Seiberg-Witten可積分系と有理楕円曲面の周期

清水勇二　(国際基督教大学 理学科)

March 11, 2002

1 Introduction

$4D N=2 SU(2)$ 超対称 Yang-Mills(SYM) 理論の厳密解を求めた Seiberg と Witten の仕事 [SW] において次の楕円曲線が導入された。

$$y^2=(x^2-1)(x-u) \quad (u \neq \pm 1, \infty)$$

物理的には $N=2$ の多重項のスカラー場の (2乗の) 真空期待値として導入されたパラメータ u は、この楕円曲線のモジュライを記述する。厳密解の記述では、彼等によって導入された次の有理型微分が主要な役割を担う。

$$\lambda=\frac{ydx}{1-x^2}=u\frac{dx}{y}-\frac{xdx}{y}$$

この Seiberg-Witten 微分 $\lambda=\lambda_{SW}$ をもとにした

$$a=\int_\alpha \lambda,\ a_D=\int_\beta \lambda$$

なる量が、代数的可積分系 (cf.[Do]) を形成する。(α, β は上の楕円曲線の (1次) ホモロジーの symplectic な基底) SYM 理論の厳密解は、a, a_D に対して

$$\frac{\partial F}{\partial a}=a_D$$

と定まる prepotential $F=F(u)$ によりすべて記述される。例えば、この楕円曲線のモジュライは

$$\tau=\frac{da_D}{du}\Big/\frac{da}{du}=\frac{da_D}{da}$$

と与えられる。

以上は物質場のない SYM 理論の話だが、物質場のある場合も同様に扱われる。その場合、Seiberg-Witten 微分は第3種微分の成分を含み、(1位の) 極での留数が質量 (mass) に対応する。

Seiberg と Witten の仕事は、$SU(2)$ 以外の A,D 型のゲージ群にもすぐに拡張された。その場合、楕円曲線の役割はスペクトル曲線が担う。E 型の場合は、拡張は一筋縄では行かず、Minahan-Nemeschansky [MN] により、楕円曲線上に Seiberg-Witten 微分が求められた。Lerche-Warner [LW] は、type IIB の弦理論の K3 曲面によるファイバー構造をもつ 3 次元 Calabi-Yau 多様体によるコンパクト化と E_6 の場合のスペクトル曲線に相当す

る曲線を関係づけた。野口-寺島-梁 [NTY] は F 理論の楕円 K3 曲面上のコンパクト化をD3-brane によるプローブを使って調べ、D3-brane と [MN] の楕円曲線を関係づけた。実際には、K3 曲面ではなく有理楕円曲面 $\pi : X \to \mathbf{P}^1$ とその断面により物質場を含む E 系列の SYM 理論を構成した。そこで Seiberg-Witten 微分とは、(π の) ファイバー方向の相対 1 次微分形式として現れる。また、彼等の使った有理楕円曲面は、(底空間の) 無限遠のファイバーが小平による特異ファイバーの分類の記号で II 型である条件がついていた。

この講演では、野口-寺島-梁の仕事を無限遠のファイバーが非特異である場合に拡張して、物質場を含む E 系列の SYM 理論を構成するための有理楕円曲面のモジュライと周期の理論を記述する。また、Seiberg-Witten 微分の概念を定式化して E 系列の場合の可積分系を構成する。

モジュライの構成に必要な標 (marking) の概念を 2.1 で導入し、複素構造の変形理論を用いたモジュライの構成を 2.2 で説明する。

2.3 では、有理楕円曲面とその非特異ファイバーの対の場合の混合 Hodge 構造の周期領域を記述する。2 節の主要結果は、周期写像の無限小 Torelli 定理 (2.4.1) と局所同型性 (2.44.2), (2.4.3) である。

3 節では、まず 3.1 で楕円ファイバー構造 (π) に対する Gauss-Manin 接続を導入する。3.2 では、Seiberg-Witten 微分の概念を定式化し、その (底空間 $\mathbf{P}^1$ の) 無限遠での展開を考察する。3.3 で 2 節のモジュライ空間を利用して可積分系を構成する。

この講演の内容は、土屋昭博氏 (名大多元)、加藤晃史氏 (東大数理)、粟田英資氏 (名大多元)、斉藤義久氏 (東大数理) との共同研究の一部である。これら諸氏に感謝する。

また、研究会の世話人の松下大介氏、秦泉寺雅夫氏、そして、サポートしてくださった中村郁氏に感謝する。

2　有理楕円曲面のモジュライと周期

有理楕円曲面 (rational elliptic surface, RES とも略記する) とは楕円曲面 X であって双有理的 (birational) である曲面のことである。X は楕円ファイバーの構造 $\pi : X \to B$ をもつが、底空間について $B \simeq \mathbf{P}^1$ となる。楕円ファイバーの構造は反標準写像 (anti-canonical map) として与えられることに注意しておく。ここで断っておくが、この論説を通じて複素数体上の代数多様体または複素多様体のみを考察する。

