} \theta_z + \frac{1}{2} \right), \quad \mathcal{L}_2 = \theta_z (-2\theta_y + \theta_z) - z \theta_z \left(\theta_z + \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

とその微分方程式の解であるミラー写像 t_b, t_f も還元できます。ここで、 t_b, t_f はそれぞれ $(z, y) = (0, 0)$ の周りで $\log z, \log y$ の振舞をする解です。 t_b には巾級数がありません。 F_0, F_1 模型でも同様の結果を得ますが、これは F_2 に特徴的な振舞いです。まず $y = \epsilon^4, z = \frac{1}{\epsilon^2 u + 1}$ とおき、解を $\epsilon^\rho f_0(v), v = \left(\frac{\Lambda}{2u}\right)^2$ と仮定すると

$$\theta_v(\rho - 1)f_0(v) = 0, \quad \left[\left(\theta_v + \frac{\rho}{4} \right)^2 - v \theta_v \left(\theta_v + \frac{1}{2} \right) \right] f_0(v) = 0 \quad (9)$$

$\rho = 1$ で $f_0 = v^{-\frac{1}{4}}g(v)$ と書けばサイバークウイッテン理論の真空期待値 a を得ます。

$$t_b = 2 \log \epsilon^2 + \log \frac{1}{4} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad t_f = \epsilon a + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (10)$$

一方、 \log の 2 次の項をもつ二重対数解は $\Omega \sim \frac{2\pi^2}{3} + \epsilon a_D$ となることも超幾何級数の恒等式を利用して示すことができます。定数 $\frac{2\pi^2}{3}$ が残りますが、これはケーラーモジュライに依存しないので無視できるものと解釈します。

これで、局所ミラー対称性はカラビヤウ多様体のデータをサイバークウイッテン理論へ還元をするための道具であることがわかれると思います。

3 インスタント数 of 漸近的振舞い

プレポテンシャルに現われるインスタント数の振舞いを議論してみましょう。

ケーラーモジュライを 1 個持つ場合の世界面のインスタント数は湯川結合で表されます。

$$C_{ttt} = \text{classical term} + \sum_{k=1}^{\infty} k^3 n_k \frac{e^{2\pi i k t}}{1 - e^{2\pi i k t}} \quad (11)$$

n_k が種数 0 のグロモフウイッテン不変量を表します。物理の立場としては個々のグロモフウイッテン不変量の値に興味は無く、むしろそれを如何に特徴づけて理解するかに興味があります。このとき、次数 k が大きい時の振舞いは以下の形になることが知られています [4, 5]。

$$n_k \sim \frac{e^{2\pi k \text{Im} \frac{C}{2\pi i}}}{k^3 \log^2 k} \quad k \gg 1 \quad (12)$$

特に定数 C が個々のカラビヤウ多様体を特徴づけるものと考えられます。同様のことを現在の模型でゲージ理論への還元の仕方を見ながら考えたとき、ゲージ理論のインスタント数に何か予言ができそうだと期待できます。本質的にモジュライが 1 個の状況になっているためです。

局所 F_2 模型の湯川結合は

$$F_{t_f t_f t_f} = \text{const} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} m^3 d_{n,m} \frac{e^{nt_b + mt_f}}{1 - e^{nt_b + mt_f}} \quad (13)$$

と書け、 $d_{n,m}$ は底空間、ファイバーの P^1 への巻き付き数がそれぞれ n, m 回のグロモフウィッテン不変量を表します。これは局所 B 模型の湯川結合から導出出来ます。

F_2 の標準束のコンパクト化模型として重みつき射影空間 $P(12, 8, 2, 1, 1)$ 内の超曲面を考えます (文献 [6] では $X_{24}(12, 8, 2, 1, 1)$ と書かれていて、その記法を採用します)。この B 模型多様体は integral polyhedron $\Delta^* = \{(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (-2, -1, 2, 3), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ に関するトーリック多様体 P_{Δ^*} 内の超曲面

$$a_0 + X_3^2 X_4^3 \left(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \frac{a_3}{X_1} + \frac{a_4}{X_1^2 X_2} + a_5 \right) + \frac{a_6}{X_3} + \frac{a_7}{X_4} = 0 \quad (14)$$

で、複素モジュライ変数は $\frac{x}{2^3 3^2} = \frac{a_5 a_6^2 a_7^3}{a_0^3}$, $\frac{y}{4} = \frac{a_2 a_4}{a_3}$, $\frac{z}{4} = \frac{a_1 a_3}{a_5}$ と与えられます。 x が A 模型トラスファイバーに対応します。森ベクトル $\ell_0 = (-6, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 1)$, $\ell_1 = (0, 0, 1, -2, 1, 0, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, -2)$ から得られるミラー写像の $x \rightarrow 0$ での振舞いから

$$t_0 - \log x = -\frac{1}{4} \left(t_1 - \log \frac{y}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(t_2 - \log \frac{z}{4} \right) \quad (15)$$

が読み取れます。これより、湯川結合 $F_{t_1 t_1 t_1}$ を x なしで 1、2 次のテンソル項がない形に書くことができ、

$$\frac{1}{4^3} W^{300} + \left(\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right)^3 K_{yyy} + 3 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right)^2 \left(\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial t_1} \right) K_{yyz} + 3 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right) \left(\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial t_1} \right)^2 K_{yzz} + \left(\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial t_1} \right)^3 K_{zzz} \quad (16)$$

これより $x \rightarrow 0$ 極限として局所 B 模型の湯川結合を得ることができます。

$$K_{yyy} = \frac{1 + y/2 - 2z - 3yz/2 + z^2}{4(1-y)\Delta}, \quad K_{yyz} = \frac{y(1-2z)}{4(1-y)\Delta}, \quad K_{yzz} = \frac{z-1}{2\Delta}, \quad K_{zzz} = \frac{-1}{\Delta} \quad (17)$$

Δ は B 模型曲線の discriminant locus で $\Delta = (z-1)^2 - yz^2$ です。 $F_{yyy} = y^3 K_{yyy}$ などとなっています。実際にこれは正しく局所模型のグロモフウィッテン不変量 [2] を再現しています。

ここでの目的は、decoupling limit を取った場合のグロモフウィッテン不変量の振舞いの評価です。そのとき、ファイバー P^1 のサイズが小さくなり、巻き付き数 m がいくらでも大きくとれると期待されます。そのときのグロモフウィッテン不変量の振舞いに仮定を置きます。

$$d_{n,m} = \gamma_n m^{\alpha n + \beta} \quad m \gg 1 \quad (18)$$

γ は n に依存した関数、 α, β は定数とします。この仮定のおきかたは非自明ですが、ゲージ理論のプレポテンシャルを導出する立場から理解できます [3]。

A 模型湯川結合は decoupling limit で

$$F_{t_f t_f t_f} = \frac{1}{-8\epsilon a'(w)^3(w^2-1)w^4}, \quad \frac{F_{t_b t_f t_f}}{F_{t_f t_f t_f}} = \frac{\epsilon a}{2} \quad (19)$$

と評価できます。これは $F_{t_f t_f t_f}, F_{t_b t_f t_f}$ が B 模型湯川結合 $F_{www} = \frac{\epsilon^2}{w^4(w^2-1)} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$ だけから決まることに依ります。

m が大きいとき、多重被覆の寄与は無視できて、

$$F_{t_f t_f t_f} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{nt_b} \int dm m^{\alpha n + \beta} e^{mt_f} \quad (20)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{n(t_b - \alpha \log t_f)} \frac{\Gamma(\alpha + 4 + \beta)}{(-t_f)^{4+\beta}} \quad (21)$$

と評価されます。同様に

$$F_{t_b t_f t_f} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{n(t_b - \alpha \log t_f)} n \frac{\Gamma(\alpha + 3 + \beta)}{(-t_f)^{3+\beta}} \quad (22)$$

と評価できます。ミラー写像の decoupling limit での振舞い $t_b - 4 \log t_f = -4 \log a - 6 \log 2 + \mathcal{O}(\epsilon)$ から A 模型での振舞い (19) と比較して $\alpha = 4, \beta = 3$ が結論されます。

discriminant Δ は $\epsilon = 0, v = w^2 - 1 = 0$ で消え、B 模型での形 (17) から湯川結合はそこでの寄与が支配的と考えられます。そこで、 $\Delta = 0$ の周りでミラー写像を表してみます。ここでは $a(w) = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}} \pi i} (v \log v - 16 + \dots)$ と評価できます。そこで、残りの因子に対して仮定

$$\gamma_n = \frac{B n^\lambda (\log n)^\mu r^{-n \operatorname{Re}(t_b - 4 \log t_f)} (\epsilon=0, w=1)}{\Gamma(4n+1)} \quad (23)$$

をおくことで同様に評価が進行し、 $\lambda = 0, \mu = -2, B = -4\pi^2$ を得ます。したがって我々は以下の評価を得たこととなります。

$$d_{n,m} = \gamma_n m^{4n-3}, \quad \gamma_n \sim -\frac{4\pi^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{4n}}{\Gamma(4n+1)(\log n)^2}, \quad n, m \gg 1 \quad (24)$$

この結果をゲージ理論のインスタントン数から理解するとどうなるでしょうか？1ループの寄与を比較してグロモフウィッテン不変量とゲージ理論のインスタントン数に $\gamma_n = -\frac{4^{4n-1} F_n}{\Gamma(4n-2)}$ と関係が付けられ、次の予言を得ます。

$$F_n \sim \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{4n}}{n^3 (\log n)^2} \quad (25)$$

容易に推察されるように、インスタントン数の仮定をゲージ理論に持ち込むことで、この議論はサイバークウイッテン理論だけでも成立します。通常の場合の理論に基づく手法ではゲージインスタントン数の評価は非常に困難です。サイバークウイッテン理論によりこれが、原理的には出せるようになりましたが、ここでは、局所ミラー対称性を応用することでインスタントン数の理解が深まったと言えます。

4 結語

今回議論した内容はゲージ理論で原理的には局所ミラー対称性なしでもわかる結果の再現に過ぎません。しかし、局所ミラー対称性は4次元 $N = 2$ ゲージ理論の幾何学による非常に系統的な枠組みと計算手法を与えます。一般にゲージ理論に物質場を入れた理論は多様体をブローアップしたモデルで記述できると考えられます。このモデルの局所ミラー対称性による取り扱いにより、質量がある場合の Picard Fuchs 方程式の扱いが明確になります。 F_2 の4点ブローアップまで解析が進行しますが、物質場が4個ある場合は共形不変性の効果が出て来るため、解釈が微妙になります。筆者は深い理由を知らないですが、局所ミラー対称性は一般に漸近自由なクラスのゲージ理論に広く有用な手法に思われます。一方、局所ミラーモデルのプレポテンシャルを5次元ゲージ理論のプレポテンシャルとして解釈できることが提案されています [7]。そこでは、実際に局所ミラー対称性の必要性が前面に出てきます。

謝辞

ここでの議論は小西由紀子さん (東大理学系) との共同研究 [8] で得られたものであり、有益な共同研究に感謝します。また、講演する機会を与えて頂いた北大の方々に深く感謝します。

参考文献

- [1] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19; Nucl. Phys. **B431** (1994) 484.
- [2] T.-M. Chiang, A. Klemm, S.-T. Yau and E. Zaslow, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 495.
- [3] S. Katz, A. Klemm and C. Vafa, Nucl. Phys. **B497** (1997) 173.
- [4] P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green and L. Parkes, Nucl. Phys. **B359** (1991) 21.
- [5] A. Klemm and E. Zaslow, hep-th/9906046.
- [6] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau, Commun. Math. Phys. **167** (1995) 301.
- [7] T. Eguchi and H. Kanno, Nucl. Phys. **B586** (2000) 331.
- [8] Y. Konishi and M. Naka, to appear

Calabi–Yau threefolds with infinitely many divisorial contractions*

Hokuto Uehara[†]

February 13, 2002

Abstract

We study Calabi–Yau 3-folds with infinitely many divisorial contractions and we obtain some results concerning the Morrison Cone Conjecture.

0 Introduction

When a normal projective variety X over \mathbb{C} has at most rational Gorenstein singularities and it satisfies $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ and $K_X = 0$, we call it a C–Y model. If a C–Y model is smooth, it is called a C–Y manifold. We say that a birational contraction $\varphi: X \rightarrow Y$ between normal projective varieties is *primitive* if $\rho(X/Y) = 1$. We classify a primitive birational contraction on a 3-dimensional \mathbb{Q} -factorial C–Y model according to the dimensions of its exceptional set and its image.

Definition 0.1. We say that a primitive birational contraction on a 3-dimensional C–Y model is *of type I* if it contracts only finitely many curves, *of type II* if it contracts an irreducible surface to a single point and *of type III* if it contracts an irreducible surface to a curve. Hence a primitive birational contraction is, so called, a small (respectively, divisorial) contraction if it is of type I (respectively, type II or III). Every birational contractions on a 3-dimensional \mathbb{Q} -factorial C–Y model is one of types I, II and III.

In this article, we study C–Y 3-folds which admit infinitely many divisorial contractions, more precisely, infinitely many contractions of type III. Let $I_X (= I)$ be the index of the set $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ of all possible birational contractions of type III on a C–Y 3-fold X and E_i denotes the exceptional divisor of φ_i . We show in Corollary 1.7 the finiteness of the set $I_{c_2 < 0} := \{i \in I \mid E_i \cdot c_2 < 0\}$, where $c_2 (= c_2(X))$ is the second Chern class of X .

*This article is a survey of [12].

[†]Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science.

Assume that the automorphism group $\text{Aut } X$ is infinite. Then the hyperplane $\{x \in N^1(X) \mid x \cdot c_2 = 0\}$ contains a nonzero nef \mathbb{R} -divisor by [13]. If the divisor is a \mathbb{Q} -divisor and if the Semi-ample Conjecture (1.1) is true, the divisor determines a nontrivial contraction $\varphi : X \rightarrow Y$ satisfying $\varphi^*H \cdot c_2 = 0$ for an ample divisor H on Y . We call such a contraction c_2 -contraction. On the other hand, we have the remarkable classification of C–Y 3-folds X admitting a c_2 -contraction with $\dim Y \geq 2$ by K. Oguiso (see [10] and Theorem 2.4). Therefore we can expect the program above to classify C–Y 3-folds with $|\text{Aut } X| = \infty$ works modulo some conjectures. In fact, in the case when set $I_{c_2=0} := \{i \in I_X \mid E_i \cdot c_2 = 0\}$ is infinite for a C–Y 3-fold X , we prove in Theorem 2.5 that the X admits a c_2 -contraction and moreover according to the Oguiso’s ! classification, we determine the structure of X . Here note that $|I_{c_2=0}| = \infty$ implies $|\text{Aut } X| = \infty$ if the Morrison Cone Conjecture is true. By this information concerning the structure of X , we also prove in Corollary 2.8 that the set $I_{c_2=0}$ is finite up to $\text{Aut } X$. Theorem 2.5 and Corollary 2.8 are main results in Section 2.

Finally, in Section 3 we construct C–Y 3-folds with infinitely many birational contractions of type I or III from certain log Enriques surfaces.

Notation and Convention

- (i) X always denotes a C–Y 3-fold and a C–Y model always means a 3-dimensional C–Y model throughout this paper unless we specify otherwise.
- (ii) For a n -dimensional projective variety X , $\mathcal{A}(X)$ denotes the cone generated by ample divisors in $N^1(X)$. Suppose the symbol $*$ denotes $>$ etc. For a real divisor D on X and a constant c , set $D_{*c} := \{z \in N_1(X) \mid (D \cdot z) * c\} \cup \{0\}$.
- (iii) For a C–Y 3-fold X , we can regard the second Chern class $c_2(X)$ as a linear form on $H^2(X, \mathbb{Z})$. We often abbreviate it by c_2 in this article. As is well-known, $c_2 \cdot x \geq 0$ for all $x \in \overline{\mathcal{A}}(X)$ by Y. Miyaoka ([6]).
- (iv) The term *contraction* means a surjective morphism between normal projective varieties with connected fibers and thus contractions consist of the fiber space case and the birational contraction case. Recall that $I_X (= I)$ is the index of the set $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ of all possible birational contractions of type III on a C–Y 3-fold X . For $i \in I$, let E_i be the exceptional divisor of φ_i and F_i a general fiber of $\varphi_i|_{E_i} : E_i \rightarrow \varphi(C_i)$. It is known that $E_i \cdot F_i = -2$. Furthermore let us denote by V_i the image of the closed cone of curves $\overline{NE}(E_i)$ under the natural map $N_1(E_i) \rightarrow N_1(X)$. We know that V_i is a 2-dimensional cone (see Recipe (ii) below).
- (v) We denote the biregular (respectively, birational) automorphism group of a variety X by $\text{Aut } X$ (respectively, $\text{Bir } X$).

1 C–Y 3-folds with infinitely many divisorial contractions

Let $\varphi: X \rightarrow Y$ be a birational contraction on a n -dimensional C–Y model X . Let H, H' denote ample divisors on X, Y respectively. Since $\Delta := -H + m\varphi^*H'$ is effective for sufficiently large m , the pair $(X, \epsilon\Delta)$ defines a log variety with klt singularities for $0 < \epsilon \ll 1$. Therefore we can regard φ as a $K_X + \epsilon\Delta$ -extremal face contraction and so we may apply theory of the log Minimal Model Program (log MMP) to study φ . All of the following Recipe come from theory of the log MMP ([2], [4]).

Recipe

- (i) Since $-(K_X + \epsilon\Delta)$ is φ -ample, the cone $\overline{NE}(X/Y)$ is rational polyhedral by the cone theorem.
- (ii) Since the image of $\varphi^*: \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$ coincides with

$$\{D \in \text{Pic}(X) \mid D \cdot z = 0 \text{ for all } z \in (\varphi^*H')^\perp \cap \overline{NE}(X)\}$$

and since X is a C–Y model, Y is also a C–Y model. We also obtain an exact sequence

$$0 \rightarrow N_1(X/Y) \rightarrow N_1(X) \rightarrow N_1(Y) \rightarrow 0.$$

Assume that $\dim X = 3$. Pick $i \in I$. From the exact sequence above, we know that V_i is a 2-dimensional cone in $N_1(X)$.

- (iii) Let X be a C–Y 3-fold and L an *effective* nef divisor on it. Since $(X, \epsilon L)$ is a klt pair for $0 < \epsilon \ll 1$ and $K_X + \epsilon L$ is nef, we know that L is semi-ample by the log abundance theorem ([3]).

Conjecture 1.1. *Let X be a C–Y 3-fold and L a nef divisor on it. Then L is semi-ample.*

We have the following result by V. V. Nikulin [8], p282.

Proposition 1.2 (Nikulin). *The set $\{i \in I \mid \text{there exists } j \in I \text{ such that either } E_i \cdot F_j > 0 \text{ and } E_j \cdot F_i = 0 \text{ or } E_j \cdot F_i > 0 \text{ and } E_i \cdot F_j = 0\}$ is finite.*

Lemma 1.3. *Let X be a \mathbb{Q} -factorial C–Y model with its Picard number ρ . Define $K_i := \{j \in I \mid E_i \cap E_j \neq \emptyset\}$ for $i \in I$.*

- (i) *Assume $J \subset I$. If $|J| \geq \rho$, there exist $i, j \in J$ such that $E_i \cap E_j$ is not empty.*
- (ii) *There is no subset $J \subset I$ such that J satisfies the following property (*).*
 - (*) *Assume that we have $1, \dots, n \in J$ such that $i \in J \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} K_k$ for all $i \leq n$. Then $J \setminus \bigcup_{k=1}^n K_k \neq \emptyset$.*

(iii) Assume $J \subset I$ such that $|J| = \infty$. Then there exists $i \in J$ such that $|K_i \cap J| = \infty$. In particular, there exists an infinite subset $J' \subset J$ such that $E_i \cap E_j$ is not empty for all $i, j \in J'$.

Proof. (i) Assume that we have elements $1, \dots, \rho \in J$ such that $E_i \cap E_j$ is empty for all $i \neq j$. Then there exists a nontrivial relation $\sum_{k=1}^{\rho} a_k E_k + a_0 H \equiv 0$ for $a_k \in \mathbb{R}$ and some ample divisor H . Then because $E_i \cdot F_j = 0$ if and only if $i \neq j$, the numbers $a_k \cdot a_0 > 0$ for all k . This is absurd, since $(\sum a_k E_k + a_0 H) \cdot H^2 \neq 0$.

(ii) If J satisfies (*) then we have $1, \dots, \rho \in J$ such that $k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} K_i$ for all $k \leq \rho$. This contradicts (i).

(iii) Assume that $K_i \cap J$ is finite for all $i \in J$. By $|J| = \infty$, J satisfies (*) in (ii). The second statement follows from the first one. \square

Remark 1.4. Every exceptional divisor of a birational contraction of type II does not meet each other. Therefore the number of contractions of type II is finite by the same proof of (i) above.

Lemma 1.5. For general $i \in I$, $\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{E_i \geq 0} + \mathbb{R}_{\geq 0}[F_i]$, where $\overline{NE}(X)_{E_i \geq 0} := \overline{NE}(X) \cap (E_i)_{\geq 0}$.

Proof. See [12]. \square

Key Proposition 1.6. Let J be an infinite subset of I . Then there exist $1, 2, 3 \in J$ such that $E_1 + E_2 + E_3$ is nef.

Proof. We may assume that $\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{E_i \geq 0} + \mathbb{R}_{\geq 0}[F_i]$ for all $i \in J$ by Lemma 1.5 and that $E_i \cdot F_j > 0$ for all different $i, j \in J$ by Proposition 1.2 and Lemma 1.3(iii). Pick $1, 2, 3 \in J$. Then $(E_1 + E_2 + E_3) \cdot F_i \geq 0$ for $i = 1, 2, 3$. Thus $E_1 + E_2 + E_3$ is nef. \square

Note that the nef divisor $E_1 + E_2 + E_3$ is semi-ample by Recipe (iii). By Proposition 1.6, the set $\{i \in I \mid E_i \cdot z < 0\}$ is finite for a pseudo-effective element $z \in N_1(X)$, i.e. $z \cdot x \geq 0$ for all $x \in \overline{A}(X)$.