以下では断面 (section) を許す有理楕円曲面のみを考察する。断面 $\sigma : B \to X, \pi\cdot\sigma = id_B$ を一つ固定して $S := \sigma(B)$ とおく。断面付きの有理楕円曲面 $(X, S), (X', S')$ が同型であるとは、同型 $f : X \to X'$ で $f(S) = S'$ を満たすものが存在することを言う。

楕円ファイバー (elliptic fibration) π の臨界値の集合を $\Sigma(\subset B)$ とする。以下では、π の非特異ファイバー $Y = \pi^{-1}(b)$ $(b \in B \setminus \Sigma)$ を一つ固定して、三つ組 (X, S, Y) を考察する。

Remark 2.0.1 E_8 単純楕円型特異点の *Milnor* ファイバー X° に対して、三つ組 (X, S, Y) が存在して $X^\circ = X \setminus (Y \cup S)$ となる。

2.1　標付き (marked) 有理楕円曲面

断面付きの有理楕円曲面と非特異ファイバーからなる三つ組 (X, S, Y) のモジュライを考えるために、その非自明な自己同型を消す標 (marking) を導入する。そのためにコホモロジーを調べよう。

Proposition 2.1.1 有理楕円曲面 X の *Betti* 数、*Hodge* 数はつぎで与えられる。

$$b = 0 = b_4 = 1, b_1 = b_3 = 0, b_2 = h^{1,1} = 10, h^{2,0} = h^{0,2} = 0$$

対 (X, Y) の局所コホモロジーの完全列は

$$0 \to H^0(Y, \mathbf{Z})(-1) \to H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X - Y, \mathbf{Z}) \to H^1(Y, \mathbf{Z})(-1) \to 0$$

となり *((-1) は Tate twist)*、$X - Y$ のコホモロジーは $H^1(Y, \mathbf{Z})(-1)$ の $H^2(X, \mathbf{Z})/\mathbf{Z} \cdot [Y]$ による拡大となる。*($[Y]$ は Y のコホモロジー類を表す。)*

$H^1(Y, \mathbf{Z})$ および $H^2(X, \mathbf{Z})$ はそれぞれ (カップ積による) 交代形式、対称形式をもつことに注意する。

Remark 2.1.2 上の完全列は、混合 *Hodge* 構造としての完全列でもある。$H^2(X - Y, \mathbf{Z})$ の重み *(weight)2* の部分 W_2 が $H^2(X, \mathbf{Z})/\mathbf{Z} \cdot [Y]$ であり、重み *3* の部分 $Gr_3^W = W_3/W_2$ が $H^1(Y, \mathbf{Z})(-1)$ である。

同様に、$H^2(X - (Y \cup S), \mathbf{Z})$ の混合 *Hodge* 構造については、重み *(weight)2* の部分 W_2 が $H^2(X, \mathbf{Z})/(\mathbf{Z} \cdot [Y] \oplus \mathbf{Z} \cdot [S])$ であり、重み *3* の部分 $Gr_3^W = W_3/W_2$ が $H^1(Y, \mathbf{Z})(-1)$ である。

標 (marking) の定義のために、参照するための固定した object を用意する必要があるが、ここではその定義をするのを節約して参照のための三つ組 (X_0, S_0, Y_0) を一つ (以後ずっと) 固定する。

Definition 2.1.3 (標 (marking)) *1)* 三つ組 (X,S,Y) のホモロジー標 *(homological marking)* とは、次の図式を可換にする $\mathbf{Z}$ 加群の同型 $\varphi_2,\varphi,\varphi_3$ であって、

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to H^0(Y,\mathbf{Z})(-1)\to & H^2(X,\mathbf{Z}) & \to H^2(X-Y,\mathbf{Z})\to & H^1(Y,\mathbf{Z})(-1) & \to 0 \\ \downarrow\simeq & \varphi_2\downarrow\simeq & \varphi\downarrow\simeq & \varphi_3\downarrow\simeq & \\ 0\to H^0(Y,\mathbf{Z})(-1)\to & H^2(X,\mathbf{Z}) & \to H^2(X-Y,\mathbf{Z})\to & H^1(Y,\mathbf{Z})(-1) & \to 0 \end{array}$$

さらに φ_2,φ_3 はそれぞれ対称形式、交代形式を保存し、$\varphi_2([Y])=[Y_0]$ であることを満たしているもののことである。

2) 三つ組 (X,S,Y) の解析的標 *(analytic marking)* とは、$(0\neq)\omega\in H^0(Y,\Omega^1_Y)$ のことである。

3) (X,S,Y,φ,ω) を標つき有理楕円曲面という。

Remark 2.1.4 *Poincaré* 留数による同型 $(\mathbf{C}\simeq)H^0(Y,\Omega^1_Y)\simeq H^0(X,\Omega^2_X(\log Y)$ が存在する。この同型の下 ω に対応する X 上の有理型 *2* 形式を Ω と記す。