Corollary 1.7. The set $I_{c_2 < 0} := \{i \in I \mid E_i \cdot c_2 < 0\}$ is finite.

Proof. Because c_2 is pseudo-effective on minimal model 3-folds by [6], the set $I_{c_2 < 0}$ is finite. \square

2 The structure of certain C–Y 3-folds

We consider the following conjecture of D. Morrison concerning the finiteness properties of the nef cones ([7], [1]). We refer 2.1 as the Morrison Cone Conjecture. The following form is weaker than the original one.

Conjecture 2.1. Let X be a C–Y n -fold. The number of contractions on X is finite up to $\text{Aut } X$.

Definition 2.2. Let W be a normal projective surface over \mathbb{C} with at most klt singularities. We call W a *log Enriques surface* if $h^1(\mathcal{O}_W) = 0$, $mK_W = 0$ for some positive integer m . We call the integer $I(W) := \min\{m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid mK_W = 0\}$ the global canonical index of W .

We construct C–Y 3-folds with infinitely many birational contractions from certain log Enriques surfaces in Section 3.

Definition 2.3. Let $\varphi : X \rightarrow Y$ be a contraction from a C–Y 3-fold X and a divisor L on X the pull back of an ample divisor on Y . We call φ a *c_2 -contraction* if $L \cdot c_2 = 0$. For example, a fibration $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ is a c_2 -contraction if and only if the general fiber is an abelian surface. Moreover for an elliptic fibration $\varphi : X \rightarrow W$, it is a c_2 -contraction if and only if W is a log Enriques surface by [9] (we do not have to assume there that X is simply connected). There exists a unique c_2 -contraction $\varphi_0 : X \rightarrow Y_0$ such that every c_2 -contraction $\varphi : X \rightarrow Y$ on X factors through φ_0 (see Lemma-Definition (4.1), [10]). We call φ_0 the *maximal c_2 -contraction*.

We have the beautiful classification of C–Y 3-folds which admit either a birational c_2 -contraction or an elliptic c_2 -contraction, due to K. Oguiso (see [10]). It plays an important role to prove Theorem 2.5. The following theorem is coarser than the Oguiso’s original classification.

Theorem 2.4 (Oguiso). *Let $\varphi : X \rightarrow W$ be a c_2 -contraction with $\dim W \geq 2$. Then X is birational to (i) a quotient of an abelian 3-fold or (ii) a quotient of the product of a normal K3 surface and an elliptic curve. In the latter case, φ is one of the relatively minimal models over S/G of*

$$\psi : Y \xrightarrow{\nu} (S \times E)/G \xrightarrow{\mu} S/G,$$

where S is a normal K3 surface (namely its minimal resolution is a smooth K3 surface), E is an elliptic curve, G is a finite Gorenstein automorphism group of $S \times E$ whose element is of the form $(g_S, g_E) \in \text{Aut } S \times \text{Aut } E$ and ν is a crepant resolution of $(S \times E)/G$. Moreover $I(W) \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Theorem 2.5. *Assume that $I_{c_2=0}(= I_{X, c_2=0}) := \{i \in I_X \mid E_i \cdot c_2 = 0\}$ is infinite. Then the following hold.*

- (i) *We have an elliptic c_2 -contraction $\varphi : X \rightarrow W$ fitting in the case of (ii) in Theorem 2.4. Namely we have the following diagram:*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\Phi}{\dashrightarrow} & Y \\ \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\ & W \cong S/G & \longleftarrow (S \times E)/G \\ & & \mu \longleftarrow \end{array}$$

where S, E, G are given in Theorem 2.4. Let $r : S \times E \rightarrow (S \times E)/G$ be the quotient morphism. Then the normal K3 surface S contains infinitely many smooth rational curves $\{l\}$ such that

- (a) $r(l \times E) \cap \text{Sing}(S \times E)/G = \emptyset$, and
(b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot l$ is contractible at the same time by a birational contraction on S .
- (ii) Let Φ denote the birational map between X and Y over W in (i). Then for general $i \in I_{c_2=0}$, E_i is contained in the isomorphic locus of the birational map $\nu \circ \Phi$ and $E_i = r(l \times E)$ under this isomorphism for some smooth rational curve l on S satisfying (a) and (b) in (i).

Proof. (i) We supply the outline of the proof. Let us denote by $\varphi : X \rightarrow W$ the maximal c_2 -contraction (a priori W may be a point). We define $M(f) := \{i \in I_X \mid E_i \cdot C = 0 \text{ for all curves } C \text{ such that } f(C) \text{ is a point}\}$ for a contraction f on X .

Claim 2.6. For a general $i \in I_{c_2=0}$, $i \in M(\varphi)$.

Proof. If not, by Key Proposition 1.6 we can take $1, 2, 3 \in I_{c_2=0} \setminus M(\varphi)$ such that some multiple of $E_1 + E_2 + E_3$ determines a c_2 -contraction, which factors through φ by the maximality of φ . By the choice of $1, 2, 3$, there exists one of the elements $1, 2, 3$, say 1 , and there exists an irreducible curve C on X such that $\varphi(C)$ is a point and $E_1 \cdot C > 0$. By the proof of 1.6 we can pick $4, 5 \in I_{c_2=0} \setminus M(\varphi)$, different from $1, 2, 3$, such that some multiple of $E_1 + E_4 + E_5$ determines a c_2 -contraction, which factors through φ . Thus there exists one of the elements $4, 5$, say 4 , such that $E_4 \cdot C < 0$. By the same procedure, we have infinitely many elements $i \in I_{c_2=0} \setminus M(\varphi)$ such that $E_i \cdot C < 0$. This is a contradiction with 1.6. \square

It is easy to check that $\dim W \geq 2$ by $|M(\varphi)| = \infty$. Therefore this C–Y 3-fold must be in Theorem 2.4 and in fact, we can conclude that φ fits in the case (ii) of 2.4 and also know that the set $\{i \in I_{(S \times E)/G} \mid E_i \cap \text{Sing}(S \times E)/G = \emptyset\}$ is infinite (see [12] for the precise argument). Note that every primitive birational contraction on $S \times E$ is the form as $f \times id_E$, where f is a contraction of a single smooth rational curve on S . Thus we have the conditions (a) and (b). \square

(ii) See [12]. \square

Remark 2.7. Assume that Theorem 2.5(i) holds. Then we know that $I_{X, c_2=0}$ is infinite (see [12]). Namely 2.5(i) is a characterization of C–Y 3-folds X with $|I_{X, c_2=0}| = \infty$.

Corollary 2.8. The set $I_{c_2=0}$ is finite up to $\text{Aut } X$.

Proof. We may assume that $I_{c_2=0}$ is infinite. Now X is birational to $(S \times E)/G$ via $\nu \circ \Phi$ as in Theorem 2.5. Consider the minimal resolution $S' \rightarrow S$. We may assume that Y is obtained as a crepant resolution $\nu' : Y \rightarrow (S' \times E)/G$, that is, ν factors through ν' . The existence of ν' is guaranteed by [11]. By 2.5(ii), for general $i \in I_{c_2=0}$, E_i is contained in the isomorphic locus of $\nu' \circ \Phi$ and E_i is isomorphic to the image on $(S' \times E)/G$ of $l \times E$ for some smooth rational curve l on S' . On the other hand, the set $I_{(S' \times E)/G}$ is finite up to $\text{Aut}(S' \times E)/G$ by

Theorem (2.23) in [10] (note that the proof of Theorem (2.23) in [10] works even if G does not act on $S' \times E$ freely). Therefore the set $I_{c_2=0}$ is finite up to $\text{Bir } X$. By the proof of Lemma (1.15) in [1], the set $I_{c_2=0}$ is finite up to $\text{Aut } X$. \square

3 Construction of C–Y 3-folds with infinitely many birational contractions

The aim of this section is to give construction of C–Y 3-folds with infinitely many birational contractions of type I or III from certain log Enriques surfaces. First of all, given a log Enriques surface W with $I(W) \in \{2, 3, 4, 6\}$, we construct a C–Y 3-fold X with a c_2 -contraction $\varphi : X \rightarrow W$. Let $q : S \rightarrow W$ be the global canonical cover and denote by $G = \langle a \rangle (\cong \mathbb{Z}/I(W)\mathbb{Z})$ the Galois group of q . The S may be an abelian surface in general but here we assume that S is a normal K3 surface (this assumption is satisfied, for example, if W contains a *contractible* smooth rational curve. Here a curve m on W is said *contractible* if it is contracted by a birational contraction and this is equivalent to $m^2 < 0$). Let E be an elliptic curve such that E has an automorphism of order $I(W)$ which fixes the origin. Suppose that the generator a of G satisfies that $a^*\omega_S = \zeta_{I(W)}\omega_S$. Then define the action of $a!$ on E as $a(x) = \zeta_{I(W)}^{-1}x$ for $x \in E$. Then G gives a Gorenstein action on $S \times E$. Take the minimal resolution $S' \rightarrow S$, then G acts on S' and we know that $(S' \times E)/G$ is a C–Y model. By [11] there exists a crepant resolution $\nu' : X \rightarrow (S' \times E)/G$. Of course this X is a C–Y 3-fold and $\varphi : X \rightarrow (S' \times E)/G \rightarrow (S \times E)/G \rightarrow S/G = W$ is an elliptic c_2 -contraction.

For a log Enriques surface W , let us denote by Σ_W the locus of klt points on W which are neither RDP's nor smooth points.

Proposition 3.1. *Let $\varphi : X \xrightarrow{\nu'} (S' \times E)/G \xrightarrow{\mu} S/G = W$ be as is constructed from W above. Suppose that there exists a contractible smooth rational curve m on W .*

- (i) *Assume that $m \cap \Sigma_W = \emptyset$. Then there exists a contraction of type III on X contracting a prime divisor D_0 such that $\varphi(D_0) = m$.*
- (ii) *Assume that $m \cap \Sigma_W \neq \emptyset$. Then there exists a contraction of type I on X contracting an irreducible curve m_0 such that $\varphi(m_0) = m$.*

Proof. See [12]. \square

Consider a log Enriques surface W with $I(W) \in \{2, 3, 4, 6\}$ such that W contains infinitely many contractible smooth rational curves. Then by Proposition 3.1, we can construct a C–Y 3-fold X with infinitely many birational contractions of type I or type III.

Example 3.2. (i) See the nice survey, [5], by S. Kondō and its references for the details of the following. Due to E. Horikawa we know that the moduli space \mathcal{M} of Enriques surfaces is 10-dimensional. The moduli space \mathcal{N} of Enriques surfaces which contains at least one smooth rational curve is an

irreducible subvariety of codimension 1 in \mathcal{M} . Enriques surfaces whose automorphism group is finite are classified by S. Kondō and the moduli of them consists of seven families $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^7$ and each family is at most 1-dimensional. On the other hand for Enriques surfaces W , $\text{Aut } W$ is finite if and only if W contains at least one but at most finitely many smooth rational curves. Consequently there exists the 9-dimensional moduli space, $\mathcal{N} \setminus \bigcup_{i=1}^7 \mathcal{F}_i$, whose elements are Enriques surfaces which contain infinitely many smooth rational curves.

- (ii) Let E_1, E_2 be elliptic curves which are not mutually isogenous and S' the Kummer surface associated to the abelian surface $E_1 \times E_2$. Consider the involution a on S' induced by the involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ on $E_1 \times E_2$. Let $\{F_i\}_{i=1}^4$, (resp. $\{F'_i\}_{i=1}^4$) be smooth rational curves on $S_1 \times S_2/(-1)$, the images of $\{x\} \times E_2$ (resp. $E_1 \times \{y\}$), where $x \in E_1$ (resp. $y \in E_2$) is a point of order 2. Then the fixed locus S'^a consists of the eight, disjoint smooth rational curves $f_*^{-1}F_i, f_*^{-1}F'_i$, where f is the minimal resolution of $S_1 \times S_2/(-1)$. Because the every generator of the Picard group of S' is fixed by the involution a , every smooth rational curves l' is also fixed, that is, $a \cdot l' = l'$. Contract the eight smooth rational curves $f_*^{-1}F_i, f_*^{-1}F'_i$ on S' and we get a normal K3 surface S with eight A_1 -singularities. The group action of $\langle a \rangle$ on S' descends to the group action on S and let us use the same letter $\langle a \rangle$ for this action. Then we obtain a log Enriques surface $W := S/\langle a \rangle$ which contains infinitely many contractible smooth rational curves $\{m\}$ such that $m \cap \Sigma_W \neq \emptyset$. Here we use the fact that every Kummer surface has the infinite automorphism group and so in particular, it contains infinitely many smooth rational curves.

If there exists a *rational* log Enriques surface W which contains infinitely many smooth rational curves $\{m\}$ such that $m \cap \Sigma_W = \emptyset$, the following problem is affirmative.

Problem 3.3. Does there exist a smooth rational surface containing infinitely many -2 curves?

The following statement motivates us to study Proposition 3.1.

Proposition 3.4. *Suppose the conditions in Theorem 2.5(i) hold. Then the log Enriques surface $W \cong S/G$ contains infinitely many contractible smooth rational curves $\{m\}$ such that $m = \varphi(E_i)$ and $m \cap \Sigma_W = \emptyset$.*

Proof. See [12]. □

In summary, for a given C-Y 3-fold X with $|I_{c_2=0}| = \infty$ there exists an elliptic c_2 -contraction $\varphi : X \rightarrow W$. Here W is a log Enriques surface with $I(W) \in \{2, 3, 4, 6\}$ which contains infinitely many contractible smooth rational curves $\{m\}$ such that $m \cap \Sigma_W = \emptyset$ and $m = \varphi(E_i)$ for some $i \in I_{c_2=0}$. Conversely, for a given log Enriques surface W with $I(W) \in \{2, 3, 4, 6\}$ which contains infinitely many contractible smooth rational curves $\{m\}$ such that $m \cap \Sigma_W = \emptyset$, there

exists a C-Y 3-fold X with $|I_{c_2=0}| = \infty$ which admits an elliptic c_2 -contraction $\varphi : X \rightarrow W$.

The author does not know any example of C-Y 3-folds with $|I_{c_2>0}| = \infty$, where $I_{c_2>0} := \{i \in I_X \mid E_i \cdot c_2 > 0\}$.

References

- [1] Y. Kawamata, On the cone of divisors of Calabi–Yau fiber spaces, *Int. J. Math.* 8, (1997), 665-687.
- [2] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, Introduction to the minimal model problem, *Adv. Stud. Pure Math.* 10, *Alg. Geom. Sendai 1985* (T.Oda, ed.), Kinokuniya, Tokyo (1987), 283-360.
- [3] S. Keel, K. Matsuki, J. McKernan, Log abundance theorem for threefolds, *Duke Math. J.* 75, (1994), 99-119.
- [4] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math, vol. 134 (1998).
- [5] S. Kondō, Quadratic forms and $K3$ surfaces, Enriques surfaces, *Sugaku Expositions* 6 (1993), no. 1, 53-72.
- [6] Y. Miyaoka, On the Kodaira dimension of minimal threefolds, *Math. Ann.* 281, (1988), 325-332.
- [7] D. Morrison, Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry, *Astérisque* 218, Soc. Math. France, Paris (1993), 243-271.
- [8] V. V. Nikulin, The diagram method for 3-folds and its application to the Kähler cone and Picard number of Calabi–Yau 3-folds. I, Higher-dimensional complex varieties (*Proc. of Int. Conf. Trento, 1994*), (1996), 261-328.
- [9] K. Oguiso, On algebraic fiber space structures on a Calabi–Yau 3-fold, *Int. J. Math.* 4, (1993), 439-465.
- [10] K. Oguiso, J. Sakurai, Calabi–Yau threefolds of quotient type, *Asian J. Math.* 5, (2001).
- [11] S. Roan, Minimal resolution of Gorenstein Orbifolds in dimension three, *Topology* 5, (1996), 489-508.
- [12] H. Uehara, Calabi–Yau threefolds with infinitely many divisorial contractions, (preprint).
- [13] P. M. H. Wilson, The role of c_2 in Calabi–Yau classification - a preliminary survey; In *Mirror Symmetry II*, AMS/IP 1 (1997), 381-392.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO,
KOMABA, MEGURO, TOKYO 153-8914, JAPAN
hokuto@ms.u-tokyo.ac.jp

String 理論における K-theory と非可換幾何

京都大学基礎物理学研究所 浅川 嗣彦¹

1 Introduction

String 理論は、量子重力を含む無矛盾な理論の最も有力な候補として以前から盛んに研究されている。しかし、理論自身は摂動論的にしか定義されておらず、未だその全貌を知るには至っていない。その一つの大きな原因は string 理論の内包している幾何、特に時空構造に関係する幾何がどんなものかが分かっていないことにあると思われる。古典重力を記述する一般相対論の場合には Riemann 幾何に対応していた。同様に string 理論の背景にある幾何がわかれば、それをヒントにして理論を定式化することができると思われる。単純に考えると、string 理論には closed string が存在しその massless mode として重力を含むものであるから、string という非局所性を取り入れたような時空の幾何に対応しているはずである。しかし、現状ではその答えは見つかっていない。

ところがここ数年来、D-brane の発見により string 理論の非摂動的な理解は急速に深まってきた。特に、D-brane の持つ、理論の強結合領域でも安定であるという BPS 性により、string 理論の間の duality が調べられてきた。その結果、string 理論はある特定の領域では string を基本にする理論であるが、別の領域では D-brane が基本的な対象にも成り得るということがわかってきた。このことから、string 理論を D-brane から非摂動的に定式化しようとするのは自然な流れであろう。現在行われているいくつかの研究もこの方向性に沿っているといえる。それは大きく 2 つに分けられる。その一つは string field theory である [2]。これは時空を埋める 10 次元の D-brane 上に励起する open string を考え、粒子が第二量子化された場の理論になるのと同様、open string を場の理論として定式化する試みである。もう一つは matrix model と呼ばれる理論で、無限個の 0 次元あるいは 1 次元の D-brane を基本的な対象とみなす理論である [3, 4]。この場合そもそも多体系であるから、場の理論とは違う形の第二量子化と考えられる。

従ってここで問題にするのは、D-brane の理論の内包する幾何はどんなものか? という問である。D-brane の力学はそこに附着する open string の力学であるから、それは open string の幾何と言っても良い。しかしそれを理解するのも簡単ではない。そこで、本稿ではもう少し問題を絞って、「最大次元 (または最低次元) の D-brane 系から、全ての低次元 (高次元) の D-brane をその理論の枠内で構成する」ということを考える。より具体的には、「いかに低次元 (高次元) の D-brane を構成するか?」ということと、「その D-brane をどのように分類するか?」という問に対しての現在での理解について説明したい。これには open string の最低次の mode の幾何が関係しているため、上の 2 つの方向性をサポートするためにも最低限理解しておくことが必要と思われる。しかしそれだけではなく、このこと自体をヒントに新たな定式化の方向性を探るといった目的もある。

本稿の話の流れは以下の通りである。§2 ではまず、これから扱う対象である D-brane の性質や有効理論での記述を紹介する。次いで non-BPS D-brane 系と呼ばれる BPS ではない D-brane 系を導入し、最大次元の non-BPS D-brane 系からの低次元の D-brane の構成を行う。これらは理論に含まれるタキオン場の凝縮 (tachyon condensation) によって安定化するときのソリトン解として作られる。§3 ではその D-brane が topological K-theory で分類されることを見る。§4 では背景に B-field がある場合の D-brane を考える。このときの D-brane 上の理論は非可換ゲージ理論で記述され、非可換 D-brane と呼ばれるものになる。§5 では、非可換ゲージ理論のソリトンに関する知識を用いて最大次元の非可換 D-brane からの同様の構成を行う。それらは C^* 代数の (algebraic) K-theory により分類されると考えられる。以上をまとめる

¹ asakawa@yukawa.kyoto-u.ac.jp

と大体以下のような表になる。

高 → 低	作り方	分類
可換 D-brane	ソリトン解	topological K -theory
非可換 D-brane	非可換ソリトン	algebraic K -theory

(1.1)

その後は、上とは逆に、最低次元の系から全ての高次元の D-brane を構成する話に移る。まず非可換 D-brane が、無限個の最低次元の D-brane 系における非可換平面解としても記述されることを §6 で見る。ここで無限個というのが作用素環に置き換わるところが重要である。そしてこの観点を応用し、§7 では無限個の最低次元の non-BPS D-brane 系から全ての D-brane が構成できること、またその分類が可能であることを示す。これらを上と同じ表で表すと、

低 → 高	作り方	分類
(非) 可換 D-brane	spectral triple	analytic K -homology

(1.2)

となる。即ち、低次元の系からの構成では作用素環だけでなく、非可換微分幾何や K -homology が登場する。最後に両者の構成を KK -theory を用いて統一的に理解できることを見る。

なお、上の表 (1.2) は我々の得た最近の結果である [1]。従って §7 だけは review ではないことを予めお断りしておく。本稿は参考文献は全く網羅していない。また内容が多岐に渡るため、全体的に説明不足の感があるので、各章冒頭に挙げる代表的な review 文献も参考にして頂きたい。

2 D-brane と non-BPS system

この章ではまず D-brane についての基本的知識を整理し、次いで non-BPS D-brane 系を導入する。これらが以下の考察の主な対象である。そしてこれらの間にタキオン凝縮を通して成り立つ関係 (descent relations) について見る。なお、string 理論と D-brane については [5] が、non-BPS D-brane 系については [6] が基本的な文献である。

さて、本稿で考える string 理論は最も簡単な構造の Type II string 理論に限る。これは closed superstring の理論である。摂動的には 2 次元 Riemann 面から 10 次元時空 X への写像を場とする σ -model で記述される。時空には $N = 2$ の超対称性 (32 個の生成子で生成される) があるが、その chirality により、Type IIA と Type IIB の 2 種類の理論がある。以下で必要なのは closed string の bosonic massless mode の種類くらいである。時空 X 上に以下の massless 場が存在する。

$$\begin{cases} \text{NSNS sector : } \phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} \\ \text{RR sector : } C^{(p+1)} \end{cases} \quad (2.1)$$

NSNS sector の場はそれぞれスカラー場 (dilaton)、2 階対称テンソル (graviton)、2 階反対称テンソル (B-field) で、特に graviton と dilaton が重力を表す場である。RR sector の場は時空の $(p+1)$ -form で、RR-field あるいは RR-form と呼ばれる。但し、許される p は Type IIA では even、Type IIB では odd に限られる。また、B-field と RR-form はゲージ場 (の高次版) である。例えば B-field は 2-form であるが、1-form のゲージパラメーター Λ により $B \mapsto B + d\Lambda$ というゲージ変換性を持つ。低エネルギーでは Type II string 理論は、これら massless 場から成る超重力理論 (SUGRA) で記述される。以下ではこれらの場を背景として、その中で D-brane を考えてゆく。後で分かるが、D-brane を通して見れば、B-field は非可換幾何と関係があり、RR-form は K -theory と関係がある。また以下では時空の計量が Euclid か Minkowski かの違いはあまり気にせず、string scale α' は特に必要なとき以外は $2\pi\alpha' = 1$ とおく。

2.1 BPS D-branes

D-brane は「open strings の端が付着することができる時空 X 中の超対称な超曲面 M 」として定義される広がった object である。 M が $p+1$ 次元のときには Dp -brane と呼ばれる。ここで時間 1 次元と空間 p 次元とを合わせて $p+1$ 次元である。例えば $D0$ -brane は時空中の粒子の軌跡を、 $D(-1)$ -brane は時空を占める一点をそれぞれ表す。以下 D-brane のいろいろな特徴を羅列してみる。

- RR-charged object (closed string の source)

closed string から見ると、 Dp -brane は厳密には closed string の 2 次元 worldsheet の境界状態として定義される。あるいは低エネルギーの SUGRA では、時空の領域 M に広がったソリトン解として記述される。これは D-brane が closed string の吸収、放出を行うことを意味する。特に massless 場の重力、RR-form と結合する。その結合の大きさをそれぞれ tension(体積あたりの mass) T_p と RR-charge μ_p で表す。D-brane が charge を持つと普通言うのは、 μ_p を単位として測られる RR-charge のことであり、一枚の Dp -brane は最小結合 $\mu_p \int_M C^{(p+1)}$ により対応するゲージ場 $C^{(p+1)}$ の source になっている。従って許される Dp -brane は p が

$$\begin{cases} \text{IIA} : & p = 0, 2, 4, 6, 8 \\ \text{IIB} : & p = -1, 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases} \quad (2.2)$$

のときである。また M は向き付けを持ち、逆向きは逆の単位 RR-charge を持つので、これを anti- Dp -brane あるいは \overline{Dp} -brane と呼ぶ。

- BPS object

BPS 性とは一般に mass と charge の間にある関係が付いて、超対称性を保つ状態をいう。 Dp -brane は $T_p = \mu_p$ を満たし、時空の超対称性の半分を保つ BPS 状態である。平行に置いた 2 枚の Dp -branes の間には closed string の放出、吸収により力が働くが、BPS 性により重力と RR-form による斥力が釣り合って相殺する。従って、平行な Dp -brane の間には束縛エネルギーが生じず、何枚重ねたものも BPS である。なお、以下では BPS ではない D-brane が出てくるので、特にそれと区別したいときは BPS D-brane という言い方をする。

- dynamical object

境界のある worldsheet は open string の worldsheet とも解釈されるので、D-brane に open string の端が付着した状態とみなせる。この open string の massless mode は、D-brane の低エネルギーでの運動を記述する自由度と解釈される。これにより D-brane は dynamical に運動したり形を変えたりする object になり、その力学は低エネルギーでは M 上の massless 場の理論で記述される。実際、時空 $X = \mathbb{R}^{10}$ 中の Dp -brane $M = \mathbb{R}^{p+1}$ の場合、両方の端が M に乗った open string から生じる M 上の bosonic な massless 場は、座標 $x \in M$ の関数として

$$\begin{cases} A_\mu(x) & (\mu = 0, 1, \dots, p) : & U(1) \text{ gauge field} \\ \phi^i(x) & (i = p+1, \dots, 9) : & \text{transverse scalar} \end{cases} \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで μ は M に平行な方向、 i は垂直な方向を表す。つまり、 Dp -brane には $U(1)$ ゲージ理論が乗っていて $A = A_\mu dx^\mu$ がそのゲージ場である。またスカラー場 ϕ^i は Dp -brane と垂直な i 方向への位置の変化を表す。従って Dp -brane の状態は単に worldvolume M だけで指定されるのではなく、その上の力学的な情報も含んでいる。 M が曲がった空間の場合にも適用できるようにまとめると、時空 X 中の Dp -brane は

$$\begin{cases} M : & p+1 \text{ dim. worldvolume} \\ \mathcal{L} \rightarrow M : & \text{line bundle over } M \\ \phi : M \hookrightarrow X : & \text{embedding} \end{cases} \quad (2.4)$$

という組で記述されると言える。ここで \mathcal{L} の connection が $U(1)$ ゲージ場である。

- gauge symmetry enhancement

D-brane が N 枚平行に重なった系を N D-brane と記す。この系の力学変数も同様に、open string の massless mode に由来する。この場合、open string の端点がどの D-brane に端を持つかを区別するために、各 D-brane にラベル $\{1, \dots, N\}$ を付け、 N 次元複素ベクトル空間 \mathbb{C}^N を Chan-Paton 空間と呼ぶ。open string は向き付けを持つので N^2 の自由度があるが、これを Chan-Paton 空間に作用する自己準同型 $\text{End}\mathbb{C}^N = M_N(\mathbb{C})$ と考え、Chan-Paton 因子と呼ぶ。従って open string の各状態は、mode 展開に加え Chan-Paton 因子で指定されることになる。さて、両方の端が同じ D-brane に乗っている状態からは上と同じく $U(1)$ のゲージ場が出るが、異なる D-brane をつなぐ open string から massless 場が出るので、ゲージ群は単純に予想される $U(1)^{\otimes N}$ ではなく、 $U(N)$ に拡大していることがわかる。従って N Dp-brane 上の場は

$$\begin{cases} A_\mu(x) & (\mu = 0, 1, \dots, p) : & U(N) \text{ gauge field} \\ \phi^i(x) & (i = p+1, \dots, 9) : & \text{transverse scalar} \end{cases} \quad (2.5)$$

で与えられる。垂直な方向のスカラー場も $U(N)$ の adjoint 表現に拡大しているため、単純に Dp-brane 位置を表すわけではなくなる。 $\phi^i(x)$ のうち、 $N \times N$ 行列の対角成分の N 個のスカラー関数が N 枚の Dp-brane の i 方向の位置を表す。一方、各非対角成分は 2 枚の Dp-brane の位置の差に比例した mass を持ち、全ての位置が一致するとき以外は、 $U(N)$ を最大 $U(1)^N$ に破る効果を持つ。従って、全ての i, j に対し $[\phi^i, \phi^j] = 0$ の場合には全ての方向が対角化され N 枚が重なった位置として解釈できるが、 $[\phi^i, \phi^j] \neq 0$ の場合は非可換 (non-Abel 的) な座標とみなすしかない。但し重心座標 $\frac{1}{N} \text{Tr} \phi^i$ は常に取り出せるので、しばらくは $[\phi^i, \phi^j] \neq 0$ の効果は忘れ、以下で時空 X 中の N Dp-brane を特徴付ける。

$$\begin{cases} M : & p+1 \text{ dim. worldvolume} \\ E \rightarrow M : & \text{Chan-Paton bundle over } M \\ \phi : M \hookrightarrow X : & \text{embedding} \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで Chan-Paton bundle とは、その fiber が Chan-Paton 空間 \mathbb{C}^N で構造群が $U(N)$ の複素ベクトルバンドルを意味する。

以上のことを踏まえて、 N Dp-brane を記述する場の理論を以下で与える。これは場 A, ϕ を力学変数とする M 上の場の理論で、その作用汎関数は

$$S[A, \phi] = S_{BI} + S_{CS} \quad (2.7)$$

という 2 項からなる。 S_{BI} は $N = 1$ の場合は Dirac-Born-Infeld 作用と呼ばれる

$$S_{BI} = T_p \int_M d^{p+1}x \sqrt{\det(\tilde{g} + 2\pi\alpha'(\tilde{B} + F))_{\mu\nu}} \quad (2.8)$$

という汎関数である。ここで $T_p = \frac{2\pi}{g_s(2\pi\alpha')^{p+1}}$ は Dp-brane の tension で、 $\tilde{g} = \phi^*g$ 、 $\tilde{B} = \phi^*B$ は時空 X 上の背景場 g 、 B の worldvolume M への pull-back を意味する。よってこれは $U(1)$ 曲率 $F = dA$ と pull-back ϕ を力学変数とし、背景の NSNS sector の場との結合を記述している¹。特に、B-field と曲率が $\tilde{B} + F$ の組み合わせで現れることに注意する。これは、D-brane の存在下では B-field のゲージ変換が

$$B \mapsto B + d\Lambda, \quad A \mapsto A - \tilde{\Lambda} \quad (2.9)$$

¹ dilaton は定数に固定して string coupling g_s に含めている。

と、ゲージ場の変換を含めて成り立つことを反映している。これを Λ 対称性と呼ぶ。なお、この作用汎関数では曲率 F の微分項は無視している。 N 枚の場合は厳密には確立されていないが、(2.8) の適当な $U(N)$ への拡張で正しいとされている²。しかし、どのような拡張であったとしても、string scale が $\alpha' \rightarrow 0$ の極限では次の $U(N)$ Yang-Mills 理論に帰着すべきだと予想されている。

$$S_{YM} = \frac{1}{4g_{YM}} \int_M d^{p+1}x \sqrt{g} \text{Tr} (-F_{\mu\nu}^2 + 2(D_\mu \phi^i)^2 + ([\phi^i, \phi^j])^2) \quad (2.10)$$

一方、 S_{CS} は Chern-Simons term あるいは Wess-Zumino term と呼ばれる項で、力学には効かない topological な情報を記述している。

$$S_{CS} = T_p \int_M \tilde{C} \wedge \text{ch}(E) \sqrt{\frac{\widehat{A}(TM)}{\widehat{A}(N(M, X))}} \quad (2.11)$$

ここで $C := \sum_q C^{(q+1)}$ は RR-form の形式和で (q は IIA では even、IIB では odd を最大 p まで走る)、 $\tilde{C} := \phi^* (C \wedge e^{2\pi\alpha' iB})$ はそれと B-field との組み合わせを pull-back したものである。ch(E) := $\text{Tr} e^{2\pi\alpha' iF}$ は Chan-Paton bundle E の Chern character である。残りの項は TM や埋め込みに関する normal bundle $N(M, X)$ が非自明なときの補正項である³。

ここから読み取れる「brane within brane」という現象は以下で特に重要である。ゲージ場の topology に依らず、この項は必ず Dp -brane と RR-form $C^{(p+1)}$ との最小結合を含んでいるが、これは Dp -brane が RR-charge (Dp -brane charge) を持つことを意味していた。ところが、ゲージ場が $\text{ch}(E) \neq 1$ なる非自明な配位をとったときには、それだけではなく、 $q < p$ なる RR-form $C^{(q+1)}$ とも結合する。つまり、低い次元の Dq -brane charge も同時に持つ。これは Dp -brane に Dq -brane が含まれている、言い換えると bound state になっていることを意味する。例えば、4次元 Yang-Mills 理論を $D3$ -brane 上の理論と考えると、その非自明な instanton 配位は $D3$ - $D(-1)$ bound state と解釈される。

2.2 Dp - \overline{Dp} system

上述のように、 Dp -brane は何枚でも力が働くことなく自由に重ねることができ、その全体は BPS 性を保っていた。ここでは、 Dp -brane と \overline{Dp} -brane 1枚ずつを平行に置いた系を考える。これを Dp - \overline{Dp} 系と呼ぶ。どちらも closed string の source であるから両者の間には力が働くが、この場合 RR-charge が互いに逆符号であるため RR-form の交換による力は引力になる。従ってこの系は不安定で、最後にはつぶれてしまうと考えられる。また超対称性を破っているため BPS でもない。この不安定性は open string から見ると brane の力学として記述することができる。

この系の Chan-Paton 因子は open string のどちらの端がどちらの brane に乗るかによって以下の4種類がある。

$$\begin{pmatrix} p-p & p-\bar{p} \\ \bar{p}-p & \bar{p}-\bar{p} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

ここで例えば $p-p$ とは両方の端が Dp -brane にある open string を表す。つまり Chan-Paton 空間が \mathbb{C}^2 で、Chan-Paton 因子は $M_2(\mathbb{C})$ である。これは単位行列と Pauli 行列 $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ で生成される。但し、2枚の Dp -brane の場合とは以下の違いがある。 $p-p$ と $\bar{p}-\bar{p}$ には、worldsheet のフェルミオン数 F に対し even な状態 $(-1)^F = 1$ を選ぶという GSO projection が課されているのに対し、 $p-\bar{p}$ と $\bar{p}-p$ には

² F を $U(N)$ の Chan-Paton bundle の曲率として、対称化した trace を挿入した non-Abelian Dirac-Born-Infeld にするなど。更に重心以外の $[\phi^i, \phi^j]$ の項を含める。

³ 以下しばしば省略する。

通常とは逆の GSO projection $(-1)^F = -1$ を課す必要がある⁴。このことは、Chan-Paton 空間が super ベクトル空間で、Chan-Paton 因子 $M_2(\mathbb{C})$ が grading 作用素

$$(-1)^F = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

により \mathbb{Z}_2 -grading を持つ、と表現できる。生成元で言うと $\{I, \sigma_3\}$ が even、 $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ が odd である。

さて、これらの open string の mode を調べると、even な状態 $p-p$ と $\bar{p}-\bar{p}$ には通常の GSO projection を課すので、それぞれ Dp -brane と \overline{Dp} -brane 上のゲージ場とスカラー場が massless 場として出てくる。一方、odd な状態 $p-\bar{p}$ と $\bar{p}-p$ には逆の GSO projection を課すので、massless mode ではなく、タキオンと呼ばれる負の $(\text{mass})^2$ を持つスカラー場が残る。従って $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 上の場は

$$\begin{cases} p-p \text{ sector:} & A_\mu^+, \phi^{+i} \\ \bar{p}-\bar{p} \text{ sector:} & A_\mu^-, \phi^{-i} \\ p-\bar{p} \text{ sector:} & T \end{cases} \quad (2.14)$$

で与えられる。ここで open string は向き付けがあるため、タキオン T は複素スカラー場で、 $\bar{p}-p$ sector の場はその複素共役 \bar{T} である。具体的な作用汎関数は §3.1 で与える。

このタキオンの存在が、系の不安定性を表している。後で具体的に与えるが、一般にタキオンのポテンシャル $V(T)$ は $|T|$ の関数で、wine bottle 型をしている。 $T=0$ で上に凸であることが負の $(\text{mass})^2$ を意味していて、ポテンシャルの底は複素場ゆえ $|T| = \sqrt[3]{T_0}$ なる円周上にある。従ってこの系は $T=0$ では不安定であるが、タキオンが $|T| = T_0$ に値をとるときに安定化する。これをタキオン凝縮と呼ぶ。では安定化した先はどんな状態か？ということが問題になるが、物理的には Sen による次の予想がある。「 $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系はタキオン凝縮により消滅して真空になる。」ここでいう真空とは D-brane が存在しない closed string の基底状態、つまり RR-charge もエネルギーも 0 の状態である。元々系の RR-charge は $1 + (-1) = 0$ であるから、この予想は、元々のエネルギーである 2 枚分の tension と、タキオンが $T=0$ から $|T| = T_0$ へ値を変えるときポテンシャルエネルギーの落ち込みが相殺して、 $2T_p = V(0) - V(T_0)$ を満たすことを意味する。この予想は今や様々な計算によって確かめられている。

より一般には Dp -brane が N 枚、 \overline{Dp} -brane が M 枚重なった系が考えられる。この場合には、(2.14) のそれぞれのゲージ場は $U(N)$ 、 $U(M)$ で、スカラー場はそれぞれ $U(N)$ 、 $U(M)$ の adjoint 表現、タキオンはこれらの双基本表現 (N, \overline{M}) に属する。

2.3 non-BPS Dp -brane

もう一種類の不安定な系として non-BPS Dp -brane がある。これは Type IIA (IIB) の場合、「Type IIB (IIA) の $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系を $(-1)^{F_L}$ で割ったもの」として定義される。ここで正確には F_L は closed string の left moving sector の時空のフェルミオン数を表すが、用いるのは次の性質だけである。 $(-1)^{F_L}$ による orbifold を closed string でとると、IIA 理論と IIB 理論が入れ替わる。また brane に関しては、 $(-1)^{F_L}$ の作用は Dp -brane と \overline{Dp} -brane を入れ替える。つまり Chan-Paton 空間への作用は $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の成分の入れ替え

$$(-1)^{F_L} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

であるから、Chan-Paton 因子 $M_2(\mathbb{C})$ のうち $(-1)^{F_L}$ even な状態は $\{I, \sigma_1\}$ で生成される部分である。従って、IIA の $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系から出発すると、理論は IIB になり、系は $Dp\text{-}\overline{Dp}$ のうち $(-1)^{F_L}$ 不変な状態 $\{I, \sigma_1\}$

⁴ 元々理論を定義する際に closed string に GSO projection が課されているが、2 枚の brane をつなぐ closed string を open string と読み替えるときに、 $p-p$ と $p-\bar{p}$ とでは逆の GSO になる。

に制限される。Dp-brane と \overline{Dp} -brane を引き離す自由度の $\{\sigma_3\}$ が落ちるので、この系はもはや 2 枚ではなく 1 枚の系であることに注意する。

定義からすぐわかるように、許される non-BPS Dp-brane は BPS の場合 (2.2) と逆である。

$$\begin{cases} \text{IIA} : & p = -1, 1, 3, 5, 7, 9 \\ \text{IIB} : & p = 0, 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (2.16)$$

時空にはこれに結合する RR-form が無いので、non-BPS Dp-brane は RR-charge を持たない。従ってこの系は保存電荷を持たないため不安定である。実際、この不安定性は non-BPS Dp-brane 上の場にタキオンが含まれることで表されている。先程と同様に、open string の解析から non-BPS Dp-brane 上の場は

$$\begin{cases} I \text{ sector:} & A_\mu, \phi^i \\ \sigma_3 \text{ sector:} & T \end{cases} \quad (2.17)$$

と得られる。I sector は BPS Dp-brane と同じ種類の場である。 σ_3 sector には負の (mass)² を持つタキオン場があるが、今度は $Dp\text{-}\overline{Dp}$ のときとは違い実スカラー場である。従ってポテンシャル $V(T)$ は一般に double well 型をしている。 $T = \pm T_0$ を底とすると、Sen 予想は $\sqrt{2}T_p = V(0) - V(T_0)$ となる⁵。N 枚が重なった N non-BPS Dp-brane 系も同様に考えられる。そのときはゲージ場は $U(N)$ で、スカラー場とタキオン場はその adjoint 表現に属する。

なお、ここでは時空は $X = \mathbb{R}^{10}$ などを想定しているため、non-BPS Dp-brane は不安定であると言っているが、適当な orbifold $X = \mathbb{R}^{10}/\Gamma$ などを取ると、orbifold projection によりタキオンが落ちる場合が考えられ、non-BPS でも安定になることがあり得る。元々はそのような場合に物理的に興味があるわけだが、ここでは消滅する過程やそのパターンの方に注目する。

最後に、 $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系と non-BPS Dp-brane 系の類似点と相違点についてコメントしておく。類似点は $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系と同じく non-BPS Dp-brane 系の Chan-Paton 因子も \mathbb{Z}_2 -grading を持つことである。 $\{I, \sigma_1\}$ が複素 Clifford 代数 $\mathbf{C}_1 = \mathbb{C} \cdot I \oplus \mathbb{C}\sigma_1$ を生成していることに注意すると、N non-BPS D-brane の Chan-Paton 空間は \mathbf{C}_1 -module の構造を持つと考えられる。実際、 $\mathbb{C}^N \otimes \mathbf{C}_1 = \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N \sigma_1$ から、その自己準同型は $\text{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathbf{C}_1 = M_N(\mathbb{C}) \cdot I \oplus M_N(\mathbb{C})\sigma_1$ となり、確かに non-BPS D-brane の Chan-Paton 因子になる。Clifford 代数には自然に \mathbb{Z}_2 -grading (I 成分を even、 σ_1 成分を odd とする) がある。従って、この場合も Chan-Paton bundle は superbundle である。通常用いられる用語では両者の superbundle の違いは、 $Dp\text{-}\overline{Dp}$ の方は even(graded)、non-BPS Dp-brane の方は odd(non-graded) と区別される。つまり Chan-Paton bundle に関して言うと、BPS D-brane との違いは \mathbb{Z}_2 -grading があるかどうかで、BPS でない 2 つの系は even か odd かの違いだけである。

2.4 descent relations

これまで見てきたいろいろな D-brane 系は、descent relations と呼ばれる以下のような関係で相互に結びついている。

$$\begin{array}{ccccc} & \text{IIB} & & \text{IIA} & & \text{IIB} \\ (p+1) \text{ dim.} & \boxed{\text{IIB } Dp\text{-}\overline{Dp}} & \xrightarrow{(-1)^{F_L}} & \boxed{\text{IIA non-BPS } Dp} & \xrightarrow{(-1)^{F_L}} & \boxed{\text{IIB BPS } Dp} \\ & \downarrow & \swarrow T & \downarrow & \swarrow T & \\ p \text{ dim.} & \boxed{\text{IIB non-BPS } Dp-1} & \xrightarrow{(-1)^{F_L}} & \boxed{\text{IIA BPS } Dp-1} & & \\ & \downarrow & \swarrow T & & & \\ (p-1) \text{ dim.} & \boxed{\text{IIB BPS } Dp-2} & & & & \end{array} \quad (2.18)$$