2.2 標付き (marked) 有理楕円曲面のモジュライ

標付き有理楕円曲面 (X,S,Y,φ,ω) の解析的なモジュライを構成する。代数的には、Miranda [Mi] により半安定な特異ファイバーをもつ $\mathbf{P}^1$ 上の楕円曲面のモジュライ空間が幾何学的不変式論によって構成されている。しかし我々は全ての特異ファイバーを許したモジュライ空間がほしいので、複素構造の変形理論が教える倉西空間をもとにモジュライ空間を構成する。

そこで、対 (X,Y) および対 $(X,Y+S)$ を考える。Y は X の滑らかな因子であり、$Y+S$ は X の正規交叉因子であるので、[Kw] によりこれらの倉西空間 $Def_{(X,Y)},Def_{(X,Y+S)}$ を考えることができる。

Proposition 2.2.1 (X,S,Y,φ,ω) を標付き有理楕円曲面とするとき、次が成り立つ。

$$h^i(X,T_X(-\log Y))=\begin{cases}0 & i=0,2\\ 10 & i=1\end{cases}\qquad h^i(X,T_X(-\log Y+S))=\begin{cases}0 & i=0,2\\ 10 & i=1\end{cases}$$

ここで、$T_X(-\log Y)),T_X(-\log Y+S))$ は正規交叉因子に沿って零となる正則ベクトル場の層を表す。

この命題により倉西空間 $Def_{(X,Y)},Def_{(X,Y+S)}$ は滑らか (smooth) であり、その自己同型群は離散的にしか存在しないことが分かる。対 (X,Y) (resp. $(X,Y+S)$) にホモロジー標 (homological marking) φ を合わせて考えると、自己同型は恒等写像のみになり、三つ組 (X,Y,φ) (resp. $(X,Y+S,\varphi)$) の (局所) 変形空間は (その上の族を込めて) 張り合わせることができる。

Definition 2.2.2 そうして得られる *(* 普遍 *)* 族を

$$f_0:(\mathcal{X},\mathcal{Y})\to\mathcal{N}_0\qquad (resp.\ f:(\mathcal{X},\mathcal{Y}+\mathcal{S})\to\mathcal{N}$$

とする。このやり方は標付き *K3* 曲面の *(* 解析的 *)* モジュライ空間の構成法と同じである。*cf. [BPV].*

層 $f_{0*}(\Omega^1_{\mathcal{Y}/\mathcal{N}_0})$ *(resp.* $f_*(\Omega^1_{\mathcal{Y}/\mathcal{N}})$*)* に対応する $\mathcal{N}_0$ *(resp.* $\mathcal{N}$*)* 上の直線束から零切断を除いた空間を $\widetilde{\mathcal{N}_0}$ *(resp.* $\widetilde{\mathcal{N}}$*)* と記す。

Remark 2.2.3 *1)* 対 (X,Y) は斎藤等 *[ST]* により楕円型の *Okamoto-Painlevé* 対と呼ばれている。

2) 一般の $(X,Y,\varphi)\in N_0$ に対して、X は $\mathbf{P}^2$ の *9* 点ブローアップとして得られ、$h^0(-K_X)=1$ が成り立つ。

3) $(X,Y+S,\varphi)$ から S を忘れることにより得られる写像 $u:\mathcal{N}\to\mathcal{N}_0$ は局所同型である。

Definition 2.2.4 $\mathcal{M}_0:=\{(X,Y,\varphi)\in\mathcal{N}_0\mid h^0(-K_X)=2\}$ *(resp.* $\mathcal{M}:=\{(X,Y+S,\varphi)\in\mathcal{N}\mid h^0(-K_X)=2\}$*)* なる集合を考える。連接層のコホモロジー *(*の次元*)* の上半連続性により、これは $\mathcal{N}_0$ *(resp.* $\mathcal{N}$*)* の解析的閉集合である。また、

$$\widetilde{\mathcal{M}_0}:=\widetilde{\mathcal{N}_0}\times_{\mathcal{N}_0}\mathcal{M}_0\qquad(resp.\widetilde{\mathcal{M}}:=\widetilde{\mathcal{N}}\times_{\mathcal{N}}\mathcal{M})$$

とおく。

Remark 2.2.5 正則射の変形理論 *[Ho]* を楕円ファイバー構造 π に適用して $\mathcal{M}$ を調べることもできる。このアプローチは *3.3* で役立つ。

Definition 2.2.6 標付き楕円曲線 (Y,φ_1) の同型類全体のなすモジュライ空間を $\mathcal{E}\ell\ell$ と記す。*(*ここで、φ_1 はホモロジー標を表す。*)* さらに、解析的標 *(analytic marking)* $\omega(\neq 0)\in H^0(Y,\Omega^1_Y)$ も合わせた *3* つ組 (Y,ψ) の *(*同型類*)* 全体のなすモジュライ空間を $\widetilde{\mathcal{E}\ell\ell}$ と記す。

標付き有理楕円曲面 (X,S,Y,φ) *(resp.* (X,S,Y,φ,ω)*)* に対して $(Y,\varphi_3(1))$ *(resp.* $(Y,\varphi_3(1),\omega)$*)* を対応させる自然な写像を $\mathcal{M}\to\mathcal{E}\ell\ell$ *(resp.* $\widetilde{\mathcal{M}}\to\widetilde{\mathcal{E}\ell\ell}$*)* 考えることができる。

2.3 標付き (marked) 有理楕円曲面の周期

有理楕円曲面とその断面および非特異ファイバーからなる三つ組 (X_0,S_0,Y_0) を (以後) 固定する。混合 Hodge 構造の周期領域 (period domain) をコホモロジー $H^2(X_0-Y_0,\mathbf{Z})$ (resp. $H^2(X_0-(Y_0\cup S_0),\mathbf{Z})$) に対して考える。その混合 Hodge 構造については 2.1.2 で見た通りである。重みによるフィルターを W として、$Gr_2^W=W_2$ (resp. Gr_3^W) 上には、カップ積による対称形式 ψ_2 (resp. 交代形式 ψ_3) が存在する。これらが混合 Hodge 構造の偏極構造 (graded polarization) $\psi=(\psi_2,\psi_3)$ を与えている。

周期領域については [SSU] およびその中の文献を参照されたい。

Definition 2.3.1 *Hodge* 数 $(h^{1,1},h^{2,1},h^{1,2})=(9,1,1)$ *(resp.* $(h^{1,1},h^{2,1},h^{1,2})=(8,1,1)$*)* をもつ $(H^2(X_0-Y_0,\mathbf{Z}),W,\psi)$ *(resp.* $(H^2(X_0-(Y_0\cup S_0),\mathbf{Z}),W,\psi)$*)* 上の混合 *Hodge* 構造全体のなす周期領域を $\mathcal{P}_0=\mathcal{P}_{(X_0,Y_0)}$ *(resp.* $\mathcal{P}=\mathcal{P}_{(X_0,Y_0+S_0)}$*)* と記す。

定義により、$\mathcal{P}_0$ (resp. $\mathcal{P}$) は $H^2(X_0-Y_0,\mathbf{C})$ (resp. $H^2(X_0-(Y_0\cup S_0),\mathbf{C})$) 上の 2 ステップのフィルター $F=\{F^p\}$

$$F^0=F^1\supset F^2\supset F^3=0\qquad\dim_{\mathbf{C}}F^1/F^2=h^{1,1}$$

のなす空間である。

実は、これらの混合 Hodge 構造の重み 2 の部分 Gr_2^W の偏極 Hodge 構造は Tate の Hodge 構造 $\mathbf{Z}(-1)$ の直和に同型なので一意的である。一方、重み 3 の部分 Gr_3^W の偏極

Hodge 構造は、重み 1 の $Gr_3^W(1)$ を対応させることにより楕円曲線のモジュライに対応する。

対応 $F \mapsto F$ on $Gr_3^W(1)$ は、上半平面への全射 $\varpi_0 : \mathcal{P}_0 \to \mathbf{H}$ (resp. $\varpi : \mathcal{P} \to \mathbf{H}$) を定める。このファイバーは、$Gr_3^W$ の W_2 による混合 Hodge 構造としての拡大の同値類の空間 $\mathrm{Ext}^1_{MHS}(Gr_3^W, W_2)$ に他ならない。Carlson の定理 [Ca] により次を得る。

Proposition 2.3.2

$$\mathrm{Ext}^1_{MHS}(Gr_3^W, W_2) \simeq (W_2)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} J(Gr_3^W(1), F)$$

ここで $J(Gr_3^W(1), F)$ は重み *1* の偏極 *Hodge* 構造 $(Gr_3^W(1), F, \psi_3(1))$ に対応する *Jacobi* 多様体 $Gr_3^W(1)_{\mathbf{C}}/(F(1)^1 + Gr_3^W(1)_{\mathbf{Z}})$ を表す。

勝手な標付き有理楕円曲面 $(X, S, Y, \varphi, \omega)$ に対する混合 Hodge 構造 $H^2(X-Y, \mathbf{Z})$ および $H^2(X-(Y\cup S), \mathbf{Z})$ の場合には、$J(Gr_3^W(1), F) \simeq Y$ となる。

楕円曲線の周期に関するよく知られた事実を復習しておく。

Lemma 2.3.3 標付き楕円曲線のモジュライ空間から重み *1* の周期領域への周期写像は同型である *:*

$$\mathcal{E}\ell\ell \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}, \qquad \widetilde{\mathcal{E}\ell\ell} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{H}} := \{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{C}^2 \mid \mathrm{Im}(\tau_2/\tau_1) > 0\ \}$$

Definition 2.3.4 ホモロジー標付き有理楕円曲面 (X, Y, φ) *(resp.* (X, S, Y, φ)*)* に混合 *Hodge* 構造 $H^2(X-Y, \mathbf{Z})$ *(resp.* $H^2(X-(Y\cup S), \mathbf{Z})$*)* を対応させる周期写像を

$$p_0 : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{P}_0 \qquad (resp.\ p : \mathcal{N} \to \mathcal{P})$$