⁵ 一枚の non-BPS Dp-brane は BPS に比べて $\sqrt{2}$ 倍の tension を持つ。

まず $p+1$ 次元の系同士の横の関係は、 $(-1)^{F_L}$ で割るといふ演算で結びついている。最初の $(-1)^{F_L}$ は non-BPS Dp -brane の定義であり、Chan-Paton 因子 $M_2(\mathbb{C})$ に関して even な生成元 $\{I, \sigma_1\}$ を選ぶものだった。更に (IIA の) $(-1)^{F_L}$ で割ると、生成元は I だけ残り、一枚の BPS Dp -brane が得られることがわかる。斜めの矢印は T-duality を表す。そして、縦の矢印はタキオン凝縮である。不安定な non-BPS D -brane 系は既に見たようにそのままでは真空中に消滅するが、topological な obstruction がある場合には、より次元の低い安定な系にまで崩壊してそこで止まる。ここでは、 $Dp\text{-}\overline{Dp}$ から BPS $D(p-2)$ -brane に崩壊するプロセスとして、vortex 型のソリトン解により次元が 2 下がる場合と、kink 型のソリトン解により次元が 1 下がるプロセスを 2 回繰り返す場合を紹介する。

- $Dp\text{-}\overline{Dp} \rightarrow \text{BPS } D(p-2)$

これはラフに言えば $Dp\text{-}\overline{Dp}$ の消滅と「brane within brane」の組み合わせである。即ち、 $D(p-2)$ charge を持つようなゲージ flux がある状態から $Dp\text{-}\overline{Dp}$ の消滅が起ると、 $D(p-2)$ -brane だけが後に残ることになる。具体的には $D(p-2)$ -brane の余次元 2 の \mathbb{R}^2 を極座標 (r, θ) で表したとき、 \mathbb{R}^2 の無限遠 $r \rightarrow \infty$ で vortex 型の配位

$$T \sim T_0 e^{i\theta}, \quad A_\theta^+ - A_\theta^- \sim 1 \quad (2.19)$$

をとる。タキオンは無限遠で vacuum manifold $\frac{U(1) \times U(1)}{U(1)} \sim U(1)$ を 1 回 wind している $\pi_1(U(1))$ の生成元である。また $\int_{\mathbb{R}^2} F^+ - F^- = 2\pi$ より単位 $D(p-2)$ charge を持つ。これが \mathbb{R}^2 の原点 $r=0$ 以外ではタキオンが真空中に消滅し、原点に $D(p-2)$ -brane の残った配位であることが示せる。

- $Dp\text{-}\overline{Dp} \rightarrow \text{non-BPS } D(p-1) \rightarrow \text{BPS } D(p-2)$

最初のプロセスは、タキオンが余次元 1 の $x \in \mathbb{R}^1$ 上で $T \sim \pm T_0$ at $x \rightarrow \pm\infty$ という kink 型の配位をとるものである。しかし、タキオンは複素で wine bottle 型のポテンシャルを持つので、この配位は安定ではない。実際、この解からの揺らぎには実のタキオンが残っている。従ってこれは non-BPS $D(p-1)$ -brane と解釈される。次のプロセスも kink 型の配位であるが、今度は実タキオンは double well 型のポテンシャルなので安定なソリトン解であり、 $\pi_0(\{\pm T_0\}) = \mathbb{Z}_2$ を生成する。

以上の議論から分かるのは、任意の次元の D -brane は 1 次元あるいは 2 次元高い不安定な non-BPS 系からタキオン凝縮により作られる、ということである。更に高い余次元の場合も、元の系の枚数を増やしておいて上の構成を繰り返せば同様な構成が可能である。例えば、2 枚ずつの $D(p+2)\text{-}\overline{D(p+2)}$ から出発して、そのうち 1 ペアから vortex により Dp を、もう 1 ペアから anti-vortex により \overline{Dp} を一枚ずつ作って $Dp\text{-}\overline{Dp}$ とし、その系で再び vortex を考えると $D(p-2)$ が作れる。従って、十分多い枚数の最大次元の不安定な系

$$\begin{cases} \text{IIA:} & \text{non-BPS } D9 \text{ 系} \\ \text{IIB:} & D9\text{-}\overline{D9} \text{ 系} \end{cases} \quad (2.20)$$

から出発すれば全ての次元の D -brane が作られることになる。これは元々 closed string 理論のソリトン解であった D -brane が、10 次元の worldvolume 上の場の理論のソリトン解としても記述できる、という全く新しい観点を与えている⁶。場の理論のソリトンの charge は一般に homotopy 群 $\pi_n(G/H)$ で分類されるため、この観点からの D -brane charge の topological な分類が可能であることが予想される。このことを次章で見る。

⁶ 更に言うと open string 理論のソリトンともいえる。

3 D-brane と K-theory

D-brane は元々 closed string 理論のソリトンで、RR-form との最小結合を通じて RR-charge を持っていた。よって時空に存在しうる D-brane は RR-ゲージ場の振る舞いで決定される。これは D-brane の RR-charge が cohomology で測られることを示している。しかし、D-brane がゲージ場を伴う object であることを考慮すると、RR-form との結合は Chern-Simons term で表されるため、RR-charge は cohomology ではなくその一般化である K -theory で測られることが示唆される。このことは open string で見るとはつきりする。即ち、D-brane が場の理論のソリトンであるという観点から、D-brane が K -theory で分類されることを本章では説明する。なお、この章に関する参考文献は [7] である。

3.1 Type IIB と $K(X)$

Type IIB 理論における任意の D-brane は、 $D9-\overline{D9}$ 系から構成される。まずこの系について整理しておく。 N $D9-\overline{D9}$ 系の力学的な情報は以下の組で与えられる¹。

$$\begin{cases} X : 10 \text{ dim. worldvolume} = \text{spacetime} \\ E = E^+ \oplus E^- : \text{Chan-Paton bundle over } X \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで 10 次元の worldvolume M は時空を埋め尽くしているため X と同一視する。また Chan-Paton bundle は fiber $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$ が \mathbb{Z}_2 -grading を持つ (even) superbundle で、その構造群は $U(N) \times U(N)$ である。もちろん E^+ が $D9$ 、 E^- が $\overline{D9}$ の Chan-Paton bundle である。これに対応して $D9-\overline{D9}$ 上の場は (even) superconnection

$$i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} iA^+ & \bar{T} \\ T & iA^- \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

としてまとめることができる。これは次のように定式化される [8]。一般に superbundle E の自己準同型 $\text{End}E$ は \mathbb{Z}_2 -grading を持つため、 $\text{End}E$ 値の微分形式 $\Omega(X, \text{End}E)$ には自然な $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ -grading がある。そのうち全 \mathbb{Z}_2 のみを考えると、 E の通常の connection は 1-form ゆえ odd な元に属するが、それに加えて odd な自己準同型値の 0-form も odd な元に属する。通常の connection にこれを含めて拡張したものを superconnection という。今の場合 even superbundle $E = E^+ \oplus E^-$ であるから、

$$\text{End}(E) = \begin{pmatrix} \text{End}E^+ & \text{Hom}(E^-, E^+) \\ \text{Hom}(E^+, E^-) & \text{End}E^- \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

のうち対角成分が even、非対角成分が odd である。従って E^\pm のゲージ場 $A^\pm \in \Omega^1(X, \text{End}E^\pm)$ に加えてタキオン場 $T \in \Omega^0(X, \text{Hom}(E^+, E^-))$ を含めた (3.2) は superconnection である。

この系の作用汎関数については、最近の計算により具体的な形が分かっている [9]。以下の K -theory との対応の議論は作用汎関数の詳細には依らず成り立つが、具体形を知っている方が構造が理解しやすいので、ここで紹介する。簡単のため、B-field を 0 とする。作用は A^\pm と T の汎関数で、

$$S[A^\pm, T] = S_0 + S_{CS} \quad (3.4)$$

の 2 項から成る。第一項は後で用いないので大雑把な形だけ記す。

$$S_0 = T_9 \int_X d^{10}x e^{-|T|^2} (2 + \mathcal{L}_{BI}(A^+) + \mathcal{L}_{BI}(A^-) + cD_\mu T D^\mu \bar{T} + \dots) \quad (3.5)$$

¹ 両者の枚数が等しいことが string の tadpole 相殺から要請される。

ここで \mathcal{L}_{BI} は (2.8) の Dirac-Born-Infeld ラグランジアン の non-Abel 版で、 T や曲率の高次微分項や A^+ と A^- の混じる項などを省略して書いている。残念ながら \mathcal{A} の汎関数にはなっていないようである。これからわかるのは、タキオンのポテンシャルが

$$V(T) = 2T_9 e^{-|T|^2} \quad (3.6)$$

で与えられることである。これは $T = 0$ で最大値 $2T_9$ を取り、 $|T| \rightarrow \infty$ で最小値 0 に急減少する関数である。 ∞ を避けたい場合には、 $|T| = 1$ で最小となるよう場の再定義 $\tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{1+|T|^2}}$ を行うと、 $V(\tilde{T}) = 2T_9 \exp(-\frac{|\tilde{T}|^2}{1-|\tilde{T}|^2})$ となり、確かに wine bottle 型のポテンシャルになる。いずれにしても、Sen 予想 $V(0) - V(T_0) = 2T_9$ を満たしている。即ち、タキオンが定数 $|T| = T_0 := \infty$ または $|\tilde{T}| = \tilde{T}_0 := 1$ の配位をとるとき、 $D9-\overline{D9}$ は消滅して真空になる。

一方第二項の Chern-Simons term の方は、最近の計算によると以下のように superconnection \mathcal{A} の汎関数としてシンプルにまとまる。

$$S_{CS} = T_9 \int_X C \wedge \text{Str} e^{i\mathcal{F}} \quad (3.7)$$

ここで、 $C = \sum_{p:\text{odd}} C^{(p+1)}$ は RR-form の形式和で、 \mathcal{F} は次で定義される supercurvature である。

$$i\mathcal{F} := i(d\mathcal{A} - i\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} iF^+ - \overline{T}T & D\overline{T} \\ DT & iF^- - T\overline{T} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} F^\pm &:= dA^\pm - iA^\pm \wedge A^\pm \\ DT &:= dT + iTA^+ - iA^-T \end{aligned} \quad (3.8)$$

また、 $\text{Str} : \Omega(X, \text{End}E) \rightarrow \Omega(X)$ は (even) supertrace で、

$$\text{Str}M := \text{Tr}(-1)^F M = \text{Tr} \sigma_3 M \quad (3.9)$$

と定義される。 $\text{Str} e^{i\mathcal{F}}$ は closed form で、その cohomology class は T に依存しないことが示される。従って、特に $T = 0$ とれば $\text{Str} e^{i\mathcal{F}} = \text{tr}(e^{iF^+} - e^{iF^-}) = \text{ch}(E^+) - \text{ch}(E^-)$ となり、 $D9\text{-brane}$ と $\overline{D9}\text{-brane}$ の Chern-Simons term の和に一致する²。

それでは、Type IIB の D-brane と K -theory との対応を見てゆく [10]。本稿ではその対応を 2 つの主張で述べることにする。主張 1 は $D9-\overline{D9}$ という不安定なシステムに関する対応で、主張 2 はその系のタキオン凝縮というプロセスに関する対応である。従って、後者は前者の主張の系として導かれるが、後者は BPS D-brane の RR-charge の分類に直接関係しているため、あえて 2 つに分けて述べる。言い換えると主張 1 は $D9-\overline{D9}$ の分類、主張 2 は BPS D-brane の分類に関する主張である。

主張 1 「 $D9-\overline{D9}$ 系は $K(X)$ で分類される。」

まず $K(X)$ について簡単に復習しておく (例えば [11] を参照)。 X を compact Hausdorff 空間とする。 $\text{Vect}(X)$ を X 上の複素ベクトルバンドルの同型類とすると、これは Abelian monoid になっている。これから Grothendieck の構成 (\mathcal{S} と記す) により得られる Abel 群が X の K 群である。

$$K(X) := \mathcal{S}(\text{Vect}(X)) = \{(E, F) \in \text{Vect}(X) \times \text{Vect}(X)\} / \sim \quad (3.10)$$

ここで、ベクトルバンドルのペア (E, F) に対し $(E, F) \sim (E \oplus H, F \oplus H)$ なる同値関係を入れる。次に、reduced K -theory は inclusion $i : \text{pt.} \hookrightarrow X$ に対し $\tilde{K}(X) := \ker i^*$ で定義される。即ち $\text{rank } E = \text{rank } F$

² $\overline{D9}\text{-brane}$ の RR-charge は $-T_9$ である。

なるペア (E, F) に限った部分群である。更に、relative K -theory を X とその closed subset $Y \subset X$ に対して次で定義する。

$$K(X, Y) := \{(E, F, \alpha)\} / \sim \quad (3.11)$$

ここで $\alpha : E|_Y \xrightarrow{\sim} F|_Y$ は Y 上で同型となる bundle map であり、同値関係はある elementary な (G, H, β) に対し、 $(E, F, \alpha) \sim (E \oplus G, F \oplus H, \alpha \oplus \beta)$ とする。elementary とは $G \simeq H$ であって β が Id_G に homotopic なときを指す。さて、 X が non-compact (局所 Hausdorff) のときには、compact supported K -theory を $K_c(X) := \tilde{K}(X^+) = K(X^+, \text{pt.})$ で定義する。ここで X^+ は一点 compact 化を表し、添え字 c は以後省略する。

さて、主張 1 を示すには、 $K(X)$ の代表元と $D9-\overline{D9}$ 系の情報が対応していることと、 K -theory の同値関係と物理的な同値関係とが一致することを示せば良い。時空 X は一般に non-compact なので正確には $K_c(X)$ との対応を見るべきである。その対応は

$$(E, F, \alpha) = (E^+, E^-, T) \quad (3.12)$$

で与えられる。即ち、ベクトルバンドルのペアをそれぞれ $D9, \overline{D9}$ の Chan-Paton bundle のペアに、bundle map をタキオンと同一化する。同型類とは右辺ではゲージ同値を意味する。左辺が compact support であることは、右辺ではエネルギー有限の配位に限ることに対応する。これが (3.12) の等号の意味である。よって左辺の 2 つの (E, F, α) の和とは、右辺では $D9-\overline{D9}$ ペアの枚数を増やすことを意味する。また、左辺で elementary な (G, H, β) は、右辺ではゲージ変換の不定性を除いてタキオンが $T(x) \equiv T_0 \cdot \text{Id}_G$ となる配位に対応する。これは真空中に消滅する $D9-\overline{D9}$ ペアの配位で、真空と等価であるから、直和して枚数を増やしても物理的にも何も変わらない。従って同値関係も一致している。以上から主張が示された。つまりこの主張は、 $D9-\overline{D9}$ 系の情報の全体 (場の理論の配位の全体) から Abel 群への関手を与えるようなものである。

なお、 $D9-\overline{D9}$ 系の Chern-Simons term はこの対応を cohomology で見たものである。 $K(X)$ の Chern character は $\text{ch}(E, F, \alpha) = e^{iE} - e^{iF} \in H^{\text{even}}(X)$ で定義されるが、これは $\text{Str } e^{i\mathcal{F}}$ に一致する。

主張 2 「タキオン凝縮の過程は $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ を表す。」

この主張は $D9-\overline{D9}$ 系の配位のうち特定の配位についてのものである。即ちタキオン凝縮により $Y \subset X$ に巻きついた BPS D-brane が残る過程を考える。例えば $X = \mathbb{R}^{10}$ 上の N $D9-\overline{D9}$ から、 $Y = \mathbb{R}^{p+1}$ を worldvolume とする Dp -brane が作られる場合、余空間は \mathbb{R}^{9-p} となる。このとき補題として「BPS Dp -brane の RR-charge は余空間の K -theory $K(\mathbb{R}^{9-p})$ で測られる。」が得られる。まずこちらから説明する。

N $D9-\overline{D9}$ 系のタキオン場が \mathbb{R}^{9-p} の無限遠でポテンシャルの底に値をとる場合、ゲージ群を $U(N) \times U(N)$ から $U(N)$ に破るので、vacuum manifold は

$$\mathcal{V}_{\text{IIB}}(N) = \frac{U(N) \times U(N)}{U(N)} \simeq U(N) \quad (3.13)$$

で与えられる。よってタキオン凝縮による余次元 $n = 9 - p$ のソリトン解は、無限遠 S^{n-1} での $\mathcal{V}_{\text{IIB}}(N)$ の巻き付き方で分類される。

$$\pi_{n-1}(\mathcal{V}_{\text{IIB}}(N)) = \pi_{n-1}(U(N)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n : \text{even}) \\ 0 & (n : \text{odd}) \end{cases} \quad \forall N > n \quad (3.14)$$

但し N は上を満たすよう十分多い枚数が必要である。これは余空間 \mathbb{R}^n の K -theory に一致し、知られている Dp -brane のスペクトルを再現する。

$$K(\mathbb{R}^n) = \tilde{K}(S^n) = \pi_{n-1}(U(N)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p : \text{odd}) \\ 0 & (p : \text{even}) \end{cases} \quad (3.15)$$

この $K(\mathbb{R}^{9-p}) = \mathbb{Z}$ の生成子は、具体的には ABS 構成と呼ばれる構成法が知られている [12]。より一般の場合に拡張することを念頭においてこれを説明する。まず、 $Y = \mathbb{R}^{p+1}$ を Dp -brane の worldvolume とし、時空 X は余空間 \mathbb{R}^{2k} ($2k = 9 - p$) を fiber とする Y 上の normal bundle $N(Y, X)$ とみなす。その構造群 $SO(2k)$ は $Spin(2k)$ に拡大できるので、 Y 上に spin bundle $S^\pm \rightarrow Y$ が定義できる。この fiber は 2^{k-1} 次元の複素ベクトル空間で、各々 Clifford 代数 C_{2k} が作用する。そしてこれを時空 X 上のバンドルに拡張したものを $D9\text{-}\overline{D9}$ 系と解釈する。即ち、 $N = 2^{k-1}$ 枚の $D9\text{-}\overline{D9}$ を考え、その Chan-Paton bundle が $E = S^+ \oplus S^-$ でタキオンは bundle map $T : S^+ \rightarrow S^-$ であるとする。このとき、タキオンの配位として以下をとる。

$$T(x) = u\mu_x = u \sum_{i=1}^{2k} \Gamma_i x^i \quad (3.16)$$

ここで u は任意パラメーターである。 μ_x は $(x^1, \dots, x^{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}$ から Clifford 代数 C_{2k} への表現を与える Clifford 積で、具体的にはガンマ行列 Γ_i を用いて表される。この配位は \mathbb{R}^{2k} 上の $|x| = \frac{1}{u}$ の S^{2k-1} で同型写像であり、 $K(\mathbb{B}^{2k}, S^{2k-1}) = \tilde{K}(S^{2k}) = \mathbb{Z}$ の生成子であることがわかる。物理的には、 $|x| > \frac{1}{u}$ の領域でタキオンが真空中に凝縮し $D9\text{-}\overline{D9}$ が消滅して、 $|x| < \frac{1}{u}$ の辺りに topological defect が残った状況を表す。特に $u \rightarrow \infty$ の極限では \mathbb{R}^{2k} の原点に局在し、 \mathbb{R}^{p+1} 方向に広がった BPS Dp -brane の配位になっている³。実際、上の配位を Chern-Simons term (3.7) に代入すると、 u に依らず

$$S_{CS} = T_9 \int_X C \wedge e^{-u^2|x|^2} \text{Stre}^{u\gamma_i dx^i}, \quad \text{但し } \gamma_i := \begin{pmatrix} 0 & \overline{\Gamma}_i \\ \Gamma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$= T_p \int_Y C^{(p+1)} \quad (3.18)$$

となり、 Y に巻きついた一枚の BPS Dp -brane を表している。この $\text{Stre}^{i\mathcal{F}}$ 部分は Gauss 型の Thom form と呼ばれ、 $u \rightarrow \infty$ で δ -関数型の current になる。その fiber 積分が $1(\times \text{定数})$ を与える Thom class であるため、 X 積分は底空間 Y 上の積分に帰着する。

以上により補題が示された。即ち (3.15) ではソリトン charge が $K(\mathbb{R}^{9-p})$ に等しいことを示し、(3.16) ではその生成子が Dp -brane の RR-charge を生成している、つまりソリトン charge = Dp -brane charge を示した。

この補題を主張 1 の枠内で見たものが主張 2 である。主張 1 により $D9\text{-}\overline{D9}$ の特定の配位は $K(X)$ の特定の元を定めるが、(3.16) の配位の場合はたまたま $K(\mathbb{R}^{9-p})$ の生成元になっていて、 Y に巻きつく一枚の Dp -brane を表していた。しかし場の \mathbb{R}^{9-p} 依存性だけを固定すれば、より一般の Y に巻きつく配位も考えられる。 N 枚の Dp -brane は N 回巻き付く配位で、 \overline{Dp} -brane は上で S^+ と S^- を入れ替えた配位で得られる。また Dp -brane が非自明な Chan-Paton bundle を伴う配位は、 \mathbb{R}^{9-p} 上自明な $D9\text{-}\overline{D9}$ の Chan-Paton bundle E をテンソルしておいた $E \otimes S$ をとれば得られる。従って、 Y に巻きつく $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系の配位全体は、 $D9\text{-}\overline{D9}$ の配位全体のうちの一部として実現される。主張 1 の類似により、 $Dp\text{-}\overline{Dp}$ 系は $K(Y)$ に対応しているので、このことは D-brane と K -theory の以下の対応を与えていることになる。 $f : Y \hookrightarrow X$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} f_! : & K(Y) & \xrightarrow{\sim} & K(X) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & Dp\text{-}\overline{Dp} & \longleftarrow & D9\text{-}\overline{D9} \end{array} \quad (3.19)$$