と記す。

2.4 標付き (marked) 有理楕円曲面に対する Torelli 型定理

Theorem 2.4.1 (無限小 Torelli 定理) ホモロジー標付き有理楕円曲面 (X, Y, φ) に対して

$$(dp_0)_{(X,Y,\varphi)} : T_{(X,Y,\varphi)}\mathcal{N}_0 \to T_{p_0(X,Y,\varphi)}\mathcal{P}_0$$

は同型である。

Corollary 2.4.2 p_0 は局所同型である。

参照 (reference) のための空間において、自然な準同型 $H^2(X, \mathbf{Z})/\mathbf{Z}\cdot[Y] \to H^2(X, \mathbf{Z})/(\mathbf{Z}\cdot[Y] \oplus \mathbf{Z}\cdot[S])$ の分裂 (splitting) を (ずっと) 固定する。すると、$\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P}_0$ なる自然な写像が誘導される。そして、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{P}_0 \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{p} & \mathcal{P} \end{array}$$

が Cartesian であることが示せる。すると、次の定理が証明できる。

Theorem 2.4.3 周期写像 $p : \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ は局所同型である。従って、$\mathcal{M}$ は滑らかである。

周期領域の普遍被覆を導入し、また $\mathbf{P}^2$ の 9 点ブローアップとしての有理楕円曲面の表示を経由することで大域的 Torelli 定理が証明される。これについては準備中の論文 [AKSST] を参照されたい。

3　E型のSeiberg-Witten可積分系

4D $N=2$ SYM理論では、楕円曲線(あるいはスペクトル曲線)上にSeiberg-Witten微分と呼ばれる有理1次微分形式 $\lambda=\lambda_{SW}$ を考えることができた。しかもそれは楕円曲線(あるいはスペクトル曲線)の族におけるパラメータ u に(有理型に)依存している。その特徴の一つは、(少なくとも楕円曲線の場合)正則1次微分形式を ω として

$$\frac{d}{du}\lambda=\omega$$

という関係である。cf. Introduction. これを3.1で楕円ファイバー構造のGauss-Manin接続を用いて定式化する。

$$\frac{d}{du}\lambda=0$$

がGauss-Manin接続の平坦な断面の方程式であるから、Seiberg-Witten微分は非斉次線型常微分方程式の解である。その無限遠での様子を3.2で調べる。

Seiberg-Witten可積分系は、代数的(に完全積分可能)なHamilton系である。cf. [Do]. 特に、Hamilton構造を定めるLiouville1形式は、Seiberg-Witten微分をそれが含んでいるパラメータもこめた空間上の1形式として得られる、という普遍的な性質を備えている。3.3で E 型の場合に、3.2の考察を用いてそのようなHamilton系を構成する。

3.1　楕円ファイバー構造のGauss-Manin接続

有理楕円曲面 $\pi: X\to B$ を一つ固定する。π の臨界値の集合を $\Sigma(\subset B)$ と記す。π の非特異ファイバー $X_b:=\pi^{-1}(b)$ $(b\in B\setminus\Sigma)$ のコホモロジー $H^1(X_b,\mathbf{C})$ の全体はde Rhamコホモロジー

$$\mathcal{H}^1_{DR}(X/B)=R^1\pi_*(\Omega^{\cdot}_{X/B})$$

をなす。

SYM理論の質量(mass)も扱うために、ファイバー上にSeiberg-Witten微分の極に当たる点を導入しなければならない。[NTY]では有理楕円曲面の断面とファイバーとの交わりの位置に極があると議論している。

Definition 3.1.1 断面をもつ*(*有理*)*楕円曲面 $\pi: X\to B$ に対して、その断面全体の集合を $MW(X/B)$ と記す。$MW(X/B)$ には、正定値内積が入り、*Mordell-Weil*格子と呼ばれる。*cf. [S]*

以下簡単のため、Mordell-Weil格子 $MW(X/B)$ が E_8 ルート格子である場合を考える。240個のルートに対応する断面の合併を E と記そう。$E_b:=X_b\cap E$ とおく。必要ならば Σ を拡大して、$B\setminus\Sigma$ 上は E が正規交叉因子であると仮定する。

Definition 3.1.2 $\mathcal{H}^1_{DR}(X-E/B)=R^1\pi_*(\Omega^{\cdot}_{X/B}(\log E))|_{B-\Sigma}$ とおく。

これは、混合*Hodge*構造の変形*(variation)*の下部構造である。従って、これは*Gauss-Manin*接続

$$\nabla:\mathcal{H}^1_{DR}(X-E/B)\longrightarrow\Omega^1_{B-\Sigma}\otimes\mathcal{H}^1_{DR}(X-E/B)$$

を備え、その平坦な断面の全体はランク*241*の局所系 $R^1\pi_*\mathbf{C}_{X-E}$ である。

$b_0 \in B$ に対して $Y = X_{b_0}$ が選んだ非特異ファイバーであるとする。$B - \Sigma$ 上の完全列

$$0 \to \pi^* \Omega^1_B(b_0) \to \Omega^1_X(\log E + Y) \to \Omega^1_{X/B}(\log E) \to 0$$

から直ちに次の同型を得る。

Lemma 3.1.3 $\Omega^2_X(\log E + Y) \simeq \pi^* \Omega^1_B(b_0) \otimes \Omega^1_{X/B}(\log E)$.
従って、$\pi_* \Omega^2_X(\log E + Y) \simeq \Omega^1_B(b_0) \otimes \pi_* \Omega^1_{X/B}(\log E)$.