ここで上の写像は、ABS 構成による K -theory 的な Thom 同型を表し、具体的にはカップ積

$$\begin{array}{ccc} K(Y) \otimes K(\mathbb{B}^{2k}, S^{2k-1}) & \xrightarrow{\sim} & K(Y \times \mathbb{B}^{2k}, Y \times S^{2k-1}) \\ (E, F) \otimes (S^+, S^-) & \longmapsto & (E \otimes S^+ \oplus F \otimes S^-, E \otimes S^- \oplus E \otimes S^+) \end{array} \quad (3.20)$$

³ §2.4 の vortex 型の配位の高い余次元への拡張である。

で与えられる。一方、 $K(Y)$, $K(X)$ の元は主張 1 よりそれぞれ $Dp\text{-}\overline{Dp}$, $D9\text{-}\overline{D9}$ 系と対応する。下の写像はタキオン凝縮による場の配位空間の Y 方向への制限である。より一般の Y に対しては $X \simeq N(Y, X)$ ではないが、この場合の ABS 構成は、 $i: Y \hookrightarrow N(Y, X)$ と $j: N(Y, X) \hookrightarrow X$ を組み合わせた $f = j \circ i: Y \hookrightarrow X$ に対する Gysin 準同型

$$f_! = j^* \circ i_! : K(Y) \xrightarrow{\sim} K(N(Y, X)) \rightarrow K(X) \quad (3.21)$$

を与える。但し一般には spin bundle やその X への拡大を定義するところで obstruction があるので注意が必要である。Chern-Simons term はこの ABS 構成 $f_!$ を cohomology で見たもので、

$$\text{ch}(f_!^K 1) = \pi^*(\widehat{A}(N(Y, X))^{-1}) f_!^H 1 \quad (3.22)$$

なる関係を与えている。但し $\pi: X \rightarrow Y$ で、 K, H はそれぞれ K -theory と cohomology を表し、 $X(Y)$ での Poincaré duality $\mathcal{D}_X(\mathcal{D}_Y)$ を用いて $f_!^H = \mathcal{D}_X^{-1} f_* \mathcal{D}_Y$ と定義される。

3.2 Type IIA と $K^{-1}(X)$

Type IIA 理論の D-brane は 10 次元の non-BPS D9-brane 系から構成される。この場合にも、§3.1 に類似した K -theory との対応がある。まず、 N non-BPS D9-brane 系の情報は

$$\begin{cases} X : 10 \text{ dim. worldvolume} = \text{spacetime} \\ E = F \oplus F = F \otimes \mathbf{C}_1 : \text{Chan-Paton bundle over } X \end{cases} \quad (3.23)$$

で与えられる。ここで Chan-Paton bundle は rank N のベクトルバンドルで \mathbf{C}_1 module の構造を持つ odd superbundle である。また non-BPS D9-brane 上の場はこの Chan-Paton bundle の (odd) superconnection として入っている。

$$i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} iA & T \\ T & iA \end{pmatrix} = iA + T\sigma_1 \quad (3.24)$$

ここで $U(N)$ ゲージ場 A は even endomorphism 値の 1-form $\Omega^1(X, \text{End}F)$ に、タキオン T は $U(N)$ の adjoint 表現の実スカラー場で、odd endomorphism 値の 0-form $\Omega^0(X, \text{End}F\sigma_1)$ に組み込まれている。

この系の作用は A, T の汎関数で、次の 2 項から成る。

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{2}T_9 \int_X d^{10}x e^{-T^2} (1 + \mathcal{L}_{DBI}(A) + cD_\mu T D^\mu T + \dots) \\ S_{CS} &= \sqrt{2}T_9 \int_X \tilde{C} \wedge \text{Str} e^{i\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

特に Chern-Simons term は supercurvature と supertrace の定義が以下の通り odd である他は、 $D9\text{-}\overline{D9}$ と同じ形をしている。

$$\begin{aligned} i\mathcal{F} &= iF - T^2 + DT\sigma_1 \\ F &:= dA - iA \wedge A, \quad DT := dT - i[A, T] \\ \text{Str}(M + N\sigma_1) &:= \text{Tr } N \end{aligned} \quad (3.26)$$

これから読み取れるタキオンポテンシャルは

$$V(T) = \sqrt{2}T_9 e^{-T^2} \quad (3.27)$$

である。D9- $\overline{\text{D9}}$ と同様、これは $T = 0$ で最大値 $\sqrt{2}T_9$ を取り、 $T \rightarrow \pm\infty$ での最小値 0 に急減少する関数で、 $T = \pm 1$ で最小となるよう場の再定義 $\tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$ を行うと double well 型のポテンシャルになる。

さて、Type IIB の場合と同様、Type IIA 理論の D-brane と K -theory との対応が与えられている [13]。ここでは先程と同様に 2 つの主張で表す。

主張 1 「non-BPS D9-brane 系は $K^{-1}(X)$ で分類される。」

この場合の K 群は $K^{-1}(X)$ が対応する。この定義はいくつかあるが、 E を X 上のベクトルバンドル、 $\alpha: E \rightarrow E$ をバンドルの自己同型写像とすると、以下で定義する。

$$K^{-1}(X) := \{(E, \alpha)\} / \sim \quad (3.28)$$

ここで同値関係はある elementary な (G, β) に対し、 $(E, \alpha) \sim (E \oplus G, \alpha \oplus \beta)$ とする。このとき、 $K^{-1}(X)$ と non-BPS D9-brane 系との対応は

$$(E, \alpha) = (F, -\exp(\pi i \tilde{T})) \quad (3.29)$$

で与えられると考えられている。ここでは規格化したタキオン \tilde{T} を用いている。よって elementary に対応するのは、ゲージ変換の不定性を除いて、真空中に凝縮する配位 $\tilde{T} = \text{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots)$ の場合で、これは non-BPS D9-brane の生成消滅を同一視するという物理的な同値関係に一致する。

主張 2 「タキオン凝縮の過程は $K(Y) \hookrightarrow K^{-1}(X)$ を表す。」

§3.1 と同様、まず「BPS Dp -brane の RR-charge は余空間の K -theory $K^{-1}(\mathbb{R}^{9-p})$ で測られる。」から見る。具体的には、 $2N$ non-BPS D9-brane 系からタキオン凝縮により Y に巻きついた BPS Dp -brane を作ることができる。この場合、余空間 \mathbb{R}^{9-p} は余次元が odd $9-p := 2k+1$ になる。まずソリトンの分類を行う。タキオンが無限遠で $\tilde{T} = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ (但し 1 と -1 が N 個ずつ) の時、ゲージ群を $U(2N)$ から $U(N) \times U(N)$ に破るので、vacuum manifold は

$$\mathcal{V}_{\text{IIA}}(2N) = \frac{U(N)}{U(N) \times U(N)} \quad (3.30)$$

で与えられる。従って、topological defect の分類は余空間の K -theory に一致し、知られている Type IIA の Dp -brane のスペクトルを再現する。

$$\begin{cases} K^{-1}(\mathbb{R}^{2k+1}) = K^{-1}(S^{2k+1}) = \pi_{2k}(\mathcal{V}_{\text{IIA}}(2N)) = \mathbb{Z} \\ K^{-1}(\mathbb{R}^{2k}) = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

この $K^{-1}(\mathbb{R}^{2k+1})$ の生成子は ABS 構成の類似から、 $N = 2^{k-1}$ として

$$\tilde{T}(x) = \frac{u}{\sqrt{1+|x|^2}} \sum_{i=1}^{2k+1} \Gamma_i x^i \quad (3.32)$$

と与えればよい。このとき $\alpha = -e^{i\pi \tilde{T}}$ は $K^{-1}(\mathbb{B}^{2k+1}, S^{2k}) = K^{-1}(S^{2k+1})$ を生成する。従って、§3.1 と同様の議論によりタキオン凝縮は $f_1: K(Y) \hookrightarrow K^{-1}(X)$ を表している。

しかし、上の構成は余次元が 3 以上 ($k \geq 1$) の場合にしか適用できない。一枚の non-BPS D9-brane から一枚の D8-brane を作る場合には、kink 型の配位

$$\tilde{T}(x) = \pm \frac{x^9}{\sqrt{1+|x|^2}} \quad (3.33)$$

を用いる。ここで余空間 \mathbb{R} の座標を x^9 した。± はそれぞれ D8、 $\overline{\text{D8}}$ を表す。この場合 vacuum manifold は 2 点 $\{\pm 1\}$ より $\pi_0(\{\pm 1\}) = \mathbb{Z}_2$ であり、 K -theory による D8-brane charge $K^{-1}(S^1) = \mathbb{Z}$ に一致しない。これは、任意枚の D8-brane を作るには N non-BPS D9-brane 系で始めから $N \rightarrow \infty$ とすべきことを示唆している。ここでは述べないが、明白に $N = \infty$ が必要となる議論が他にある [14]。上の N non-BPS D9-brane と対応する $K^{-1}(X)$ の定義 (3.29) では任意の有限 rank のベクトルバンドルを用いるため、 $N = \infty$ を取り入れるには不十分である。よって $N = \infty$ を含むような $K^{-1}(X)$ の定義として以下を用いる方が適当である。

$$K^{-1}(X) := [X, \mathcal{F}^{sa}], \quad \mathcal{F}^{sa} := \{\text{self-adjoint Fredholm operators on } \mathcal{H}\} \quad (3.34)$$

つまり、Chan-Paton 空間を無限次元の Hilbert 空間 \mathcal{H} とすると、タキオン場は \mathcal{H} 上の作用素に値をとるスカラー場になる。作用汎関数を有限にする条件から Fredholm 作用素に限られ、このタキオンの分類により $K^{-1}(X)$ を定義する⁴。物理的には無限枚の殆どは真空中に消滅し、安定に残る系は常に有限 rank であるから問題はない。この定義が良いと思われる別の理由は、これに対応する $K(X)$ の定義が

$$K(X) := [X, \mathcal{F}], \quad \mathcal{F} := \{\text{Fredholm operators on } \mathcal{H}\} \quad (3.35)$$

であり、両者が類似している点である。これがちょうど D9- $\overline{\text{D9}}$ 系と non-BPS D9-brane 系 (の Chern-Simons term) が、superbundle の even, odd の違いしかないという類似に対応している点からも、この定義が適当であると考えられる。また Chan-Paton 空間を無限次元の Hilbert 空間 \mathcal{H} とみなす観点は後の章では本質的である。

3.3 その他の K 群

本稿では、Type II string 理論で時空が多様体、B 場が 0 の場合のみを扱ったが、その他 string 理論に現れる様々な状況でも、D-brane を K -theory で分類するという同様の考察ができる。ここでは、典型的な場合に現れる K 群を非常に簡単に紹介する。まず時空がある (離散) 群 G で割られた orbifold X/G の場合の Type IIB 理論を考える。このとき時空を埋める D9- $\overline{\text{D9}}$ 系は、時空が X のときの D9- $\overline{\text{D9}}$ 系を G 作用で割ったものである。 G は底空間と Chan-Paton bundle の双方に同変に作用するので、 G 不変な Chan-Paton bundle のペアの分類は equivariant K -theory $K_G(X)$ で成される。

次に Type I string 理論の場合の K 群を考える。Type I は、Type IIB で 32 枚の D9-brane が存在する系を worldsheet の parity Ω で割った一種の orbifold で定義される。このとき向き付けがないことを反映して Chan-Paton bundle の構造群は $O(N)$ になる。このようなペアの分類をする Abel 群は real K -theory $KO(X)$ である。更に、時空の \mathbb{Z}_2 -orbifold と Ω を組み合わせると orientifold を考えると Real K -theory $KR(X)$ なども現れる。

最後に背景の B 場が非自明な cohomology 類に属する場合 $[H := dB] \in H^3(X, \mathbb{Z})$ を考える。このような状況は NS5-brane という brane の一種が存在する場合に起きる。このとき時空を埋める D9- $\overline{\text{D9}}$ 系のゲージ場も Λ 対称性で B 場と関係しているため変更を受けて、Chan-Paton bundle は patch の 3 次の交差 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で変換関数が $H^3(X, \mathbb{Z})$ の分だけ twist を受けた twisted bundle になる。それに応じて、分類は twisted K -theory $K_{[H]}(X)$ が対応する。従って NS-brane は背景として K 群の種類を変える効果としては考慮に入れられるが、NS-charge 自体を分類しているわけではない⁵。この辺りに関する研究は現在も行われている。

⁴ 無限次元の Hilbert 空間を fiber とするベクトルバンドルは自明であるから、タキオンの振る舞いだけで決まる。

⁵ Type IIB の S-duality からは NS5-brane と D5-brane は対等なはずである。

4 String 理論における非可換 D-branes

この章から string 理論に現れる非可換幾何について議論を進める。但し、その全てを網羅するには広すぎるため、これまでの話の流れに関係する部分に絞って話をする。この分野全般に関する文献として [15] を挙げておく。本章では非可換 D-brane を導入し、§5 でその有効理論におけるソリトン (非可換ソリトン) の構成法とその分類に関する話題を扱う。そして §6 では Chan-Paton 空間の非可換性と非可換 D-brane の関係について議論し、その見方から D-brane を分類することを §7 で行う。

まず、これまで string 理論の枠内で現れると考えられてきた非可換幾何について概観する。歴史的には最初の兆候は open string field theory [2] であった。これは string を第二量子化した理論で、string の場 Φ を変数とし、その相互作用を扱う理論である。作用汎関数は

$$S = \frac{1}{2} \int \Phi Q \Phi + \frac{1}{3} \int \Phi * \Phi * \Phi \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで相互作用を表す第二項が非可換結合積 $*$ であることが非可換幾何を示唆している。この非可換性は worldsheet の vertex operator の演算子積の非可換性である。一方、第一項の Q は場 Φ の成す非可換結合代数に作用する外微分の役割をしていて、合わせて非可換微分幾何の構造を持っている。

次に認識されたのは、Chan-Paton 因子の非可換性である。これは §2.1 で既に述べたように、D-brane が N 枚重なったときにそのゲージ対称性は $U(N)$ になるが、同時に D-brane の位置を表す垂直方向のスカラ場が $U(N)$ の adjoint 表現になることを解釈したものである。この効果については §6 §7 で扱う。

さてここで注目するのは、D-brane の worldvolume 方向に現れる非可換性である [16]。特に、背景に定数の B-field が存在するとき、D-brane の有効理論が非可換平面上の場の理論で記述されることが示される。このような D-brane を非可換 D-brane と呼ぶことにする。この非可換性も、open string の vertex operator の非可換性に起因するが、上の場合と違い、mode 展開の最低次に現れている。以下このことを見る。

4.1 open strings in B-field background

ここでは背景に B-field があるときに D-brane の有効理論が非可換場の理論で記述されることを見る [17]。そのために背景として $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$: 定数を取り、open string の bosonic 部分を考える。更に、 $B_{\mu\nu}$ のうち D-brane に垂直方向の成分はゲージ変換により 0 にできるなどの簡単化ができるので、以下では D-brane の worldvolume $M = \mathbb{R}^{2n} \ni x^i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ の方向のみ考え、 $B_{ij} \neq 0$ は簡単のため invertible とする。

この場合の open string の σ -model の作用汎関数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} (g_{ij} \partial_a X^i \partial^a X^j - 2\pi\alpha' i B_{ij} \epsilon^{ab} \partial_a X^i \partial_b X^j) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} g_{ij} \partial_a X^i \partial^a X^j - \frac{i}{2} \int_{\partial\Sigma} B_{ij} X^i \partial_t X^j \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで Σ は Disk worldsheet で $\partial\Sigma$ はその boundary である。この作用の見方として 2 通りある。一つは第一項を運動項、第二項を相互作用項として扱う通常の方法で、もう一つは両方を運動項として扱う方法である。前者の場合、運動項から得られるのは、D-brane の有効理論が M 上の場の理論で記述されるということで、相互作用項については、D-brane 上のゲージ場が $F_{ij} = B_{ij}$ なる flux を持つ項と解釈できる。この扱いで得られるのが Dirac-Born-Infeld 作用 (2.8) である。ここでは後者で扱う¹。

両方を運動項と見るので、まず境界条件は

$$g_{ij} \partial_n X^j + 2\pi\alpha' i B_{ij} \partial_t X^j |_{\partial\Sigma} = 0 \quad (4.3)$$

¹ 前者の扱いは以下で $B_{ij} = 0$ とすれば良い。

となる。第一項は Neumann 条件であり、open string の端点が D-brane 上で自由に動けることを表すが、B-field の効果の分だけ Dirichlet 条件が入り、自由には動けなくなることを意味している。このことは vertex operator の演算子積としてより正確に記述できる。まず boundary の 2 点 t, s での propagator を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle X^i(t)X^j(s) \rangle_\Sigma &= -\alpha' G^{ij} \log(t-s)^2 + \frac{i}{2} \theta^{ij} \epsilon(t-s) \\ G^{ij} &= \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} \right)_S^{ij}, \quad \theta^{ij} = \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} \right)_A^{ij} \end{aligned} \quad (4.4)$$

S と A は ij のそれぞれ対称成分、反対称成分を表し、 $\epsilon(t-s)$ は sign function である。これを用いて tachyon vertex operator $V_p(t) =: e^{ip \cdot X} : (t)$ の演算子積を求めると、

$$V_p(t)V_q(s) = (t-s)^{2\alpha' G^{ij} p_i q_j} e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} p_i q_j} V_{p+q}(s) \quad (4.5)$$

右辺第一項は通常の扱いでも現れる項だが、metric が g^{ij} から B-field の分だけ変更を受けているため、各 mode の (mass)² も G^{ij} で測られる。従って G^{ij} は open string metric と呼ばれる。一方第二項は $B_{ij} \neq 0$ のときに初めて現れる項で、この phase factor が非可換性を表している。これは D-brane 上の有効理論において、 $2n$ 次元平面 \mathbb{R}^{2n} 上の関数の積が Moyal 積

$$f * g(x) = \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}\right) f(x)g(y)|_{y=x} \quad (4.6)$$

に置き換わることを意味している²。特に座標関数に対して

$$[x^i, x^j]_* := x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij} \quad (4.7)$$

であるから、Moyal 積を持つ空間は非可換平面の一種である。これを Moyal 平面と呼び、 \mathbb{R}_θ^{2n} と記す。従って今の扱いで得られる D-brane の有効理論は、通常の扱いで得られる作用汎関数において、metric g を G に置き換え、 $B=0$ とする代わりに場の積を Moyal 積に置き換える、という操作によって得られる。

このように、場の積が Moyal 積の場の理論を非可換 (空間上の) 場の理論と呼び、特にゲージ理論の場合、非可換ゲージ理論と呼ぶ。また、有効理論が非可換場の理論で記述される D-brane を非可換 D-brane と呼ぶ。まとめると、背景 B-field 中の D-brane は非可換 D-brane になる。その worldvolume は Moyal 平面 $M = \mathbb{R}_\theta^{2n}$ で、一枚の場合は非可換 $U(1)$ 、 N 枚の場合は非可換 $U(N)$ をゲージ群に持つ M 上の非可換ゲージ理論で記述される。

しかし、上述のように有効理論の導出には 2 通りあり、これらは物理的には等価なはずである。通常の扱いでは、D-brane 上の有効理論は $U(1)$ ゲージ理論になるが、曲率の微分を無視する近似では Dirac-Born-Infeld 作用で記述される³。

$$\begin{aligned} S_{BI}[A] &= \frac{(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}}{g_s} \int d^{2n}x \sqrt{\det(g + 2\pi\alpha'(B + F))} \\ &\begin{cases} F = dA \\ \delta_\lambda A = d\lambda \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

この理論の場は $U(1)$ ゲージ場 A で、 g, B は定数の背景、 g_s は string coupling である。その下には曲率とゲージ変換性 $A \mapsto A + \delta_\lambda A$ (λ はゲージパラメータ) を書いておいた。B-field が D-brane 上では $U(1)$ flux とみなせるという事実は、常に $B + F$ という組で作用に現れることに反映されている。一方、今の

² (4.5) の phase factor は (4.6) をフーリエ変換で表したものである。

³ スカラー場は省略している。また $T_p = (2\pi)^{\frac{1-p}{2}}/g_s$ 。

我々の扱いで得られる有効理論は非可換 $U(1)$ ゲージ理論である。このゲージ場を上と区別するため \hat{A} と書く。すると、有効作用は上述の置き換えにより

$$S_{BI}[\hat{A}] = \frac{(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}}{G_s} \int d^{2n}x \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha' \hat{F})_*}$$

$$\begin{cases} \hat{F} = d\hat{A} - i[\hat{A}, \hat{A}]_* \\ \delta_{\hat{\lambda}} \hat{A} = D\hat{\lambda} := d\hat{\lambda} - i[\hat{A}, \hat{\lambda}]_* \end{cases} \quad (4.9)$$

となる。ここで場の積が Moyal 積であることが非可換場の理論を意味する。これを非可換 Dirac-Born-Infeld 作用と呼ぶ。曲率とゲージ変換性は共に、 $U(1)$ であるにもかかわらず、Moyal 積の非可換性のために non-Abel 的なものになっている。これが非可換 $U(1)$ の大きな特徴である。以上 2 つの有効理論は物理的には等価であるはずだから、両者の場の間には何らかの関係がある。これを Seiberg-Witten map と呼ぶ。これは写像

$$SW : \begin{cases} A \mapsto \hat{A}(A) \\ \lambda \mapsto \hat{\lambda}(A, \lambda) \end{cases} \quad (4.10)$$

で、以下の図式が可換になるものとして定義される。

$$\begin{array}{ccc} A + \delta_{\lambda} A & \xrightarrow{SW} & \hat{A}(A + \delta_{\lambda} A) = \hat{A} + \delta_{\hat{\lambda}} \hat{A} \\ \delta_{\lambda} \uparrow & & \uparrow \delta_{\hat{\lambda}} \\ A & \xrightarrow{SW} & \hat{A}(A) \end{array}$$

これは、場 A , \hat{A} 自身ではなく、それぞれのゲージ軌道同士が一对一に対応することを要請している。この写像は一意的ではないが存在することが示される [18]。更に、この写像の下で作用汎関数 (4.8),(4.9) が (微分を無視する近似で) 等しいこともいえる。従って両者は実際等価であり、B-field を扱う方法の違いに過ぎない。

なお、より一般には両者の中間の記述も可能である。つまり B-field の一部は通常のように flux Φ の相互作用として扱い、残りを Moyal 積に効く運動項として扱うことにすると、

$$S_{BI}[\hat{A}] = \frac{(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}}{G_s} \int d^{2n}x \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha'(\Phi + \hat{F}))_*} \quad (4.11)$$

という作用が得られる。ここで理論の各パラメーターは

$$\frac{1}{G + 2\pi\alpha'\Phi} + \frac{\theta}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{g + 2\pi\alpha'B}$$

$$G_s = g_s \left(\frac{\det(G + 2\pi\alpha'\Phi)}{\det(g + 2\pi\alpha'B)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

という関係で与えられる。これらの記述の自由度は Φ の値によって決まり、特に Moyal 積を定める θ も Φ ごとに異なることになる。先の 2 つの記述については、 $\Phi = B$ の場合が式 (4.8) で、 $\Phi = 0$ の場合が式 (4.9) である。

以上のように非可換 D-brane といっても単なる記述の違いに過ぎないので、あまり非可換で考える意味が無いように思える。同じものを可換な記述で見ると、B-field は flux と解釈され、Chern-Simons term (2.11) において $B \neq 0$ は「brane within brane」を引き起こす。つまり非可換 D-brane は、単に低い次元の D-brane との bound state である。しかし、いろいろな記述があるということ自体が概念的に重要だとも言える。また実用的にも、可換な記述とは違う領域で非可換理論の方が良い記述になるなどの御利益がある。例えば、通常の Dirac-Born-Infeld 作用 $S_{BI}[A]$ で $\alpha' \rightarrow 0$ の極限をとると Yang-Mills 理論に

なったが、別の極限として G, θ を固定して $\alpha' \rightarrow 0$ の極限をとると、非可換 DBI 作用 $S_{BI}[\hat{A}]$ は非可換 Yang-Mills 理論

$$S_{YM}[\hat{A}] = \frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^{2n}x \sqrt{G} G^{ik} G^{jl} \hat{F}^{ij} \hat{F}^{kl} \quad (4.13)$$

になるのに対し、通常の DBI 作用 $S_{BI}[A]$ は non-polynomial な作用汎関数になる。よってこの領域では非可換理論での解析の方が容易である。また、非可換場の理論におけるソリトンを考えると、非可換ゆへの興味深い性質を有していたりする。例えば非可換平面は「点」が θ の広がりを持つため、非可換 instanton の moduli 空間では small instanton の特異性が解消されるという事実は良く知られている (この辺りについては [19] などを参照)。

4.2 変形量子化

上述のように定数の B-field によって現れる非可換幾何は Moyal 平面という最も単純な場合で、ほとんどの研究はこの場合に限られている。しかし Moyal 平面 $\mathbb{R}_\theta^{2n} \in (x^1, \dots, x^{2n})$, $[x^i, x^j]_* = i\theta^{ij}$ あるいはその関数環は元々古典力学の相空間 $T^*\mathbb{R}^n$ の変形量子化で現れるものである。ここで、変形量子化は以下のように定式化される。一般に Poisson 多様体 $(M, \{, \})$ 上の複素関数環 $C^\infty(M)$ は Poisson 環であるが、これをパラメーター \hbar で変形した空間 $A = C^\infty(M)[[\hbar]]$ を考え、そこに非可換な結合積 $*$ を導入し、環を変形することをいう。但し $f * g = f \cdot g + \hbar\{f, g\} + \dots$ を満たすものにとる。この $*$ 積の存在は、Kontsevich により示された [20]。

これに対応して、定数とは限らない一般の B-field (但し closed $dB = 0$) の場合には、より一般の $*$ 積を持つ非可換 D-brane になることが予想される。それは、Kontsevich 変形量子化を target 空間を Poisson 多様体 M とする topological σ -model で記述する方法があるが [21]、string の σ -model (4.2) でも $g_{ij} \rightarrow 0$ 極限をとれば topological になるからである。

一方 symplectic 多様体に限れば、Fedosov による変形量子化の方法もある [22]。これは M 上の接バンドルを Moyal 積で変形してそれを M 上で smooth に繋げる方法で、 M 上に一般のベクトルバンドルがある場合への拡張が容易である。従って、 N D-brane 上の非可換ゲージ理論を記述するのに都合が良い。我々はこの方法で非可換ゲージ理論の一般論を考察した [23]。

5 非可換ソリトン

ここでは、D-brane に限らず、非可換場の理論一般における特徴的なソリトン解について議論する。このような解を見つけるには、Moyal 平面よりも、Hilbert 空間とその上の作用素を考える方が都合が良い。その後、non-BPS D-brane 系にそれを適用する。この章では簡単のため 2 次元のみ扱うが、任意の偶数次元への拡張も自明にできる。この章の内容は主に [24] に従っている。

5.1 Weyl 変換

まず、場の理論の底空間を、Moyal 平面 $\mathbb{R}_\theta^2 \ni (x^1, x^2)$, $[x^1, x^2]_* = i\theta^{12} \equiv i\theta$ から、量子力学の Heisenberg 代数 $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ に置き換え、作用素環の言葉で場の理論を定式化する。正確には Moyal 平面上の複素関数環から separable な Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の作用素環への同型写像

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}_\theta^2) &\rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \hat{O}_f \end{aligned} \quad (5.1)$$

を Weyl 変換と呼ぶ。ここで $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は \mathcal{H} 上の有界線形作用素の成す C^* -代数である。この写像は

$$\hat{O}_f = \frac{1}{(2\pi\theta)^2} \int d^2k U(k) \tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi\theta)^2} \int d^2k d^2x e^{-ik \cdot (x - \hat{x})} f(x) \quad (5.2)$$

で定義される。ここで、 $\tilde{f}(k) := \int d^2x e^{ik \cdot x} f(x)$ は f の Fourier 変換で、 $U(k) = e^{-ik \cdot \hat{x}}$ は Weyl-Heisenberg 群の元で、これらは $U(k)U(k') = e^{\frac{i}{2}\theta^{ij} k_i k'_j} U(k+k')$ を満たす。この写像の下で、Moyal 積、微分、積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \hat{O}_{f * g} &= \hat{O}_f \hat{O}_g \\ \hat{O}_{\partial_i f} &= -i\theta_{ij}^{-1} [\hat{x}^j, \hat{O}_f] \equiv \partial_i \hat{O}_f \\ \int d^2x f(x) &= 2\pi\theta \text{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{O}_f \end{aligned} \quad (5.3)$$

と与えられる。以下演算子の $\hat{}$ は省略する。

更に Hilbert 空間の基底として調和振動子基底をとることにする。即ち複素座標 $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2)$ から生成消滅演算子 $a = \frac{1}{\sqrt{\theta}}z$, $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\bar{z}$, $[a, \bar{a}] = 1$ を定義し、その Fock 空間として Hilbert 空間を

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C} |n\rangle, \quad |n\rangle = \frac{1}{n!} (\bar{a})^n |0\rangle \quad (5.4)$$

と与える。このとき微分は (5.3) からそれぞれ $\partial \equiv \partial_z = -\frac{1}{\sqrt{\theta}} \text{ad } \bar{a}$, $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \text{ad } a$ で与えられることに注意する。この基底で簡単に表される重要な演算子の例としては以下がある。

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{i=0}^{k-1} |i\rangle \langle i| \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \quad \text{rank } k \text{ projection operator} \\ S &= \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \quad \text{shift operator} \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ はコンパクト作用素の集合を表す。 P_k は $|i\rangle$ ($i = 0, \dots, k-1$) の状態みを残す projection operator で、Weyl 変換の前 (Weyl 逆変換という) はかなり複雑な関数である。 S は全ての状態を $|m\rangle \mapsto |m+1\rangle$ と一斉にずらす作用素で Fredholm operator の一種である。

さて、非可換場の理論の定式化はこれでほぼ完了している。例えば非可換スカラー場は $C^\infty(\mathbb{R}_\theta^2)$ の元であるから、Weyl 変換 (5.2) により作用素環 \mathcal{A} の元としての場になる。また、その作用汎関数は関数の積、微分、積分で書かれているから、(5.3) によりすぐさま作用素環の言葉に写る。より一般の場の理論も同様である。例えばゲージ理論などは可換平面ではベクトルバンドルの connection であるが、Moyal 平面の場合には有限生成射影加群がベクトルバンドルの切断全体と一致するので、この加群上の connection で定式化できる。これを Weyl 変換して作用素環に写れば良い¹。

5.2 非可換ソリトン

最も簡単な非可換場の理論として、 $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}$ 上の実スカラー場 ϕ を考える (\mathbb{R} は時間方向)。まず簡単のため運動項を無視すると、作用汎関数は元の Moyal 表示では

$$S = \int dt d^2x V(\phi), \quad V(\phi) = c_2 \phi * \phi + c_3 \phi * \phi * \phi + \dots \quad (5.6)$$

¹ 一般には B-field により微分形式も変更を受ける可能性があるが、あまり考えられていない。

のようにポテンシャルのみで与えられる。但し非可換場の理論ゆえ、場の積が Moyal 積である。これを Weyl 変換して作用素環の記述に移ると

$$S = 2\pi\theta \int dt \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} V(\phi) \quad (5.7)$$

となる。以後全て作用素しか用いないので $\phi \equiv \hat{O}_\phi$ と置いている。運動方程式は

$$V'(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (5.8)$$

である。関数としてのポテンシャル V の停留点を $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ とおくと、可換理論 ($\theta = 0$) の場合には自明な解 $\phi(x) \equiv \lambda_i = \text{const.}$ しかないのに対し、今の非可換理論の場合、それ以外に (5.5) の projection operator P_k を用いて非自明な解が構成できる。

$$\phi = \lambda_i P_k, \quad P_k^2 = \bar{P}_k = P_k \quad (5.9)$$

この解は局所的な場の励起を表している。例えば、最も簡単な $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ の場合、これを Weyl 逆変換すると $f(x) = 2e^{-\frac{|x|^2}{\theta}}$ となり、大体 θ のサイズの広がりを持っている。またエネルギーを評価すると

$$E = 2\pi\theta \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} V(\phi) = 2\pi\theta V(\lambda_i) \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} P_k = 2\pi\theta k V(\lambda_i) \quad (5.10)$$

となり、有限の値を持つ。一般にエネルギーは projection の rank と停留点でのポテンシャルの値にしかよらないことに注意。このような解は可換な理論では存在しない解であり、非可換ソリトンと呼ばれる。但しこの構成は、作用がポテンシャルだけで与えられている場合に特有のものである。

次に、より一般の場合に適用できる構成を紹介する。これは solution generating technique と呼ばれている。まず、作用汎関数 (5.7) がユニタリ作用素の群 $U(\mathcal{H})$ の作用

$$\phi \mapsto U\phi\bar{U}, \quad \bar{U}U = U\bar{U} = 1 \quad (5.11)$$

の下で不変であることに注意する。当然運動方程式の解は解に写る。しかし変換後も解であるということだけを要請するのならば、 $U(\mathcal{H})$ からはみだす作用素のうち、non-unitary isometry と呼ばれる

$$\bar{U}U = 1, \quad U\bar{U} \neq 1 \quad (5.12)$$

なる演算子で変換した場合も、解は解に写ることがわかる。このとき $U\bar{U}$ は projection operator になっている。もちろん有限次元ベクトル空間の場合は第一式から自動的に $U\bar{U} = 1$ なので、これは無限次元 \mathcal{H} に特有の作用素である。従って、non-unitary isometry を用いれば新たな解をいくらでも作ることができる。例えば (5.5) の shift operator S は $\bar{S}S = 1$, $S\bar{S} = 1 - |0\rangle\langle 0|$ を満たすので non-unitary isometry である。 S^k も同様。よって、自明な解 $\phi = \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$ から出発して $U = S^k$ で変換すると、 $\phi = S^k(\lambda_i \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})\bar{S}^k = \lambda_i(1 - P_k)$ となり、先程の非可換ソリトンが得られる。

この方法は他の非可換場の理論にも容易に適用できる。次の例として複素スカラー場 ϕ を考える。作用汎関数は運動項を無視すると

$$S = 2\pi\theta \int dt \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} (W(\phi\bar{\phi}) + W(\bar{\phi}\phi)) \quad (5.13)$$

のような形をしていて、 $U(\mathcal{H}) \times U(\mathcal{H}) : \phi \mapsto V\phi U$ なる対称性がある。従って $\bar{U}U = \bar{V}V = 1$ のみを仮定すれば解は解に写ることになる。例えば $\phi = \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$ から $\phi = V\bar{U}$ が得られる。この場合は実スカラーと違い ϕ 自身は projection operator ではないが、 $\bar{\phi}\phi = U\bar{U}$, $\phi\bar{\phi} = V\bar{V}$ は projection operator で、特に $\phi\bar{\phi}\phi = \phi$ を満たす。このような演算子は partial isometry と呼ばれる。つまり、複素スカラー場の場合、partial isometry が非可換ソリトンになる。具体的には $U = S^m$, $V = S^n$ などととれば良い。

また、作用汎関数に運動項が入ったより複雑な場合にもこの構成法は適用できる。この場合単に微分を用いて運動項を作ったとすると $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ 不変性は破れるので、それが回復するように非可換ゲージ場 \hat{A} を加える必要がある。つまり、作用汎関数は共変微分

$$D\phi = \partial\phi - i[\hat{A}, \phi] = -\frac{1}{\sqrt{\theta}}[C, \phi], \quad C \equiv \bar{a} + i\sqrt{\theta}\hat{A} \quad (5.14)$$

を用いて書かれる。これらは $D\phi \mapsto UD\phi\bar{U}$ または $C \mapsto UC\bar{U}$ と共変に変換するので、上のテクニックは ϕ と C の系に対して適用できる。但し、曲率は $F := iF_{z\bar{z}} = \theta^{-1}([C, \bar{C}] + 1)$ であり、共変に変換しないため、作用汎関数には $F - \theta^{-1}$ の組み合わせで入っている必要がある。例としては、自明な解 (ゲージ場は 0) から出発して $U = S^k$ により変換したものの、つまり

$$\begin{aligned} \phi &= \text{Id}_{\mathcal{H}}, \quad C = \bar{a}, \quad \bar{C} = a \\ \xrightarrow{U=S^k} \quad \phi &= 1 - P_k, \quad C = S^k \bar{a} \bar{S}^k, \quad \bar{C} = S^k \bar{a} \bar{S}^k \end{aligned} \quad (5.15)$$

などが考えられる。このように微分項の入った場合の解を exact な非可換ソリトン解という。

5.3 非可換 D-brane への応用

以上のソリトン解の構成法を、Type II string 理論の不安定な D-brane 系からの BPS D-brane 解の構成に応用してみる。即ち、Type IIA では non-BPS D9-brane、Type IIB では D9- $\overline{\text{D9}}$ system を非可換 D-brane と考える。簡単のため B-field は 2 次元のみが 0 でないとする。このとき系は底空間 $\mathbb{R}_\theta^2 \times \mathbb{R}^8$ 上の非可換ゲージ + タキオン理論で、タキオンは IIA の場合は実スカラー場、IIB の場合は複素スカラー場である。これらの系から \mathbb{R}^8 に巻きついた D7-brane 解を作ろうとすれば、余次元 2 の Moyal 平面 \mathbb{R}_θ^2 上のソリトンを考えればよいので、これまでの議論が適用できる²。従って、タキオンの配位が IIA では projection operator、IIB では partial isometry のときに解になる。例えば IIB 理論における \mathbb{R}_θ^2 上の m vortex- n anti-vortex 解は $U = S^n$, $V = S^m$ として変換すると得られる。

$$T = S^m \bar{S}^m, \quad C = S^n \bar{a} \bar{S}^n, \quad \bar{C} = S^m \bar{a} \bar{S}^m \quad (5.16)$$

これは m D7- n $\overline{\text{D7}}$ を意味する。実際、この解のエネルギーは $E = (n+m)T_7$ であり、揺らぎもこの系の場の理論を正しく再現していることが確かめられる。更に、高い余次元 $2n$ の非可換ソリトンも、ABS 構成の類似物が作られている [25]。

このことから、背景に定数の B-field がある場合にも §3 と同様に K -theory による D-brane の分類が可能であることが予想される。実際、上の D9- $\overline{\text{D9}}$ の非可換ソリトン解は、 K -theory の 2 つの定義と対応していることが指摘されている。

- \mathcal{A} を C^* -代数とし、 \mathcal{C} を $M_\infty(\mathcal{A})$ の projection operator の Murray von-Neumann 同値類の集合とする。即ち projection p, q が同値 $p \sim q$ とは、ある partial isometry v により $p = \bar{v}v$, $q = v\bar{v}$ と書ける場合をいう。このとき Grothendieck の構成により得られる Abel 群 $K_0(\mathcal{A}) := S(\mathcal{C})$ を C^* -代数 \mathcal{A} の K 群と呼ぶ。今の例の場合、 \mathcal{A} を D7-brane の余空間 \mathbb{R}_θ^2 上の bounded function 全体 $C_0(\mathbb{R}_\theta^2)$ であると考え、この定義の v が tachyon に対応している。一方、non-BPS D9-brane の非可換ソリトンは projection p に対応すると考えられる³。
- もう一つの K 群の定義は (3.35) の $K(Y) := [Y, \mathcal{F}]$ である。ここで \mathcal{F} は Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の Fredholm 作用素の集合で、その homotopy 同値類で定義される。この場合 D7- $\overline{\text{D7}}$ の worldvolume を $Y = \mathbb{R}^8$

² IIA の場合余次元 even は non-BPS であるから、本当は可換 1 次元分も合わせて余次元 3 のソリトンを考える必要がある。

³ 本当は余次元 3 のソリトンと $K_1(\mathcal{A} \otimes C_0(\mathbb{R}))$ の対応を議論すべきである。

とし、 M の各点上の Chan-Paton 空間と \mathcal{H} を同定する。つまり無限枚の D7- $\overline{D7}$ 系を考えていることになる。余空間 $C_0(\mathbb{R}_\theta^2)$ は Weyl 変換を通して \mathcal{H} に作用する作用素環となる。このとき作用汎関数が有限になるような配位はタキオンが Fredholm 作用素の場合であるから、 $K(Y)$ の元を定めている。一方、IIA のタキオンは (3.34) の $K^1(Y) := [Y, \mathcal{F}^{sa}]$ の元になる。ここで \mathcal{F}^{sa} は self-adjoint Fredholm 作用素の全体を表す。

§3 の言い方をすれば、前者は ABS 構成に対応する補題の部分に相当し、後者は残る D7- $\overline{D7}$ 系の配位全体を考えているので主張 2 に相当する。しかし、可換な D-brane と非可換な D-brane を全て合わせて §3 のように系統的な説明をすることはされていないようである。それは、非可換 D-brane がそもそも bound state であることが原因と思われる。この理解に関係する非可換 D-brane の Chern-Simons term については、最近かなり分かってきている (例えば [27])。ここでは後者の観点が重要であることを指摘するとどめめる。つまり非可換平面 $C_0(\mathbb{R}_\theta^2)$ は Chan-Paton Hilbert 空間に作用する作用素環である、ということを用いると、次の §6 で見るように、低次元の D-brane から高次元の非可換 D-brane を構成することができる。

6 Chan-Paton 因子による非可換 D-brane の構成

この章からはこれまでとは逆に、最低次元の D-brane 系からの高次元の D-brane の構成に関する議論をしていく。これに本質的な役割を果たすのは、Chan-Paton 因子、つまり D-brane が N 枚重なったときに垂直方向のスカラー場同士が持つ $U(N)$ の構造である。これは有限枚 $N < \infty$ の場合は non-Abel 性に過ぎないが、無限枚 $N = \infty$ の場合には無限次元の Chan-Paton 空間が付随し、そこに作用する作用素環として高次元の空間が生み出されることになる。本章ではまず、今まで無視していた Chan-Paton 因子の非可換性を有効理論にどう取り込むかを見る。そして BPS D(-1)-brane 系の配位が実際に非可換平面、つまり高次元の非可換 D-brane を含むことを見る。これは元々 matrix model の枠内で議論されてきたものである [28, 29]。ここでは [30] に従う。

N 枚の BPS D p -brane の有効理論は worldvolume M 上の場の理論として、 $U(N)$ のゲージ場 A_μ ($\mu = 0, 1, \dots, p$) と $U(N)$ の adjoint 表現のスカラー場 ϕ^i ($i = p+1, \dots, 9$) で記述される。Chan-Paton 因子の非可換性とは $[\phi^i, \phi^j] (\neq 0)$ のことである。この項を取り入れた作用汎関数として Myers 作用と呼ばれるものが知られている [31]。これは N 枚の BPS D9-brane の作用汎関数が non-Abelian Dirac-Born-Infeld であることを仮定したときに、Type II string 理論の対称性である T-duality 変換不変性を要請して求めた作用汎関数のことである。 i ($i = p+1, \dots, 9$) 方向に T-duality 変換を行うと D9-brane が D p -brane になり、元の i 方向のゲージ場が $A_i \mapsto \phi^i$ とスカラー場に変換される。従って元の $U(N)$ 曲率から $F_{ij} \mapsto [\phi^i, \phi^j]$ により Chan-Paton 因子の非可換性が現れることになる。具体的には BPS D p -brane の Chern-Simons term S_{CS} (2.11) は、この方法により以下のように変更を受ける (S_{BI} も同様にできるが省略。また $B = 0$ とする)。

$$S_{CS} = T_p \int_M \text{Tr} P (e^{i\phi^i} C) \wedge e^{iF} \quad (6.1)$$

特徴的なのは内部積 $i_\phi i_\phi$ と pull-back の一般化 P である。これらは例えば $M = (\mu, i)$ として時空の 2-form $C^{(2)} = \frac{1}{2} C_{MN} dx^M \wedge dx^N$ に対し、以下で定義される。

$$\begin{aligned} i_\phi i_\phi C^{(2)} &:= \phi^i \phi^j C_{ij} = \frac{1}{2} [\phi^i, \phi^j] C_{ij} \\ P(C_{\mu\nu}) &:= C_{\mu\nu} + 2D_\mu \phi^i C_{i\nu} + D_\mu \phi^i D_\nu \phi^j C_{ij} \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで $D_\mu \phi^i$ は $U(N)$ の共変微分である。また第二式の右辺は x^μ と ϕ^i の (汎) 関数と理解する。従ってこの両者に ϕ^i の non-Abel 性が反映されている。しかしここでは $[\phi^i, \phi^j]$ の効果に注目したいので、共変