$\Omega \in H^0(X, \Omega^2_X(\log Y))$ を解析的標 $\omega \in H^0(Y, \Omega^1_Y)$ に対応する有理 2形式とする (2.1.4)。

Definition 3.1.4 $\lambda \in \mathcal{H}^1_{DR}(X - E/B)$ に対して、

$$\nabla(\lambda) = \Omega$$

を *Seiberg-Witten(*微分*)* 方程式と呼ぶ。但し、∇ は *Gauss-Manin* 接続であり、Ω を次の準同型の合成と *3.1.3* により $\Omega^1_{B-\Sigma} \otimes \mathcal{H}^1_{DR}(X - E/B)$ の断面と思う。

$$H^0(X, \Omega^2_X(\log Y)) \hookrightarrow H^0(X, \Omega^2_X(\log E + Y)) \xrightarrow{\sim} H^0(B, \pi_* \Omega^2_X(\log E + Y))$$

Δ を E_8 のルートの集合として、$\alpha \in \Delta$ に対応する断面を $\mathbf{P}_\alpha \in MW(X/B)$ とする。$E = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ である。

Lemma 3.1.5 λ を *Seiberg-Witten* の方程式の解とする。このとき、留数 $m_\alpha := \mathrm{Res}_{P_\alpha} \lambda$ は平坦である

Seiberg-Witten(微分) 方程式の解 λ には、平坦な断面を加える自由度がある。物理の要請により、解 λ に留数の線型性 (linearity of residues) の条件を付けよう。

Definition 3.1.6 *Seiberg-Witten* 方程式の解 λ が線型性をもつとは、$m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(Q(E_8), \mathbf{C})$ が存在して、$m_\alpha = m(\alpha)$ が $\forall \alpha \in \Delta$ に対して成立することを言う。ただし、$Q(E_8)$ は E_8 ルート格子である。

3.2 Seiberg-Witten 微分方程式の解の展開

解析的標付き有理楕円曲面 (X, S, Y, ω) に対して、Seiberg-Witten 方程式 3.1.4 が立てられる。$Y = \pi^{-1}(b_0), b_0 \in B$ とするとき、その解の点 b_0 での展開の様子を調べよう。

b_0 での非斉次座標を v として、$u = 1/v$ とおく。これにより $B \simeq \mathbf{P}^1$ と同一視する。$\pi : X \to B$ が Weierstrass モデル $\pi' : X' \to B$ と対応するとしよう。(π の特異ファイバーがすべて既約なら $\pi = \pi'$ である。)

ここでも簡単のため、Mordell-Weil 格子 $MW(X/B)$ が E_8 ルート格子である場合を考える。240 個のルートに対応する断面の合併を E と記し、$E_b := X_b \cap E$ とおく。必要ならば Σ を拡大して、$B \setminus \Sigma$ 上は E が正規交叉因子であると仮定する。

このとき次が成り立つ。

Lemma 3.2.1 解析的標が $\omega = \frac{dx}{y}$ と表示されたとするとき、X 上の *2*形式 *(2.1.4)* は

$$\Omega = \frac{dv}{v} \wedge \frac{dx}{y}$$

と表示される。

Remark 3.2.2 有理楕円曲面の *Weierstrass* モデルでは $\mathbf{P}^1$ の v と u の上の *2* つの座標系 $(x,y),(X,Y)$ の間で

$$u=\frac{1}{v},\ x=v^2X,\ y=v^3Y$$

という貼り合わせをする。すると、$Omega=-du\wedge\frac{dX}{Y}$ である。

E_8 のルート $\alpha\in\Delta$ に対応する断面を $\mathbf{P}_\alpha\in MW(X/B)$ として、$\mathbf{P}_\alpha$ の座標を (x_α,y_α) としよう。

$\mathcal{H}^1_{DR}(X/B)$ の Gauss-Manin 接続 ∇ に関する平坦な接続の方程式

$$\nabla\lambda=0$$

を座標を使って表示しよう。$\mathcal{H}^1_{DR}(X/B)$ の断面は $v=0$ のまわりで

$$\lambda=c_1(v)\frac{dx}{y}+c_2(v)\frac{xdx}{y}$$

と表したとする。平坦な接続の方程式は

$$\frac{d}{dv}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

なる連立 1 階線型常微分方程式で表される。これを c_1 に関する単独 2 階の方程式に直すと、

$$\ddot{c_1}-(p+s+\frac{\dot{q}}{q})\dot{c_1}+(ps-qr+\frac{p\dot{q}-\dot{p}q}{q})c_1=0$$