微分のない系、つまり 0 次元の系として Type IIB の N BPS D(-1)-brane を考える。この有効理論に含まれる場合は 10 個のスカラー場 Φ^μ ($\mu = 0, 1, \dots, 9$) のみで¹、0 次元ゆえこれらは全て $U(N)$ adjoint 表現の単なる行列である。その作用汎関数も Myers の方法により以下で与えられる。

$$\begin{aligned} S_{BI} &= \frac{2\pi}{g_s} \text{Tr} \sqrt{\det(\delta_\nu^\mu - ig_{\nu\rho}[\Phi^\rho, \Phi^\mu])} \\ S_{CS} &= \frac{2\pi}{g_s} \text{Tr} \left(e^{i\Phi^i \tilde{C}} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここで、(6.2) の P はこの場合第一項のみであるから P を作用させた後の表式を書いている。従って RR-form $\tilde{C} = \sum_n C^{(n)}$ の各成分は Φ^μ の対称な汎関数 $C_{\mu_1 \dots \mu_n}(\Phi)$ で、内部積を施した後 0-form のみ取り出す約束をとる。そうすると「brane within brane」に類似した現象があることがわかる。つまり $\text{Tr}[\Phi^\mu, \Phi^\nu] = 0$ であれば $C^{(0)}$ とのみ結合し、D(-1)-charge を持つことを表すだけであるが、 $\text{Tr}[\Phi^\mu, \Phi^\nu] \neq 0$ なる配位であれば内部積が効いて、高い次数の RR-form $C^{(p)}$ ($p \geq 1$) とも結合する。これは高い次元の Dp -brane との bound state を表す。但し、このような配位は有限の N ではあり得ないことに注意²。

では実際に非可換 Dp -brane がこの系の解として得られることを見る。作用汎関数 (7.1) から得られる運動方程式の自明な解としては $[\Phi^\mu, \Phi^\nu] = 0$ ($\mu, \nu = 0, 1, \dots, 9$) がある。10 個のスカラー場 (の対角成分) は N 個の D(-1)-brane の位置と解釈されることと、 S_{CS} は $C^{(0)}$ しか含まないことから、この解は 10 次元時空に N 個の D(-1)-brane が散らばって存在する配位を表す。一方、 $N = \infty$ の場合には以下の配位もあり得る。

$$\begin{aligned} \Phi^i &= x^i \quad (i = 0, 1, \dots, p), \quad [x^i, x^j] = i\theta^{ij} \\ \Phi^a &= 0 \quad (a = p+1, \dots, 9) \end{aligned} \quad (6.4)$$

ここで $N = \infty$ とは、正確には Chan-Paton 空間が separable Hilbert 空間 \mathcal{H} で、場 Φ^i はその上に作用する作用素と見なしている。これは無限個の D(-1)-brane が $p+1$ 次元の非可換平面 \mathbb{R}_θ^{p+1} を成している配位である。 S_{CS} には $[x^i, x^j]$ と縮約して 0-form になる全ての RR-form との結合があり、これは B-field が $B_{ij} = \theta_{ij}^{-1}$ の場合の (2.11) に一致する。言い換えると非可換 Dp -brane の RR charge に一致する。更に、この解のまわりで次の揺らぎを考える。

$$\Phi^i = x^i + \theta^{ik} \hat{A}_k(x) \quad (6.5)$$

下で \hat{A}_i は非可換 Dp -brane 上の非可換ゲージ場と解釈される。実際、微分が $\partial_j = -i\theta_{jk}^{-1} \text{ad} x^k$ と書けることにより

$$[\Phi^i, \Phi^j] = iQ^{ij} = \theta^{ij} - \theta^{ik} \hat{F}^{kl} \theta^{lj}, \quad \hat{F}_{ij} := \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i - i[\hat{A}_i, \hat{A}_j] \quad (6.6)$$

と曲率を含む表式が得られるが、これを作用汎関数 S_{BI} に代入し、Weyl 逆変換の公式 (5.3) を用いると³

$$\begin{aligned} S_{BI} &= \frac{2\pi}{g_s} \text{Tr}_{\mathcal{H}} \text{Pf} \theta \sqrt{\det(g_{ij} - Q_{ij}^{-1})} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{p+1}{2}}}{G_s} \int d^{p+1}x \sqrt{\det(G_{ij} + \Phi_{ij} + \hat{F}_{ij})_*} \end{aligned} \quad (6.7)$$

となり、確かに非可換 Dp -brane の作用汎関数 (4.11) が再現される。但し、各パラメータは (4.12) で $\Phi_{ij} = -B_{ij}$ としたものである。 S_{CS} についても同様に議論でき、 Φ^a に揺らぎとしてスカラー場 $\Phi^a = \phi^a(x)$ を入れて考えることもできる。以上のことから、 $N = \infty$ D(-1)-branes から非可換 D-brane が作られることが分かった。

¹ 上と違い D(-1)-brane に垂直な方向を μ とおいた。

² $\text{Tr}([\Phi^\mu, \Phi^\nu] \Phi^\rho) \neq 0$ であれば有限の N でも可能である。このときも高次元の D-brane を含み、Myers 効果と呼ばれている。

³ 正確には (5.3) の高次元版。特に $\int d^{p+1}x = (2\pi)^{\frac{p+1}{2}} \text{Pf} \theta \text{Tr}_{\mathcal{H}}$ 。

この構成により、非可換 D-brane の Hilbert 空間と作用素環による記述 (Weyl 変換したもの) は、Chan-Paton Hilbert 空間と D(-1)-brane 上の場に他ならないことが分かった。非可換 D-brane の worldvolume はあくまでも $*$ 積を持つ代数 $C_0(\mathbb{R}_\theta^{p+1})$ であり、§5 の Hilbert 空間は便宜上現れただけであった。ここではそれが Chan-Paton Hilbert 空間として意味付けがされたことになる。この対応の下で、非可換 D-brane の非可換 $U(1)$ ゲージ群は、D(-1)-brane の対称性 $U(\mathcal{H})$ のうち $[x^i, x^j] = i\theta^{ij}$ を保つ部分群であることがわかる。

但し、この構成に対していくつか注意がある。まず、このような構成は単なる $N = \infty$ 極限では実現できないことに注意しておく。その場合の Chan-Paton 因子は $M_\infty(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{K}(\mathcal{H})$ であり $C_0(\mathbb{R}_\theta^{p+1})$ を含むことはできないからである⁴。また、D(-1)-brane から得られるのは、いろいろな記述の自由度 (4.12) のうち特に $\Phi_{ij} = -B_{ij}$ の記述であることに注意する。これは微分が inner derivation であることに関係している。つまり、Chan-Paton 因子から何らかの空間を生み出すには座標と微分の両方が必要であるが、 Φ^μ を一種の座標と解釈している限り、微分は座標で書けるものしか考えられない。言い換えると、この構成では可換な D-brane は作れない。次章ではこれに対する解決を与える。

7 K-matrix theory

前章では BPS D(-1)-brane の Chan-Paton 因子から非可換 Dp -brane を構成した。しかしこれは必ず非可換 (bound state) であり、 Dp -brane charge だけを持つ可換な Dp -brane は作れなかった。これは §3 の状況に似ている。BPS D-brane でのゲージ場の非自明な配位は低い次元の D-brane との bound state は記述しているものの、低い次元の D-brane そのものは作れない。これに対し、不安定な non-BPS D9-brane あるいは $D9\text{-}\overline{D9}$ から出発すると、全ての bound state ではない BPS D-brane を作る事ができた。従って今の場合も、最低次元の系から出発して可換な D-brane を作るには、不安定な 0 次元の D-brane 系を考えれば良いことが予想できる。即ち、この章では

$$\begin{cases} \text{IIA:} & \text{non-BPS D(-1) 系} \\ \text{IIB:} & \text{D(-1)-}\overline{\text{D(-1)}} \text{ 系} \end{cases} \quad (7.1)$$

という系を考え、可換な D-brane を構成する。すると、最低次元の系においても §3 と同様な D-brane の分類を与える Abel 群が対応するはずであるが、それが K -theory ではなく K -homology であることを見る。

なお、この章は [1] の紹介である。そこではこの系に K-matrix theory という名前を付けているが、それは、この系が string 理論の非摂動的な定式化のモデルという物理的な意味を持つ理論であることを期待しているからである。しかしここでは、単に D-brane 系のうちのひとつと思って頂いて構わない。

7.1 spectral triples

まずこれから扱う系について整理しておく。IIA と IIB の両者は同様に議論できるので、主に Type IIA で考える。(7.1) の通り、Type IIA K-matrix theory は無限個の non-BPS D(-1) 系である。この worldvolume は 0 次元であるから、bosonic な場

$$\begin{cases} \Phi^\mu \ (\mu = 0, \dots, 9) : \text{scalar fields,} \\ T : \text{tachyon} \end{cases} \quad (7.2)$$

は、有限個 $N < \infty$ であれば $U(N)$ の adjoint 表現の単なる hermite 行列である。ここでは無限個 $N = \infty$ を定式化するために、無限次元の Hilbert 空間 \mathcal{H} を用意する。また non-BPS D-brane としての \mathbb{Z}_2 -grading も考慮すると、Chan-Paton 空間は $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}_1$ となる。 Φ^μ と T は \mathcal{H} に作用する self-adjoint な

⁴ 対応して $U(\infty)$ と $U(\mathcal{H})$ は全く異なる。

作用素で、それぞれ C_1 の I 、 σ_1 sector に属する。作用汎関数は BPS D(-1)-brane のときと同様、non-BPS D9-brane の作用から Myers の方法で得られる。

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{2}T_{-1} \text{Tr}_{\mathcal{H}} e^{-T^2} \left(1 + \sqrt{\det(\delta_{\nu}^{\mu} - ig_{\nu\rho}[\Phi^{\rho}, \Phi^{\mu}])} + c[\Phi_{\mu}, T][\Phi^{\mu}, T] + \dots \right) \\ S_{CS} &= \sqrt{2}T_{-1} \text{Str}_{\mathcal{H}} \left(e^{-T^2 + i_{\Phi} i_{\Phi} - i_{[\Phi, T]} \sigma_1} \tilde{C} \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

ここで $\text{Str}_{\mathcal{H}}$ は C_1 の (odd) supertrace と \mathcal{H} の trace の双方を意味する。

この作用汎関数を BPS D(-1)-brane の場合と比べると、タキオンが入っている点が大きく異なる。タキオンポテンシャルは $V(T) = \sqrt{2}T_{-1} e^{-T^2}$ で、 $T = \pm 1$ で最小となるよう場の再定義 $\tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$ を行うと double well 型のポテンシャルになる。重要なのはタキオン T が $N = \infty$ をコントロールしている点である。通常の matrix model では有限の N で理論を定式化し、 $N \rightarrow \infty$ の極限を手で課すのだが、物理的な情報は極限操作に含まれている場合が多い。一方、このモデルでは始めから無限次元で、タキオン凝縮の仕方によっては有限行列になり、そのサイズが決まるという構造をしている。例えば、ほとんどの non-BPS D(-1)-brane が真空に消滅する場合、 e^{-T^2} の spectrum が有限個を除いて 0 (つまりコンパクト作用素) となり、有限行列を再現する。

また Chern-Simons term に関しては、タキオンの存在により内部積 $i_{[\Phi, T]}$ が加わっている点が重要である。この項の存在が §6 とは違い、可換な D-brane の配位を可能にしている。実際、平面 \mathbb{R}^{p+1} 上に広がった可換な BPS D p -brane の配位は、ABS 構成と類似の方法で与えられる [32]。まず Hilbert 空間は $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{p+1}) \otimes S$ とする。ここで S を $SO(p+1)$ の spinor 表現の $2^{p/2}$ 次元ベクトル空間とした。このとき、 \mathcal{H} に作用する作用素として、

$$\begin{aligned} T &= uD = u \sum_{\alpha=0}^p \hat{p}_{\alpha} \otimes \gamma^{\alpha}, \\ \Phi^{\alpha} &= \hat{x}^{\alpha} \otimes 1 \quad (\alpha = 0, \dots, p), \quad \Phi^i = 0 \quad (i = p+1, \dots, 9) \end{aligned} \quad (7.4)$$

という配位をとる。ここで、 \hat{x}^{α} は関数 x^{α} の掛け算、 \hat{p}_{α} は微分作用素 $-i\partial/\partial x^{\alpha}$ として $L^2(\mathbb{R}^{p+1})$ に作用していて、 $[\hat{x}^{\alpha}, \hat{x}^{\beta}] = [\hat{p}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = 0$, $[\hat{x}^{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = i\delta_{\beta}^{\alpha}$ という代数を成す。また u はパラメータで、 γ^{α} は S に作用するガンマ行列である。この配位は $u \rightarrow \infty$ で BPS D p -brane を表す。 Φ^{μ} 同士は可換なので、非可換 D-brane の場合とは異なり、可換な平面 \mathbb{R}^{p+1} あるいはその関数環 $C_0(\mathbb{R}^{p+1})$ を生成している¹。一方、 T は \mathbb{R}^{p+1} 上の Dirac 作用素で、非可換 D-brane と違い微分作用素が座標とは独立に存在することに注意する。この配位を Chern-Simons term に代入すると、 $i_{[\Phi, T]}$ が $(p+1)$ 回 \tilde{C} に作用したものしか残らないため、

$$\begin{aligned} S_{CS} &= \sqrt{2}T_{-1} u^{p+1} \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(\gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^p C_{01\dots p}(x) e^{-u^2 T^2} \right) \\ &= \sqrt{2}T_{-1} u^{p+1} 2^{p/2} \int d^{p+1}k \langle k | C_{01\dots p}(x) e^{-u^2 k^2} | k \rangle \\ &= T_p \int d^{p+1}x C_{01\dots p}(x) \end{aligned} \quad (7.5)$$

となり、確かに BPS D p -brane の Chern-Simons term を表している。非可換 D-brane の構成では Weyl 逆変換から積分が現れたのに対し、ここではタキオンが Dirac 作用素であることが効いて、 $\text{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-T^2})$ から $(p+1)$ 次元の体積積分が出る。まとめると、K-matrix theory では、高い次元の可換な (bound state ではない) D-brane を構成することができる。

この例を一般化すると、この理論の配位は一般に spectral triple で与えられることがわかる。Spectral triple は $(\mathcal{H}, \hat{A}, T)$ の 3 つ組みで定義される。ここで \mathcal{H} は separable な Hilbert 空間、 \hat{A} は \mathcal{H} に作用する

¹ 無限遠で 0 となる元のみ考えると $C_0(\mathbb{R}^{p+1})$ だが、 x^{α} 自身は $C_0(\mathbb{R}^{p+1})$ の元ではない。

C^* -代数²、 T は \mathcal{H} 上の self-adjoint な作用素で、

$$(T - \lambda)^{-1} \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } \forall \lambda \notin \mathbb{R}, \quad [\hat{a}, T] \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \text{ for } \forall \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}} \quad (7.6)$$

を満たすものである。非可換微分幾何において、spectral triple は非可換な Riemann 多様体の役割を果たす [33]。特に、可換な Riemann 多様体の情報は canonical triple $(\mathcal{H}, \hat{\mathcal{A}}, T) = (L^2(M, S), C^\infty(M), D)$ から再現されることが知られている。ここで $C^\infty(M)$ は閉 Riemann spin 多様体上の ∞ 級の関数環で、 $L^2(M, S)$ は M 上の spin bundle S の L^2 -section 全体、 D は Levi-Civita connection から得られる Dirac 作用素を表す。Spectral triple はこの非可換版である。位相空間としての情報は C^* -代数 $\hat{\mathcal{A}}$ に完全に含まれている。例えば M 上の点 $p \in M$ は character と呼ばれる $\hat{\mathcal{A}}$ 上の関数 $\phi_p : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ に相当する。また、 T はそこに metric の情報を与えている。例えば距離は 2 つの状態 ϕ_1, ϕ_2 に対し、

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{a \in \hat{\mathcal{A}}} \left\{ |\phi_1(a) - \phi_2(a)| \mid \| [T, a] \| \leq 1 \right\} \quad (7.7)$$

で与えられる。実際 canonical triple に対し状態を character とすると、これは M の geodesic distance に一致する。また、 M の次元などの情報も T に含まれている。

さて、我々の場合、 \mathcal{H} を non-BPS D(-1)-brane の Chan-Paton Hilbert 空間 ($\hat{\mathcal{H}}$ のうちの) \mathcal{H} 、 $\hat{\mathcal{A}}$ をスカラー場 Φ^μ の生成する C^* 代数、 T をタキオン場 T と同定すると、これらは spectral triple $(\mathcal{H}, \hat{\mathcal{A}}, T)$ を成す。これは概ね次のような議論から来る。作用汎関数を評価すると

$$\begin{aligned} |S_0| &\leq \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-T^2} \right) (1 + \| [\Phi^\mu, \Phi^\nu] \|^2 + \| [\Phi^\mu, T] \|^2 + \dots) \\ |S_{CS}| &\leq \sum_n \frac{1}{n!} \| C_{\mu_1 \dots \mu_n}(\Phi) \| \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-T^2} \right) \prod_{\{\mu_k\}} \| [T, \Phi^{\mu_k}] \| \text{ or } \| [\Phi^{\mu_k}, \Phi^{\mu_l}] \| \end{aligned} \quad (7.8)$$

のような不等式が得られる。ここで $\| \cdot \|$ は作用素のノルムで、第二式は μ_k の足の適当な縮約を表す。従って、作用が有限となる配位として以下を満たすものが考えられる³。

$$(T - \lambda)^{-1} \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } \forall \lambda \notin \mathbb{R}, \quad [\Phi^\mu, T], [\Phi^\mu, \Phi^\nu], \forall C(\Phi) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \quad (7.9)$$

$C(\Phi)$ は Φ^μ の任意の対称関数を意味する。従ってこれを上の同定に当てはめると spectral triple の条件 (7.6) になる。なお、 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は \mathcal{H} 上の有界線形作用素の成す C^* -代数を表し、 $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ はコンパクト作用素の集合で $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の中では「無限小」を意味する。よって特に T は条件から非有界作用素である。これは物理的には、 T の spectrum の殆どが真空 $T = \pm\infty$ に集中することを意味する。一方、規格化したタキオンは有界作用素 $\tilde{T} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ である。これを用いると、同じ条件 (7.6) は

$$\tilde{T}^2 - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H}), \quad [\hat{a}, \tilde{T}] \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } \forall \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}} \quad (7.10)$$

とも書ける。今度は \tilde{T}^2 の spectrum の殆どが真空 $\tilde{T} = \pm 1$ に集中する条件である。この表式は次節 §7.2 で用いる。

従って K-matrix theory の配位は、非可換微分幾何的に表現された多様体を表していることになる。スカラー場 Φ^μ の spectrum は元々各 non-BPS D(-1)-brane の位置を表していたが、この無限個の「点」から成る位相空間を Φ^μ の生成する C^* -代数 $\hat{\mathcal{A}}$ として表現している。そしてタキオン T の凝縮は、点集合としての空間を一つの多様体に行っている。この多様体を、高い次元の D-brane の worldvolume M と解釈するわけである。 $\hat{\mathcal{A}}$ が非可換環の場合は、非可換 D-brane が対応する。

もちろん D-brane には worldvolume M だけではなく、Chan-Paton bundle E (ゲージ理論) が付随しているが、spectral triple にはその情報も含まれている。一般に、ユニタリ作用素 $U(\mathcal{H})$ の生成する

² 簡単のため $\hat{\mathcal{A}}$ は unital と仮定するが、non-unital への拡張も可能である。(7.4) は non-unital な例である。

³ 作用 S_0 を厳密に知らないとは有限となる必要十分条件かはわからないが、ここではこの条件を満たす配位のみ考える。

$\widehat{\mathcal{A}}$ の自己同型群 $\text{Aut}(\widehat{\mathcal{A}})$ の作用は、同値な spectral triple を与え、ゲージ変換と解釈される⁴。また、 $\widehat{\mathcal{A}}$ と森田同値な $M_N(\widehat{\mathcal{A}})$ まで含めて spectral triple の同値性を考えると、これは $U(N)$ のゲージ変換を含む。具体的には、 M を記述する canonical spectral triple に Chan-Paton bundle E を含めたものは $(\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{A}}, T) = (L^2(M, S \otimes E), C^\infty(M), D_E)$ で与えられる。ここで D_E は $S \otimes E$ 上の connection から得られる twisted Dirac 作用素である。

Type IIB K-matrix theory の場合も同様な議論ができる。これは無限個の $D(-1)-\overline{D}(-1)$ 系で、その上のはスカラー場のペア $\Phi^\mu, \overline{\Phi}^\mu$ とタキオン場 T から成る。Chan-Paton Hilbert 空間 $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ が even superspace の構造を持つ他は IIA と同様である。特に、以下のような表示

$$\widehat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi}^\mu = \begin{pmatrix} \Phi^\mu & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}^\mu \end{pmatrix}, \quad \widehat{F} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\widetilde{T}} \\ \widetilde{T} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

をとると IIA との類似は明らかである。ここで規格化したタキオンを用いているので $\widehat{F} \in \mathbb{B}(\widehat{\mathcal{H}})$ であることに注意。さて、 Φ^μ と $\overline{\Phi}^\mu$ の生成する代数は一般には異なっているが、同一の $\widehat{\mathcal{A}}$ である場合、その配位は spectral triple と解釈される。このとき条件 (7.10) に対応するのは

$$\widehat{F}^2 - 1 \in \mathbb{K}(\widehat{\mathcal{H}}), \quad [\widehat{a}, \widehat{F}] \in \mathbb{K}(\widehat{\mathcal{H}}) \text{ for } \forall \widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}} \quad (7.12)$$

であり、IIA の場合と (grading を除いて) 一致する。

7.2 K-homology

全節では K-matrix theory の配位が一般に spectral triple であり、高次元の D-brane をその中に含んでいることを見たが、ここではそれらの topological な分類を考える。つまり、ある時空多様体 X に対し、そこに埋め込まれている worldvolume が $M(\hookrightarrow X)$ の D-brane を分類する。この埋め込みを非可換空間の場合にも適用できるように代数的に表現すると次のようになる。「時空の C^* -代数 \mathcal{A} に対し、 $*$ -準同型写像 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ で与えられる $\widehat{\mathcal{A}} = \text{Im}\phi \simeq \mathcal{A}/\ker\phi$ は \mathcal{A} に埋め込まれた C^* -代数である。」従って、時空の C^* -代数 \mathcal{A} を固定し、いろいろな worldvolume $\widehat{\mathcal{A}}$ を考える代わりにいろいろな $*$ -準同型 ϕ を動かして分類が行える。例えば時空が可換な $X = \mathbb{R}^{10}$ だとすると、埋め込まれた D-brane も可換な worldvolume を持つものに限られる。上の例 (7.4) は、 $\mathcal{A} = C_0(\mathbb{R}^{10})$ の生成元を $\{x^\alpha, x^i\}$ としたとき、 $\phi(x^\alpha) = \hat{x}^\alpha, \phi(x^i) = 0$ で ϕ を指定した場合に当たる。

D-brane は実際は $\widehat{\mathcal{A}}$ だけではなく spectral triple $(\widehat{\mathcal{A}}, \mathcal{H}, T)$ で指定されるので、結局時空 \mathcal{A} に埋め込まれた D-brane は triple $(\mathcal{H}, \phi, \widetilde{T})$ で指定される。この分類は \mathcal{A} の analytic K-homology として知られている⁵。実際、この Abel 群は以下のように定義される [34]。まず、 \mathcal{A} 上の odd Fredholm module は (\mathcal{H}, ϕ, F) の 3 つ組みで与えられる。ここで、 \mathcal{H} は separable Hilbert 空間、 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ は $*$ -準同型、 F は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 上の self-adjoint な作用素で

$$F^2 - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H}), \quad [F, \phi(a)] \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } \forall a \in \mathcal{A} \quad (7.13)$$

を満たすものである。よってこれは Type IIA K-matrix theory の配位を表す triple $(\mathcal{H}, \phi, \widetilde{T})$ に他ならない。つまり \mathcal{H} は Chan-Paton Hilbert 空間、 ϕ は Φ^μ の生成する worldvolume $\widehat{\mathcal{A}} = \text{Im}\phi$ を表し、 F は規格化したタキオン \widetilde{T} で、これらの満たす関係 (7.10) は (7.13) に一致する。同様に、even Fredholm module $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\phi}, \widehat{F})$ は $\widehat{\mathcal{H}}$ が \mathbb{Z}_2 -graded Hilbert 空間である他は上と同様に定義される。従ってこれは Type IIB K-matrix theory の配位を表す triple $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\phi}, \widehat{F})$ に他ならない。2 つの Fredholm module の直和 $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \phi_0 \oplus \phi_1, F_0 \oplus F_1)$

⁴ 詳しくは [33]。内部自己同型 $\text{Inn}(\widehat{\mathcal{A}})$ は $U(1)$ ゲージ変換、外部自己同型 $\text{Out}(\widehat{\mathcal{A}})$ は diffeomorphism と同定される。

⁵ ここで規格化したタキオンを用いているのは、analytic K-homology の標準的な定義に合わせるためである。元のタキオン T を用いる unbounded Fredholm module によっても同じ群が定義される。

は再び Fredholm module であるため、Fredholm module の全体を同値関係で割ることにより、analytic K -homology 群 $K^i(\mathcal{A})$ ($i = 0, 1$) が定義される。

$$\begin{aligned} K^1(\mathcal{A}) &= \{(\mathcal{H}, \phi, F) : \text{odd Fredholm module over } \mathcal{A}\} / \sim, \\ K^0(\mathcal{A}) &= \{(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\phi}, \widehat{F}) : \text{even Fredholm module over } \mathcal{A}\} / \sim \end{aligned} \quad (7.14)$$

同値関係は以下の 3 種類で生成され⁶、物理的にも同一視されるべきものである。

- unitary equivalence: 2 つの Fredholm module $(\mathcal{H}_i, \phi_i, F_i)$ ($i = 0, 1$) がユニタリ同値とは、各 ϕ_i 、 F_i を繋ぐユニタリ作用素が $\mathbb{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ にある場合をいう。これは物理的にはゲージ同値性に他ならない。
- operator homotopy: これは $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$ 、 $\phi_0 = \phi_1$ かつ F_0 と F_1 を繋ぐノルム連続な経路が存在する場合を指し、タキオンの homotopic な連続変形を意味する。
- addition of a degenerate Fredholm module: 退化な Fredholm module とは、(7.13) のうち厳密に $F^2 - 1 = [F, \phi(a)] = 0$ が成り立つものを指す。つまり真空と区別がつかない配位である。よって直和してその配位を生成させても何も変わらない。

以上から、 K -matrix theory の配位のうち、固定した時空 \mathcal{A} に埋め込まれる配位は analytic K -homology $K^i(\mathcal{A})$ で分類されることが結論される。但し、これが BPS D-brane の分類であることは直感的には分かりにくい⁷。以下の議論はそれをサポートするものである。

まず §3 の K -theory との関係を見る。時空 $X = \mathbb{R}^{10}$ 中の $M = \mathbb{R}^{p+1}$ を worldvolume に持つ Dp -brane の RR-charge は $K^i(\mathbb{R}^{9-p}) \simeq K_i(C_0(\mathbb{R}^{9-p}))$ で測られた。ここで IIA は $i = 1$ (3.31)、IIB は $i = 0$ (3.15) である。一方、同じ Dp -brane charge は K -homology では $K^i(C_0(\mathbb{R}^{p+1})) \simeq K_i(\mathbb{R}^{p+1})$ で分類される。実際、

$$K^1(C_0(\mathbb{R}^{p+1})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p : \text{even}) \\ 0 & (p : \text{odd}), \end{cases} \quad K^0(C_0(\mathbb{R}^{p+1})) = \begin{cases} 0 & (p : \text{even}) \\ \mathbb{Z} & (p : \text{odd}) \end{cases} \quad (7.15)$$

は既知の D-brane の spectrum を再現する。 K -theory では余空間 \mathbb{R}^{9-p} 、 K -homology では worldvolume \mathbb{R}^{p+1} という違いがあることに注意する。この両者は $X = \mathbb{R}^{10}$ における Poincaré dual の関係にあるため、その分類が一致するのである。一般に n 次元 compact 多様体 X に対し、

$$\begin{array}{ccccc} K\text{-homology} & K_i(X) & \simeq & K^{n-i}(X) & K\text{-theory} \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{homology} & H_i(X; \mathbb{Z}) & \simeq & H^{n-i}(X; \mathbb{Z}) & \text{cohomology} \end{array} \quad (7.16)$$

なる関係が成り立つ。ここで下の段は通常の Poincaré dual であり、上の段はその K 理論的拡張で K -dual と呼ばれる。また上下の関係は Chern-character map で与えられ、 \mathbb{Q} 係数の場合は Chern 同型を表す。主張 1 の見方で言うと、例えば Type IIA の場合、左側は non-BPS D(-1) 系の配位を、右側は non-BPS D9-brane 系の配位を表している。よって、物理的にはこの duality は、D-brane がどちらの系から作られるかには依らないことを意味している。従って、 K -homology による分類も D-brane を分類していることになる。

上で K -homology による分類が worldvolume \mathbb{R}^{p+1} に直接関係していたのは、(7.16) が示すように、 K -homology が反変な関手で homology の一般化である点に起因している。これは topological K -homology

⁶ 同値関係のおき方にはかなりの任意性がある。実際この 3 つは独立ではない。詳しくは [34] を参照。

⁷ そのためには同値類に必ず一つ D-brane の配位があることを示す必要がある。

を考えるとより明らかになる。時空が可換な C^* 代数 $\mathcal{A} = C_0(X)$ の場合、以下のように別の K -homology 群の定義ができる [35]。

$$K_0(X) = \{(M, E, \varphi) : \text{even } K\text{-cycle over } X\} / \sim, \quad (7.17)$$

$$K_1(X) = \{(M, E, \varphi) : \text{odd } K\text{-cycle over } X\} / \sim \quad (7.18)$$

ここで、 X 上の K -cycle は triple (M, E, φ) で定義され、 M は閉 Spin^c 多様体、 E は M 上の複素ベクトルバンドル、 φ は M から X への連続写像を表す。 M が偶数 (奇数) 次元のとき even(odd) K -cycle と呼ぶ。2 つの K -cycle の disjoint union $(M_0, E_0, \varphi_0) \cup (M_1, E_1, \varphi_1)$ は再び K -cycle である。また同値関係は bordism、direct sum、vector bundle modification という 3 種から生成される⁸。 E が無い場合の $\{(M, \varphi)\} / \sim$ は通常 homology であるから、上で述べたように、この Abel 群は homology に E の情報を加えた一般化になっている。注目すべきは、この一般化がちょうど D-brane の worldvolume M に Chan-Paton bundle E を加えたことに相当している点である。つまり K -cycle (M, E, φ) は BPS D-brane の情報 (2.6) に一致する。従って、topological K -homology は Type II 理論の D-brane をより明確な形で分類している。これは analytic K -homology $K^i(C_0(X))$ と同型であるから、 K -matrix theory の配位の分類も D-brane を分類していることになる。

更に、BPS D-brane の有効理論の Chern-Simons term に関してもよりシンプルな解釈ができる。上の (7.16) の Chern-character map とは

$$\text{ch.} : K_0(X) \rightarrow H_{\text{even}}(X; \mathbb{Q}), \quad (7.19)$$

$$\text{ch.} : K_1(X) \rightarrow H_{\text{odd}}(X; \mathbb{Q}) \quad (7.20)$$

のことであるが、topological K -homology の代表元に対してこの写像は

$$\text{ch.}(M, E, \varphi) = \varphi_*(\text{ch}(E) \cup \text{Td}(TM) \cap [M]) \quad (7.21)$$

で定義される。この X の homology 群の元と RR-form の形式和 $C = \sum C^{(p+1)}$ との最小結合は、単に C を積分したものであるから

$$S_{CS} = \int_{\text{ch.}(M, E, \varphi)} C \quad (7.22)$$

$$= \int_M \varphi^* C \wedge \text{ch}(E) \wedge \text{Td}(TM) \quad (7.23)$$

となり、BPS D-brane の Chern-Simons term を再現している⁹。つまり元の M との最小結合に E の情報を加えたものが Chern-Simons term に他ならない。これまでは BPS D-brane の Chern-Simons term と K -theory を関係付けるには、主張 2 でやった K -群の準同型を cohomology で見るということをやっていた。つまり $\text{ch}(E)$ を $K(M)$ の Chern character $\text{ch}(E) - \text{ch}(I^N)$ と考え、それを Poincaré duality を用いて $K(X)$ の Chern character に写し、 X 上で cohomology の内積として RR-form と結合させる。しかしそれは結局 K -homology との対応を dual に見ただけである。つまり BPS D-brane と直接的な対応があるのは K -homology で、 K -theory とは K -dual を通じて間接的に対応があるに過ぎないと言える。

7.3 KK-theory

この節では K -theory と K -homology を含む一般化について概観する。まずこれまでの議論を振り返る。最初に §2§3 では、全ての次元の BPS D-brane を時空を埋める最大次元の系から構成することを行った。

⁸ 説明は省略する。詳細は [35] を参照。同値関係の物理的な解釈は [1]。

⁹ 簡単のため X の topology に関する補正項は省略している。これを考慮するには (7.21) に $\sqrt{\hat{A}(TX)}$ を掛けて変形する。

Type IIA の non-BPS D9-brane 系、Type IIB の D9- $\overline{\text{D9}}$ 系の配位は K -theory で分類される。この系の不安定性を表すタキオン場が ABS 型の $T = \gamma \cdot x$ という配位に凝縮すると、10 次元 worldvolume が $q+1$ 次元に局所化し、BPS D q -brane が後に残る。ここで γ は D q -brane の余空間 \mathbb{R}^{9-q} の gamma 行列である。一方、この章 §7 では D-brane を最小次元の系、つまり Type IIA の場合 non-BPS D(-1)-brane 系、Type IIB の場合 D(-1)- $\overline{\text{D(-1)}}$ 系から構成した。この場合は Chan-Paton 空間が無限次元であることから、Dirac 演算子型の $T = \tilde{\gamma} \cdot p$ なる配位が考えられて、これが 0 次元 worldvolume から $q+1$ 次元への拡大の効果を持つため、D q -brane を表す。ここで $\tilde{\gamma}$ は \mathbb{R}^{q+1} の gamma 行列である。これらは K -homology によって分類される。そして両者の分類は (K -dual の意味で) 一致している。このように、高次元からの構成と低次元からの構成が一致するという描像は、元々非可換 D-brane がどちらからも構成できるという §4§5§6 での理解がヒントになっていた。

さて、BPS D q -brane を構成するのであれば、最大次元や最小次元に限らずとも中間次元の不安定な系から出発しても可能である。即ち、無限個の non-BPS D p -brane 系 (IIA の場合 p : odd、IIB の場合 even) または D p - $\overline{\text{D}p}$ 系 (IIA の場合 p : even、IIB の場合 odd) において、

$$T = \gamma \cdot x + \tilde{\gamma} \cdot \hat{p} \quad (7.24)$$

のような配位で D q -brane を表すことができる。これは worldvolume の一部に局所化し、垂直方向へは拡大する配位である。これまでの議論から、この中間次元の不安定系を分類する理論は KK -theory であると予想される。 KK -theory $KK^i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ($i = 0, 1$) は C^* 代数のペア \mathcal{A}, \mathcal{B} から定義される Abel 群で、代表元は Kasparov module と呼ばれる Hilbert $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -bimodule で与えられる。これはラフに言えば空間 \mathcal{B} でパラメータ付けされた (even or odd) Fredholm module のことで、§7.2 の Hilbert 空間 \mathcal{H} や $\hat{\mathcal{H}}$ を、 \mathcal{B} 上の Hilbert 空間 (right \mathcal{B} -module) に置き換えれば、analytic K -homology とほぼ同様に定義される¹⁰。従って \mathcal{B} が一点 \mathbb{C} の時、 KK -theory は \mathcal{A} の K -homology に一致する。即ち $KK^i(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = K^i(\mathcal{A})$ 。一方、 \mathcal{A} が一点 \mathbb{C} の時は \mathcal{B} の K -theory に帰着する。即ち $KK^i(\mathbb{C}, \mathcal{B}) = K_i(\mathcal{B})$ 。特に $\mathcal{B} = C_0(X)$ のときには (3.34)(3.35) の K -theory の定義に一致する¹¹。よって KK -theory は両者の一般化である。そしてこの群を上記の D-brane 系の配位の分類理論と考える。簡単のため時空を直積空間 $X = N \times M$ とする。このとき $(C_0(N), C_0(M))$ 上の odd Kasparov module は、worldvolume が M で transverse 空間が N の non-BPS D p -brane 系の配位と同定される。つまり M 上の無限次元 Chan-Paton bundle の各 fiber \mathcal{H} に $C_0(N)$ が作用していて、タキオンは M 上 Fredholm 作用素値の場である。同様に even Kasparov module は D p - $\overline{\text{D}p}$ 系と同定される。しかし、どの系から出発しても作られる D-brane は同じである。これを反映して、(7.16) を一般化した以下の同型

$$KK^i(C_0(N), C_0(M)) \simeq KK^{i+m}(C_0(X), \mathbb{C}) \simeq KK^{i+n}(\mathbb{C}, C_0(X)) \quad (7.25)$$

が成り立つ。ここで $n = \dim N, m = \dim M$ で添え字は mod 2 とする。以上のように、BPS D-brane の構成と分類は KK -theory という観点で統一的にまとめることができる。

謝辞

このノートは研究会「開 Calabi-Yau 多様体への代数幾何と弦理論からのアプローチ」における講演を基にしています。発表の機会を与えて下さった世話人の松下、泰泉寺両氏、および実り多い議論をして下さった参加者の方々に感謝致します。また、この原稿を読み、いろいろな指摘を頂いた細道、岸本、百武、浜中各氏にも感謝致します。最後に、発表内容の後半は杉本、寺嶋両氏との共同研究に基づいています。

¹⁰ 詳細は [34] を参照。Kasparov module には様々な表現があり、この定義は Fredholm picture と呼ばれる。

¹¹ §3.2 で別の定義を与えたのは、これが理由である。

参考文献

- [1] T. Asakawa, S. Sugimoto and S. Terashima, “D-branes, Matrix Theory and K-homology,” hep-th/0108085.
- [2] E. Witten, “Noncommutative Geometry and String Field Theory”, Nucl. Phys. **B268** (1986) 253.
- [3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, “A Large-N Reduced Model as Superstring,” Nucl. Phys. **B498** (1997) 467, hep-th/9612115.
- [4] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, “M Theory as a Matrix Model: A Conjecture,” Phys. Rev. **55** (1997) 5112, hep-th/9610043.
- [5] J. Polchinski, *String Theory I,II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998),
“TASI Lectures on D-Branes,” hep-th/9611050.
I. V. Vaneva, “Introductory Lectures on D-Branes,” hep-th/0109029.
- [6] A. Sen, “Non-BPS States and Branes in String Theory,” hep-th/9904207.
J. H. Schwarz, “TASI Lectures on Non-BPS D-Brane Systems,” hep-th/9908144.
- [7] K. Olsen and R. J. Szabo, “Constructing D-Branes from K-Theory,” Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 889, hep-th/9907140.
- [8] D. Quillen, “Superconnection and the Chern character,” Topology **24** (1985) 89.
- [9] P. Kraus and F. Larsen, “Boundary String Field Theory of the DDbar System,” Phys. Rev. **D63** (2001) 106004, hep-th/0012198.
T. Takayanagi, S. Terashima and T. Uesugi, “Brane-Antibrane Action from Boundary String Field Theory,” JHEP **0003** (2001) 019, hep-th/0012210.
- [10] E. Witten, “D-branes and K-theory,” JHEP **9812** (1998) 019, hep-th/9810188.
- [11] M. F. Atiyah, *K-Theory* (W. A. Benjamin, 1967).
- [12] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, “Clifford modules,” Topology **3** (1964) 3
- [13] P. Horava, “Type IIA D-Branes, K-Theory, and Matrix Theory,” JHEP **9901** (1999) 016, hep-th/9811028.
- [14] E. Witten, “Overview Of K-Theory Applied To Strings,” Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 693, hep-th/0007175.
- [15] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, “Noncommutative Field Theory,” Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977, hep-th/0106048.
- [16] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, “Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori,” JHEP **9802** (1998) 003, hep-th/9711162.
- [17] N. Seiberg and E. Witten, “String Theory and Noncommutative Geometry”, JHEP **9909** (1999) 032, hep-th/9908142.
- [18] T. Asakawa and I. Kishimoto, “Comments on Gauge Equivalence in Noncommutative Geometry,” JHEP **9911** (1999) 024, hep-th/9909139.

- [19] N. A. Nekrasov, “Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories,” hep-th/0011095
- [20] M. Kontsevich, “Deformation quantization of Poisson manifolds, I,” q-alg/9709040.
- [21] A. S. Cattaneo and G. Felder, “A path integral approach to the Kontsevich quantization formula,” Commun. Math. Phys. **212** (2000) 591, math.QA/9902090.
- [22] B.V. Fedosov, “A simple geometrical construction of deformation quantization,” J. Diff. Geom. **40** (1994) 213-238. *Deformation quantization and index theory* (Akademie-Verl., Berlin, 1996).
- [23] T. Asakawa and I. Kishimoto, “Noncommutative Gauge Theories from Deformation Quantization,” Nucl. Phys. **B591** (2000) 611, hep-th/0002138
- [24] J.A. Harvey, “Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes,” hep-th/0102076.
- [25] J.A. Harvey and G. Moore, “Noncommutative Tachyons and K-Theory,” hep-th/0009030.
- [26] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C*-algebras: a friendly approach* (Oxford University Press, 1993).
- [27] H. Liu and J. Michelson, “Ramond-Ramond Couplings of Noncommutative D-branes,” Phys. Lett. **B518** (2001) 143, hep-th/0104139.
- [28] N. Ishibashi, “ p -branes from $(p - 2)$ -branes in the Bosonic String Theory,” Nucl. Phys. **B539** (1999) 107, hep-th/9804163.
- [29] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, “Noncommutative Yang-Mills in IIB Matrix Model,” Nucl. Phys. **B565** (2000) 176, hep-th/9908141.
- [30] S. Mukhi and N. V. Suryanarayana, “Ramond-Ramond Couplings of Noncommutative Branes,” hep-th/0107087.
- [31] R.C. Myers, “Dielectric-Branes,” JHEP **9912** (1999) 022, hep-th/9910053.
- [32] S. Terashima, “A Construction of Commutative D-branes from Lower Dimensional Non-BPS D-branes,” JHEP **0105** (2001) 059, hep-th/0101087
- [33] A. Connes, *Noncommutative geometry* (Academic Press, 1994).
See also, “A Short Survey of Noncommutative Geometry,” hep-th/0003006. “Noncommutative Geometry Year 2000,” math.QA/0011193.
- [34] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras* (Cambridge, 1998).
- [35] P. Baum and R.G. Douglas, “K-homology and Index Theory,” Proc. of Symposia in Pure Mathematics, **38** (1982) 117.