である。この左辺の 2 階作用素を L とおく。$(\doteqdot\frac{d}{dv})$

Remark 3.2.3 X の *Weierstrass* 標準形における x の係数の v 変数の多項式を使って p,q,r,s を表示すると、*3* 次多項式の判別式が分母に現れることが分かる。b_0 は非特異ファイバーに対応するので、その小さな近傍では微分方程式の行列要素は正則である。

$\mathcal{H}^1_{DR}(X-E/B)$ の断面 λ にかんする Seiberg-Witten 方程式 $\nabla\lambda=\Omega$ の座標表示を調べよう。今度は極を許しているので、

$$\lambda=c_1(v)\frac{dx}{y}+c_2(v)\frac{xdx}{y}+c_3(v)\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{m_\alpha y_\alpha}{x-x_\alpha}\frac{dx}{y}$$

と表される。

Seiberg-Witten 方程式から c_3 は定数であること、また対応する連立 1 階線型常微分方程式は、

$$\frac{d}{dv}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}$$

という形であること、が分かる。ただし、p,q,r,s,l は b_0 の小さな近傍で正則であるが、k は

$$k=k(v)=\frac{1}{v}+(\text{holomophic at } v=0)$$

という特異性をもつ。

これを c_1 に関する単独 2 階の方程式に直すと

$$Lc_1+(s+\frac{\dot{q}}{q})k-ql-\dot{k})=0$$

となる。

Proposition 3.2.4 解析的標付き有理楕円曲面 (X, S, Y, ω) に対する *Seiberg-Witten* 方程式を b_0 の近傍で表示したものは、

$$Lc_1 = c_0$$

という形をもつ。ここで、L は $\mathcal{H}^1_{DR}(X/B)$ の *Gauss-Manin* 接続に対応する *2* 階線型常微分作用素であり、c_0 は

$$c_0(v) = -\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v}c_0^{(-1)}(v) + c_0^{(0)}(v)$$

という特異性をもつ。$c_0^{(-1)}(v), c_0^{(0)}(v)$ は $v = 0$ の近傍で正則である。

また、$c_0^{(0)}(v)$ は m_α に関して加法的である。

Lemma 3.2.5 L, c_0 は *3.2.4* と同じとする。方程式 $Lc_1 = 0$ の点 b_0 における基本解を φ_1, φ_2 とする。すると方程式 $Lc_1 = c_0$ は

$$\varphi_0 := \varphi_2(v)\int_{v_0}^{v}\varphi_1(t)\frac{c_0(t)}{W(t)}dt - \varphi_1(v)\int_{v_0}^{v}\varphi_2(t)\frac{c_0(t)}{W(t)}dt$$

を特解とする。*(*$v_0 \neq 0, |v_0| << 1$ で、$W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$ は φ_1, φ_2 の *Wronskian*。*)* これは $v = 0$ で v^{-1} のオーダーの発散をして、かつ $\log$ の多価性をもつ。

また、方程式 $Lc_1 = c_0$ の一般解は $\varphi_0 + d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 (d_1, d_2 \in \mathbf{C})$ である。

Remark 3.2.6 任意の $m_\alpha(\alpha \in \Delta)$ に対して、*Seiberg-Witten* 方程式 $Lc_1 = c_0$ は解をもつ。

$\log$ の多価性を考慮すると、上の *Lemma* の記号をつかうと、解の全体は

$$\varphi_0 + \mathbf{C}\varphi_1 + \mathbf{C}\varphi_2/(\mathbf{Z}\varphi_1 + \mathbf{Z}\varphi_2)$$

となる。

3.3 Seiberg-Witten 可積分系

線型性をもつ Seiberg-Witten 微分、すなわち Seiberg-Witten 微分方程式 3.1.4 の無限遠点での局所解の全体の空間を考察する。これが、可積分系の構造をもち、E 型の Seiberg-Witten 可積分系と呼ぶべきものであると考える。

標付き有理楕円曲面のモジュライ空間から標付き楕円曲線のそれへの自然な全射 $\mathcal{M} \to \mathcal{E}\ell\ell$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{E}\ell\ell}$) を考えた (2.2.6)。その相対余接束を $T^*(\mathcal{M}/\mathcal{E}\ell\ell)$ と記す。

Proposition 3.3.1 $(X, Y, S, \varphi) \in \mathcal{M}$ に対して、次の自然な同型がある。

$$T^*_{(X,Y,S,\varphi)}(\mathcal{M}/\mathcal{E}\ell\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(Q(E_8), \mathbf{C})$$

Definition 3.3.2 $\mathcal{M}'$ を標付き有理楕円曲面であって、その *Mordell-Weil* 格子が $Q(E_8)$ に同型なもの全体のなす $\mathcal{M}$ の *(*開*)* 部分集合とする *:*

$$\mathcal{M}' := \{(X, Y, S, \varphi) \in \mathcal{M} \mid MW(X/B) \simeq Q(E_8)\ \}$$

また、$T^*(\mathcal{M}'/\mathcal{E}\ell\ell) := T^*(\mathcal{M}/\mathcal{E}\ell\ell) \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}'$ とおく。

各 $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(Q(E_8), \mathbf{C})$ に対して $m_\alpha = m(\alpha)(\alpha \in \Delta)$ が定まり、これに対して Seiberg-Witten 微分方程式の点 b_0 の近傍での局所解が 2 次元ほど存在する (3.2.6)。それに応じて、Seiberg-Witten 微分 λ_m が (点 b_0 の近傍で) 定まる。

Definition 3.3.3 相対余接束を $T^*(\mathcal{M}'/\mathcal{E}\ell\ell)$ の点 (X,Y,S,φ,m) と断面に沿った留数が m であるような *(点 b_0 の近傍での)Seiberg-Witten*微分 λ との組 $(X,Y,S,\varphi,m,\lambda)$ の全体のなす集合を SW' と記す。

自然な全射 $\mu : SW' \to T^*(\mathcal{M}'/\mathcal{E}\ell\ell)$ を考えることができる。

Lemma 3.3.4 $\mu : SW' \to T^*(\mathcal{M}'/\mathcal{E}\ell\ell)$ はファイバーが $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \simeq (\mathbf{C}^*)^2$ に同型なファイバー空間である。特に、SW' は複素多様体である。

Theorem 3.3.5 $\widetilde{SW}' := SW \times_{\mathcal{M}} \widetilde{\mathcal{M}}$ とおく。自然な射影 $\widetilde{SW}' \to \mathcal{E}\ell\ell$ は、ファイバーが *symplectic*多様体であるファイバー空間である。

さらに、$\widetilde{SW}'$ 上の相対 symplectic2 形式は、$\widetilde{SW}'$ 上の (Seiberg-Witten 微分により決まる)tautological な 1 形式の外微分に一致すると予想される。

References

[AKSST] H. Awata, K Kato, Y. Saito, Y. Shimizu and A. Tsuchiya, Rational elliptic surfaces and the period domain, in preparation.

[BPV] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag (1980).

[Ca] James A. Carlson, Extensions of mixed Hodge structures, in *Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn—Germantown, Md. (1980) 107–127.

[Do] R.Donagi, Seiberg-Witten integrable systems, *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997) 3–43.

[Ho] E. Horikawa, On deformations of holomorphic maps I, II, III, I. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 372–396; II. J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 647–667; III. Math. Ann. 222 (1976), no. 3., 275–282.

[Ks] A. Kas, Weierstrass normal form and invariants of elliptic surfaces,Trans. Amer. math. Soc. **225** (1977) 259–266.

[Kw] A. Kawamata, On deformations of compactifiable complex manifolds, Math. Ann. **235** (1978) 247–265.

[LW] W. Lerche, N. P. Warner, Exceptional SW geometry from ALE fibrations, Phys. Lett. B 423 (1998), no. 1-2, 79–86.

[Lo] E. Looijenga, On the semi-universal deformation of a simple-elliptic hypersurface singularity. II. The discriminant. Topology 17 (1978), no. 1, 23–40.

[MN] J. A. Minahan, D. Nemeschansky, An $N = 2$ superconformal fixed point with E_6 global symmetry, Nuclear Phys. B 482 (1996), no. 1-2, 142–152 ; Superconformal fixed points with E_n global symmetry, Nuclear Phys. B 489 (1997), no. 1-2, 24–46.

[Mi] R.Miranda, The moduli of Weierstrass fibrations over $\mathbf{P}^1$, Math. Ann. 255 (1981), no. 3, 379–394.

[NTY] Masayuki Noguchi, Seiji Terashima and Sung-Kil Yang, $N = 2$ superconformal field theory with ADE global symmetry on a D3-brane probe, Nuclear Phys. B 556 (1999), no. 1-2, 115–151.

[Pv] V.P. Palamodov, Deformations of complex spaces, Russian Math.Surveys **31** (1976) 129–197.

[Sa] Hidetaka Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Dept. of Math. Kyoto Univ. Preprint series, 1999, No. 10.

[SSU] M-H. Saito, Y. Shimizu and S. Usui, Variation of mixed Hodge structure and the Torelli problem, Adv. Stud. in Pure Math. **10** (1987) 649–693 .

[ST] Masa-Hiko Saito and Taro Takebe, Classification of Okamoto–Painlevé pairs, preprint, 2000, Feb., math/AG 0006028.

[S] T.Shioda, *The theory of Mordell-Weil lattices and their applications*, Graduate School of Mathematical Science, Tokyo Univ. Lecture Note No.1 (1993).

[SW] N.Seiberg, E.Witten, Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory, Nuclear Phys. B 426 (1994), no. 1, 19–52; Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD, Nuclear Phys. B 431 (1994), no. 3, 484–550.